

# Approche continue de la rupture du bois en grands déplacements

L. BENABOU<sup>a</sup>, Z. SUN<sup>a</sup>

a. Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes de Versailles (LISV), Université de Versailles Saint Quentin-en-Yvelines (UVSQ), 45 avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles, France

## Résumé :

*La rupture du bois est la conséquence de mécanismes complexes à l'échelle de la microstructure de ce matériau fortement anisotrope. De par son anatomie particulière, le bois exhibe un comportement post-rupture dépendant du type de sollicitation. En compression, une certaine forme de ductilité peut être observée tandis qu'en traction, la rupture est fragile. Ajouté à cela, la direction du chargement (parallèle ou perpendiculaire au fil) introduit une grande spécificité des modes de rupture qu'il est difficile de rassembler à travers un critère unique. Dans la présente étude, on modélisera la rupture du bois en traction ou compression parallèle au fil par une approche continue de la fissuration et le recours à un critère de plasticité multi-surface. L'approche sera formulée dans le cadre des grandes transformations et implémentée dans un code de calcul éléments finis. Le cas du flambement, associant sollicitations de compression et de traction dans une poutre possédant une imperfection géométrique initiale, sera étudié afin de vérifier les prédictions du modèle.*

## Abstract :

*Wood fracture results from complex mechanisms occurring at the micro-scale of this material characterized by a strong anisotropy. Due to its particular anatomy, wood exhibits a post-failure behavior depending on the type of solicitation. Under compression, some form of ductility can be observed, while brittleness is shown under traction. In addition, the loading direction (parallel or perpendicular to grain) generates great specificities in fracture modes that a single criterion fails to capture. In the present study, wood fracture, under traction or compression parallel to grain, will be modeled based on a smeared-crack approach and with the help of a multi-surface plasticity criterion. The formulation of the model will be done in the framework of large deformation conditions and implemented in a finite element code. The case of buckling, coupling compression and traction stresses in a beam with initial geometric imperfection, will be investigated in order to evaluate the model predictive capacities.*

**Mots clefs :** bois, plasticité adoucissante, fissuration diffuse, rupture, flambement, grands déplacements

## 1 Introduction

En raison de son anatomie particulière, le matériau bois manifeste une grande variété de comportements selon l'état de contraintes auquel il est soumis. Il s'agit d'un matériau hétérogène présentant une anisotropie forte dans le sens des fibres, ainsi que des différences de résistance entre traction et compression. Dans les structures en bois, les sollicitations les plus dangereuses sont celles qui conduisent à des modes de rupture fragile s'accompagnant d'une fissuration instable du matériau (figure 1a). C'est le cas notamment en traction où des fissures peuvent se propager dans la direction des fibres ou transversalement, selon que le bois est sollicité respectivement perpendiculairement ou parallèlement au fil. En compression perpendiculaire au fil, le bois manifeste au contraire une certaine forme de ductilité. Dans les premiers temps de la déformation, un palier de contrainte est observé avant une augmentation importante de la charge, traduisant la densification du matériau. Enfin, en compression parallèle au fil, la rupture se fait par localisation des déformations dans une bande de cisaillement. La bande de cisaillement est initiée à cause de la présence des cellules radiales du bois qui introduisent des défauts dans l'alignement des fibres longitudinales (figure 1b). Ce phénomène a été largement documenté dans la littérature à travers l'expérimentation et la modélisation [1,2].

