

Analyse des tolérances - Impact de la linéarisation par morceaux du modèle de comportement sur la probabilité de défaillance

A. DUMAS^{a,b}, J.-Y. DANTAN^a, N. GAYTON^b

a. LCFC, Arts et Métiers ParisTech, CER de Metz

b. Clermont Université, Institut Français de Mécanique Avancée, Institut Pascal, Clermont-Ferrand

Résumé :

L'analyse des tolérances consiste à analyser l'impact des variations dimensionnelles dues au processus de fabrication sur le comportement d'un mécanisme en déterminant son niveau de qualité lors de sa conception. La technique consiste à calculer des probabilités de défaillance du mécanisme dans une production de masse. Les méthodes d'analyse doivent considérer les variations des composants comme des valeurs aléatoires et les plus mauvaises combinaisons possibles des jeux. Ces considérations varient en fonction de la nature de la modélisation possible du comportement du produit et sont réalisées par optimisation. L'une des méthodes pour l'optimisation est de linéariser par morceaux le comportement du mécanisme. Cet article vise à analyser l'impact de la stratégie des linéarisations sur l'estimation de la probabilité de défaillance ; il sera illustré par un mécanisme hyperstatique en 2D avec deux goupilles et un appui plan. Il s'agira de déterminer un compromis entre l'erreur de modélisation inhérente à la linéarisation, le temps de calcul et la précision du résultat.

Abstract :

Tolerance analysis consists in analysing the impact of variations from a manufactured process on the mechanism behaviour. The goal is to predict its quality level at its design stage. The technique involves in computing defect probabilities of the mechanism in a mass production. Analysis methods have to consider components variations as random variables and the worst configuration of gaps. This consideration varies in function of the type of the mechanism behaviour and are realised by an optimisation scheme. One method for the optimisation implies to linearise into several parts the mechanism behaviour. This paper aims at analysing the impact of the linearisation strategy on the defect probability estimation ; a hyperstatic 2D mechanism with two pins and a plane linkage illustrates this study. The purpose is to strike a balance between model error caused by the linearisation, computing time and result accuracy.

Mots clefs : Analyse des tolérances ; probabilité de défaillance ; simplification de modèle

1 Introduction

L'amélioration des technologies et le resserrement des exigences fonctionnelles entraînent une augmentation du niveau de précision requis d'un mécanisme et par la même son coût de fabrication. Afin de fabriquer des mécanismes de haute précision à bas coût, le tolérancement en conception a besoin d'être de plus en plus pris en compte. Du fait de variations provenant du processus de fabrication, les dimensions théoriques ne peuvent être atteintes de manière répétées. Cela provoque une dégradation des caractéristiques fonctionnelles du produit. Dans le but d'obtenir le comportement désiré et respecter l'exigence fonctionnelle en dépit des variations, des zones de tolérance et spécifications sont définies pour chaque pièce. C'est pourquoi, l'analyse des tolérances est un élément clé dans l'industrie pour améliorer la qualité du produit tout en réduisant le coût de fabrication. L'analyse des tolérances a pour but de prédire le niveau de qualité d'un mécanisme lors de sa conception en calculant deux probabilités de défaillance du système, une liée à l'assemblage P_{fa} et l'autre à la fonctionnalité P_f du mécanisme.

Les méthodes d'analyse des tolérances se divisent en deux catégories :

1. L'accumulation des déplacements a pour but de modéliser l'influence des variations sur le comportement géométrique du mécanismes. Celui-ci est modélisé par une relation de la forme $Y = f(\mathbf{X}, \mathbf{G})$ où Y est la réponse du système (comme un jeu ou un caractéristique fonctionnelle), \mathbf{X} est le vecteur des variables aléatoires représentant les défauts des pièces composants le mécanisme, et \mathbf{G} est le vecteur des jeux entre les pièces du mécanisme. Plusieurs représentations existent dans la littérature, notamment une formulation cinématique [6], les torseurs des petits déplacements [2], une représentation matricielle [3], le tolérancement vectoriel [4]. La fonction f peut être une expression analytique explicite ou implicite, elle peut également être issue d'une simulation numérique. Dans le cas analytique, l'écriture des relations des configurations d'assemblage par des boucles topologiques permet de déterminer la fonction f .
Le calcul des probabilités de défaillance dépend de la modélisation choisie du mécanisme. L'utilisation de modèles complexes permet d'avoir de très bonne estimation des probabilités de défaillance. Cependant, il est très difficile de manipuler des modèles analytiques complexes non linéaires. La simplification de tel modèle est nécessaire ; il s'agit de faire un compromis entre l'erreur due à la simplification du modèle, le temps de calcul et la précision voulue sur le résultat.
2. L'accumulation des tolérances cherche à modéliser la composition des tolérances, *i.e.* une accumulation linéaire des tolérances. A partir de modèles de déplacements, les variations admissibles dues au processus de fabrication sont représentées dans une zone spécifique de l'espace des paramètres. Les tolérances géométriques sont représentées par le domaine jeu [5], les T-Map[®] [1] ou l'enveloppe de spécification [7]. Ces trois concepts reposent sur l'utilisation d'un hypothétique volume Euclidien qui représente toutes les variations possibles des composantes en dimension, orientation et position. Ces représentations permettent de calculer l'accumulation des tolérances en utilisant les sommes de Minkowsky sur les variations et le domaine jeu [8] afin de trouver les intersections des domaines pour les chaines cinématiques parallèles et de calculer la probabilité de l'inclusion d'un domaine dans un autre. Ces méthodes sont efficaces mais se basent sur l'utilisation de modèles linéaires.

Les deux méthodes font appels à des simplification du modèle de comportement du mécanisme grâce à une linéarisation des conditions de non inter-pénétration en chaque contact entre les pièces. L'étude de son impact sur le calcul de la probabilité de défaillance est donc un enjeu important quel que soit la méthode utilisée. