

Écoulement viscoélastique de Couette-Taylor en corotation différentielle : expérience et analogie avec l'instabilité magnétorotationnelle

Y. BAI, F. TOUMACHE, O. CRUMEYROLLE, I. MUTABAZI

Laboratoire ondes et milieux complexes (LOMC), UMR 6294 CNRS-Université du Havre, 53 rue de Prony, CS80540, F-76058 Le Havre cedex

Résumé :

Ogilvie et al. ont proposé en 2003 d'utiliser des solutions de polymère comme analogue d'un fluide magnétique. Ils ont identifié, par une étude de stabilité linéaire, un nouveau mode d'instabilité qui serait analogue à l'instabilité magnétorotationnelle dans certains disques d'accrétion. Une seule étude expérimentale antérieure existe, menée par Boldyrev et al. (2009). Mais celle-ci s'écarte de la prédiction d'Ogilvie à la fois par les paramètres expérimentaux employés et de par certains des résultats. Nous étudions expérimentalement le cas des solutions aqueuses de polyoxyéthylène+polyéthylène glycol en corotation différentielle et présentons de nouveaux résultats. Le mode critique observé est non-axisymétrique, et se distingue bien de l'instabilité élastique.

Abstract:

Ogilvie et al. have proposed in 2003 an analogy between polymer solutions and magnetic fluids to explain the transport of angular momentum in an accretion disk. They identified a new form of instability which is comparable to the magnetorotational instability in certain accretion disks. Up to now, only one experimental study of this possible analogy has been conducted by Boldyrev et al. (2009). But it deviates from the Ogilvie's predictions in both the experimental parameters and the results. We investigate experimentally the case of aqueous solutions of polyoxyethylene+polyethylene glycol in differential corotating Couette-Taylor system. The observed critical mode is non-axisymmetric as predicted by Ogilvie et al. and we have verified that it is distinct from the elastic instability.

Mots clefs : viscoélastique, Couette-Taylor, instabilité, quasi-képlérien

1 Introduction

L'écoulement de Couette-Taylor est observé quand une couche de fluide est emprisonnée entre deux cylindres en rotation différentielle. Pour les faibles vitesses de rotation, l'écoulement est stationnaire et purement azimutal $\vec{v} = v_\theta(r)\hat{\theta}$; c'est l'écoulement de Couette circulaire. Dans le contexte de la théorie des écoulements non-visqueux, le critère dit de Rayleigh prédit que pour un tel écoulement, si le carré de la circulation de la vitesse soit $r^2 v_\theta^2$ est partout croissant, alors l'écoulement est stable. Or l'intérêt en astrophysique pour ce type d'écoulement a été perçu dès 1981 [1]. En particulier l'étude de l'influence de la rotation différentielle sur le transport du moment angulaire dans le contexte des disques d'accrétion a conduit à un grand intérêt [2, 3, 4] pour les études expérimentales portant sur les écoulements newtoniens de Couette-Taylor en rotation différentielle, tout particulièrement dans la situation stable du point de vue du critère de Rayleigh. En effet l'équilibre entre la gravitation, due à un objet central, et la force centrifuge, ressentie dans le disque en rotation, admet une solution dite képlérienne pour laquelle le profil de vitesse purement azimutal vérifie $v_\theta \propto r^{-1/2}$. Le pendant hydrodynamique est le régime dit « quasi-képlérien », pour lequel le profil azimutal est un profil hydrodynamique en $v_\theta = Ar + B/r$ mais avec des conditions aux limites vérifiant la loi képlérienne en $r^{-1/2}$. On peut vérifier qu'un tel profil, corotatif mais qui présente une vitesse de rotation angulaire plus rapide pour le cylindre intérieur que pour le cylindre extérieur, est stable du point de vue du critère de Rayleigh. Indépendamment du rôle de la viscosité et de la turbulence tel qu'étudié dans cette approche newtonienne, l'étude des disques d'accrétion se porte aussi sur les effets

magnétohydrodynamiques. En effet l'importante énergie potentielle gravitationnelle libérée au fil de l'accrétion excite le gaz du disque, ce qui peut conduire, notamment pour les disques dit « chauds », à l'état plasma. Dans ce contexte l'instabilité magnétorotationnelle [5] pourrait jouer un rôle clef dans la dynamique de ces disques. Ceci demande de s'intéresser au problème du point de vue de la magnétohydrodynamique. Toutefois la réalisation d'expériences de Couette-Taylor avec des métaux liquides ou des plasmas présente de nombreux inconvénients.