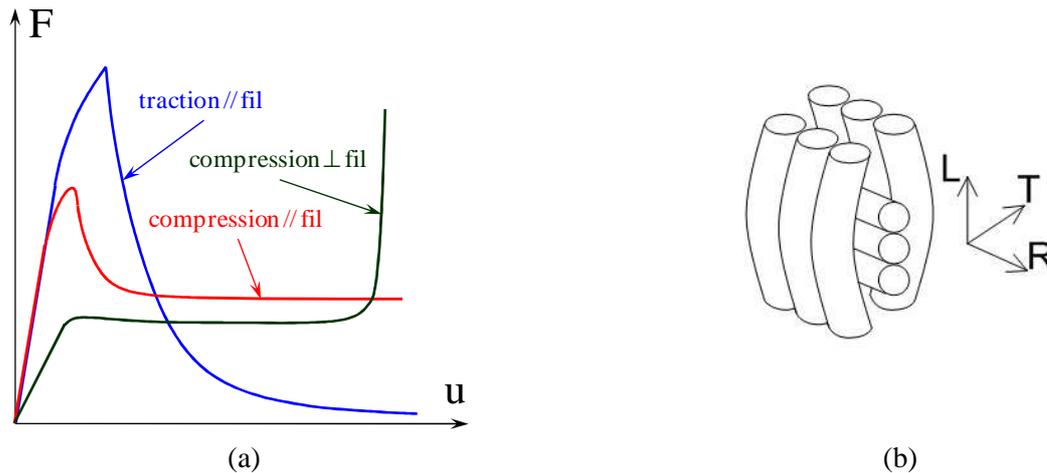


FIG. 1 – (a) Comportements du bois, (b) Désalignement des fibres du bois en raison des rayons ligneux.

Dans le travail qui suit, les processus de rupture du bois seront étudiés sous l'effet de deux états de contraintes apparaissant fréquemment dans les structures bois, à savoir la compression et la traction parallèles au fil. On réalisera cette étude dans les conditions d'un état de déformations planes dans le plan  $LT$  du bois. D'abord, dans la section 2, les deux mécanismes de rupture associés à ces deux états de contraintes seront détaillés et formulés dans le cadre d'une approche continue de la fissuration. Deux critères distincts seront utilisés pour représenter les deux modes de rupture en utilisant le formalisme de la plasticité. Ensuite, dans la section 3, le modèle sera généralisé aux grandes transformations en utilisant une dérivée objective basée sur la rotation des fibres au cours de la déformation, puis l'implémentation algorithmique dans le code éléments finis Abaqus sera présentée, avec une attention particulière apportée aux problématiques liées à l'objectivité des résultats et à la convergence. Enfin, dans la section 4, une colonne imparfaite sous compression longitudinale sera simulée et son comportement post-rupture sera analysé à l'échelle de la structure, ainsi que des fibres où les mécanismes élémentaires de fissuration trouvent leur origine.

## 2 Mécanismes de rupture en traction/compression parallèles au fil

La rupture du bois en traction parallèle au fil (système de propagation de fissure  $LT$ ) est un phénomène complexe dans la mesure où plusieurs mécanismes se superposent. Dans ce cas, l'hypothèse du mode I (plan de la fissure perpendiculaire à la charge) n'est pas respectée et on observe plutôt un chemin de fissuration en zig-zag (figure 2a). Ce phénomène s'explique par des résistances du bois souvent voisines pour la traction et le cisaillement dans la direction longitudinale [3]. La fissure peut bifurquer dans un plan ou l'autre selon les variations des propriétés locales du matériau. Dans un souci de simplification pour ce mode particulier, seule une ténacité apparente, correspondant à la superposition des multiples mécanismes, est considérée [4]. Concrètement, on évalue la ténacité en mesurant l'énergie à rupture d'une éprouvette entaillée soumise, par exemple, à un essai de flexion [5]. La courbe force-déplacement obtenue dans les conditions d'un tel chargement met en évidence une chute brutale et importante de la résistance du matériau, caractéristique d'un comportement fragile. Dans le cas de la compression parallèle au fil, le mécanisme de rupture est tout autant complexe et trouve son origine dans l'existence des cellules radiales du bois. Celles-ci provoquent localement des perturbations dans l'alignement des cellules longitudinales du bois et initient un micro-flambement de ces dernières localisé dans une bande inclinée (figure 2b). Dans cette bande, un état de contraintes complexe règne, combinant à la fois cisaillement et traction transversale à l'origine d'une microfissuration en mode mixte I/II (système de propagation de fissure  $TL$ ). Les caractéristiques de la bande de cisaillement (épaisseur, orientation, etc.) sont propres à chaque essence de bois. Sous ce chargement, la courbe force-déplacement est caractérisée par plusieurs phases. D'abord la contrainte atteint une valeur pic, puis elle chute de manière plus ou moins importante jusqu'à un palier auquel l'écoulement se poursuit. La valeur de la contrainte pic dépend directement de la résistance en cisaillement du bois et du défaut d'alignement des fibres [6]. Pour décrire l'adoucissement dans le comportement d'un matériau suite à l'apparition de fissures, on adopte ici l'approche de la fissure diffuse (*smear-crack approach*). Dans cette approche, on traite la fissure de manière implicite en interprétant la discontinuité du champ de déplacement

