

Instabilités de convection thermo-électro-hydrodynamiques entre deux parois verticales : étude numérique

Mireille Tadie Fogaing, Olivier Crumeyrolle & Innocent Mutabazi

Laboratoire Ondes et Milieux Complexes, CNRS UMR 6294
53 rue de Prony, CS 80540, 76058 Le Havre cedex

Résumé :

Cette étude numérique porte sur la stabilité d'un liquide diélectrique confiné entre deux parois verticales, soumises à un gradient horizontal de température et à un champ électrique alternatif. La polarisation dans le liquide induit une force en volume, la force diélectrophorétique, qui peut être utilisée pour contrôler la convection naturelle, et même la créer en apesanteur. Dans l'approximation de Boussinesq, nous avons mené l'étude de la stabilité linéaire en incluant complètement la rétroaction du champ électrique sur l'écoulement. La simulation numérique directe en 2d est employée pour déterminer le niveau de performance du transfert thermique entre les parois (nombre de Nusselt).

Abstract :

We investigate the stability of a dielectric fluid confined between two vertical plates, subjected to a temperature difference and an ac electric field. The electric body force induces a horizontal force field which can be used to control natural convection, and create convection in weightlessness condition. The associated heat transfer enhancement could be of particular interest for aerospace applications. Under the Boussinesq approximation, we conducted the study of linear stability including complete feedback of electric field on the fluid flow. The linear stability results are further extended using 2-d direct numerical simulations. In particular, the Nusselt number is determined to assess the heat transfer performance.

Mots clés :

Diélectrophorétique ; Instabilités thermo-électro-hydrodynamiques ; nombre de Nusselt.

1 Introduction

En convection naturelle ordinaire, entre deux parois chauffées différentiellement dans un champ gravitationnel, l'écoulement du fluide est uniquement provoqué par les forces de flottabilité. Par contre en apesanteur où la gravité terrestre est nulle, il n'existe pas de convection naturelle. L'un des moyens de le recréer est de disposer d'un liquide diélectrique dont la permittivité relative varie en fonction de la température. L'application d'un champ électrique alternatif inhomogène à un liquide diélectrique soumis à un gradient thermique induit une force diélectrophorétique similaire à la force gravitationnelle. L'intérêt de notre étude est de caractériser le couplage entre les effets électro-hydrodynamiques et le transfert thermique dans un fluide incompressible, en présence d'un gradient horizontal de température et d'un champ électrique alternatif, et éventuellement de la pesanteur terrestre.

Turnbul [1] a étudié l'effet de la force diélectrophorétique sur la convection de Rayleigh Bénard dans une configuration chauffée par le bas avec renforcement de la gravité terrestre par la gravité électrique. Il a montré que les seuils du Rayleigh thermique (Ra) diminuent lorsque le champ électrique augmente. Ainsi, la force diélectrophorétique avait ici un effet déstabilisateur sur l'écoulement. Stiles et al. [2] ont étudié le cas où la configuration horizontale est chauffée par le haut, la gravité électrique étant alors à l'opposé

de la gravité terrestre. Ils ont montré qu'on peut obtenir un transfert thermique optimum en fonction du Rayleigh thermique appliqué.

Il existe très peu d'études antérieures pour le cas d'un liquide diélectrique dans une géométrie à parois planes et verticales. A l'aide d'une étude de stabilité linéaire, Takashima et *al.*[3] ont montré que les instabilités apparaissent dans l'écoulement sous forme de différents modes : modes critiques stationnaires et oscillants, selon la valeur du nombre de Prandtl (Pr), de celle du Rayleigh électrique (L), et aussi de celle du Rayleigh thermique (Ra). Pour de très faibles Ra , ce qui correspondra à une gravité terrestre négligeable, ils ont obtenu indépendamment de Pr une valeur critique $L_c=2128.7$. Suivant les conditions terrestres, et pour $L < L_c$, ils ont montré que le champ électrique a un effet limité sur les instabilités observées usuellement en convection naturelle. Au delà de L_c , il apparaît un couplage complexe entre les effets diélectrophorétiques et les mécanismes d'instabilités thermo-hydrodynamiques. Ceci a été vérifié par Smorodin [4] qui montre l'apparition d'un nouveau mode critique pour $L > L_c$. Toutefois, l'effet de la rétroaction du champ électrique sur la température n'a pas été complètement prise en compte dans ces travaux, et la caractérisation du transfert thermique restait à réaliser. Dans notre présent travail, nous prenons en compte, dans l'approximation de Boussinesq, l'ensemble de la rétroaction du champ électrique sur l'écoulement du fluide, aussi bien pour l'étude de stabilité linéaire que pour l'étude de simulation numérique directe (DNS), qui donne accès à la caractérisation du transfert thermique et au nombre de Nusselt.

