

Pertinence des champs bidimensionnels dans l'analyse des phénomènes instationnaires tridimensionnels.

F. LUSSEYRAN^a, J. BASLEY^{a,b}, F. GUENIAT^{a,b}, L. PASTUR^{a,b}

a. LIMSI-CNRS BP 133, F-91403 Orsay Cedex

b. Université Paris Sud 11, F-91405 Orsay Cedex

Résumé :

L'identification des structures dites cohérentes constitue une étape importante dans l'étude et le contrôle des écoulements fluides. L'accès à la mesure de champs de vitesse instantanés, grâce au développement des techniques de vélocimétrie par images de particules (PIV), a profondément enrichi l'approche expérimentale dans ce domaine. D'abord bidimensionnelle cette technique évolue vers la mesure de champs tridimensionnels complets, comme semble l'exiger la structure intrinsèquement 3D des tourbillons structurant la dynamique spatio-temporelle. Cependant, les contraintes imposées par les techniques 3D justifient encore largement l'exploration 2D. C'est pourquoi dans cet exposé nous abordons la validité et les possibilités offertes par différentes décompositions modales des itérés 2D d'un champ de vitesse, résolus en temps (ou non résolus), prélevés expérimentalement ou numériquement dans un champ de vitesse 3D fortement instationnaire. Trois décompositions modales sont comparées dans l'étude d'un écoulement de référence (cavité ouverte) : la décomposition en modes propres orthogonaux (POD), la décomposition en modes de Fourier globaux (GFD), la décomposition en modes dynamiques (DMD).

Abstract :

Coherent structures identification constitutes an important step in the study of fluid dynamics and flow control. The acces to instantaneous velocity field measurements, through a rapid development of particle image velocimetry (PIV), has deeply enriched the experimental approach to this field. Originally two-dimensional, this technique now evolves to the measurement of complete three-dimensional fields, in order to address the intrinsically 3D nature of the space-time dynamics of the flow. However, the constraints imposed by 3D techniques, still largely justify 2D exploration. This is why in this talk we approach the validity and the possibilities offered by modal decompositions of sets of 2D velocity field snapshots, times resolved (or not), issue from experiments or numerical simulations in strongly unsteady flows. Three modal decompositions are compared analysing a data set coming from a reference open cavity flow : - the proper orthogonal decomposition (POD), the global Fourier mode decomposition (GFD), the dynamic modes decomposition (DMD).

Mots clefs : structures cohérentes d'écoulement ; analyse 2D de champs de vitesse 3D ; décompositions modales

1 Introduction

L'identification de structures cohérentes dans les écoulements fluides représente un objectif important en mécanique des fluides. L'évaluation de la cohérence spatiale a été longtemps réservée à l'approche numérique, l'expérimentation devant se limiter à des corrélations temporelles du fait des moyens métrologiques disponibles. Depuis 20 ans le développement des techniques de vélocimétrie par images de particules (PIV) donne accès à des champs de vitesse tout d'abord bidimensionnels (2D) et bicomposantes coplanaires (2C), pour actuellement aborder la mesure de champs tridimensionnels complets (3D,3C). Cette évolution est motivée par le caractère le plus souvent intrinsèquement 3D des tourbillons structurant la dynamique spatio-temporelle des sillages, des jets, des écoulements impactant ou

même des couches limites et des couches de mélanges. Cependant, les contraintes et les limites imposées par les techniques 3D justifient encore largement l'exploration 2D. C'est pourquoi dans cet exposé nous abordons la validité et le potentiel de différentes décompositions modales restreintes à des itérés 2D du champ des composantes coplanaires de la vitesse. Les séries peuvent être résolues temporellement ou non, et provenir d'expériences ou de simulations numériques. Trois décompositions modales sont appliquées à l'étude d'un écoulement de référence, constitué par une cavité ouverte en interaction avec une couche limite laminaire : la décomposition en modes propres orthogonaux (POD), la décomposition en modes de Fourier globaux (GFD), la décomposition en modes dynamiques (DMD). On peut ajouter, de plus, aux propriétés propres à chacune de ces décompositions modales, des propriétés physiques comme l'incompressibilité (transmise aux modes spatiaux) ou la propagation non dispersive de modes transverses au plan de mesure. L'information apportée par l'approche 2D permet alors une incursion pertinente dans la troisième dimension. Cette contribution présente les décompositions modales utilisées, en insistant sur la DMD, la plus récente des décompositions, ainsi que leur application à une série de données PIV mesurées dans un plan de l'écoulement en cavité ouverte. Les conditions expérimentales sont sommairement décrites dans la légende de la figure 1.

