

La PGD au service de la mesure de champs cinématiques volumiques

L.A. GOMES PERINI, J.-C. PASSIEUX, J.-N. PÉRIÉ

Université de Toulouse ; Institut Clément Ader ; INSA, UPS, Mines Albi, ISAE;
135 avenue de Rangueil, 31077 Toulouse, France

Résumé :

La réponse mécanique des matériaux hétérogènes est étroitement liée à leur micro-structure. Aujourd'hui, la Corrélation Volumique (CV) permet d'accéder à des mesures de champs de déplacement volumiques aux échelles souhaitées. Dans une approche globale, l'utilisation de fonctions de forme éléments finis (EF) pour l'interpolation du champ de déplacement (EF-CV) permet un lien direct entre mesures et simulations. Cependant, associée à une discrétisation 3D, l'utilisation d'une telle méthode peut mener à un temps de calcul excessif. Pour éviter ce problème, ce travail propose d'appliquer une méthode basée sur la Proper Generalized Decomposition (PGD) multigrille au problème de CV. Le champ de déplacement inconnu est alors approximé sous une forme séparée avec des produits de fonctions 1D, réduisant ainsi la complexité numérique. Les résultats montrent que la méthode proposée réduit le temps de calcul tandis qu'elle préserve les avantages d'une approche EF-CV (incertitudes, lien essais/calculs).

Abstract :

The mechanical response of heterogeneous materials are closely related to their micro-scale features. Today, Digital Volume Correlation (DVC) is being successfully applied for volumetric displacement field measurements at the desired scales. The use of FE shape functions for the displacement field interpolation (FE-DVC) allows a direct link between measurements and simulations. However, this method may lead to prohibitive computational cost associated with a 3D discretization. To circumvent this issue, this work proposes to use a multigrid Proper Generalized Decomposition (PGD) approach to the DVC problem. The unknown displacement field is then approximated in a separated form as products of 1D functions only, reducing the numerical complexity. Results show that the proposed method reduces the computational cost while it preserves the advantages of standard FE-DVC.

Mots clés : Corrélation Volumique ; Proper Generalized Decomposition ; Mesure de champs cinématiques

1 Introduction

Aujourd'hui, les matériaux hétérogènes sont utilisés dans plusieurs domaines en ingénierie. Leur réponse mécanique étant liée à leur micro-structure, des mesures 2D peinent à fournir des informations suffisantes pour établir un lien cohérent avec les simulations (3D avec des conditions aux limites complexes à modéliser). Ainsi, des mesures de champs de déplacements volumiques aux échelles souhaitées représentent une étape importante lors de l'identification des lois constitutives.

La Corrélation Volumique (CV) [2] est une extension en 3D de la Corrélation d'Images Numérique (CIN) [19]. Cette méthode permet de mesurer le champ de déplacement dans un solide soumis à un chargement quelconque, en comparant deux images 3D texturées (la texture peut être naturelle ou artificielle). Ces images volumiques peuvent être obtenues par des techniques comme l'IRM ou la tomographie. On trouve dans la littérature des applications à plusieurs types de matériaux, comme de l'os trabéculaire [2, 3], du bois [6] et des matériaux granulaires [12, 17].

Dans une approche globale de la CV, le champ de déplacement recherché peut être interpolé par

des fonctions de forme éléments finis (EF-CV) [4, 18]. Cela permet un lien direct entre mesures et simulations, représentant un outil intéressant pour l'identification des lois constitutives. Cependant, l'utilisation de maillages 3D très fin et/ou des grandes régions d'intérêt peuvent limiter l'application de telles méthodes, du fait de l'augmentation du temps de calcul.

En mécanique numérique, la méthode *Proper Generalized Decomposition* (PGD) [1, 11] a été utilisée pour approximer la solution de problèmes faisant intervenir un grand nombre de degrés de libertés (DDL). Elle consiste à approximer la solution d'un problème de dimension N par une somme de produits de fonctions de dimension k , avec $k < N$. Les problèmes traités concernent par exemple des problèmes espace-temps [10], des simulations stochastiques [13], des modèles 3D-spatial [5] et homogénéisation numérique [7].

