

Homogénéisation des matériaux hétérogènes élasto-viscoplastiques basée sur la technique des “champs translatés” : extension “affine” au cas non linéaire pour des composites biphasés

S. Berbenni^{a,c}, L. Capolungo^{b,c}

a. Laboratoire LEM3, UMR CNRS 7239 et Laboratoire d'Excellence “DAMAS”,
Université de Lorraine, Metz, France

b. George W. Woodruff School of Mechanical Engineering, Georgia Institute of
Technology, Atlanta, USA

c. Unité Mixte Internationale GT-CNRS, UMI CNRS 2958, Metz, France

Résumé :

Dans cette contribution, l'extension de la méthode à variables internes basée sur les “champs translatés” au comportement local élasto-viscoplastique de type Maxwellien avec une viscoplasticité non linéaire est présentée. Pour cela, une linéarisation du comportement viscoplastique des phases de type “affine” est adaptée à la méthode à “champs translatés”. Cette extension donne une nouvelle loi d'interaction entre les contraintes moyennes par phase et les contraintes macroscopiques de type élasto-viscoplastique avec viscoplasticité non linéaire et qui contient les histoires des contraintes par phase. Dans le but de situer la précision de l'approximation à champs moyens présentée, les réponses mécaniques prédites pour des composites biphasés élasto-viscoplastiques sont reportées en utilisant une hypothèse de type Mori-Tanaka et sont comparées aux résultats extraits d'autres approches analytiques et numériques dans la littérature (comme les techniques variationnelles ou FFT).

Abstract :

In this contribution, the extension of the internal variable approach based on the “translated fields” to the local elastic-viscoplastic behavior of Maxwellian type with non linear viscoplasticity is presented. In this objective, an “affine” type linearization of the viscoplastic behavior is adapted to the “translated fields” method. This extension leads to a new interaction law between the mean phase stress and the overall stress of elastic-viscoplastic type with non linear viscoplasticity which contains stress histories per phase. In order to validate the accuracy of the presented mean field approach, the predicted mechanical responses for two-phase elastic-viscoplastic composites are reported in the case of the Mori-Tanaka approximation and are compared to results extracted from other existing analytical and numerical approaches from the literature (like variational or FFT techniques).

Mots clefs : homogénéisation non linéaire ; élasto-viscoplasticité ; composites biphasés

1 Introduction

Dans le cadre de la modélisation micromécanique du comportement des matériaux hétérogènes élasto-viscoplastiques, les approches à “variables internes” basées sur la notion de “champs

translatés” ont été essentiellement développées et appliquées dans le passé dans le cadre des schémas autocohérents (à “1 site”) pour des composites linéaires ou des polycristaux métalliques [1, 2, 3] et elles furent comparées avec succès avec les approches “héréditaires” comme celle initiée par [4]. Plus récemment, de nouvelles techniques à “variables internes” sont apparues [7, 8] permettant ainsi un regain d’intérêt pour le développement de ce type d’approches. En viscoélasticité linéaire, des comparaisons de l’approche à “champs translatés” avec l’approche “additive” [5] ont été très récemment reportées dans [6]. Ces comparaisons ont permis de montrer que ces deux dernières approches donnent en viscoélasticité linéaire des résultats identiques et exacts pour des composites comportant des phases viscoélastiques isotropes incompressibles avec des inclusions sphériques, et des résultats approchés pour des composites viscoélastiques isotropes compressibles très proches des résultats donnés par les calculs “FFT” [7] et les calculs exacts [8]. Dans cette contribution, l’approche à “champs translatés” initialement développée dans le cadre du problème de l’inclusion d’Eshelby et de l’approximation de Mori-Tanaka en viscoélasticité linéaire dans [6] est ici étendue au cas où la viscoplasticité est considérée comme non linéaire localement. Celle-ci peut alors être décrite au premier ordre par un milieu thermoélastique linéaire à chaque étape de déformation dans le cadre de l’approximation “affine” [9].

