

# Analyse paramétrique des échanges d'énergie en turbulence barocline

A. Pieri, F.S. Godefert, C. Cambon<sup>a</sup>, A. Salhi<sup>b</sup>

a. *Lab. de mécanique des fluides et d'acoustique, École centrale de Lyon, Université de Lyon, France*

b. *Dép. de physique, Faculté des sciences de Tunis, Université de Tunis El Manar, Tunis, Tunisie*

## Résumé :

On considère les écoulements dans le contexte barocline, c'est à dire soumis aux effets combinés d'un champ de vitesse moyen cisailé verticalement, d'une stratification verticale stable, et d'une rotation d'ensemble, similaire à certaines situations présentes dans les écoulements atmosphériques. Ces trois mécanismes de distorsion résultent en une dynamique riche paramétrée par les nombres adimensionnels de Richardson et de Rossby, et pour certaines valeurs desquels il apparaît des instabilités symétriques ou baroclines, et des transferts d'énergie complexes entre champs de vitesse et de flottaison, avec un rôle particulier joué par la vorticité potentielle. Dans un cadre non linéaire, grâce à des simulations numériques directes, nous étudions les gammes paramétriques donnant lieu à une croissance de l'énergie cinétique turbulente, et analysons les mécanismes de transfert et de production associés.

## Abstract :

*We consider flows in the baroclinic context, i.e. submitted to a combination of vertically sheared mean velocity, of vertical stable stratification, and rotation. This situation is similar to that observed in atmospheric flows. The three distorting mechanisms produce a wealth of dynamical exchanges, parameterized by non dimensional numbers such as the Richardson and the Rossby numbers, for some values of which symmetrical or baroclinic instabilities can appear. The corresponding energy transfers between velocity and buoyancy are complex, in which potential vorticity plays an important role. In a non linear framework, with direct numerical simulations, we thus study the parametric ranges in which a growth of turbulent kinetic energy is expected, and we analyze the associated transfer and production mechanisms.*

**Mots clefs :** Barocline ; instabilités ; turbulence

## 1 Introduction

Le mécanisme barocline crée des structures turbulentes spécifiques via l'instabilité barocline, et contribue de manière importante aux transferts d'énergie dans la dynamique des écoulements géophysiques. Il est non seulement essentiel pour la prédiction du mouvement atmosphérique à grande échelle, mais aussi pour évaluer l'efficacité du mélange aux échelles plus petites. Le phénomène barocline résulte de la combinaison d'une rotation verticale de solide rigide avec un paramètre de Coriolis  $f = 2\Omega$ , d'un cisaillement de vitesse moyenne  $S = \partial_{x_2}\bar{U}_1$  et d'un gradient moyen vertical de densité stabilisant paramétré par la fréquence de Brunt-Väisälä  $N$ . De nombreuses études combinent deux de ces mécanismes, mais moins fréquemment les trois ensemble, en raison d'une complexité accrue qui requiert l'étude d'un espace paramétrique vaste, et nécessite de démêler les dynamiques respectives multiéchelles des modes d'énergies cinétique et potentielle, et de la vorticité potentielle. Pour cette raison, les géophysiciens ont d'abord utilisé une dynamique réduite sous la forme de modèles à base des équations quasi-géostrophiques (Charney, 1947 ; Eady, 1949) [3, 5].    notre connaissance peu d'études récentes ont porté sur la simulation numérique de la turbulence barocline, en systématisant l'ouverture de l'espace paramétrique.

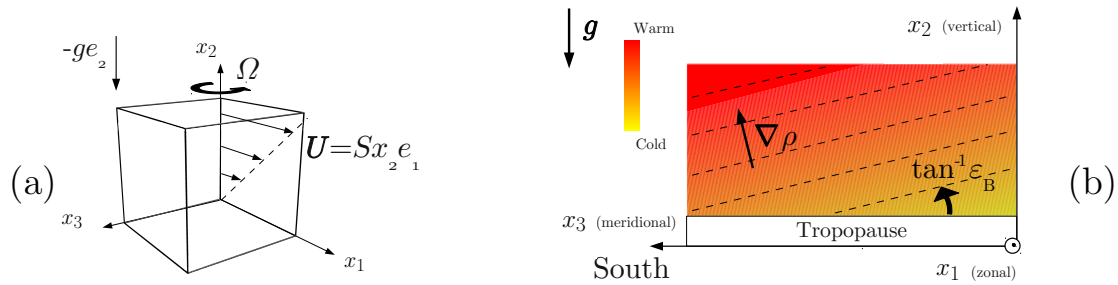


FIGURE 1 – (a) La configuration barocline. (b) Gradient de flottaison incliné en raison de l’ajustement géostrophique : exemple de la stratosphère inférieure barocline dans laquelle la stratification est stable (voir par exemple [2]).