Plus récemment, la PGD a été utilisée pour accélérer le temps de calcul lors de la mesure haute résolution de champs de déplacement 2D [14]. Le champ cinématique recherché est approximé comme une somme de produits de fonctions 1D, ce qui réduit la complexité numérique associée à une approche EF-CIN. Cette nouvelle méthode (PGD-CIN) réduit le temps de calcul tandis qu'elle préserve les avantages d'une approche EF-CIN, comme la réduction des incertitudes de mesure et le lien entre essais et calculs.

Le travail présenté ici consiste à étendre la méthode PGD-CIN pour la mesure de champs de déplacement volumiques (PGD-CV). De plus, une nouvelle approche multigrille est proposée, afin d'utiliser des discrétisations différentes sur chaque terme de l'approximation PGD. Cela améliore la convergence et évite les minima locaux, ce qui est particulièrement utile lorsque les déplacements sont importants au regard de la taille des éléments. La méthode est appliquée à des cas artificiels et réels, et les résultats sont comparés à des mesures EF-CV afin d'analyser les incertitudes de mesure et les temps de calcul.

2 La méthode PGD-CV

La PGD utilise essentiellement une représentation séparée d'une fonction multi-dimensionnelle quelconque $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Il s'agit d'une approximation de cette fonction par une somme finie de produits de fonctions de dimension inférieure à n :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx \sum_{i=1}^k f_1^i(x_1) \cdot f_2^i(x_2) \cdot \dots \cdot f_n^i(x_n) \quad (1)$$

Les dimensions séparées peuvent être, par exemple, de variables espace-temps [11], des variables stochastiques [13], des paramètres et des variables spatiales [15], et aussi des dimensions spatiales [5, 14]. La méthode a été utilisée récemment pour la mesure de champs de déplacement 2D par CIN [14]. Dans ce cas, l'utilisation des fonctions 1D réduisent la complexité numérique, associée à la discrétisation éléments finis. En étendant cette méthode à la CV (avec des champs 3D), le champ de déplacement recherché peut être écrit comme :

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} \approx \sum_{i=1}^m \begin{pmatrix} u_i^x(x) \cdot u_i^y(y) \cdot u_i^z(z) \\ v_i^x(x) \cdot v_i^y(y) \cdot v_i^z(z) \\ w_i^x(x) \cdot w_i^y(y) \cdot w_i^z(z) \end{pmatrix} \quad (2)$$

d'où le groupe de fonctions $u^x, u^y, u^z, v^x, v^y, v^z, w^x, w^y, w^z$ sont inconnues *a priori*. En utilisant un algorithme glouton, le champ de déplacement à l'itération m est :

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \underbrace{\sum_{i=1}^{m-1} \begin{pmatrix} u_i^x(x) \cdot u_i^y(y) \cdot u_i^z(z) \\ v_i^x(x) \cdot v_i^y(y) \cdot v_i^z(z) \\ w_i^x(x) \cdot w_i^y(y) \cdot w_i^z(z) \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_0(x,y,z)} + \underbrace{\begin{pmatrix} u_m^x(x) \cdot u_m^y(y) \cdot u_m^z(z) \\ v_m^x(x) \cdot v_m^y(y) \cdot v_m^z(z) \\ w_m^x(x) \cdot w_m^y(y) \cdot w_m^z(z) \end{pmatrix}}_{\delta \mathbf{u}(x,y,z)} \quad (3)$$

où $\delta \mathbf{u}$ est composée des fonctions inconnues à l'itération actuelle m . L'idée est donc d'utiliser cette décomposition du champ de déplacement au sein de la formulation CV [2]. La CV consiste à retrouver

le flux optique entre une séquence d'images volumiques. En pratique, on écrit la conservation de la luminance [9] :

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) \quad (4)$$

où $f(\mathbf{x})$ est l'image de l'objet au repos, $g(\mathbf{x})$ est l'image de l'objet sous charge et \mathbf{x} la position d'un point dans l'image. Ce problème étant mal-posé, on cherche plutôt à minimiser (4) sur toute la région d'intérêt - ROI (Ω) :

$$\Phi^2 = \int_{\Omega} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}))]^2 d\mathbf{x} \quad (5)$$

