

# Encadrements d'estimations de propriétés effectives de matériaux hétérogènes obtenues par calculs FFT

R. Masson<sup>a</sup>, E. Castelier<sup>a</sup>

a. CEA, DEN, DEC/SESC, Centre de Cadarache, 13 108 St Paul lez Durance, France

## Résumé :

*Nous cherchons ici à déterminer par des calculs en champs complets les propriétés effectives de matériaux hétérogènes (élasticité linéaire). Soit pour des raisons physiques (interfaces mal définies, propriétés locales inconnues, ...) ou pour des raisons liées à des aspects numériques (discrétisation), le comportement élastique en certains points d'un élément de volume représentatif de cette micro-structure peut être indéterminé. Dans ces situations spécifiques, nous cherchons à encadrer au mieux les propriétés effectives en utilisant les informations disponibles. Pour cela, nous généralisons les bornes établies dans [5] en considérant un champ de polarisation plus générale, i.e. non uniforme dans ces zones mal définies. Cette formulation générale est ensuite appliquée à un matériau hétérogène isotrope (comportement local et macroscopique), situation pour laquelle des expressions simplifiées sont établies. Enfin, cette méthode est appliquée à des calculs en champs complets par transformée de Fourier Rapide ([4]) afin de calculer des premiers encadrements pour une réalisation donnée de micro-structure.*

## Abstract :

*This work is devoted to full field calculations of the effective properties of heterogeneous materials (linear elasticity). Either for physical reasons (ill-defined interfaces, unknown local properties, ...) or for reasons related to numerical aspects (discretization), the elastic behavior at certain points of a representative volume element of the microstructure can be ill-defined. In these specific situations, we aim at bounding the effective properties using the available informations. To achieve this goal, we generalize the bounds established in [5] considering a more general polarisation field, i.e. non-uniform in these ill-defined areas. This general formulation is then applied to an isotropic heterogeneous material (local and macroscopic behavior), a situation for which simplified expressions are established. Finally, this bounding method is applied to full-field calculations by the Fast Fourier Transform method ([4]) to yield first results for a given realization of microstructure.*

**Mots clefs :** Homogénéisation ; Transformée de Fourier Rapide ; Bornes

## 1 Introduction

Nous considérons dans ce travail un matériau hétérogène quelconque (composite, polycristal, ...) mais constitué de phases présentant un comportement linéaire élastique. Nous cherchons à estimer par des calculs en champs complets (voir par exemple [4]) le comportement mécanique effectif de ce matériau hétérogène. Par la suite, nous considérons un volume élémentaire représentatif (VER)  $V$  de ce matériau présentant  $n_p$  constituants. Une déformation macroscopique  $\bar{\varepsilon}$  est appliquée de façon homogène sur la surface extérieure  $\partial V$  de cet élément de volume.  $\mathbf{L}^r$  sont des tenseurs du quatrième ordre (symétries majeures et mineures) désignant les modules élastiques de chaque phase ( $r$ ) de ce VER ( $1 \leq r \leq n_p$ ) de sorte que l'énergie de déformation élastique en chaque point  $\mathbf{x} \in V$  est définie par :

$$w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{L}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

(“ : ” représente le produit doublement contracté) avec  $\boldsymbol{\varepsilon}$  le tenseur du deuxième ordre symétrique désignant la déformation infinitésimale. La réponse de cet élément de volume pour un chargement  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$

donné est déterminée par le minimum de son énergie de déformation élastique effective [3] sur l'ensemble  $K$  des champs de déformation cinématiquement admissibles avec la déformation macroscopique imposée  $\bar{\varepsilon}$  :

$$\bar{W}(\bar{\varepsilon}) = \min_{\varepsilon \in K} \frac{1}{|V|} \int_V w(\mathbf{x}, \varepsilon) dx. \quad (2)$$

Le problème peut être résolu par éléments finis (voir, par exemple, [1]) ou par transformées de Fourier rapide (FFT, voir [4]). Cependant, la nécessaire discrétisation géométrique de cet élément de volume crée souvent des voxels ou des éléments dont le comportement mécanique est mal défini. Par ailleurs, certaines zones de cet élément de volume peuvent aussi posséder des propriétés élastiques, certes bornées, mais mal définies pour des raisons physiques (incertitude sur la localisation de l'interface entre les phases, dégradation chimique des propriétés, ...). Pour toutes ces raisons, numériques ou physiques, le VER considéré ici est constitué :

- de zones incluses strictement dans une des  $n_p$  phases du milieu considéré (le volume  $V_1$ ),
- de zones d'inter-phases (volume  $V_2$ ) qui contiennent différentes phases (par exemple, la matrice et les inclusions dans un composite deux-phases).