2 Equations du problème élastoviscoplastique non linéaire

L’équation de comportement local incrémental de type Maxwellien entre le tenseur des déformations totales $\tilde{\varepsilon}$ (cinématique des petites déformations) et le tenseur des contraintes de Cauchy $\tilde{\sigma}$ s’écrit :

$$\dot{\tilde{\varepsilon}} = \underset{\approx}{s} : \dot{\tilde{\sigma}} + \dot{\tilde{\varepsilon}}^{vp} \quad (1)$$

où $\underset{\approx}{s}$ traduit les complaisances élastiques linéaires, $\dot{\tilde{\varepsilon}}^{vp}$ représente les taux de déformations viscoplastiques tels que $\dot{\tilde{\varepsilon}}^{vp} = \underset{\approx}{g}(\tilde{\sigma})$ est non linéaire en contraintes. Les contraintes locales contiennent toute l’histoire du matériau. Pour un état de déformation de référence donné, noté (*ref*), $\dot{\tilde{\varepsilon}}^{vp}$ peut être linéarisé par un développement de Taylor au premier ordre (linéarisation “affine” [9]), au voisinage de $\dot{\tilde{\varepsilon}}^{vp(ref)}$ comme suit :

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}^{vp} = \underset{\approx}{m}^t : \tilde{\sigma} + \underset{\approx}{\eta}, \quad (2)$$

où $\underset{\approx}{m}^t$ est le tenseur des complaisances tangentes pour un état de contraintes de référence $\tilde{\sigma}^{(ref)}$ défini par :

$$\underset{\approx}{m}^t = \left. \frac{\partial \underset{\approx}{g}}{\partial \tilde{\sigma}} \right|_{\tilde{\sigma}^{(ref)}}, \quad (3)$$

et $\underset{\approx}{\eta}$ est donné par :

$$\underset{\approx}{\eta} = \underset{\approx}{g}(\tilde{\sigma}^{(ref)}) - \underset{\approx}{m}^t : \tilde{\sigma}^{(ref)}. \quad (4)$$

Les modules tangents sont donnés par $\underset{\approx}{b}^t = \left(\underset{\approx}{m}^t\right)^{-1}$. Ainsi, l’Eq. (1) s’écrit finalement :

$$\dot{\tilde{\varepsilon}} = \underset{\approx}{s} : \dot{\tilde{\sigma}} + \underset{\approx}{m}^t : \tilde{\sigma} + \underset{\approx}{\eta}. \quad (5)$$

L’équation intégrale est obtenue après l’introduction d’un milieu homogène de référence noté (0), caractérisé par $\underset{\approx}{c}^0$, $\underset{\approx}{b}^{t0}$, et $\underset{\approx}{\eta}^0$ et l’introduction des opérateurs de projection $\underset{\approx}{\Pi}^{c^0} =$

$\Gamma_{\approx}^{c^0} : c_{\approx}^0$ et $\Pi_{\approx}^{b^{t0}} = \Gamma_{\approx}^{b^{t0}} : b_{\approx}^{t0}$ où $\Gamma_{\approx}^{c^0}$ et $\Gamma_{\approx}^{b^{t0}}$ sont les opérateurs de Green modifiés associés à c_{\approx}^0 et b_{\approx}^{t0} :

$$\dot{\tilde{\epsilon}} = \dot{\tilde{E}} + \Pi_{\approx}^{c^0} \star \delta_{\approx}^s : \dot{\tilde{\sigma}} + \Pi_{\approx}^{b^{t0}} \star \left(\delta_{\approx}^m : \dot{\tilde{\sigma}} + \delta_{\approx}^{\eta} \right) + \left(\Pi_{\approx}^{c^0} - \Pi_{\approx}^{b^{t0}} \right) \star \left(m_{\approx}^t : \dot{\tilde{\sigma}} + \dot{\tilde{\eta}} \right). \quad (6)$$

où $\dot{\tilde{E}}$ sont les taux de déformation macroscopiques et \star désigne un produit de convolution spatiale. Cette équation intégrale est définie à un état de déformation de référence pour lequel les déformations viscoplastiques sont linéarisées par la formulation “affine”.

3 Décomposition en “champs translétés”

La décomposition en “champs translétés” est appliquée aux taux de déformations totales comme une extension du schéma linéaire déjà décrit dans [1] :

$$\dot{\tilde{\epsilon}} = \dot{\tilde{e}} + \dot{\tilde{\tilde{\epsilon}}} = \dot{\tilde{e}}^e + \dot{\tilde{e}}^{vp} + \dot{\tilde{\tilde{\epsilon}}}^e + \dot{\tilde{\tilde{\epsilon}}}^{vp} \quad (7)$$

où $\dot{\tilde{e}}^e$, $\dot{\tilde{e}}^{vp}$ sont des champs fictifs purement élastiques linéaires (resp. purement viscoplastiques non linéaires) compatibles et sujets au même état de contraintes que le matériau hétérogène élasto-viscoplastique. De plus, $\dot{\tilde{\tilde{\epsilon}}}^e$ et $\dot{\tilde{\tilde{\epsilon}}}^{vp}$ sont considérées comme des taux de déformation “résiduels” élastiques linéaires, respectivement viscoplastiques non linéaires. Les champs compatibles $\dot{\tilde{e}}^e$ et $\dot{\tilde{e}}^{vp}$ s’écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{e}}^e &= A_{\approx}^{c^0} : \dot{\tilde{X}}, \\ \dot{\tilde{e}}^{vp} &= A_{\approx}^{b^{t0}} : \dot{\tilde{Y}} + a_{\approx}. \end{aligned} \quad (8)$$

Dans l’Eq. (8), $\dot{\tilde{X}}$ et $\dot{\tilde{Y}}$ sont des tenseurs uniformes macroscopiques inconnus qui sont déterminés par une technique d’homogénéisation appropriée (schémas Mori-Tanaka, auto-cohérent, etc). $A_{\approx}^{c^0}$ est le tenseur de localisation des taux de déformations pour le problème fictif purement élastique linéaire, tandis que $A_{\approx}^{b^{t0}}$ ainsi que a_{\approx} sont les tenseurs de localisation pour le problème fictif viscoplastique pur et non linéaire, qui se réduit en utilisant la formulation “affine”, à un problème thermoélastique linéaire à chaque étape de déformation. De manière duale, la décomposition en “champs translétés” peut être écrite en termes de décomposition en taux de contraintes et en contraintes, respectivement pour le comportement local élastique linéaire et pour le comportement local viscoplastique non linéaire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\sigma}} &= c_{\approx} : \dot{\tilde{\epsilon}}^e = c_{\approx} : \dot{\tilde{e}}^e + \dot{\tilde{\tilde{\sigma}}}^e, \\ \dot{\tilde{\sigma}} &= b_{\approx}^t : \dot{\tilde{\epsilon}}^{vp} + \dot{\tilde{\tau}} = b_{\approx}^t : \dot{\tilde{e}}^{vp} + \dot{\tilde{\tau}} + \dot{\tilde{\tilde{\sigma}}}^{\prime\prime}, \end{aligned} \quad (9)$$

où $\dot{\tilde{\tilde{\sigma}}}^e$ et $\dot{\tilde{\tilde{\sigma}}}^{\prime\prime}$ sont respectivement les taux de contraintes et contraintes résiduels associés à $\dot{\tilde{\tilde{\epsilon}}}^e$ et $\dot{\tilde{\tilde{\epsilon}}}^{vp}$ avec $\dot{\tilde{\tilde{\sigma}}}^e \neq \dot{\tilde{\tilde{\sigma}}}^{\prime\prime}$. De plus, $\dot{\tilde{\tau}} = -b_{\approx}^t : \dot{\tilde{\eta}}$. Après élimination de $\dot{\tilde{\tau}}$ dans la seconde équation de l’Eq. (9), les expressions de $\dot{\tilde{\tilde{\sigma}}}^e$ et $\dot{\tilde{\tilde{\sigma}}}^{\prime\prime}$ sont :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\tilde{\sigma}}}^e &= c_{\approx} : \left(\dot{\tilde{\epsilon}}^e - \dot{\tilde{e}}^e \right), \\ \dot{\tilde{\tilde{\sigma}}}^{\prime\prime} &= b_{\approx}^t : \left(\dot{\tilde{\epsilon}}^{vp} - \dot{\tilde{e}}^{vp} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Ainsi, il vient de l'Eq. (10) et de l'Eq. (9) :

$$\tilde{\dot{\epsilon}} \underset{\approx}{=} \underset{\approx}{s} : \tilde{\dot{\sigma}}' + \underset{\approx}{m}^t : \tilde{\dot{\sigma}}'' \quad (11)$$

Dans la suite, le “champ translaté” $\tilde{\dot{\epsilon}}$ est alors déterminé en simplifiant l'équation intégrale (Eq. (6)) par homogénéisation à champs moyens. Les relations de moyenne permettent de déterminer \tilde{X} et \tilde{Y} . Puis, la relation de localisation en taux de déformation et la loi d'interaction du problème élastoviscoplastique réel sont obtenues en utilisant successivement les Eqs. (7) et (8).