En utilisant l'approximation PGD du champ de déplacement, la meilleure correction $\mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ minimise (5). Après une linéarisation (par développement de Taylor) et différentiation de (5) par rapport au groupe de fonctions 1D $u^x, u^y, u^z, v^x, v^y, v^z, w^x, w^y, w^z$, on obtient un système non-linéaire composé de neuf formulations variationnelles couplées. En rassemblant les fonctions dépendantes de la même dimension, on écrit ce système comme :

$$\int_z \gamma^* \cdot \mathbf{A}(z) \cdot \gamma dz = \int_z \gamma^* \cdot \mathbf{B}(z) dz \quad (6)$$

$$\int_y \beta^* \cdot \mathbf{C}(y) \cdot \beta dy = \int_y \beta^* \cdot \mathbf{D}(y) dy \quad (7)$$

$$\int_x \alpha^* \cdot \mathbf{E}(x) \cdot \alpha dx = \int_x \alpha^* \cdot \mathbf{F}(x) dx \quad (8)$$

avec

$$\gamma = \begin{bmatrix} u_m^z \\ v_m^z \\ w_m^z \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} u_m^y \\ v_m^y \\ w_m^y \end{bmatrix} \quad \alpha = \begin{bmatrix} u_m^x \\ v_m^x \\ w_m^x \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{A}(z), \mathbf{B}(z), \mathbf{C}(y), \mathbf{D}(y), \mathbf{E}(x), \mathbf{F}(x)$ sont des opérateurs symétriques et des vecteurs ne dépendant que d'une dimension. Ce système (6)-(8) peut être résolu avec un algorithme de point fixe, en utilisant des méthodes numériques comme les éléments finis. Ainsi, seuls des maillages 1D sont nécessaires, ce qui réduit la complexité numérique associée à un calcul classique EF-CV (impliquant un maillage 3D).

2.1 L'approche multigrille

La présence de grands déplacements (comparés à la taille des éléments) peut mener à une non-convergence de l'algorithme CV. Ceci est associé à la linéarisation via le développement de Taylor. Une stratégie multigrille est, par conséquent, habituellement utilisée pour contourner ce problème [4, 16, 8].

L'idée consiste à utiliser une ou plusieurs grilles grossières sur chaque terme de la décomposition PGD, de façon à augmenter la taille des éléments et à lisser la texture. Le rapport entre déplacements et taille des éléments reste ainsi faible, et le développement de Taylor peut être utilisée. Une représentation des images ainsi que des maillages utilisés (pour 4 grilles grossières) sont présentés sur la Figure 1.

3 Application : compression d'un os trabéculaire

L'application présentée concerne la mesure de champs cinématiques volumiques dans un os trabéculaire soumis à de la compression. Ce cas a été traité dans [3] où la mesure du champ de déplacement et de déformation est réalisée avec une méthode EF-CV. L'éprouvette d'os bovin testé mesure 40mm x 20mm x 20mm. Le réseau trabéculaire est ici utilisé comme texture pour la CV (voir Figure 2a). Les images, de 256 x 152 x 256 voxels, ont été obtenues par micro-IRM.

Le champ de déplacement mesuré (selon la direction y) avec la méthode proposée est visualisé sur

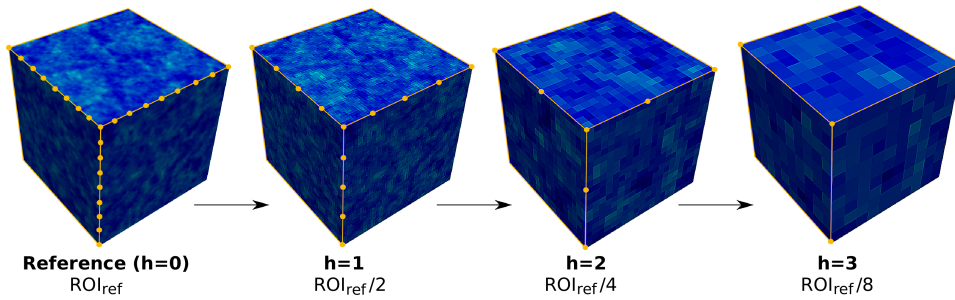


FIGURE 1 – Représentation de l'approche multigrille PGD, en utilisant une RDI de $80 \times 80 \times 80$ voxels et taille des éléments de 10 voxels sur chaque direction.