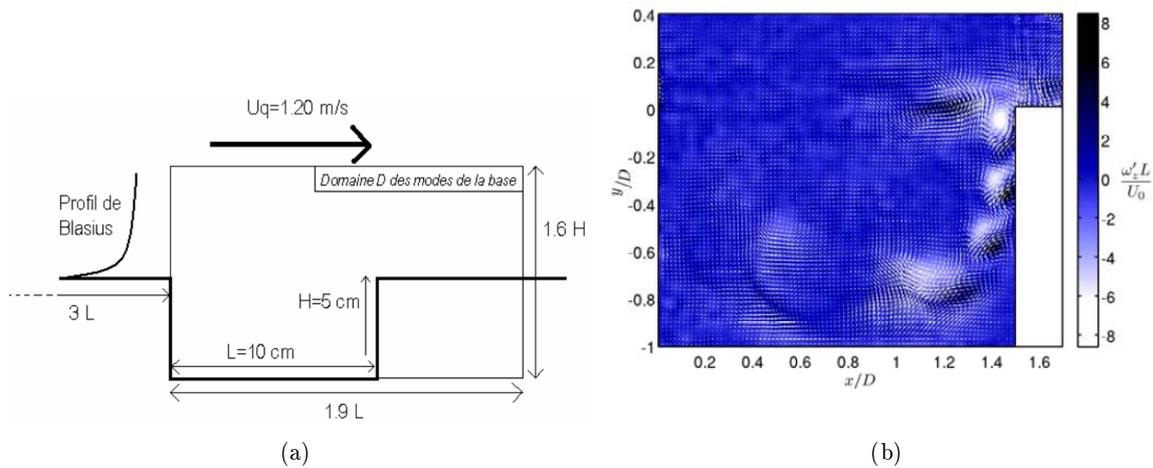


FIGURE 1 – (a) Schéma de la cavité de largeur $L = 0.1$ m et de hauteur H telle que $L/H = 2$. La vitesse extérieure U varie de 0.5 m/s à 3.0 m/s, correspondant à des nombres de Reynolds $Re_L = UL/\nu_{air}$ entre 3000 et 2.0^4 . (b) Un exemple d'itérés de la vitesse obtenus à la cadence de 250 Hz grâce un système de PIV rapide.

2 Décomposition modale des itérés d'un champ scalaire ou vectoriel

L'objectif d'une décomposition modale est d'extraire, d'un jeu de données, des bases spatiales et temporelles permettant de d'écrire les réalisations des champs observés, par exemple de la vitesse. Les 3 décompositions POD, GFD et DMD sont appliquées sur un même ensemble de données, défini comme K_0^N , l'ensemble de $N + 1$ itérés de l'observable $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ – ici les itérés du champ de vitesse –, prélevés à chaque pas de temps δt de 0 au temps $T = N\delta t$ ($N \approx 4000$), ie

$$K_0^N = \{\mathbf{u}(\mathbf{r}, 0), \mathbf{u}(\mathbf{r}, \delta t), \dots, \mathbf{u}(\mathbf{r}, (N-1)\delta t), \mathbf{u}(\mathbf{r}, N\delta t)\} \quad (1)$$

Par la suite, la notation sera simplifiée en remplaçant $\mathbf{u}(\mathbf{r}, k\delta t)$ par $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t_k)$ ou par $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$.

Nous rappelons rapidement dans ce qui suit les 3 algorithmes visant à décomposer le jeu de données sur une base temporelle et une base spatiale, soit :

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = \sum_{j=0}^m \alpha_j(t_k) \psi_j(\mathbf{r}), \quad (2)$$

Le lecteur intéressé pourra trouver plus de détails dans les références indiquées ci-après.