4 Nouvelle loi d'interaction et application à des composites biphasés

En considérant des propriétés uniformes par morceaux dans le cadre du problème de l'inclusion d'Eshelby, la loi d'interaction pour une inclusion élasto-viscoplastique non linéaire V_I noyée dans une matrice élasto-viscoplastique non linéaire V_0 est obtenue :

$$\begin{aligned} \tilde{\dot{\sigma}}^I - \tilde{\dot{\sigma}}^0 &= \left(\underset{\approx}{c}^0 - \left(\underset{\approx}{\Gamma}_l^{c^0} \right)^{-1} \right) : \left(\underset{\approx}{\dot{\epsilon}}^I - \underset{\approx}{\dot{\epsilon}}^0 \right) - \underset{\approx}{c}^0 : \left(\underset{\approx}{\dot{\epsilon}}^{vpI} - \underset{\approx}{\dot{\epsilon}}^{vp0} \right) \\ &+ \left(\underset{\approx}{\Gamma}_l^{c^0} \right)^{-1} : \underset{\approx}{a}^I - \left(\underset{\approx}{\Gamma}_l^{c^0} \right)^{-1} : \underset{\approx}{\Gamma}_l^{b^{t0}} : \underset{\approx}{\delta} b^{tI} : \left(\underset{\approx}{\dot{\epsilon}}^{vpI} - \underset{\approx}{a}^I \right) \\ &+ \left(\underset{\approx}{\Gamma}_l^{c^0} \right)^{-1} : \left(\underset{\approx}{\Gamma}_l^{c^0} : \underset{\approx}{c}^0 - \underset{\approx}{\Gamma}_l^{b^{t0}} : \underset{\approx}{b}^{t0} \right) : \left(\underset{\approx}{\dot{\epsilon}}^{vpI} - \underset{\approx}{A}^{b^{t0I}} : \underset{\approx}{\dot{\epsilon}}^{vp0} - \underset{\approx}{a}^I \right) \end{aligned} \quad (12)$$

où $\underset{\approx}{\Gamma}_l^{c^0} : \underset{\approx}{c}^0$ et $\underset{\approx}{\Gamma}_l^{b^{t0}} : \underset{\approx}{b}^{t0}$ sont respectivement les tenseurs d'Eshelby élastique linéaire et viscoplastique tangent associés à $\underset{\approx}{c}^0$ et $\underset{\approx}{b}^{t0}$ et qui contiennent uniquement les parties locales des tenseurs de Green modifiés. A partir de cette loi d'interaction (ou des relations de localisation en taux de déformation, non reportées ici par souci de synthèse), l'approximation de type Mori-Tanaka est facilement développée pour des composites biphasés. Il est à noter que les états asymptotiques aux temps courts et aux temps longs obtenus à partir de cette loi d'interaction permettent de retrouver les lois d'interaction en élasticité linéaire pure (premier terme dans le second membre de l'Eq. (12)) et en viscoplasticité non linéaire pure comme dans celle reportée dans [9, 5].

Une illustration concerne le cas de composites biphasés ($r = 1, 2$) constitués d'une phase matrice (phase molle, $r = 1$) et de fibres longues (phase dure, $r = 2$) alignées dans la même direction (3) et de fraction volumique de fibres $f^{(2)} = 0.21$. Cet exemple fut traité par [7, 10] à l'aide d'une méthode variationnelle et à l'aide de la technique “FFT” (transformée de Fourier rapide). Ces résultats servent ici de cas tests pour la méthode à “champs translatsés” développée en non linéaire. Les deux phases ont un comportement élasto-viscoplastique non linéaire donné par

$$\underset{\approx}{\dot{\epsilon}} = \underset{\approx}{s} : \underset{\approx}{\dot{\sigma}} + \frac{3}{2} \underset{\approx}{\dot{\epsilon}}_0 \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0^{(r)}} \right)^{1/m} \frac{\underset{\approx}{s}}{\sigma_{eq}} \quad (13)$$

où m décrit la sensibilité à la vitesse des phases, $\underset{\approx}{s}$ est la partie déviatorique du tenseur des contraintes, σ_{eq} est la contrainte équivalente de Von Mises, $\underset{\approx}{\dot{\epsilon}}_0$ est un taux de déformation de référence et $\sigma_0^{(r)}$ est la contrainte d'écoulement pour chaque phase (r). Les propriétés