la Figure 2b. Le résultat est comparé avec une méthode classique EF-CV (Figure 2c). Les champs mesurés à l'aide des deux méthodes sont comparables. De plus, une analyse d'incertitude avec les deux méthodes a été menée (suivant [4]). Cette dernière est basée sur le calcul de l'incertitude de déplacement normalisée $\langle \sigma_u \rangle$ et de l'erreur de déplacement moyen $\langle \delta_u \rangle$. Les résultats sont présentés sur la Figure 3a. Cette figure indique que les champs mesurés ont une résolution sub-voxel.

En ce qui concerne la méthode multigrille, la Figure 3b montre que telle méthode s'impose lorsque de grands déplacements sont présents. Dans ce cas, en utilisant 15 voxels par élément, la convergence de l'algorithme CV n'était par exemple pas possible sans l'utilisation de la méthode multigrille. La Figure 3c propose une comparaison du temps de calcul obtenu avec chaque méthode, en fonction du nombre d'inconnues. La méthode PGD-CV permet bien une réduction du temps de calcul par rapport à la méthode EF-CIV, lorsque l'on utilise un maillage plus fin (et donc lorsque le nombre d'inconnues augmente).

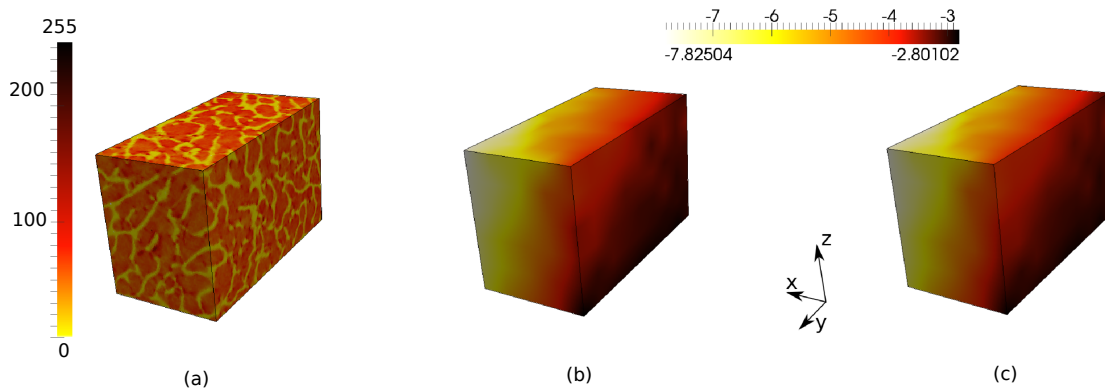


FIGURE 2 – Application : compression d'un os trabéculaire. (a) Image de référence (niveaux de gris) de l'os trabéculaire, obtenue en micro-IRM. La ROI est composée de $90 \times 170 \times 110$ voxels; (b) déplacement mesuré (voxels) dans la direction y avec la méthode PGD-CV et (c) avec la méthode EF-CV.

4 Conclusions

Dans cet article, une approche PGD est utilisée pour la mesure de champs cinématiques volumiques par CV. Cette méthode utilise une représentation séparée du champ de déplacement, impliquant seulement des fonctions 1D. Le remplacement des maillages 3D utilisés par des méthodes classiques comme EF-CV par des maillages 1D, conduit à la réduction de la complexité numérique. De plus, une nouvelle stratégie multigrille basée sur la PGD est développée. Il s'agit d'utiliser plusieurs grilles grossières afin d'éviter les problèmes de minima locaux et améliorer la convergence de l'algorithme CV.