2.1 Décomposition en Modes POD

La décomposition en mode propres orthogonaux (POD) est aussi connue sous le nom de décomposition de Karhunen-Loève ou d'analyse en composantes principales. La méthode dite des snapshots consiste à trouver (voir par exemple [1]) la base orthonormale optimale des modes spatiaux $\{\psi_i\}$, appelés *topos* et des modes temporels $\{\alpha_i\}$, appelés *chronos*. Les topos correspondent aux vecteurs propres de la matrice des corrélations spatiales $R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{N+1} K_0^N K_0^{N\dagger}$, et les chronos aux vecteurs propres de la matrice des corrélations temporelles $\tilde{R}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{N+1} K_0^{N\dagger} K_0^N$. R et \tilde{R} forment des matrices symétriques positives ce qui implique que les chronos et les topos sont des bases orthogonales. Dans le cas de la POD, les éléments de la matrice de données K_0^N ne nécessitent d'être ni ordonnés par temps croissants, ni régulièrement. Cette décomposition a donc le gros avantage de pouvoir s'appliquer à un échantillonnage aléatoire de l'évolution temporelle.

Un exemple de POD est donné figure 2 pour l'écoulement de cavité ouverte. Le spectre (figure 2(a)) révèle que l'énergie de fluctuation de l'écoulement est contenue dans les 4 premiers modes. Ils correspondent aux instabilités de la couche de cisaillement comme le montre la représentation du premier chronos (figure 2(b)). La comparaison entre le spectre de Fourier du premier chronos (en noir figure 2(c)) et du spectre de Fourier (en rouge) fait bien apparaître une des limites de la POD : le spectre du chronos contient les 3 principales fréquences des modes de la couche cisailée. Le topos correspondant montre une contribution moyenne de ces trois modes. Le spectre de Fourier correspond à la moyenne des spectres calculés en chaque point du champ de mesure.

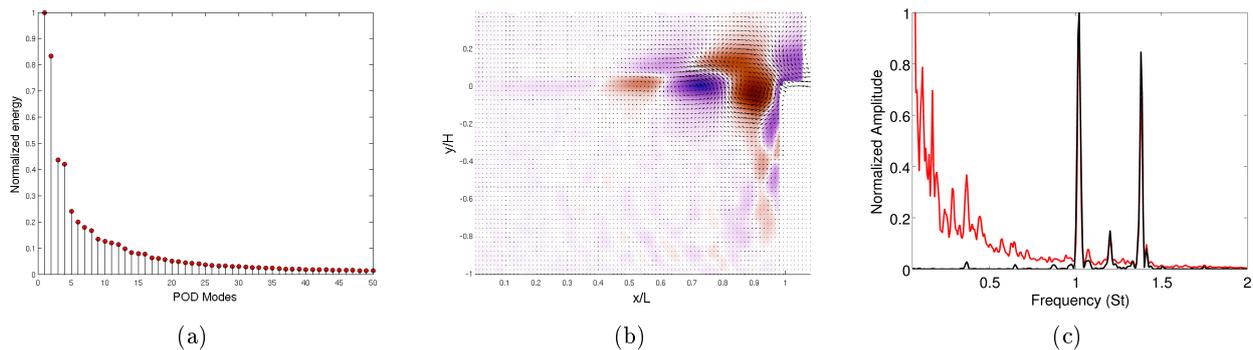


FIGURE 2 – (a) : Spectre des valeurs propres de la POD. - (b) Premier topos ; les fleches représente la vitesse et la couleur la vorticité du mode. - (c) Comparaison du spectre de Fourier en rouge et du spectre du premier chronos, en noir, associé au topos de (b).

2.2 Décomposition en Mode de Fourier Globaux

Dans le cas où les éléments de la matrice de données K_0^N sont échantillonnés régulièrement, en respectant le critère de Nyquist, et que la taille N de l'échantillon est assez grande pour considérer les basses fréquences du phénomène, on peut projeter les données sur une base de fonctions exponentielles complexes (cf. [5]).

$$\{\alpha_j\} = \exp(i 2\pi j / T_{obs} t_k),$$

et obtenir les modes spatiaux (ou globaux) $\psi_j(\mathbf{r})$ correspondants. Les $\{\alpha_j\}$ constituent bien par construction une base orthonormées, en revanche les $\psi_j(\mathbf{r})$ ne constituent pas en général une base orthogonale.

La figure 3 présente un exemple des modes spatiaux obtenus pour les basses fréquences du spectre et qui correspondent à des structures intra-cavitaires, visualisées dans deux plans orthogonaux (vue de dessus et de côté).