élastiques sont homogènes et isotropes avec $E = 100GPa$ et $\nu = 0.45$. Les autres constantes sont $\sigma_0^{(1)} = 1GPa$, $\sigma_0^{(2)} = 5GPa$, $\varepsilon_0 = 1s^{-1}$. Ici, les fibres cylindriques sont considérées comme des inclusions ellipsoïdales allongées axisymétriques dans la direction principale des fibres selon la direction (3) avec un rapport d'aspect $c/a = 1/100$ (a étant la longueur de demi-axe selon l'axe (3)). Le chargement imposé au volume élémentaire représentatif est un cisaillement pur dans le plan perpendiculaire aux fibres telle que le tenseur des taux de déformation macroscopiques appliqués est $\dot{\tilde{E}} = \dot{E}_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\dot{E}_{11} = 0.5s^{-1}$.

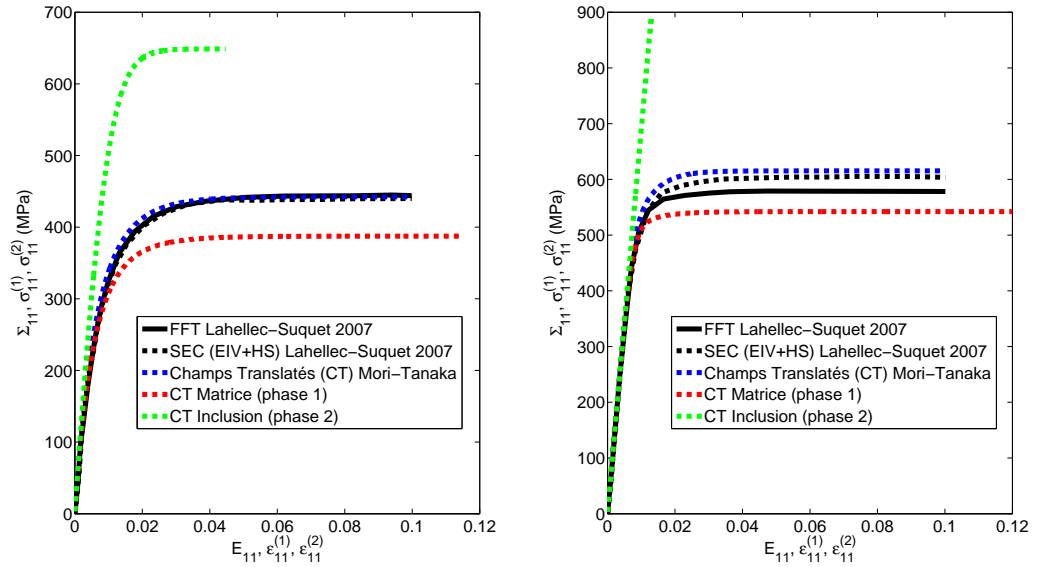


FIGURE 1 – Réponses en contraintes macroscopiques Σ_{11} en fonction de E_{11} données par la présente approche en “Champ Translatés” (notée CT). Comparaisons avec les résultats donnés par la méthode variationnelle incrémentale à variables internes “SEC (EIV+HS)” et avec ceux (exactes) de la méthode “FFT” pour deux sensibilités à la vitesse de déformation : $m = 1$ (cas linéaire, à gauche) ; $m = 0.2$ (cas non linéaire, à droite). Les réponses en contraintes-déformations moyennes par phase sont également reportées.