Une application réelle a été analysée avec des images IRM de la compression d'un os trabéculaire. Les résultats ont été comparés avec la méthode EF-CV et montrent que la méthode PGD-CV maintient

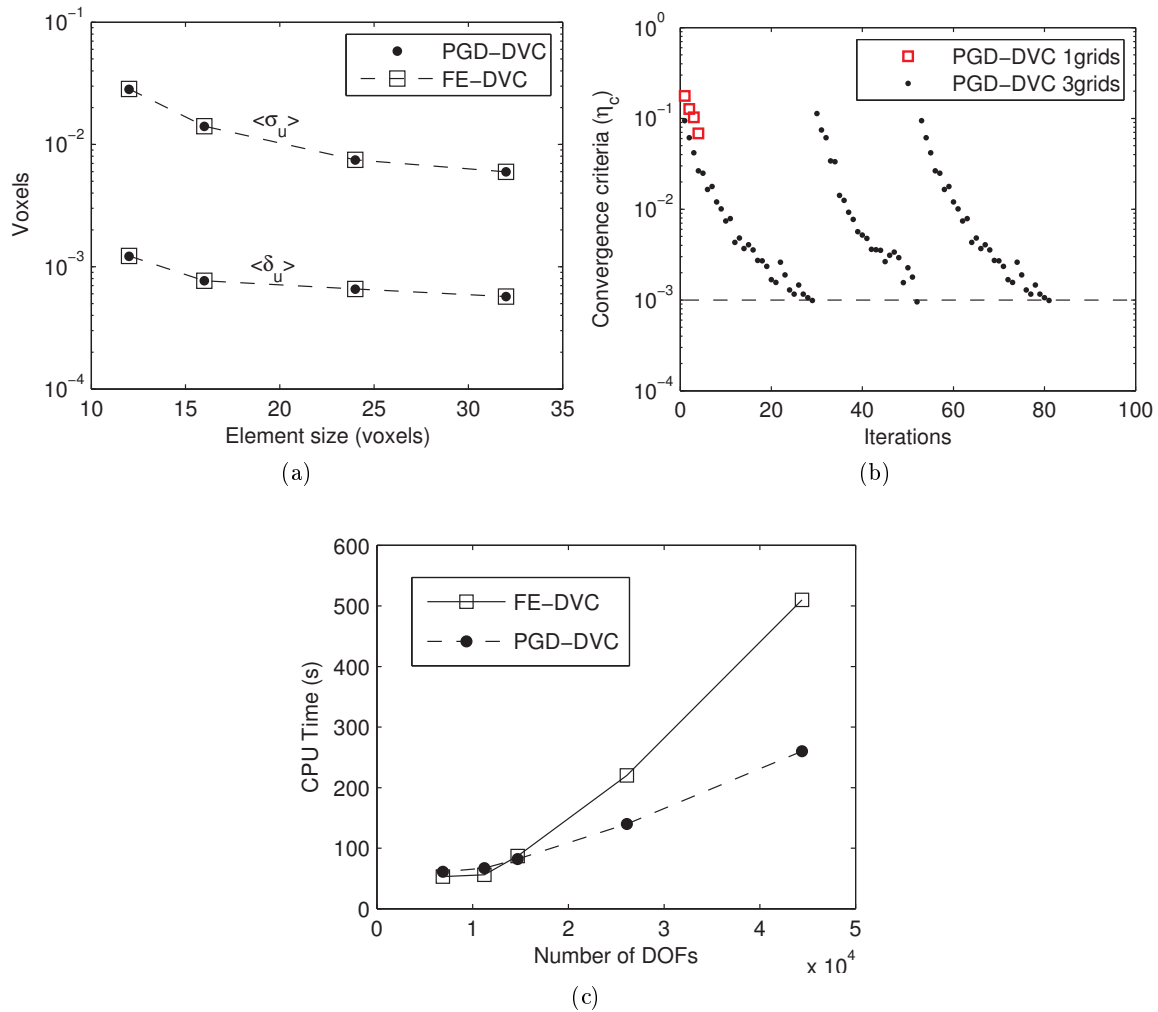


FIGURE 3 – (a) Analyse d’incertitude en utilisant les deux méthodes, associée à des déplacements imposés; (b) Critère de convergence en fonction des itérations. L’utilisation de la méthode multigrille permet la convergence de l’algorithme CV; (c) Temps de calcul de chaque méthode en fonction du nombre d’inconnues.

les basses incertitudes tout en réduisant le temps de calcul. De plus, la méthode multigrille a été déterminante pour la convergence de l’algorithme lorsque l’on souhaite réduire la taille des éléments et lorsque des grands déplacements sont impliqués.