comme un paramètre de type déformation plastique et la résistance résiduelle comme une contrainte d'écoulement plastique.



FIG. 2 – (a) Rupture en flexion 3 points, (b) Bande de cisaillement apparue lors d'une compression.

On peut ainsi utiliser les concepts de la plasticité pour obtenir l'évolution de la déformation au cours du chargement [7]. Les surfaces de charge, correspondant aux deux mécanismes étudiés, sont données par :

$$f_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \sigma_L - q_L \leq 0 \quad \text{et} \quad f_2(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = -(\sigma_T - q_T - a)^2 + \frac{\tau_{LT}^2}{\tan^2 \varphi} + a^2 \leq 0 \quad (1)$$

où  $\sigma_L$  représente la contrainte dans la direction du fil,  $\sigma_T$  la contrainte dans la direction perpendiculaire au fil (direction tangentielle du bois) et  $\tau_{LT}$  la contrainte de cisaillement dans le plan  $LT$  du bois. Les paramètres  $q_L$  et  $q_T$  sont les contraintes d'écoulement plastique (résistances actualisées du matériau) dans les directions  $L$  et  $T$ , tandis que le paramètre  $a$  est lié à la résistance actualisée en cisaillement  $q_S$ . Les déformations plastiques associées sont déduites par la règle de normalité de l'écoulement :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_L^p &= \Delta \dot{u}_L / \ell_c = \dot{\lambda}_1 \partial f_1 / \partial \sigma_L \\ \dot{\epsilon}_T^p &= \Delta \dot{u}_T / \ell_c = \dot{\lambda}_2 \partial f_2 / \partial \sigma_T \\ \dot{\epsilon}_{LT}^p &= \Delta \dot{u}_S / \ell_c = \dot{\lambda}_2 \partial f_2 / \partial \tau_{LT} \end{aligned} \quad (2)$$

où  $\Delta u_L$  est l'ouverture d'une fissure perpendiculaire au fil, et  $\Delta u_T$  et  $\Delta u_S$  sont respectivement l'ouverture et le glissement d'une fissure parallèle au fil. Le premier saut de déplacement est associé à une fissure perpendiculaire au fil et se propageant en mode I lors d'une traction dans la direction  $L$ , tandis que les sauts de déplacement suivants sont associés à une fissure parallèle au fil et se propageant en mode mixte I/II dans la bande de cisaillement lors d'une compression dans la direction  $L$ . On remarque l'introduction dans l'équation (2) d'une longueur caractéristique  $\ell_c$  pouvant être assimilée à l'épaisseur d'une zone sur laquelle on peut répartir les effets causés par la présence de la fissure. Concrètement, cette longueur caractéristique permet de définir les déformations plastiques utilisées dans l'approche continue. Les multiplicateurs plastiques  $\dot{\lambda}_\alpha$ , avec  $\alpha = \{1, 2\}$ , vérifient à chaque instant les conditions de Kuhn-Tucker :

$$\dot{\lambda}_\alpha \geq 0, \quad f_\alpha(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0, \quad \dot{\lambda}_\alpha f_\alpha(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (3)$$