Nous nous proposons ici d’étudier la turbulence homogène barocline par des simulations numériques directes (DNS), dans lesquelles l’écoulement de base tournant verticalement est constitué d’un cisaillement vertical de vitesse moyenne zonale, et d’un gradient stabilisant vertical de densité, tous trois uniformes (voir figure 1), ce qui correspond donc à une situation locale dans un écoulement atmosphérique qui, à plus grande échelle, peut présenter des inhomogénéités de ces valeurs moyennes. Dans ce contexte, un gradient horizontal de densité est également créé pour satisfaire les équations du vent thermique. Le jeu minimal de nombres adimensionnels sont les nombres de Richardson  $Ri = N^2/S^2$  et de Rossby  $Ro = S/f$  – ce dernier pouvant être remplacé par le paramètre de baroclinicité  $\varepsilon_B = Sf/N^2$  – qui combinent les paramètres de rotation, cisaillement, stratification ( $f, S, N$ ). Le paramètre de baroclinicité représente aussi le rapport entre les gradients horizontaux et verticaux de flottaison moyenne, et correspond aussi géométriquement à la pente des surfaces isodensité moyennes, ou isopycnes.

Les bornes d’instabilité pour des écoulements stratifiés cisailés ont été étudiées dans de précédents travaux en fonction du nombre de Richardson de gradient  $Ri$ . Les analyses linéaires non visqueuses fournissent la condition suffisante de stabilité  $Ri > 1/4$  pour un profil de vitesse moyen avec point d’inflexion [7, 6], ce qui correspond aux résultats expérimentaux [10]. L’analyse non linéaire par simulation numérique directe pour un écoulement stratifié cisailé sans point inflexionnel aboutit plutôt à une valeur du nombre de Richardson critique  $Ri > 0.17$ . Toutes ces études ne prennent cependant pas en compte l’effet d’une rotation d’ensemble, qui augmente la complexité paramétrique du problème.

Nous étendons donc ces travaux en incluant la rotation, et présentons dans la suite les limites d’instabilité obtenues par les DNS en liaison avec les approches linéarisées récentes [12, 8], et nous identifions les différentes régions du domaine  $(Ri, \varepsilon)$  dans lesquelles les mécanismes d’instabilité barocline ou inertielle de cisaillement sont prépondérants. Pour cela, nous nous appuyons sur les équations de bilan d’énergie.

## 2 Équations du champ moyen et des fluctuations

Le champ moyen incompressible est défini par

$$\bar{U}_1 = Sx_2, \quad \bar{b} = N^2x_2 + (\partial_{x_3}\bar{b})x_3, \quad \bar{\Omega} = \Omega e_2, \quad (1)$$

où  $\bar{U}_1$  est la vitesse moyenne longitudinale,  $\bar{b}$  la flottaison moyenne en présence des gradients de densité moyenne selon  $x_2$  et  $x_3$ , et la rotation alignée avec  $x_2$ . Les équations d’Euler stationnaires imposent la condition suivante afin de garantir l’homogénéité de l’écoulement :

$$0 = fS - \partial_{x_3}\bar{b}. \quad (2)$$

ce qui signifie que le champ moyen est homogène uniquement si le gradient transverse de densité est non nul tel que  $\partial_{x_3}\bar{b} = fS$ . Il compense ainsi la création de vorticité longitudinale en l’absence de gradient méridional (voir figure 2b). Cette condition d’admissibilité [11] est “l’ajustement géostrophique”. Son

pendant en l'absence de cisaillement a priori imposé dans l'écoulement est le "vent thermique" tel que

$$0 = f \partial_{x_2} \bar{U}_1 - \partial_{x_3} \bar{b},$$

de telle sorte que le gradient vertical de vitesse longitudinale ne peut être nul en présence de gradient transverse de densité et de rotation d'ensemble.