Dans la première section, nous présenterons les équations générales de l'écoulement du fluide. L'étude de la stabilité linéaire avec ses résultats seront présentés dans la section suivante, ensuite suivront les résultats obtenus en DNS, et nous terminerons par une conclusion.

2 Formulation du problème

Le liquide diélectrique de conductivité électrique σ est confiné entre deux parois rigides planes et parallèles, soumis à un potentiel électrique ϕ et à un gradient horizontal de température. L'écoulement du fluide est supposé bidimensionnel dans le plan (x, z) .

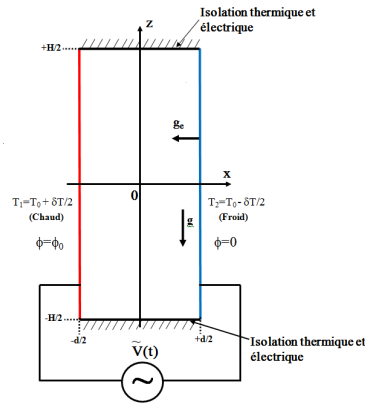


FIG. 1 – Configuration géométrique

Sous l'effet du champ électrique, la polarisation dans le liquide induit une force en volume dont l'expression par unité de volume est [5] :

$$\mathbf{f}_e = \rho_e \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \nabla \epsilon + \nabla \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right) E^2 \right] \quad (1)$$

où \mathbf{E} représente le champ électrique, E sa moyenne quadratique, ρ_e la densité de charges électriques libres, ρ la masse volumique et ϵ la permittivité du liquide diélectrique.

Le premier terme de l'équation (1) représente la force électrophorétique, le second terme la force diélectrophorétique, et le dernier terme l'électrostriction. Celui-ci est le gradient d'une fonction scalaire qui sera

introduit dans le terme de pression des équations de Navier Stokes. La permittivité du liquide diélectrique sera approchée par une loi linéaire en fonction de la température, à la manière de l'approximation de Boussinesq : $\epsilon(T) = \epsilon_1 (1 - e(T - T_0))$, avec e le coefficient de variation de la permittivité, et $\epsilon_1 = \epsilon(T_0)$. Pour un champ électrique alternatif appliqué avec une échelle de temps plus petite que le temps de relaxation électrique $\tau_e = \epsilon/\sigma$, les charges libres n'auront pas le temps de s'accumuler ($\rho_e = 0$). τ_e étant typiquement long, cette condition est peu contraignante et par conséquent la force diélectrophorétique est le terme dominant de (1) et les valeurs rms sont employées pour E et ϕ [6].

Cette force diélectrophorétique peut aussi être exprimée comme une gravité électrique, et elle peut être à l'origine de mouvements de convection dans le liquide :

$$\mathbf{g}_e = \frac{e}{\rho\alpha} \nabla \left(\frac{\epsilon_1 E^2}{2} \right) \quad (2)$$

où α représente le coefficient d'expansion thermique du liquide diélectrique.

Les équations de l'écoulement suivant l'approximation de Boussinesq sont alors l'équation de continuité, l'équation de la quantité de mouvement, l'équation de conservation de l'énergie et l'équation de Gauss-Maxwell :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla \pi + \nu \Delta \mathbf{V} - \alpha (T - T_0) \mathbf{g} + \frac{\epsilon_1 e}{2\rho_0} (\nabla \phi)^2 \nabla T \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T = \kappa \Delta T \\ \nabla \cdot [\epsilon(T) \nabla \phi] = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

Avec $\pi = P - \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right) E^2 - \rho_0 g z$, $\nu = \mu/\rho_0$ la viscosité cinématique et, $\kappa = k/\rho_0 c_v$, la diffusivité thermique du fluide. Ces équations sont complétées par les conditions aux limites de la géométrie :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x = \pm d/2) = w(x = \pm d/2) = 0 \\ T(x = -d/2) = T_1, T(x = +d/2) = T_2 \\ \phi(x = -d/2) = \phi_0, \phi(x = +d/2) = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