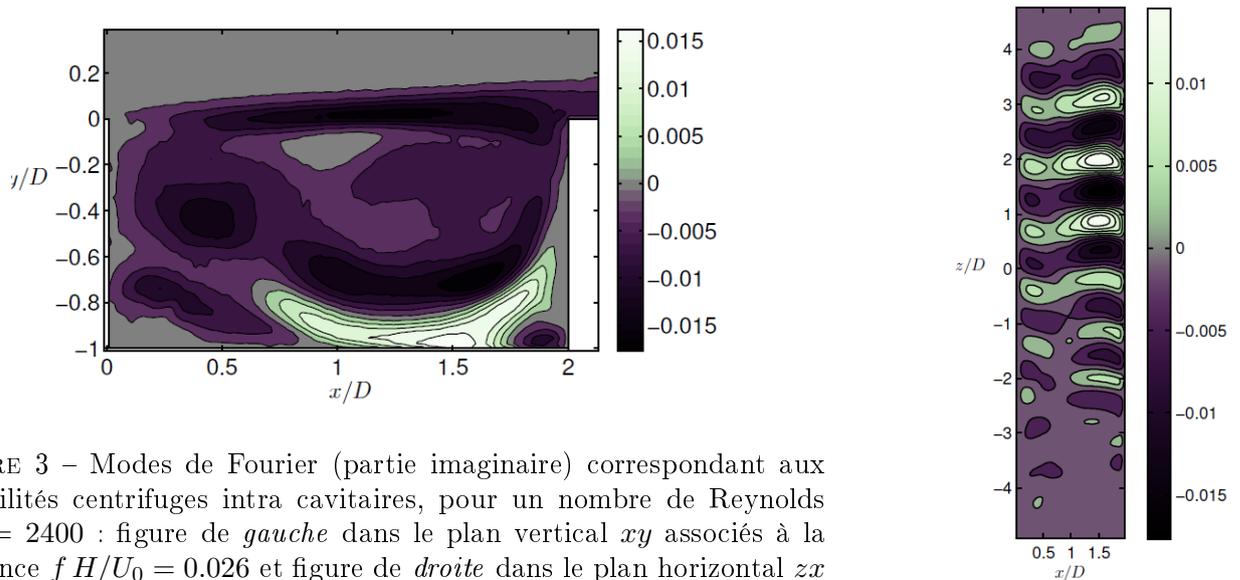


FIGURE 3 – Modes de Fourier (partie imaginaire) correspondant aux instabilités centrifuges intra cavitaires, pour un nombre de Reynolds $Re_H = 2400$: figure de *gauche* dans le plan vertical xy associés à la fréquence $f H/U_0 = 0.026$ et figure de *droite* dans le plan horizontal zx en $y/H = -0.1$ correspondant à la fréquence $f H/U_0 = 0.018$.

2.3 Décomposition en Modes Dynamiques

La DMD est une méthode récemment proposée [2, 3], qui permet, sous l'hypothèse de l'existence d'un opérateur d'évolution stationnaire, de décomposer toute réalisation \mathbf{u} du champ mesuré sous forme de modes spatiaux Φ dépendant de l'espace \mathbf{r} appelés modes dynamiques et de modes temporels $\alpha(t)$, qui prennent la forme d'exponentielles complexes. En ce sens l'objectif est le même que pour la GFD, mais le champs d'application est à priori plus large car il inclut l'analyse des transitoires. L'objectif de la décomposition en mode dynamique (DMD) est à nouveau d'extraire d'un jeu de données, une base spatiale, mais qui soit en relation bijective avec des modes fréquentiels à la différence de la POD. Nous rappelons rapidement ici le principe. Le lecteur intéressé pourra trouver plus de détails dans [4, 3, 6].

On suppose l'existence d'un opérateur A défini par :

$$A\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n+1}, \quad (3)$$

c'est à dire amenant \mathbf{u} de l'instant t à l'instant $t + \delta t$. L'objectif de la DMD est d'extraire des vecteurs propres et valeurs propres de cet opérateur.

En mécanique des fluides, la dimension de l'opérateur A est prohibitivement grande. L'algorithme DMD vise à chercher un opérateur similaire à A , de taille réduite, afin de pouvoir estimer une partie des valeurs et vecteurs propres de A . Cet opérateur réduit est construit à partir des informations disponibles, *ie* le jeu de données. Pour simplifier, nous ne présentons que la méthode proposée par Schmid en 2008 [2], basée sur la construction d'une matrice compagnon.