Les résultats reportés en FIG. 1 montrent à la fois l'évolution des contraintes macroscopiques Σ_{11} en fonction des déformations macroscopiques appliquées E_{11} , et l'évolution des contraintes moyennes par phase $\sigma_{11}^{(r=1,2)}$ en fonction des déformations moyenne par phase $\varepsilon_{11}^{(r=1,2)}$ pour la méthode en “champ translatés” en non linéaire assortie de l'approximation de Mori-Tanaka. Pour deux sensibilités à la vitesse différentes ($m = 1$ et $m = 0.2$), les réponses macroscopiques sont comparées à deux approches reportées dans [7, 10] : d'une part la méthode variationnelle incrémentale à variables internes “SEC (EIV+HS)” qui est basée sur une méthode “sécante modifiée” (SEC) assortie de la borne inférieure de Hashin-Shtrickman (HS), et, d'autre part la méthode numérique “FFT” à base de transformées de Fourier rapide en élastoviscoplasticité non linéaire. Pour $m = 1$ (cas linéaire), la méthode à “champs translatés” donne des résultats en bon accord avec ceux des méthodes variationnelle et “FFT” de [7], et ceci même pour le régime transitoire entre temps courts et temps longs. Lorsque $m = 0.2$ (cas non linéaire), des différences apparaissent notamment aux temps longs avec les résultats “FFT” mais l'estimation du comportement élasto-viscoplastique par la méthode en “champs translatés Mori-Tanaka”

reste proche de celle obtenue par la méthode variationnelle incrémentale “SEC (EIV+HS)” développée dans [7]. Ces résultats montrent que même si l’approche de linéarisation est de type affine (approche du premier ordre) notamment par rapport aux méthodes de second ordre (cf. [10]), les résultats restent très proches de ceux obtenus par la méthode variationnelle incrémentale “SEC (EIV+HS)” de [7]. De plus, l’écart reste raisonnable sur ces illustrations en chargement monotone par rapport aux calculs à champs complets de type “FFT” [7] même si le contraste et la non linéarité des phases sont relativement élevés pour ces composites.

5 Conclusions

L’intérêt de la nouvelle loi d’interaction formulée en élastoviscoplasticité non linéaire par la méthode de décomposition en “champs translatsés” est d’être compacte et simple d’emploi. Il est montré que la loi d’interaction est quasiment aussi simple qu’en viscoélasticité linéaire et efficace en termes de prédiction en non linéaire au travers des exemples reportés en chargement monotone. Elle permet d’être facilement transférable aux cas de l’approximation de type autocohérente. Celle-ci sera appliquée dans le cas de polycristaux métalliques de symétrie hexagonale et de faible densité de type Mg au cours de leur plastification par maillage (projet ANR “MAGTWIN” et LabEx “DAMAS”).

Références

- [1] Paquin, A., Sabar, H., Berveiller, M. 1999 Integral formulation and self-consistent modelling of elasto-viscoplastic behavior of heterogeneous materials. *Arch. Appl. Mech.* **69** 14-35
- [2] Sabar, H., Berveiller, M., Favier, V., Berbenni, S. 2002 A new class of micro-macro models for elastic-viscoplastic heterogeneous materials. *Int. J. Solids Struct.* **39** 3257-3276
- [3] Berbenni, S., Favier, V., Berveiller, M. 2007 Impact of the grain size distribution on the behaviour of heterogeneous materials. *Int. J. Plasticity* **23** 114-142
- [4] Rougier, Y., Stolz, C., Zaoui, A. 1994 Self-consistent modelling of elastic-viscoplastic polycrystals. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris II* **318** 145-151
- [5] Molinari, A. 2002 Averaging models for heterogeneous viscoplastic and elastic-viscoplastic materials. *ASME J. Eng. Mater. Tech.* **124** 62-70
- [6] Mercier, S., Molinari, A., Berbenni, S., Berveiller, M. 2012 Comparison of different homogenization approaches for elastic-viscoplastic materials. *Model. Simul. Mater. Sci. Eng.* **20** 024004
- [7] Lahellec, N., Suquet, P. 2007 On the effective behavior of non linear inelastic composites : I. Incremental variational principles. *J. Mech. Phys. Solids* **55** 1932-1963
- [8] Ricaud, J.- M., Masson, R. 2009 Effective properties of linear viscoelastic heterogeneous media : internal variables formulation and extension to ageing behaviours. *Int. J. Solids Struct.* **46** 1599-1606
- [9] Masson, R., Bornert, M., Suquet, P., Zaoui, A. 2000 An affine formulation for the prediction of the effective properties of non linear composites and poly-crystals. *J. Mech. Phys. Solids* **48** 1203-1227
- [10] Lahellec, N., Suquet, P. 2007 On the effective behavior of nonlinear inelastic composites : II. A second order procedure. *J. Mech. Phys. Solids* **55** 1964-1992