## 2 Nouvelles bornes

### 2.1 Formulation générale

La théorie proposée dans [5] est étendue au cas plus général d'une polarisation non uniforme  $\mathbf{p}^0(\mathbf{x})$  dans  $V_2$ . A travers ce volume  $V_2$ , l'énergie de déformation est approchée par :

$$w(\mathbf{x}, \varepsilon) \approx \frac{1}{2} \varepsilon(\mathbf{x}) : \mathbf{L}^0 : \varepsilon(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^0(\mathbf{x}) : \varepsilon(\mathbf{x}) \quad (3)$$

avec  $\mathbf{L}^0$  tenseur du quatrième ordre présentant les symétries mineures et majeures. L'utilisation du module  $\mathbf{L}^0$  et de la polarisation  $\mathbf{p}^0$  est cohérent avec les travaux de Hashin et Shtrikman [2] mais cette approximation est limitée au volume  $V_2$  rassemblant les zones d'inter-phases. Le scalaire  $\xi$  mesurant sur  $V_2$  l'écart entre cette approximation (3) et le comportement réel est défini, d'après (1), par :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{|V|} \int_{V_2} \left( w(\mathbf{x}, \varepsilon(\mathbf{x})) - \frac{1}{2} \varepsilon(\mathbf{x}) : \mathbf{L}^0 : \varepsilon(\mathbf{x}) - \mathbf{p}^0(\mathbf{x}) : \varepsilon(\mathbf{x}) \right) dx, \\ &= \frac{1}{|V|} \int_{V_2} \left( \frac{1}{2} \varepsilon(\mathbf{x}) : (\mathbf{L}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}^0) : \varepsilon(\mathbf{x}) - \mathbf{p}^0(\mathbf{x}) : \varepsilon(\mathbf{x}) \right) dx. \end{aligned}$$

Si, au sens des formes quadratiques associées,  $\mathbf{L}^0 > \mathbf{L}^+ = \max_r(\mathbf{L}^r)$  alors l'inégalité suivante est vraie :

$$\xi \leq \frac{1}{|V|} \int_{V_2} \max_{\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \varepsilon(\mathbf{x}) : (\mathbf{L}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}^0) : \varepsilon(\mathbf{x}) - \mathbf{p}^0(\mathbf{x}) : \varepsilon(\mathbf{x}) \right) dx, \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{|V|} \int_{V_2} \mathbf{p}^0(\mathbf{x}) : (\mathbf{L}^0 - \mathbf{L}(\mathbf{x}))^{-1} : \mathbf{p}^0(\mathbf{x}) dx. \quad (5)$$

de sorte que l'énergie de déformation effective admet une borne supérieure :

$$\begin{aligned} \bar{W}(\bar{\varepsilon}) &\leq \min_{\varepsilon \in K} \left( \frac{1}{|V|} \int_{V_1} w(\mathbf{x}, \varepsilon) dx + \frac{1}{|V|} \int_{V_2} \left( \frac{1}{2} \varepsilon(\mathbf{x}) : \mathbf{L}^0 : \varepsilon(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^0(\mathbf{x}) : \varepsilon(\mathbf{x}) \right) dx \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{|V|} \int_{V_2} \mathbf{p}^0(\mathbf{x}) : (\mathbf{L}^0 - \mathbf{L}(\mathbf{x}))^{-1} : \mathbf{p}^0(\mathbf{x}) dx, \end{aligned} \quad (6)$$