3 Etude de la stabilité linéaire

Pour l'étude de stabilité linéaire, on considère que les parois planes verticales sont infiniment grandes, de rapport d'aspect $\Gamma = (H/d) \rightarrow \infty$. L'état de base de l'écoulement du fluide est considéré stationnaire, parallèle à l'axe (Oz), avec $W_b = W_b(x)$, $T_b = T_b(x)$ et $\phi_b = \phi_b(x)$. Ces hypothèses appliquées au système (3) avec les conditions aux limites (4) donnent les solutions de l'état de base :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_b = \frac{\alpha g \beta}{6\nu} x \left(x^2 - \frac{d^2}{4} \right), T_b = -\beta x + T_0 \\ \phi_b = \frac{\phi_0}{\log \left(\frac{1-e\beta d/2}{1+e\beta d/2} \right)} \log \left[\frac{1+e\beta x}{1+e\beta d/2} \right], E_b = -\frac{e\beta \phi_0}{\log \left(\frac{1-e\beta d/2}{1+e\beta d/2} \right)} \frac{1}{(1+e\beta x)} \end{array} \right. \quad (5)$$

avec $\beta = \frac{T_1 - T_2}{d}$, et $T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}$. La gravité électrique se déduit du champ électrique E_b :

$$\mathbf{g}_e = -\frac{\epsilon_1 e^4 \beta^3 \phi_0^2}{\rho_0 \alpha} \frac{1}{\left[\log \left(\frac{1-e\beta d/2}{1+e\beta d/2} \right) \right]^2} \frac{1}{(1+e\beta x)^3}, \quad (6)$$

et on note que $\|g_e(x = -\frac{d}{2})\| > \|g_e(x = \frac{d}{2})\|$; g_e est donc plus intense au voisinage de l'électrode chaude et est dirigée vers le sens de E_b croissant, *i.e.* vers la paroi chaude.

On ajoute à l'état de base des perturbations infinitésimales de $u', w', \pi', T',$ et ϕ' . Après la linéarisation des équations, les perturbations sont développées en modes normaux e^{st+iqz} avec $s = \sigma + i\omega$, le taux de croissance de l'amplitude du mode normal, et q le nombre d'onde. On obtient les équations suivantes où (U, W, Π, θ, Φ) représentent les amplitudes des modes normaux des perturbations, $D = d/dx$, la dérivée par rapport à x , $\mathcal{H} = D^2 - q^2$ et $F_B = B/\log[(1 - B/2)/(1 + B/2)]$:

$$\begin{cases} DU + iqW = 0 & (7a) \\ sU = (\mathcal{H} - iq\tilde{W}_b)U - D\Pi + \frac{L}{2BF_B^2 Pr} (D\tilde{\phi}_b)^2 D\theta + \frac{L}{BF_B^2 Pr} D\tilde{\phi}_b D\tilde{T}_b D\Phi & (7b) \\ sW = -D\tilde{W}_b U + (\mathcal{H} - iq\tilde{W}_b)W - iq\Pi + \left[Gr + \frac{L}{2BF_B^2 Pr} iq (D\tilde{\phi}_b)^2 \right] \theta & (7c) \\ s\theta = -D\tilde{T}_b U + (Pr^{-1}\mathcal{H} - iq\tilde{W}_b)\theta & (7d) \\ \left[(1+Bx)\mathcal{H} - BD\tilde{T}_b D \right] \Phi - B(D^2\tilde{\phi}_b + D\tilde{\phi}_b D)\theta = 0 & (7e) \end{cases}$$

Ces équations ont été adimensionnées avec d comme longueur caractéristique, d^2/ν pour le temps, ν/d pour la vitesse, ϕ_0 pour le potentiel électrique et δT pour la température. Les paramètres de contrôle sont le nombre de Rayleigh thermique : $Ra = \frac{\alpha g \delta T d^3}{\nu \kappa}$, le nombre de Rayleigh électrique basé sur la gravité électrique définie à $x=0$: $L = \frac{\epsilon_1 \phi_0^2 B^4}{\rho_0 \nu \kappa} \left[\log \left(\frac{1-B/2}{1+B/2} \right) \right]^{-2}$, et l'écart de température adimensionné par le coefficient de variation de la permittivité : $B = e\delta T$.

Les équations de l'écoulement étant complètes, on remarque l'apport de B pris en compte, et également les perturbations de température qui rétroagissent sur le potentiel électrique (7e).