Toutefois Ogilvie *et al.* ont proposé d'utiliser des solutions de polymère comme analogue d'un fluide magnétique [6]. L'étirement des polymères se compare alors à l'étirement des lignes de champ magnétique. L'analogie se base sur le modèle viscoélastique d'Oldroyd-B pour lequel, en sus du bilan de quantité de mouvement (1) où apparait le nombre de Reynolds Re , il faut introduire un équation dite constitutive (2), qui régit le tenseur des contraintes polymérique $\bar{\bar{T}}$:

$$Re(\partial\bar{U}/\partial t + \bar{U} \cdot \nabla\bar{U}) = -\nabla P + \nabla \cdot \bar{\bar{T}} + (1 - S)\nabla^2\bar{U} \quad (1)$$

$$\bar{\bar{T}} + Wi \left[\partial\bar{\bar{T}}/\partial t + \bar{U} \cdot \nabla\bar{\bar{T}} - (\nabla\bar{U})^\dagger \cdot \bar{\bar{T}} - \bar{\bar{T}} \cdot \nabla\bar{U} \right] = S[\nabla\bar{U} + (\nabla\bar{U})^\dagger] \quad (2)$$

où Wi est le nombre de Weissenberg, analogue élastique du nombre de Reynolds, et S le rapport de la contribution des polymère à la viscosité, η_p , sur la viscosité totale, $\eta = \eta_s + \eta_p$, de la solution. L'équation constitutive (2) devient, en décalant d'une composante isotrope *ad hoc*, soit $\bar{\bar{T}}_p = \bar{\bar{T}} + \frac{S}{Wi}\bar{\bar{I}}$:

$$\partial\bar{\bar{T}}_p/\partial t + \bar{U} \cdot \nabla\bar{\bar{T}}_p - (\nabla\bar{U})^\dagger \cdot \bar{\bar{T}}_p - \bar{\bar{T}}_p \cdot \nabla\bar{U} = -\frac{1}{Wi} \left(\bar{\bar{T}}_p - \frac{S}{Wi}\bar{\bar{I}} \right) \quad (3)$$

Or le tenseur des contraintes magnétique de Maxwell vérifie après réécriture une équation de même membre gauche que (3), et présentant un membre droit qui disparaît si le Reynolds dit magnétique diverge. Il y'a alors une analogie avec (3) si le nombre de Weissenberg Wi y diverge.

Au-delà de cette analogie pour les grandes valeurs des paramètres de contrôles, Ogilvie *et al.* ont aussi discuté l'analogie pour des valeurs intermédiaires [6], et démontré [6,7] par analyse de stabilité linéaire que la rotation différentielle avec des conditions aux limites képlériennes, *i.e.* le régime quasi-képlérien, conduit à un nouveau mode d'instabilité viscoélastique, distincts des mode observés jusque-là, et qui peut être analogue à l'instabilité magnétorotationnelle.

Une seule étude expérimentale antérieure existe, menée par Boldyrev *et al.* [8]. Celle-ci s'écarte de [7] par les paramètres expérimentaux employés car le ratio $\eta_p/\eta_s \gg 1$ alors que [7] ne présente de résultats que pour $\eta_p/\eta_s = 1$. Le caractère rhéofluidifiant des solutions les écarte du contexte du modèle d'Oldroyd-B, qui ne décrit pas la rhéofluidification. Certains des résultats de [8] sont en contradiction avec la nature attendue du motif, avec un mode critique axisymétrique alors que le nombre d'onde azimutal est prédit non nul par [7]. Les modes d'instabilité observés sont qualifiés d'élasto-rotationnels.