quel que soit le choix du champ de polarisation  $\mathbf{p}^0(\mathbf{x})$  (une polarisation nulle donne une borne supérieure déjà calculée avec le Théorème de renforcement [3]). On note par ailleurs que, pour un champ de polarisation donné dans  $V_2$ , le premier membre à droite de cette équation (6) :

$$\min_{\varepsilon \in K} \left( \frac{1}{|V|} \int_{V_1} w(\mathbf{x}, \varepsilon) dx + \frac{1}{|V|} \int_{V_2} \left( \frac{1}{2} \varepsilon(\mathbf{x}) : \mathbf{L}^0 : \varepsilon(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^0(\mathbf{x}) : \varepsilon(\mathbf{x}) \right) dx \right)$$

correspond à l'énergie effective de déformation d'un problème auxiliaire de type thermoélastique. Contrairement au problème initial, ce problème auxiliaire est bien posé et peut-être résolu par éléments finis ou FFT.

Parmi les champs de polarisation possible, nous cherchons celui qui conduira à la majoration la plus resserrée. Pour cela, nous dérivons le terme de droite de l'inégalité (6) par rapport au champ de polarisation  $\mathbf{p}^0$ . La condition de stationnarité associée est obtenue en dérivant la relation (6) par rapport à cette polarisation et en utilisant le fait que le champ de déformation rend stationnaire l'énergie de déformation. Cela conduit à :

$$\int_{V_2} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^0(\mathbf{x}) : (\mathbf{L}^0 - \mathbf{L}(\mathbf{x}))^{-1} \right) : \delta \mathbf{p}^0(\mathbf{x}) dx = 0. \quad (7)$$

Si la polarisation est choisie uniforme dans  $V_2$  (choix retenu dans [5]), cette condition de stationnarité (7) se réduit à :

$$\int_{V_2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) dx + \left( \int_{V_2} (\mathbf{L}^0 - \mathbf{L}(\mathbf{x}))^{-1} dx \right) : \mathbf{p}^0 = 0. \quad (8)$$

Ici, nous cherchons une polarisation plus générale en subdivisant le volume  $V_2$  en  $n$  sous-volumes notés  $V_2^i, i = 1..n$  et tels que  $V_2 = \cup_{i=1..n} V_2^i$ . En désignant par  $\mathbf{p}^{(0)i}$  la polarisation choisie uniforme dans chacun de ces sous-volumes  $V_2^i$ , la condition de stationnarité (7) s'écrit :

$$i = 1..n : \int_{V_2^i} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) dx + \left( \int_{V_2^i} (\mathbf{L}^0 - \mathbf{L}(\mathbf{x}))^{-1} dx \right) : \mathbf{p}^{(0)i} = 0, \quad (9)$$

Quelle est la signification physique de cette condition d'optimalité? En combinant cette dernière expression (9) avec la moyenne sur le volume  $V_2^i$  de la relation contrainte-déformation dérivée de (3) :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^0(\mathbf{x}), \quad (10)$$

on obtient :

$$\int_{V_2^i} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) dx = \hat{\mathbf{L}}^{(0)i} : \int_{V_2^i} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) dx$$

avec :

$$\hat{\mathbf{L}}^{(0)i} = \mathbf{L}^0 + \left( \frac{1}{|V_2^i|} \int_{V_2^i} (\mathbf{L}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}^0)^{-1} dx \right)^{-1} \quad (11)$$

expression dans laquelle les  $n$  tenseurs du quatrième ordre  $\hat{\mathbf{L}}^{(0)i}$  sont appelé les modules effectifs dans le volume  $V_2^i$ . Nous constatons donc que le choix de la polarisation optimale dans chaque sous-volume  $V_2^i$  conduit à imposer une relation particulière entre les moyennes de contrainte et des déformation, relations gouvernées par ces modules effectifs dépendants des fractions volumiques et des propriétés élastiques des phases en présence dans chacun de ces sous-volumes  $V_2^i$  ainsi que du module  $\mathbf{L}^0$ .

Finalement, on note que le choix  $\mathbf{L}^0 < \mathbf{L}^- = \min_r \mathbf{L}^r$  change le max par un min ainsi que le signe de l'inégalité dans (4), ce qui conduit à une borne inférieure pour l'énergie de déformation effective.