Les conditions aux limites de la géométrie pour les perturbations de u', w', π', T' , et ϕ' sont :

$$U = W = T = \Phi = DU = 0 \text{ à } x = \pm \frac{1}{2} \quad (8)$$

Les équations aux valeurs propres (7a)-(7e) sont discrétisées et résolues compte tenu des conditions aux limites (8) par le logiciel d'éléments finis Comsol Multiphysics 3.5, avec un maillage régulier de 960 éléments P2. On obtient par appels au solveur fmeig les courbes de stabilité marginales ($\sigma = 0$), desquelles sont déduits les paramètres critiques (Ra_c, q_c) pour chaque L appliqué, pour une large gamme de valeur de Pr . Nous présentons ici certains des résultats obtenus pour les seuils de Ra_c et ω_c en fonction de L , avec $q_c \in [0.5, 3.5]$.

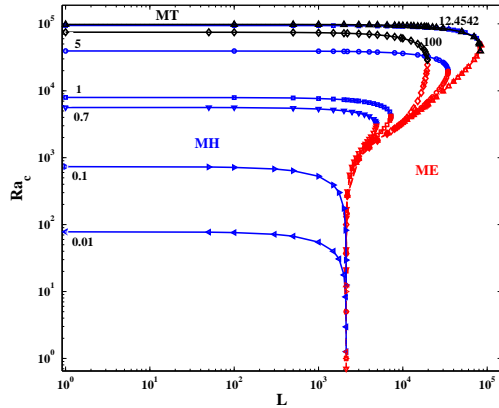


FIG. 2 – Variation de Ra_c en fonction de L pour $B=0.022$ et quelques valeurs de Pr

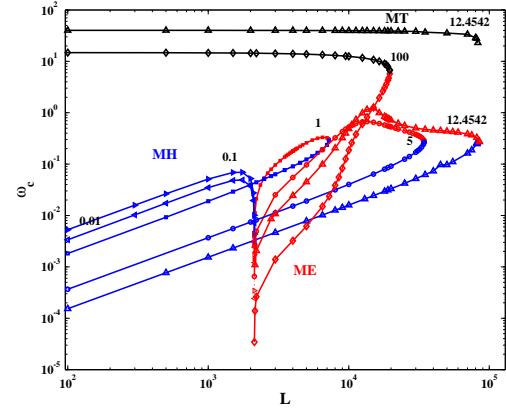


FIG. 3 – Variation de ω_c en fonction de L pour $B=0.022$ et quelques valeurs de Pr

Si $L=0$, on retrouve le problème de thermique pur où de nombreux auteurs ont démontré que Ra_c ne dépend que de Pr , et que les instabilités sont gouvernées par le mode hydrodynamique (MH) stationnaire ($\omega = 0$) provenant du cisaillement de l'état de base pour $Pr < 11.561$, et le mode thermique (MT) oscillant ($\omega \neq 0$) dû aux fluctuations de température pour $Pr \geq 11.561$. Si $Ra=0$ (apesanteur), toutes les branches du mode électrique (ME) apporté par l'effet diélectrophorétique tendent vers une valeur critique fixe indépendante de Pr : $L_{c(Ra=0)} = 2128.7$ [3] qui est plus élevée [7] que la valeur critique de 1708 obtenue pour l'instabilité de Rayleigh-Benard. Pour chaque Pr , il existe un couple (L^*, Ra^*) , correspondant à la rencontre de deux modes critiques : les modes hydrodynamique et électrique si $Pr < 11.561$, et les modes thermique et électrique pour $Pr \geq 11.561$, et ceci à l'exception d'un "point triple" observé à $Pr = 12.4542$, où les branches des trois modes hydrodynamique thermique et électrique se coupent en un seul point.

Lorsque $L < L_{c(Ra=0)}$, il n'existe pas de mode électrique, l'écoulement vertical est stable pour $Ra < Ra_c$; les seuils des modes hydrodynamique et thermique diminuent sous l'effet déstabilisateur du champ électrique. Au delà de $L_{c(Ra=0)}$, l'écoulement démarre instable avec l'apparition du mode électrique dont la nature stationnaire ou oscillante dépend de Pr , L , Ra et B . Sous l'effet du champ électrique croissant, les seuils des modes hydrodynamique et thermique diminuent, tandis que ceux du mode électrique sont repoussés et augmentent jusqu'au point de raccordement avec les modes hydrodynamique ou thermique selon Pr .