Le comportement adoucissant, résultant du développement de fissures, est décrit à l'aide des énergies dissipées dans les différents modes que l'on modélise. Ces énergies, calculées de manière analogue à ce que l'on calculerait en plasticité classique, sont normalisées par l'énergie à rupture dans le mode associé. Ces rapports permettent de définir les variables scalaires,  $\xi_{LT}^I$ ,  $\xi_{TL}^I$  et  $\xi_{TL}^{II}$ , représentant le niveau de dégradation du matériau dans chacun des modes considérés dans le processus d'endommagement. Les valeurs des énergies à rupture des différents modes, ainsi que celles des résistances initiales associées, correspondent au bois d'épicéa, c.-à-d.  $G_{f,LT}^I = 1.65 \text{ N.mm}^{-1}$ ,  $G_{f,TL}^I = 0.23 \text{ N.mm}^{-1}$ ,  $G_{f,TL}^{II} = 0.68 \text{ N.mm}^{-1}$ ,  $q_{L0} = 65 \text{ MPa}$ ,  $q_{T0} = 12.4 \text{ MPa}$ ,  $a_0 = 25.62 \text{ MPa}$ . On peut ensuite actualiser, en cours de déformation, les résistances du bois dans les différentes directions par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
q_L &= (1 - \kappa_L)q_{L0}, \quad \kappa_L = \min(1, \xi_{LT}^I) \\
q_T &= (1 - \kappa_T)q_{T0}, \quad \kappa_T = \min(1, \xi_{TL}^I + \xi_{TL}^{II}) \\
a &= (1 - \kappa_a)a_0, \quad \kappa_a = \min(1, \xi_{TL}^{II})
\end{aligned} \tag{4}$$

### 3 Extension du modèle aux grandes transformations

Au cours du processus de déformation, des non linéarités géométriques apparaissent en raison des grands déplacements (par exemple, la rotation des fibres dans la bande de cisaillement est importante). Pour conserver un formalisme relativement simple et semblable à celui de la plasticité en transformations infinitésimales, on utilise une formulation en vitesse avec la loi hypo-élastique suivante :

$$\sigma^{\nabla} = C : (D - D^p) \tag{5}$$

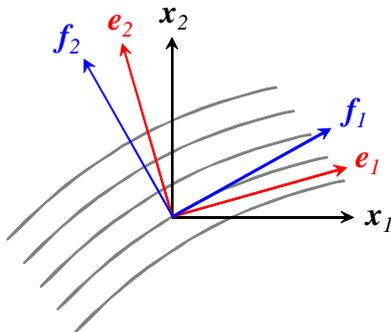
où  $\sigma^{\nabla}$  est une dérivée objective du tenseur des contraintes (celles de Jaumann et Green-Naghdi sont disponibles dans le code de calcul Abaqus),  $C$  est le tenseur d'élasticité, et  $D = D^e + D^p$  est la partition du taux de déformation en partie élastique et partie plastique. Le choix de la dérivée objective est crucial car, dans le cas des matériaux fibreux avec une direction forte d'anisotropie, il convient de suivre précisément la direction des fibres au cours de la déformation (figure 3a) ; ce que ne font pas les dérivées objectives usuelles qui sont basées sur une rotation moyenne de la matière. Le suivi de la direction d'anisotropie, à l'aide d'une dérivée objective basée sur la rotation des fibres, permet donc d'appliquer correctement, dans le repère des fibres et dans sa forme spécifique, l'opérateur de comportement [8]. Cette approche a été appliquée avec succès pour le bois [9]. La loi de comportement, dans un tel cas, s'écrit :

$$\sigma^{\nabla F} = C : (D - D^p) \text{ avec } \sigma^{\nabla F} = \Phi \cdot \left( \frac{d}{dt} (\Phi^T \cdot \sigma \cdot \Phi) \right) \cdot \Phi^T \tag{6}$$

où  $\sigma^{\nabla F}$  est la dérivée objective du tenseur des contraintes basée sur la rotation  $\Phi$  des fibres. Cette rotation se calcule à partir de la direction actuelle des fibres,  $f_1 = F \cdot f_1^0 / \|F \cdot f_1^0\|$  avec  $F$  le gradient de transformation et  $f_1^0$  la direction initiale des fibres. Les autres directions matérielles sont déterminées : (i) en projetant la deuxième direction, réactualisée par  $F$ , dans le plan normal à  $f_1$ , puis en la normalisant, (ii) et en déduisant la troisième direction de telle sorte à obtenir une base orthonormée actuelle dans laquelle la loi de comportement peut être écrite à chaque incrément. Dès lors, on peut intégrer l'équation (6) sur un incrément de temps  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  en utilisant la formule de Hugues & Winget [10] :