Une fois ce champ moyen établi, les équations pour les perturbations de vitesse-flottaison ( $\mathbf{u}, b$ ) autour de cet état moyen sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial \tau} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^* + (x_2^* \mathbf{e}_1) \cdot \nabla \mathbf{u}^* + \mathbf{u}^* \cdot \nabla (x_2^* \mathbf{e}_1) = \\ -\nabla p^* + \frac{1}{Re_L} \nabla^2 \mathbf{u}^* - \frac{1}{Ro} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{u}^* + Ri b^* \mathbf{e}_2, \\ \frac{\partial b^*}{\partial \tau} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla b^* + (x_2^* \mathbf{e}_1) \cdot \nabla b^* = -\mathbf{u}^* \cdot (\varepsilon_B \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2) + \frac{1}{Pr Re_L} \nabla^2 b^*. \end{aligned}$$

où les champs ont été adimensionnés, indiqués par \*, et le temps  $\tau = St$  correspond au cisaillement cumulé. Ces équations font apparaître quatre nombres sans dimension : le nombre de Rossby  $Ro = S/f$ , le nombre de Richardson de gradient  $Ri = N^2/S^2$ , le nombre de Prandtl  $Pr = \nu/\chi$  et le nombre de Reynolds  $Re_L = u_0 L/\nu$ . Le rapport du nombre de rotation  $R = 1/Ro$  et du nombre de Richardson fournit le paramètre de baroclinicité  $\varepsilon_B = R/Ri$ . Dans certaines gammes de  $Ri$  et  $\varepsilon_B$ , les instabilités symétriques et baroclines peuvent se manifester.

Nous résolvons ces équations par simulation numérique directe avec une méthode pseudo-spectrale dans laquelle le cisaillement est pris en compte par une méthode Lagrangienne : le maillage est déformé le long des trajectoires moyennes cisailées, selon la technique proposée par Rogallo [9]. Le désaliasing complet est réalisé comme décrit par Delorme [4], et un remaillage périodique est effectué [1]). Le code est MPI-parallèle, et utilise un schéma d'avancement temporel de type Runge-Kutta d'ordre 3, avec une forme rotationnelle du terme non linéaire. La description complète de la méthode et sa validation est faite dans [13].

### 3 Équations de bilan d'énergie

Le bilan d'énergie cinétique  $\mathcal{K}$  est (équations non adimensionnées à présent)

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} = P + B_v - \varepsilon_\nu, \quad (3)$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}, \quad P = -S \overline{u_1 u_2}, \quad B_v = \overline{b u_2}, \quad \varepsilon_\nu = \nu \overline{\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2}. \quad (4)$$

qui fait apparaître la production par le cisaillement, le couplage vitesse-flottaison, et la dissipation moléculaire. Le bilan d'énergie potentielle  $E_P$  est

$$\frac{\partial E_P}{\partial t} = -B_v - \varepsilon_B B_h - \varepsilon_P, \quad (5)$$

$$E_P = \frac{\overline{b b}}{2N^2}, \quad B_h = \overline{b u_3}, \quad \varepsilon_P = \frac{\chi}{N^2} \overline{\left( \frac{\partial b}{\partial x_k} \right)^2}. \quad (6)$$

qui fait apparaître le terme de couplage vitesse-flottaison symétrique de celui qui est inclut dans l'équation d'énergie cinétique outre une corrélation horizontale, et le terme de diffusion de scalaire. Les équations (3) et (5) indiquent que l'énergie cinétique est produite par le champ moyen au travers de la corrélation  $\overline{u_1 u_2}$ . Dans le cas d'une simple stratification stable, cette production est équilibrée par le flux vertical de flottaison  $B_v$ , qui est négatif et convertit l'énergie cinétique en énergie potentielle, ajouté à la dissipation visqueuse. En présence de rotation et de cisaillement, le mécanisme est plus