## 2.2 Expression du champ de polarisation optimale

Il nous reste à présent à établir l'expression du champ de polarisation optimale pour un module élastique  $\mathbf{L}^0$  donné dans le volume  $V_2$ . Pour cela, nous notons  $\boldsymbol{\varepsilon}^{H(0)}$  le champ de déformation dans  $V$  lorsque ce volume est soumis au champs de déformation macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  (polarisation nulle dans  $V_2$ ). Les  $n$  polarisations  $\mathbf{p}^{(0)j}$  appliquées uniformément dans les sous-volumes  $V_2^j$  peuvent être décomposées sur la base orthonormée  $\mathbf{e}_I (1 \leq I \leq N)$  selon  $\mathbf{p}^{(0)j} = \sum_{I=1}^N (\mathbf{p}^{(0)j} : \mathbf{e}_I) \mathbf{e}_I$ , le nombre  $N$  étant au maximum égal à 6 (tenseur du deuxième ordre symétrique). Si  $\boldsymbol{\varepsilon}_I^{r(0)j}$  représente le champ de déformation (résiduelle) apparaissant dans le volume  $V$  ( $\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}^0$  dans  $V_2$ ) quand le VER est libre

de se déformer à son bord  $\partial V$  et est soumis à la polarisation  $C^0 \mathbf{e}_I$  dans le sous-volume  $V_2^j$  ( $C^0$  désigne une constante scalaire arbitraire), le théorème de superposition (linéarité du comportement) assure que :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{H(0)} + \frac{1}{C^0} \sum_{k=1}^n \sum_{I=1}^N (\mathbf{p}^{(0)k} : \mathbf{e}_I) \boldsymbol{\varepsilon}_I^{r(0)k}. \quad (12)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$  désignant le champ de déformation dans  $V$  apparaissant lorsque la déformation macroscopique moyenne  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  est appliquée à sa frontière ainsi que les  $n$  polarisations  $\mathbf{p}^{(0)k}$  appliquées uniformément dans chaque sous-volume  $V_2^k$  ( $1 \leq k \leq n$ ). Les  $(n+1)$  champs élémentaires  $\boldsymbol{\varepsilon}^{H(0)}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_I^{r(0)k}$  peuvent être calculés par exemple par FFT. Si on reporte l'expression (12) dans l'équation (9), on obtient le système linéaire d'équations suivant :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left( \int_{V_2^j} \left( (\mathbf{L}^0 - \mathbf{L}(\mathbf{x}))^{-1} \delta_{jk} + \frac{1}{C^0} \sum_{I=1}^{I=N} \boldsymbol{\varepsilon}_I^{r(0)k}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{e}_I \right) d\mathbf{x} \right) : \mathbf{p}^{(0)k} = - \int_{V_2^j} \boldsymbol{\varepsilon}^{H(0)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (13)$$

( $\delta$  désignant le symbole de Kronecker et  $\otimes$  le produit tensoriel). Si on remplace  $\mathbf{L}^0$  par  $\mathbf{L}^{0-} \leq \mathbf{L}^-$  ou  $\mathbf{L}^{0+} \geq \mathbf{L}^+$  dans cette équation (13), nous obtenons la polarisation associée à une borne inférieure ou supérieure, respectivement. Le calcul de ces deux polarisations optimales nécessite un calcul à champ complet des champs de déformation : ( $\boldsymbol{\varepsilon}^{H(-)}, j = 1..n : \boldsymbol{\varepsilon}_1^{r(-)j}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_N^{r(-)j}$ ) et ( $\boldsymbol{\varepsilon}^{H(+)}, j = 1..n : \boldsymbol{\varepsilon}_1^{r(+j)}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_N^{r(+j)}$ ), respectivement.