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta t C_{n+1/2} : D_{n+1/2}^e \tag{7}$$

Les quantités tensorielles intervenant dans la formule sont exprimées dans la base tournée par la rotation définie plus haut, à l'instant indiqué. Il faut noter que le tenseur d'élasticité, toujours écrit dans la base  $\{f_i\}$  liée aux fibres, reste constant au cours de la transformation. L'implémentation de la formule d'actualisation des contraintes dans le code de calcul Abaqus obéit à l'algorithme illustré sur la figure 3b.



(a)

#### ALGORITHME GÉNÉRAL

- incrément de déformation fourni par le code
- calcul de la rotation associée à la base de calcul du code,  $A_{n+1}$
- calcul de la rotation associée à la base matérielle du bois,  $\Phi_{n+1}$
- déduction de la matrice de passage entre les deux bases,  $\Theta_{n+1}$
- déduction de l'incrément de déformation dans la base matérielle à partir de celui fourni par le code,  $\Delta \epsilon_{n+1/2}$
- actualisation des contraintes dans la base matérielle à partir de la formule (7),  $\sigma_{n+1}$
- retour des contraintes dans la base de calcul du code

(b)

FIG. 3 – (a) Base des fibres et base du code de calcul, (b) Algorithme général implémenté dans Abaqus.

Dans l'implémentation numérique du modèle, une attention particulière est portée à la modélisation objective de la localisation des déformations afin de limiter la dépendance des résultats à la discrétisation. L'introduction de la longueur interne caractéristique  $\ell_c$ , définie précédemment, permet d'atténuer ce problème [9]. Pratiquement, cette longueur est prise égale à la taille d'un élément fini dans la direction perpendiculaire à la direction de la fissure. On peut montrer qu'il existe une valeur limite de la longueur caractéristique au-delà de laquelle la solution n'est plus unique et la convergence n'est plus assurée. La régularisation visqueuse offre une robustesse supplémentaire à l'algorithme de calcul des contraintes en améliorant la convergence numérique lors de l'instabilité matérielle accompagnant la réponse du matériau adoucissant. Dans ce but, une formulation visco-plastique, de type Duvaut-Lions [11], permet de réécrire les équations d'évolution comme :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{1}{\mu} \mathbf{C}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*), \quad \dot{\mathbf{q}} = -\frac{1}{\mu} (\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) \quad (8)$$

où  $\mu$  est un paramètre de type viscosité,  $\dot{\varepsilon}^{vp}$  est le taux de déformation visco-plastique et le couple  $(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{q}^*)$  représente la solution du problème de l'élasto-plasticité indépendante du temps, traité précédemment.

#### 4 Simulation du flambement d'une colonne en bois

Pour illustrer les mécanismes de rupture modélisés dans cette étude, on simule le comportement d'une poutre soumise à un effort de compression dans la direction du fil. Pour initier plus facilement l'instabilité globale de la structure, une imperfection géométrique est introduite dans la poutre à l'échelle macroscopique. L'ajout de l'imperfection globale constitue une solution efficace pour obtenir le comportement post-flambement de la colonne, mais permet aussi qu'une bifurcation, difficile à traiter numériquement, apparaisse. La réponse endommageable de la poutre sous compression peut ainsi être suivie tout au long du chargement. Quant à l'initiation de la bande de cisaillement, elle est facilitée en introduisant une imperfection matérielle à l'échelle microscopique (perturbation locale de la direction matérielle). Pour ce faire, on donne aux fibres, situées dans une bande préexistante, une orientation matérielle selon la fonction sinusoïdale suivante :

$$\phi = \frac{1}{2} \phi_0 \left[ \cos \left( \frac{2\pi \cos \beta}{b} (x_1 + x_2 \tan \beta) \right) + 1 \right] \quad (9)$$