La prise en compte complète de B dans ce travail montre un effet sur les fréquences critiques des modes hydrodynamique, thermique et électrique. En particulier le mode hydrodynamique, précédemment rapporté comme étant stationnaire même pour $L \neq 0$, *c.f.* [3], présente en fait des fréquences critiques qui augmentent pour L croissant (Fig.3) : ω_c part de valeurs quasiment nulles à de faible L pour atteindre un maximum comparable à l'inverse du temps caractéristique de diffusion visqueuse τ_ν au point de raccord (L^* , Ra^*). Pour $Pr < 12.4542$, les fréquences des modes électrique et hydrodynamique augmentent jusqu'au point de raccord où elles ont des valeurs similaires. Au delà du point triple, la fréquence du mode électrique croît et celle du mode thermique, caractérisé par des fréquences élevées, décroît jusqu'au point de raccordement avec le mode électrique.

4 Simulation numérique directe

Nous avons étudié les instabilités diélectrophorétiques dans la configuration de la figure 1 pour un grand rapport d'aspect $\Gamma=114$ et pour $B=0.03$. Le système d'équations (3) avec les conditions aux limites (4) est discrétisé par la méthode des éléments finis et résolu sur Comsol à l'aide du solveur femtime. Nous avons opté pour des éléments P2 sur un maillage régulier formé de 7600 rectangles de côté $\Delta x=0.1$ suivant x et $\Delta z=0.15$ suivant z . La convergence des calculs a été vérifiée par un raffinement du maillage. Les conditions initiales de la vitesse, la température et le potentiel électrique sont nulles. Lorsque $L < L_c$, l'écoulement est caractérisé par une unique cellule de recirculation où les particules fluide ont un mouvement stable, ascendant le long de la paroi chaude et descendant le long de la paroi froide (Fig.4). A partir de L_c , l'apparition de rouleaux convectifs (Fig.5) de taille comparable au gap favorise le transfert de chaleur dans la cavité.

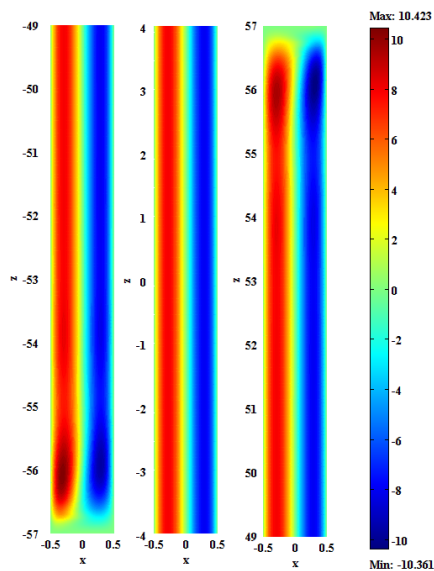


FIG. 4 – Zoom en bas, au milieu et en haut de w pour $Ra=1000$, $L=2500 < L_c$, $Pr=1$

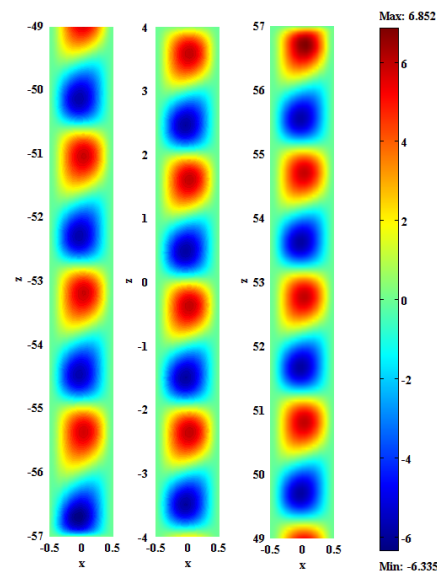


FIG. 5 – Zoom en bas, au milieu et en haut de u pour $Ra=1000$, $L=3500 > L_c$, $Pr=1$

Le nombre de Nusselt Nu va permettre de quantifier le niveau de performance du transfert thermique dans la cavité. Il représente le rapport du flux total convectif sur le flux conductif de l'état de base. Nu est évalué en considérant tout d'abord l'effet du chauffage sur le transfert thermique en présence d'un champ électrique alternatif (Fig.6), puis l'effet du champ électrique sur le transfert thermique en présence d'un gradient horizontal de température (Fig.7)