Si $N + 1$ est le nombre de réalisations, K_i^j représente un jeu de données ordonnées en temps, *ie* $K_i^j = \{\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{u}_j\}$, alors :

$$\begin{aligned} AK_1^N &= \{A\mathbf{u}_1, \dots, A\mathbf{u}_N\} \\ &= \{\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{N+1}\} \\ &= K_2^{N+1}. \end{aligned} \quad (4)$$

On suppose que la dernière réalisation est linéairement dépendante des N premières. Cette hypothèse est pertinente dès lors que l'on ne rajoute pas d'information dynamique nouvelle par l'ajout de réalisations à la base de données. On a alors :

$$\mathbf{u}_{N+1} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_N\mathbf{u}_N + \mathbf{r}, \quad (5)$$

où \mathbf{r} est un résidu. Les éléments c_i peuvent être identifiés par minimisation de la norme :

$$\mathbf{c}_{opt} = \min_{\mathbf{c}} \left\| \mathbf{u}_{N+1} - \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{u}_j \right\|_2. \quad (6)$$

En utilisant l'équation (4), on obtient :

$$K_2^{N+1} = K_1^N S + R. \quad (7)$$

R est un résidu. S est une matrice compagnon de taille $N \times N$. Elle permute les i premières réalisations sur les suivantes, à l'exception de la dernière, qui est développée sur la dernière colonne suivant l'équation (5). Si l'on néglige R alors la matrice compagnon est similaire à A , et donc les valeurs propres de S sont des valeurs propres de A . De plus, pour tout vecteur propre ζ de S , $\Phi \equiv K_1^N \zeta$ est un vecteur propre de A .

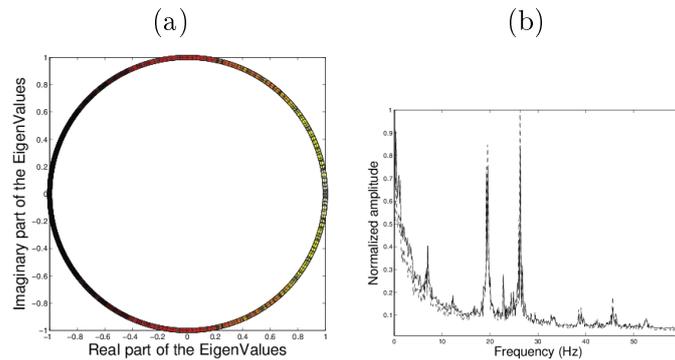


FIGURE 4 – Décomposition en modes dynamiques : (a) valeurs propres de l'opérateur, qui se distribuent sur le cercle unité dans le régime permanent. Les niveaux de gris traduisent l'amplitude, au sens de la norme \mathcal{L}^2 , du mode dynamique associé (blanc pour les plus énergétiques). (b) Comparaison des spectres de puissance obtenus par analyse de Fourier (trait plein) ou par décomposition en modes dynamiques (pointillés). L'analyse de Fourier est faite sur les champs de vitesse, en moyennant les spectres de puissance obtenus en chacun des points de la grille spatiale. Le spectre de Koopman est obtenu en reportant, pour chaque canal fréquentiel, l'amplitude du mode dynamique associé.

Dans le régime permanent, les valeurs propres λ_k de la DMD sont sur le cercle unité, comme on peut le voir sur la figure 4a ; on peut donc les écrire sous la forme $\lambda_k = \exp(i\omega_k \Delta t)$ et identifier $f_k = \omega_k / 2\pi$ à une fréquence de Fourier (temporelle). On compose ainsi un spectre en affectant, à chaque canal de fréquence $f_k \pm \delta f_k / 2$, l'amplitude, au sens de la norme \mathcal{L}^2 , du mode de Koopman ψ_k qui lui est associé. On obtient le spectre de la figure 4b (trait pointillé), qui tend vers le spectre de Fourier de l'écoulement (en trait plein).

Les structures spatiales ψ , associées aux fréquences f les plus piquées du spectre, sont présentées sur la figure 5. Comme on s'y attend, les structures associées aux fréquences les plus élevées et énergétiques du spectre sont associées à des modes de la couche cisailée (figures du haut). Les basses fréquences sont quant à elles associées à des structures intra-cavitaires, comme le révèlent les figures du bas.