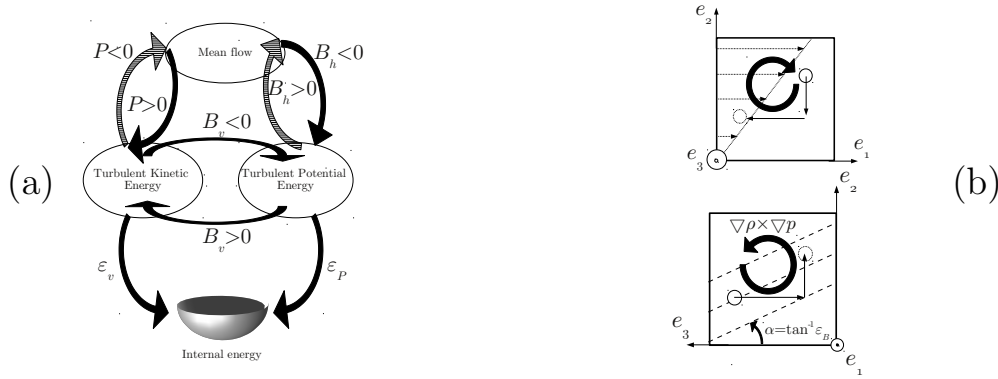


FIGURE 2 – (a) Schéma des flux d'énergie. (On note que, dans notre modèle,  $B_h$  doit être relié à l'écoulement moyen pour assurer l'homogénéité.) (b) Production de vorticité dans la direction méridionale (haut) et dans la direction longitudinale (bas).

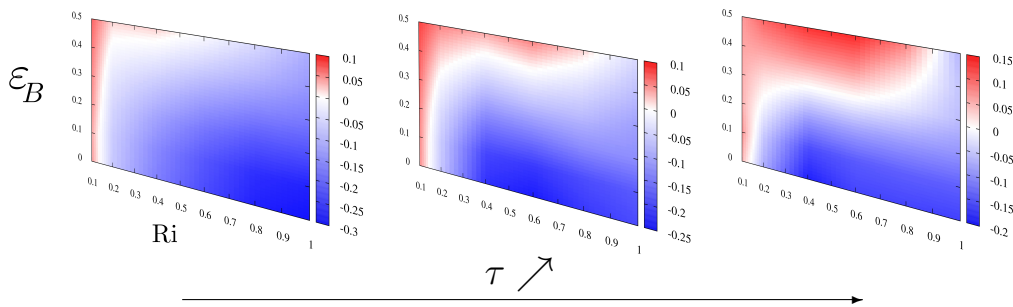


FIGURE 3 – Évolution dans le temps du taux de croissance instantané  $\gamma$  dans l'équation (7) dans le plan  $(Ri, \varepsilon_B)$ . Intervalle de temps entre deux figures :  $\tau = 5$ , première visualisation à  $\tau = 8$ .

complexe, puisque  $B_v$  ne demeure pas forcément négatif, en raison du désalignement des surfaces de pression et isopycnes, qui produisent un couple barocline. Dans ce cas, l'énergie potentielle est relâchée, et l'instabilité barocline est déclenchée, amenant  $\partial\mathcal{K}/\partial t > 0$ .

La figure 2 schématise les échanges d'énergie qui peuvent se produire entre le champ moyen et le champ fluctuant, et entre énergies cinétique et potentielle. On y voit notamment que la production d'énergie cinétique fluctuante peut être soit directe, par le cisaillement et l'instabilité symétrique, soit indirecte, au travers de l'instabilité barocline, en passant par le mode d'énergie potentielle.

#### 4 Taux de croissance linéaire et résultats des DNS

Le taux de croissance  $\gamma$  d'énergie cinétique, tel que  $\mathcal{K} \sim (St)^\gamma$ , est défini par

$$\gamma = (SK)^{-1} \partial\mathcal{K}/\partial t = (SK)^{-1} (P + B_v - \varepsilon_\nu). \quad (7)$$

L'analyse simplifiée “sans pression” par [14] fournit l'estimation analytique

$$\gamma = \sqrt{2} \left[ - (Ri + R^2) + \sqrt{(Ri - R^2)^2 + 4R^2} \right]^{1/2}, \quad (8)$$

qui amène au nombre de Richardson critique  $Ri_c = 1$ . Les équations linéarisées avec pression ne fournissent pas de résultat analytique, mais peuvent facilement être résolues numériquement. L'évolution temporelle du taux de croissance correspondant est montré sur la figure 3. On observe que la zone d'instabilité (zone supérieure, en rouge), initialement réduite aux seules valeurs de  $Ri$  proches de de zéro, croît en temps jusqu'à atteindre une distribution stationnaire proche de celle montrée sur la figure au dernier instant. À ce dernier instant, la courbe de stabilité marginale ou courbe neutre (en