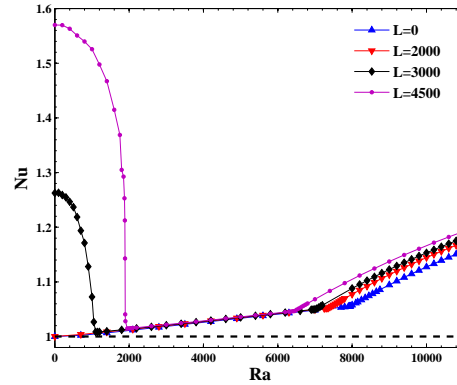
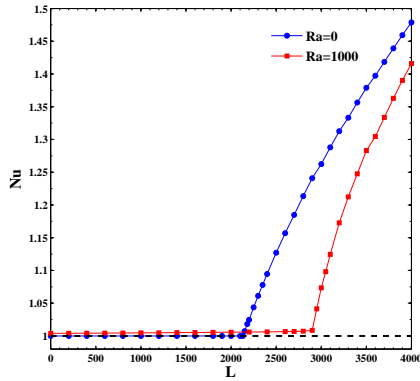


FIG. 6 – Nu pour $Pr=1$ et pour 2 valeurs de Ra FIG. 7 – $Nu=f(Ra)$ pour $Pr=1$ et 4 valeurs de L

Sous l'effet du chauffage croissant (Ra croissant), on constate qu'il faut aller à des L plus grand pour déstabiliser l'écoulement. Néanmoins, l'effet du champ électrique conduit à un Nu significatif lorsque Ra augmente (Fig. 6). Pour $Ra=0$, l'état de base ne présente pas de grande cellule de convection et est donc strictement un état conductif, et par conséquent $Nu=1$ jusqu'à l'apparition des instabilités. Par contre si $Ra \neq 0$, il existe un état de base caractérisé par une grande cellule de recirculation qui accroît légèrement le transport de la chaleur dans la cavité par convection ($Nu \gtrsim 1$), jusqu'à apparition des rouleaux convectifs à $L > L_c$.

L'effet du champ électrique croissant sur l'écoulement de convection naturelle (Fig. 7) augmente le transfert thermique. On retrouve les seuils de Ra_c déterminés en stabilité linéaire, avec l'apparition du mode électrique illustré Fig. 7 pour $L=3000 > L_c(Ra=0)$, où l'écoulement démarre instable avec un Nu croissant en fonction de L car les instabilités sont gouvernées par le mode électrique. Ensuite, lorsque Ra augmente, l'écoulement devient stable et est caractérisé par la grande cellule de recirculation dont le Nu correspondant est légèrement supérieur à l'unité. Pour de grandes valeurs de Ra , il apparaît le mode hydrodynamique dont l'apport au transfert thermique reste inférieur à celui du mode électrique. Ceci montre l'intérêt de la force diélectrophorétique pour obtenir un meilleur transfert thermique dans une cavité verticale à faibles valeurs de Ra .

5 Conclusions

Nous avons mené une étude de stabilité linéaire et des simulations numériques directes (DNS) de l'effet de la force diélectrophorétique sur la convection naturelle dans une cavité verticale différentiellement chauffée. La prise en compte plus complète de la rétroaction du champ électrique sur le fluide, contrairement aux études précédentes, montre un effet important sur la fréquence du mode hydrodynamique puisque celui-ci n'est pas stationnaire contrairement aux prédictions antérieures. Nous avons montré l'effet déstabilisateur du champ électrique sur l'écoulement. Par les calculs DNS, nous retrouvons les résultats de stabilité linéaire et observons que le nombre de Nusselt augmente de manière importante avec l'effet déstabilisateur du champ électrique. La force diélectrophorétique permet d'accroître le transfert dans une cavité verticale, en particulier aux faibles valeurs du nombre de Rayleigh.

Références

- [1] R.J. Turnbull, Phys. Fluids **12**(9), 1809-1815, (1969)
- [2] P.J. Stiles, F. Lin, and P.J. Blennerhassett, Phys. Fluids A **5**(12), 3273-3279, (1993)
- [3] M. Takashima, H. Hamabata, J. Phys. Soc. Japan **53**(5), 1728-1736, (1984)
- [4] B.L. Smorodin, Fluid Dyn. **36**(4), 548-555, (2001)
- [5] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, 2nd ed. (1984)
- [6] I. M. Yavorskaya, N. I. Fomina and Yu. N. Belyaev, *Acta Astronautica* **11**, 179-183 (1984)
- [7] H. N. Yoshikawa, M. Tadie Fogaing, O. Crumeyrolle, I. Mutabazi, accepté dans Phys. Rev. E (2013)