Références

- [1] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, and R. Keunings. A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 139 :153–176, 2006.
- [2] B.K. Bay, T.S. Smith, D.P. Fyhrie, and M. Saad. Digital volume correlation : three-dimensional strain mapping using X-ray tomography. *Experimental Mechanics*, 39 :217–226, 1999.
- [3] A. Benoit, S. Guérard, B. Gillet, G. Guillot, F. Hild, D. Mitton, J.-N. Périé, and S. Roux. 3D analysis from micro-MRI during in situ compression on cancellous bone. *Journal of Biomechanics*, 42(14) :2381 – 2386, 2009.
- [4] G. Besnard, F. Hild, and S. Roux. Finite-element displacement fields analysis from digital images : Application to Portevin–Le Châtelier bands. *Experimental Mechanics*, 46 :789–803, 2006.

- [5] B. Bognet, F. Bordeu, F. Chinesta, A. Leygue, and A. Poitou. Advanced simulation of models defined in plate geometries : 3D solutions with 2D computational complexity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 201–204(0) :1 – 12, 2012.
- [6] F. Forsberg, R. Mooser, M. Arnold, E. Hack, and P. Wyss. 3D micro-scale deformations of wood in bending : Synchrotron radiation μ CT data analyzed with digital volume correlation. *Journal of Structural Biology*, 164 :255–262, 2008.
- [7] L. Giraldi, A. Nouy, G. Legrain, and P. Cartraud. Tensor-based methods for numerical homogenization from high-resolution images. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2012.
- [8] F. Hild, B. Raka, M. Baudequin, S. Roux, and F. Cantelaube. Multi-scale displacement field measurements of compressed mineral wool samples by digital image correlation. *Applied Optics*, 32 :6815–6828, 2002.
- [9] B.K.P. Horn and B.G. Schunk. Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 18 :185–203, 1981.
- [10] P. Ladevèze. New algorithms : mechanical framework and development (in french). *Technical Report 57, LMT-Cachan*, 1985.
- [11] P. Ladevèze, J.-C. Passieux, and D. Néron. The LATIN multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21) :1287–1296, 2010.
- [12] S.A. McDonald, F. Motazedian, A.C.F. Cocks, and P.J. Withers. Shear cracking in an Al powder compact studied by X-ray microtomography. *Materials Science and Engineering : A*, 508(1–2) :64 – 70, 2009.
- [13] A. Nouy. A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(45–48) :4521 – 4537, 2007.
- [14] J.-C. Passieux and J.-N. Périé. High resolution digital image correlation using proper generalized decomposition : PGD-DIC. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 92 :531–550, 2012.
- [15] E. Pruliere, F. Chinesta, and A. Ammar. On the deterministic solution of multidimensional parametric models using the proper generalized decomposition. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(4), 2010.
- [16] J. Réthoré, F. Hild, and S. Roux. Shear-band capturing using a multiscale extended digital image correlation technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(49–52) :5016 – 5030, 2007.
- [17] M. Sjö Dahl, C.R. Siviour, and F. Forsberg. Digital volume correlation applied to compaction of granular materials. *Procedia IUTAM*, 4(0) :179 – 195, 2012. IUTAM Symposium on Full-field Measurements and Identification in Solid Mechanics Cachan, France 4-8 July 2011.
- [18] Y. Sun, J.H.L. Pang, C.K. Wong, and F. Su. Finite element formulation for a digital image correlation method. *Applied Optics*, 44, 2005.
- [19] M.A. Sutton, W.J. Wolters, W.H. Peters, W.F. Ranson, and S.R. McNeill. Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image and Vision Computing*, 1(3) :133–139, 1983.