où  $(x_1, x_2)$  sont les coordonnées du point matériel dans le repère global,  $\beta$  est l'orientation de la bande de cisaillement et  $b$  sa largeur, tandis que  $\phi_0$  représente le désalignement initial des fibres causé par les cellules radiales ( $\beta = 21.6^\circ$ ,  $b = 0.7 \text{ mm}$ ,  $\phi_0 = 15.6^\circ$ ). La procédure utilisée pour une simulation complète se décompose en deux parties : une analyse modale est d'abord menée pour déterminer les modes de flambement de la poutre parfaite, puis elle est suivie d'une analyse post-flambement de la poutre présentant une imperfection générée à l'aide des premiers modes. Afin de ne pas s'écarter du cas de la colonne rectiligne, l'imperfection géométrique introduite reste très faible (0.01% de la longueur totale de la colonne).

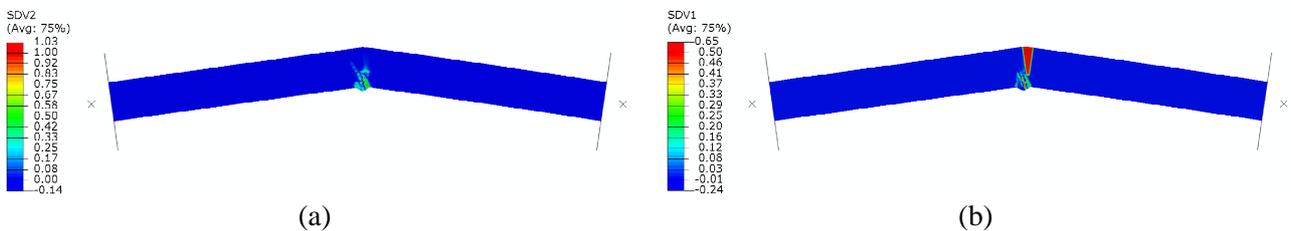


FIG. 4 – Distribution de l'endommagement : (a)  $\xi_{TL}^{II}$  (bande de cisaillement), (b)  $\xi_{LT}^I$  (rupture en traction).

Les figures 4a et 4b illustrent, à la rupture, le niveau d'endommagement dû à la compression et à la traction, respectivement. Au départ, la compression est prédominante dans le matériau avec la formation partielle d'une bande de cisaillement. Avec la déflexion, les contraintes de traction augmentent significativement dans la partie tendue, provoquant la rupture des fibres. Une poutre peu élancée, moins sujette au flambement, sera rompue par compression avec la formation d'une bande de cisaillement complète. En revanche, une poutre davantage élancée flambera en développant une bande partielle dont l'étendue restera confinée à la

zone où la compression a été suffisante. La figure 5a représente, pour différentes longueurs de colonnes, l'évolution du chargement axial en fonction de la déflexion latérale mesurée au centre. La contrainte de flambement, définie comme étant la contrainte maximale atteinte lors du chargement, est tracée, sur la figure 5b, en fonction de l'élancement  $\lambda$  de la colonne selon différents modèles théoriques du flambement (Euler, Rankine-Gordon et Perry-Robertson). On rappelle que l'élancement est défini comme le rapport de la longueur de la poutre sur le rayon de giration,  $\lambda = L/r$ , avec  $r^2 = I/S$  où  $I$  est le moment quadratique et  $S$  la section. Les résultats du calcul éléments finis sont en très bon accord avec les formules classiques.

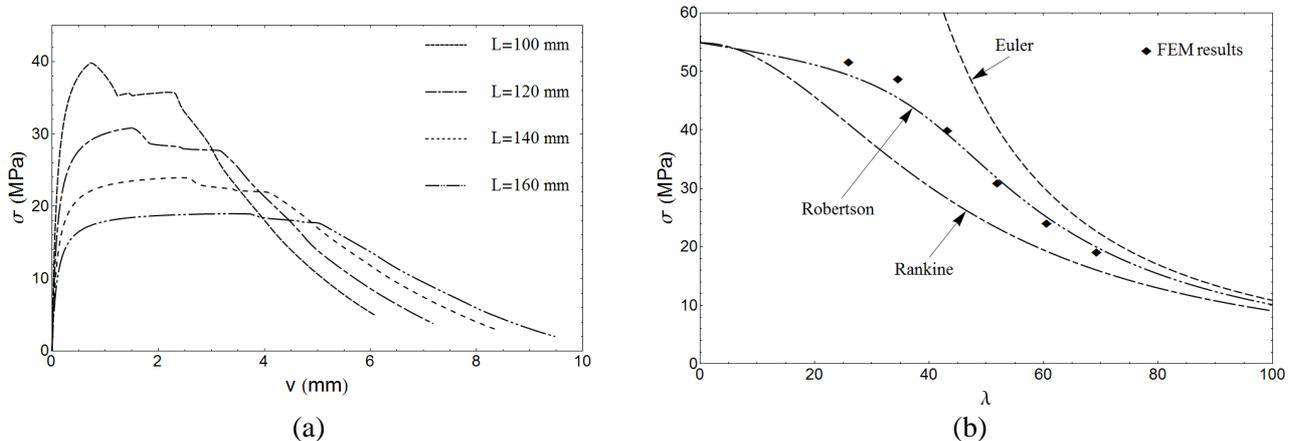


FIG. 5 – (a) Courbe contrainte axiale-déflexion latérale, (b) Comparaison entre modèles théoriques et EF.

## 5 Conclusion

Un critère multi-surface a été utilisé pour modéliser les modes de rupture fragile du bois dans le cadre d'une approche de la fissuration diffuse. Empruntant une formulation propre à la plasticité, l'implémentation d'une telle approche dans un code de calcul éléments finis est relativement aisée. L'extension aux grandes transformations repose sur l'utilisation d'une dérivée objective adaptée aux milieux fibreux, car permettant le suivi rigoureux de la direction forte d'anisotropie au cours de la rotation des fibres. Le modèle est validé dans le cas du flambement d'une poutre où se produisent, à des stades différents, rupture par compression (formation d'une bande de cisaillement) et rupture par traction (fissure perpendiculaire au fil).

## Références

- [1] Poulsen J.S., Moran P.M., Shih C.F., Byskov E., Kink band initiation and band broadening in clear wood under compressive loading, *Mech Mater*, 25, 67-77, 1997.
- [2] Benabou L., Predictions of compressive strength and kink band orientation for wood species, *Mech Mater*, 42, 335-343, 2010.
- [3] Mackenzie-Helnwein P., Eberhardsteiner J., Mang H.A., A multi-surface plasticity model for clear wood and its application to the finite element analysis of structural details, *Comput Mech*, 31, 204-218, 2003.
- [4] Triboulot P., Jodin P., Pluvinage G., Validity of fracture mechanics concepts applied to wood by finite element calculation, *Wood Sci Technol*, 18, 51-58, 1984.
- [5] Daudeville L., Fracture in spruce: experiment and numerical analysis by linear and non linear fracture mechanics, *Holz Roh Werkst*, 57, 425-432, 1999.
- [6] Benabou L., Kink band formation in wood species under compressive loading, *Exp Mech*, 48, 647-656, 2008.
- [7] Weihe S., Kröplin B., De Borst R., Classification of smeared crack models based on material and structural properties, *Int J Solids Struct*, 35, 1289-1308, 1998.
- [8] Boisse P., Gasser A., Hagege B., Billoet J.L., Analysis of the mechanical behavior of woven fibrous material using virtual tests at the unit cell level, *J Mater Sci*, 40, 5955-5962, 2005.
- [9] Benabou L., Finite Strain analysis of wood species under compressive failure due to kinking, *Int J Solids Struct*, 49, 408-419, 2012.
- [10] Hughes T.J.R., Winget J., Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis, *Int J Numer Meth Eng*, 15, 1862-1867, 1980.
- [11] Duvaut G., Lions J.L., *Les inéquations en Mécanique et en Physique*, Paris, Dunod, 1972.