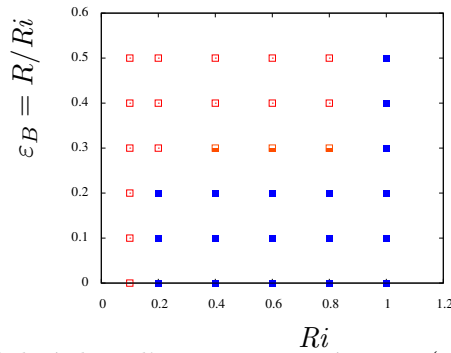


FIGURE 4 – Zones de stabilité dans l'espace paramétrique  $(Ri, \varepsilon_B)$ . Les symboles pleins représentent les simulations stables, les symboles creux les simulations instables. Les symboles à moitié pleins représentent les cas marginaux.

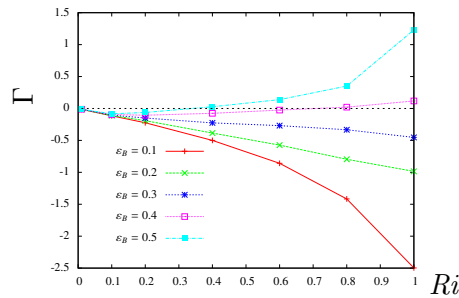


FIGURE 5 – Evolution du rapport de flux barocline vertical sur la production par le cisaillement  $\Gamma = \int_0^T B_v(\tau) d\tau / \int_0^T P(\tau) d\tau$  avec le nombre de Richardson pour différents paramètres de baroclinicité  $\varepsilon_B$ .

blanc sur les figures), passe par le point  $Ri \leq 0.15$  pour  $\varepsilon_B \simeq 0$ , décrit ensuite une gamme de valeurs intermédiaires de  $0.15 \leq Ri \leq 1$  avec  $\varepsilon_B \simeq 0.25$ , pour rejoindre une limite  $Ri \leq 1$  à  $\varepsilon_B = 0.5$ . Ces valeurs sont compatibles avec les cas limites stratifié-cisaillé et les limites de l'analyse sans pression.

Les DNS correspondant à ces valeurs des paramètres adimensionnels sont réalisées en partant de conditions initiales contenant des fluctuations aléatoires. L'analyse du taux de croissance de l'énergie cinétique dans ces simulations fournit le diagramme de stabilité représenté sur la figure 4. On y observe une zone d'instabilité et une zone de stabilité séparées par une courbe neutre qui est très proche de celle observée sur la figure 3.

La figure 5 nous permet de comparer le terme de flux de flottaison vertical au terme de production par le cisaillement, en fonction des paramètres adimensionnels. On observe clairement que la production par le cisaillement est dominante au plus grand nombre de Richardson considéré lorsque le paramètre de baroclinicité est faible. Lorsque celui-ci augmente, un équilibre s'établit aux environs de  $\varepsilon_B \simeq 0.4$ , mais l'effet barocline devient prépondérant devant l'effet de cisaillement lorsque  $\varepsilon_B = 0.5$ , montrant la dominance de l'instabilité barocline devant l'instabilité symétrique dans ce contexte. La sensibilité du système à la valeur du paramètre de baroclinicité est donc d'autant plus importante que le nombre de Richardson est proche de l'unité. On observe numériquement que la dissipation visqueuse joue très peu de rôle dans le mécanisme ainsi décrit (courbes non montrées ici).

Enfin, la figure 6 montre la structure du champ de vorticité longitudinale pour deux cas choisis spécifiquement : l'un dans une zone de stabilité paramétrique, l'autre dans un cas identifié paramétriquement comme instable. On rappelle que les champs initiaux sont des champs aléatoires identiques, et l'on observe sur la figure que les structures obtenues après un temps d'évolution sont très différentes, malgré le fait que des fluctuations de vitesse-flottaison importantes demeurent dans les deux cas. Dans le cas paramétrique stable, figure 6(b), les surfaces isopycnes sont bien identifiables, inclinées avec une pente  $\varepsilon_B$ , et les structures de l'écoulement s'organisent dans des couches orientées selon les isopycnes. Dans le cas paramétrique instable, figure 6(a), de très fortes fluctuations de vorticité sont présentes, et