### 2.3 Module élastique homogène optimal dans $V_2$

Comme remarqué dans [5], la borne supérieure la plus resserrée sera probablement obtenue pour les modules effectifs  $\hat{\mathbf{L}}^{(0)i}$  les plus souples dans chacun des sous volumes  $V_2^i$  (mais cet argument qualitatif n'est pas une preuve!). Ainsi, le choix d'un module  $\mathbf{L}^0$  quasiment-rigide dans  $V_2$  ( $\mathbf{L}^0 \gg \mathbf{L}^+$ ) conduit à un module effectif égal à la borne de Voigt dans chacun des sous-volumes. C'est pourquoi, ce choix sera adopté comme le choix optimal dans les simulations qui suivent. Réciproquement, le choix d'un module quasiment nul dans  $V_2$  ( $\mathbf{L}^0 \ll \mathbf{L}^-$ ) devrait donner la borne inférieure associée à un module effectif dans  $V_2$  égal à la borne de Reuss dans ces sous-volumes. Comme dans [5], nous proposons d'appeler ces bornes "de type Hashin-Shtrikman" pour des raisons évidentes. Par rapport aux bornes associées au théorème de renforcement ([3]), ces bornes s'appuient sur une information physique supplémentaire dans chacun des sous-volumes  $V_2^k$ , les fractions volumiques de chacune des phases en présence dans ces sous-volumes. On s'attend donc à ce que ces bornes soient plus resserrées que celles obtenues par le théorème de renforcement (voir section suivante).

## 3 Illustration dans le cas d'un composite biphasé

Dans le cas isotrope (constituants présentant un comportement isotrope, distribution isotrope des phases, ...), la détermination du comportement élastique effectif se résume à la détermination de deux scalaire, les modules de cisaillement et de compressibilité (notés respectivement  $\bar{\mu}$  et  $\bar{k}$ ).

### 3.1 Bornes simplifiées dans ce cas particulier

Pour déterminer le module de cisaillement effectif, on considère un chargement macroscopique en cisaillement, par exemple :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\gamma} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2)}_{\mathbf{e}}$$

$\bar{\gamma}$  désignant le paramètre scalaire de chargement. Il est alors commode de choisir une polarisation dans chacun des sous-volumes  $V_2^i$  de la forme :

$$\mathbf{p}^{(0)i} = \tau^{(0)i} \mathbf{e}.$$

Cette expression est certes moins générale que celle proposée précédemment (un seul degré de liberté au lieu de  $N = 6$ ), ce qui risque de dégrader la qualité de la borne obtenue. En revanche, cette forme particulière présente l'avantage de réduire notablement la condition d'optimalité (13) pour donner le système linéaire d'inconnus  $\tau^{(0)i}$ ,  $i = 1..n$  suivant :

$$A_{jk} \tau^{(0)j} = - \int_{V_2^j} \boldsymbol{\varepsilon}^{H(0)}(\mathbf{x}) : \mathbf{e} \, dx.$$

$A$  désignant une matrice carrée de dimension  $n$  :

$$j = 1..n, k = 1..n : \quad A_{jk} = \int_{V_2^j} \left( \frac{1}{2(\mu^0 - \mu(\mathbf{x}))} \delta_{jk} + \frac{1}{C^0} \boldsymbol{\varepsilon}^{r(0)k}(\mathbf{x}) : \mathbf{e} \right) dx$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^{r(0)k}$  représentant dans ce cas particulier le champ de déformation (résiduelle) apparaissant dans le volume  $V$  ( $\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}^0$  dans  $V_2$ ) quand le VER est libre de se déformer à son bord  $\partial V$  et est soumis à la polarisation  $C^0 \mathbf{e}$  dans le sous-volume  $V_2^k$ .

En considérant un chargement purement dilatant de la forme  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{d} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)}_i$

et en cherchant une polarisation de la forme  $\mathbf{p}^{(0)i} = p^{(0)i} \mathbf{i}$ , nous obtenons une condition d'optimalité similaire, *i.e.* :

$$B_{jk} p^{(0)j} = - \int_{V_2^j} \boldsymbol{\varepsilon}^{H(0)}(\mathbf{x}) : \mathbf{i} \, dx.$$

$B$  désignant une matrice carrée de dimension  $n$  :

$$j = 1..n, k = 1..n : \quad B_{jk} = \int_{V_2^j} \left( \frac{1}{3(k^0 - k(\mathbf{x}))} \delta_{jk} + \frac{1}{C^0} \boldsymbol{\varepsilon}^{r(0)k}(\mathbf{x}) : \mathbf{i} \right) dx.$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^{r(0)k}$  représentant dans ce cas particulier le champ de déformation (résiduelle) apparaissant dans le volume  $V$  ( $\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}^0$  dans  $V_2$ ) quand le VER est libre de se déformer à son bord  $\partial V$  et est soumis à la polarisation  $C^0 \mathbf{i}$  dans le sous-volume  $V_2^k$ .