Aussi étudions-nous expérimentalement le cas des solutions de polyoxyéthylène (POE) de grande masse molaire dans un mélange newtonien fait d'eau et de polyéthylène glycol de faible masse molaire. Ces solutions présentent une faible rhéofluidification, ce qui les rapproche du modèle d'Oldroyd-B.

En régime quasi-Képlérien, la rotation et les deux paramètres de contrôle supplémentaires que constituent les concentrations nous permettent d'explorer l'espace (Re, Wi, S) , sachant que Wi/Re est le rapport du temps de relaxation sur le temps de diffusion visqueuse et est, comme S , constant pour une manipulation donnée. La cellule de Couette-Taylor employée présente un rapport des rayon intérieur sur extérieur $a/b = 0,8$ et un rapport d'aspect hauteur sur entrefer $H/d = 38$. La visualisation est réalisée à l'aide de Kalliroscope et d'une section droite obtenue à l'aide d'une nappe laser dans le plan (r, z) , où z est la direction de l'axe des cylindres. Un cuve rectangulaire entoure le cylindre extérieur, à la fois pour le contrôle thermique mais aussi pour limiter les déformations d'images provoquées par le cylindre extérieur en verre. A partir du film de la section droite au cours du temps $I(r, z, t)$ sont extraits à une position r fixée des diagrammes spatio-temporels $I(z, t)$.

2 Résultats

Nous présentons des résultats préliminaires obtenus avec des solutions pour lesquelles le ratio η_p/η_s varie de 0,33 à 0,5. Si un seul cylindre tourne, nous retrouvons un mode critique typique des instabilités purement élastiques. Par contre en régime quasi-képlérien nous observons bien un mode critique distinct du régime purement élastique. Nous présentons figure 1(b-c) un mode de chaque type. On remarque que le nouveau mode, que nous qualifierions d'instabilité élasto-rotationnelle en première approximation est bien non-axisymétrique, et se distingue bien de l'instabilité purement élastique. Il parait en particulier plus régulier que ce dernier.

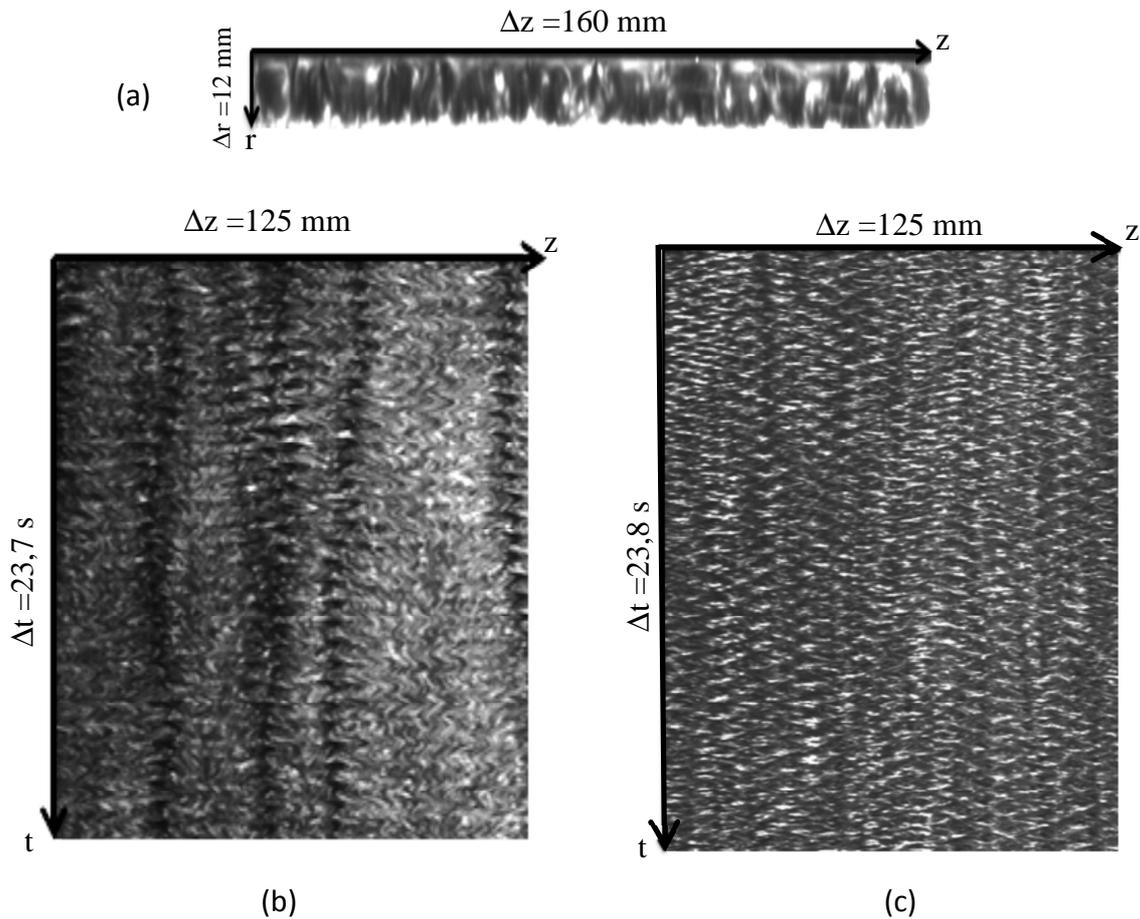


FIG. 1 - (a) exemple de section (z, r) . Exemple de diagrammes spatio-temporel au seuil de l'instabilité pour :
 (b) instabilité purement élastique ($\Omega_i = 360^\circ/\text{s}$, $\Omega_o = 0^\circ/\text{s}$), (c) instabilité élasto-rotationnelle ($\Omega_i = 843^\circ/\text{s}$, $\Omega_o = 603^\circ/\text{s}$)

Nous rapportons figure 2 les spectres à deux dimensions obtenus pour les diagrammes spatio-temporels présentés figure 1, ainsi que les spectres temporels associés, obtenus par la prise de moyenne du spectre 2-d en espace. On y observe que le spectre temporel pour le mode élasto-rotationnel présente une structure rappelant celle des spectres de modulation de fréquence. Au contraire le mode purement élastique possède un étalement spectral plus continu, ce qui confirme le caractère plus régulier du mode élasto-rotationnel.

Les variations de S étant limitées, nous établissons figure 3 le diagramme de stabilité projeté dans le plan (Re, Wi) pour le mode élasto-rotationnel. Chaque expérience se présente dans ce plan comme une exploration depuis l'origine sur une ligne droite de pente donnée, ladite pente variant seulement d'une expérience à la suivante.

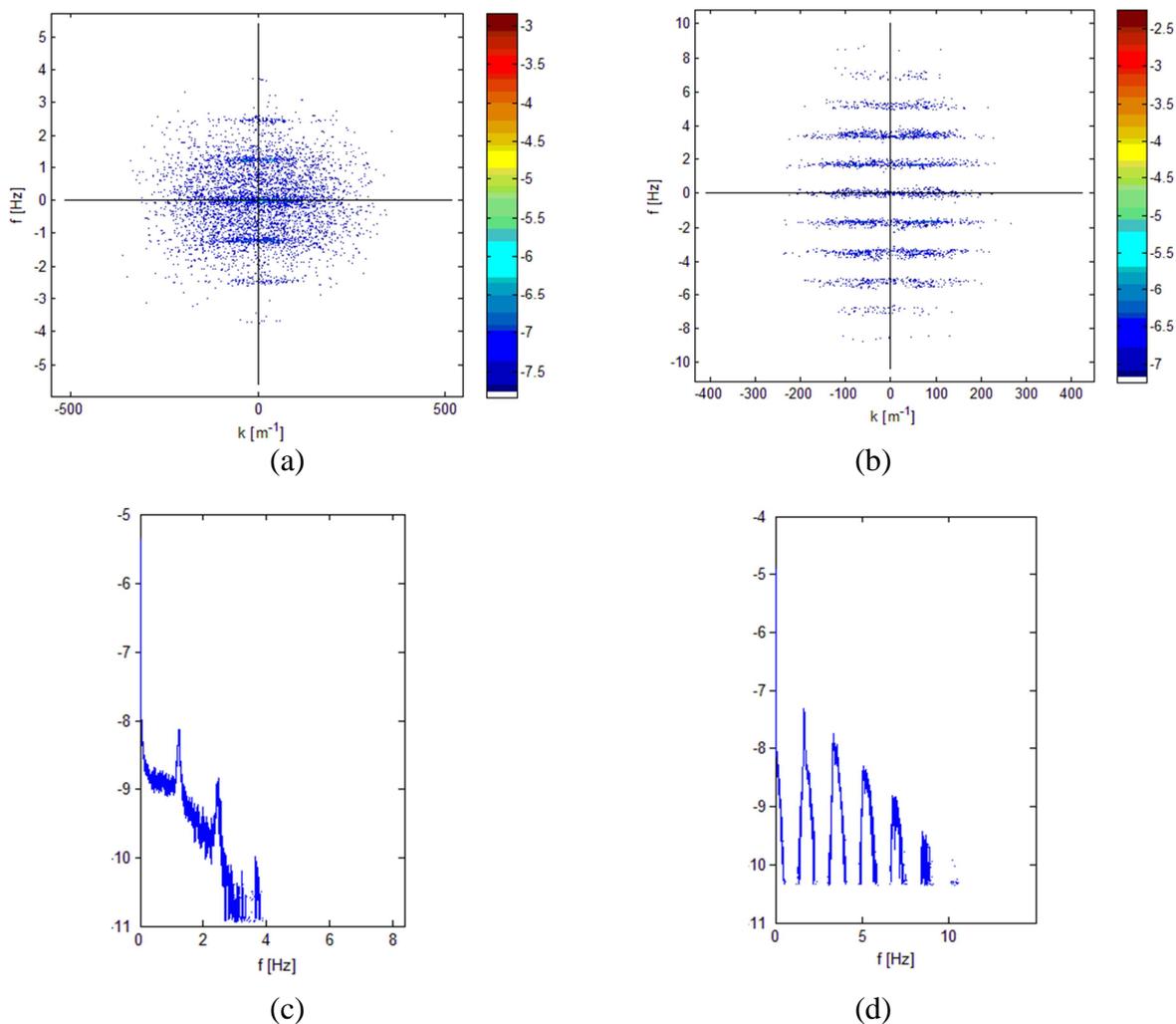


FIG. 2 - Spectre de puissance (en \log_{10}). (a) Spectre 2d du diagramme spatio-temporel au seuil de l'instabilité purement élastique. (b) Spectre 2d du diagramme spatio-temporel au seuil de l'instabilité élasto-rotationnelle (c) Spectre temporel du diagramme spatio-temporel au seuil de l'instabilité purement élastique. (d) Spectre temporel du diagramme spatio-temporel au seuil de l'instabilité élasto-rotationnelle.

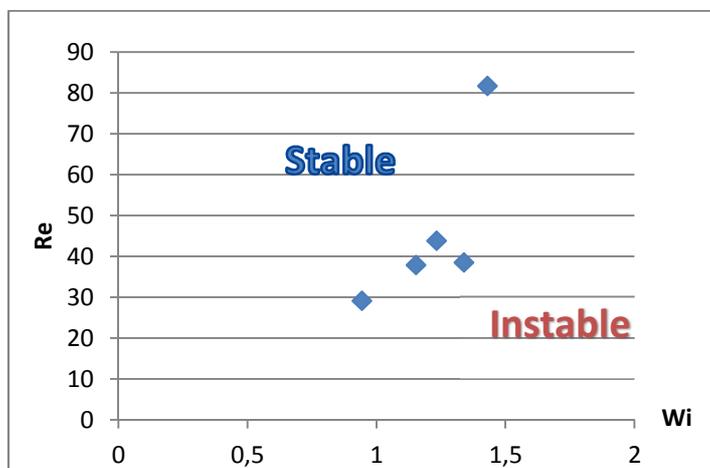


FIG. 3 - Diagramme de stabilité pour le mode d'instabilité élasto-rotationnel.

3 Discussion et conclusion

Le mode élasto-rotationnel observé dans ce travail présente un nombre de Reynolds critique (figure 3) qui croit en même temps que le nombre de Weissenberg critique. Ceci distingue nos résultats des prédictions de [7] et des résultats de [8]. En effet pour ce dernier, qui emploie des concentrations élevées de POE dans l'eau, les points critiques obtenus dans le plan (Re, Wi) sont $(14 ; 4,4)$, $(21 ; 2,8)$ et $(36 ; 1,9)$, soit une décroissance de la valeur critique du nombre de Weissenberg quand le nombre de Reynolds croit, ce qui est qualitativement la prédiction de [7].

Ainsi bien que nos solutions possèdent des valeurs du rapport η_p/η_s plus proches des résultats présentés par Ogilvie *et al.*, et bien que nous observons un mode d'instabilité non-axisymétrique, ce qui n'est pas toujours le cas dans [8], nos résultats restent distincts des travaux antérieurs.

Il paraît nécessaire d'étendre le champ des investigations, à la fois expérimentalement et aussi théoriquement. En effet les travaux d'Ogilvie *et al.* supposent l'hypothèse d'un petit entrefer ($a/b \rightarrow 1$) tandis que nos expériences sont réalisées pour un entrefer de 0,8. Ce point doit être adressé à la fois expérimentalement et théoriquement, afin de pouvoir comparer plus aisément expérience et théorie, et ceci d'autant plus que dans le contexte de l'analogie avec l'astrophysique, le rapport des rayons employé dans les études est souvent encore plus faible, jusqu'à par exemple 0,35 [2].

Références

- [1] Zeldovich Y. B., On the friction of fluids between rotating cylinders, *Proc. R. Soc. Lond. A* **374** (1981)
- [2] Ji H., Burin M., Shartman E., Goodman, J., Hydrodynamic turbulence cannot transport angular momentum effectively in astrophysical disks, *Nature* **444**(16), 343-346 (2006)
- [3] Richard D., Zahn J.P., Turbulence in differentially rotating flows. What can be learned from the Couette-Taylor experiment, *Astronomy and Astrophysics* **347**, 734-738 (1999)
- [4] Paoletti M.S., van Gils D.P.M., Dubrulle B., Sun C., Lohse D., Lathrop D.P., Angular momentum transport and turbulence in laboratory models of Keplerian flows, *Astronomy and Astrophysics* **547**, A64 (2012)
- [5] Balbus S.A., Hawley J.F., A powerful local shear instability in weak magnetized disks: linear analysis, *J.Astrophys.* **376**, 214-222 (1991). Voir aussi Balbus S.A., Hawley J.F., Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks, *Rev. Mod. Phys.*, **70**(1), 1-53 (1998)
- [6] Ogilvie G.I., Proctor M.R., On the relation between viscoelastic magnetohydrodynamical flows and their instabilities, *J. Fluid Mech.* **476**, 389-409 (2003)
- [7] Ogilvie G.I., Potter A.T., Magnetorotational-type instability in Couette-Taylor flow of a viscoelastic polymer liquid, *Phys. Rev. Let.* **100**, 074503 (2008)
- [8] Boldyrev S., Huynh D., Pariev V., Analog of astrophysical magnetorotational instability in a Couette-Taylor Flow of Polymer fluids, *Phys. Rev. E* **80**, 066310 (2009)