3 Conclusions

Bien que la structure de l'écoulement en cavité ouverte soit fortement 3D, nous montrerons (cf [7]) que les analyses modales réalisées à partir de séries de données 2D sont valides et porteuses d'informations physiques pertinentes. A priori le résultat dépend du plan d'observation choisi, qui doit permettre d'accéder à l'ensemble de la dynamique au cours du temps. Le nombre d'itérés nécessaire à la convergence des calculs croît lorsqu'on diminue le champs d'observation comme dans le cas de réduction d'un volume à un plan d'observation considéré dans ce papier. Notons enfin qu'il est possible de combiner les avantages associés à la POD et la DMD en combinant ces deux décompositions (cf [8]).

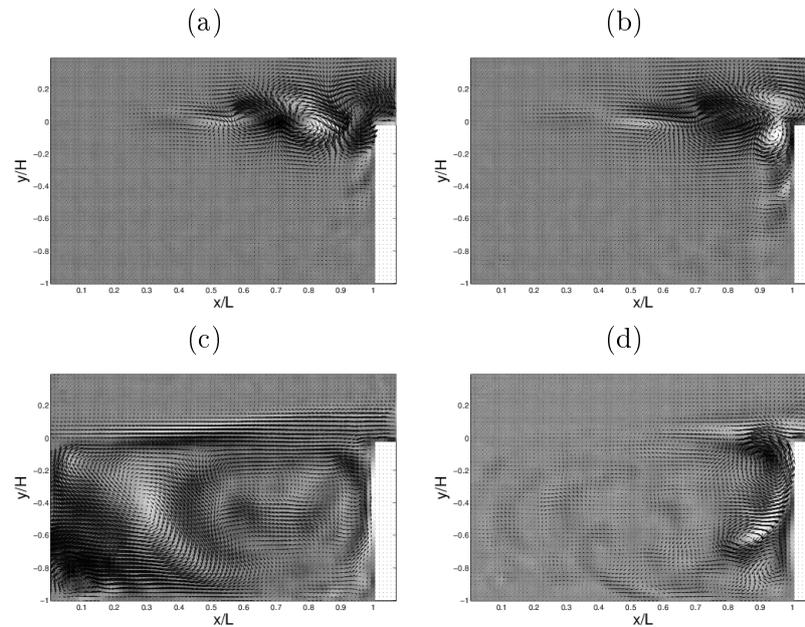


FIGURE 5 – Modes dynamiques ψ associés aux fréquences (a) $f = 19,6$ Hz, (b) $f = 26,4$ Hz, correspondant à des structures de la couche cisailée, et (c) $f_k = 0,5$ Hz, (d) $f = 7,1$ Hz, associées à des structures intra-cavitaires.

Références

- [1] L. Cordier & M. Bergmann 2003 Proper Orthogonal Decomposition : an overview *Lecture series 2002-04 and 2003-04 on post-processing of experimental and numerical data*, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 46 pages, <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~bergmann/PDF/OuvrageSynthese/vki03-1.pdf>
- [2] P.J. SCHMID & J. SESTERHENN, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, in *61st annual meeting of the APS division of fluid dynamics*, APS, San Antonio, Texas, USA (2008)
- [3] C. W. ROWLEY, I. MEZIC, S. BAGHERI, P. SCHLATTER & D. S. HENNINGSON, Spectral analysis of nonlinear flows, *Journal of Fluid Mechanics* **641**, pp. 115-127 (2009)
- [4] P.J. SCHMID, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, *Journal of Fluid Mechanics* **656**, pp. 6-28 (2010)
- [5] J. Basley, L. Pastur, F. Lusseyran, T. Faure, N. Delprat 2011 Experimental investigation of global modes in an incompressible cavity flow using time-resolved PIV *Experiments in Fluids* vol. **50**, n°4 905-918
- [6] F. Guéniat, J. Basley, C. Douay, L. Pastur, F. Lusseyran, Th. Faure 2011 Opérateur de Koopman et identification de structures cohérentes : application à un écoulement de cavité *Rencontre du Non Linéaire*
- [7] B. Podvin, Y. Fraigneau, F. Lusseyran, P. Gougat 2006 A Reconstruction Method for the Flow Past an Open Cavity *Journal of Fluids Engineering* Vol. **128** 531
- [8] A. Cammilleri, F. Guéniat, J. Carlier ; L. Pastur, E. Memin, F. Lusseyran, G. Artana POD-Spectral Decomposition for Fluid Flow Analysis and Model Reduction, sous presse. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*