### 3.2 Premiers résultats

Nous considérons ici une micro-structure 2D de type matrice-inclusions (fraction volumique d'inclusions égale à 10%), les inclusions étant sphériques avec un diamètre uniforme. Le comportement des deux phases est élastique isotrope, le module de cisaillement étant uniforme tandis que le contraste sur le module de compressibilité s'élève à 5 (inclusions plus rigides). Un élément de volume de cette micro-structure a été généré par le modèle d'addition séquentielle aléatoire (RSA pour Random Sequential Addition). Dans ce cas particulier, on peut aisément calculer une estimation avec une discrétisation très fine du VER (grille de  $512^2$  voxels). Pour cette grille, la fraction volumique d'éléments de volume mal définie est très faible (0,22%) et l'estimation du module de compressibilité effectif obtenue en affectant aux voxels mal définies la propriété de la phase située en leur centre s'élève à 1,11 fois celui de la matrice ( $\frac{\bar{k}}{k_{mat}} = 1,11$ ,  $k_{mat}$  désignant le module de compressibilité de la matrice). Pour une discrétisation plus grossière ( $32^2$  voxels), la fraction volumique de voxels mal définis est plus importante ( $\approx 7\%$ ). Les bornes proposées permettent d'encadrer le comportement effectif dans ce cas. Ainsi, une polarisation nulle (théorème de renforcement) conduit à l'encadrement suivant  $1,07 \leq \frac{\bar{k}}{k_{mat}} \leq 1,16$  tandis qu'une polarisation uniforme (forme simplifiée définie en section 3) resserre comme attendu l'encadrement : la borne supérieure ainsi obtenue se resserre à  $\frac{\bar{k}}{k_{mat}} \leq 1,13$ .

## 4 Conclusions

Dans ce travail, nous avons généralisé les bornes établies dans [5]. Il est ainsi possible de borner le comportement effectif d'un élément de volume présentant des zones mal définies en affectant à ces

zones un comportement homogène (infiniment raide ou infiniment souple) et une polarisation. Le resserrement de ces bornes dépend du champ de polarisation retenu : uniformément nul (théorème de renforcement, [3]), constant [5] ou, comme nous le proposons ici, variable dans les zones mal définies. Des premiers résultats ont été obtenus (polarisation nulle ou constante) dans le cas de calculs de micro-structures par FFT montrant bien, même avec un choix de polarisation simplifié (cas isotrope) et uniforme, que l'introduction d'une polarisation conduit à resserrer les bornes classiquement obtenues avec le théorème de renforcement. En perspectives de ce travail nous proposons d'étendre ces premiers résultats en étudiant si l'introduction d'une polarisation non uniforme permet de resserrer encore cet encadrement sans trop alourdir le calcul. L'effet de la polarisation simplifiée retenue dans le cas isotrope considéré devra être aussi étudié.

## Références

- [1] F. Barbe, L. Decker, D. Jeulin, and G. Cailletaud. Intergranular and intragranular behavior of polycrystalline aggregates. part 1 : F.E. model. *Int. J. Plast.*, 17 :513–536, 2001.
- [2] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 11 :127–140, 1963.
- [3] R. Hill. Elastic properties of reinforced solids : Some theoretical principles. *J. Mech. Phys. Solids*, 11 :357–372, 1963.
- [4] H. Moulinec and P. Suquet. A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructures. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 157 :69–94, 1998.
- [5] C. Toulemonde, R. Masson, and J. El Gharib. Modeling the effective elastic behavior of composites : a mixed finite element and homogenisation approach. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 336 :275–282, 2008.