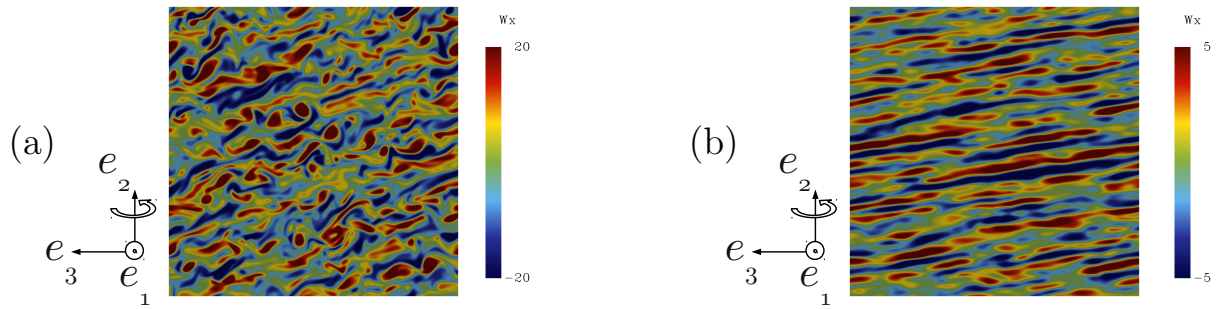


FIGURE 6 – Distribution de vorticité longitudinale à l'instant  $\tau = 18$  : (a) configuration instable à  $\varepsilon_B = 0.5$ ,  $Ri = 0.4$ . (b) configuration stable à  $\varepsilon_B = 0.2$ ,  $Ri = 1$ . DNS  $192 \times 288 \times 192$ .  $Re_\lambda(0) = 33$ .  $Sk/\varepsilon_\nu(0) = 8$ .  $Pr = 0.72$ . La fig. (a) montre les structures rotationnelles instables dues à l'instabilité barocline, la fig. (b) montre la mise en couches de l'écoulement due à la configuration stable.

l'on ne distingue plus que très grossièrement un alignement le long des isopycnes sur cette visualisation instantanée; cependant, en effectuant des moyennes temporelles sur un intervalle en temps, on peut éventuellement retrouver la structure des isopycnes moyennes.

## Références

- [1] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral methods : evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics*. Springer Verlag, 2007.
- [2] J. G. Charney and M. E. Stern. On the Stability of internal Baroclinic Jets in a rotating atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, 19 :159–172, 1962.
- [3] J.G. Charney. The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *J. Meteor.*, 4(5) :135–162, 1947.
- [4] P. Delorme. Simulation numérique de turbulence homogène compressible avec ou sans cisaillement imposé. *PhD Thesis, University of Poitiers, France*, 1985.
- [5] E. T. Eady. Long Waves and Cyclone Waves. *Tellus*, 1 :33–52, 1949.
- [6] L. N. Howard. Note on a paper of John W. Miles. *J. Fluid Mech.*, 10(March) :509–512, 1961.
- [7] J. W. Miles. On the stability of heterogeneous shear flows. *J. Fluid Mech.*, 10(04) :496–508, 1961.
- [8] A. B. Pieri, C. Cambon, F. S. Godeferd, and A. Salhi. Linearized potential vorticity mode and its role in transition to baroclinic instability. *Phys. Fluids*, 24 :076603, 2012.
- [9] R. S. Rogallo. Numerical Experiments in Homogeneous Turbulence. *Nasa Technical Memorandum*, 1981.
- [10] J. J. Rohr, E. C. Itsweire, K. N. Helland, and C. W. V. Atta. Growth and decay of turbulence in a stably stratified shear flow. *J. Fluid Mech.*, 195(1) :77–111, 1988.
- [11] C. G. Rossby. On the mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain simple current systems. *J. Mar. Res*, 1 :239–263, 1938.
- [12] A. Salhi and C. Cambon. Advances in Rapid Distortion Theory : From rotating shear flows to the baroclinic instability. *J. App. Mech.*, 73(3) :449–460, 2006.
- [13] G. Simon, F. S. Godeferd, C. Cambon, and A. Salhi. From baroclinic instability to developed turbulence. *19ème Congrès Français de Mécanique*, 2009.
- [14] M. Timoumi and A. Salhi. Equilibrium states in homogeneous turbulence with baroclinic instability. *Theoret. Comput. Fluid Dyn.*, 23 :353–374, October 2009.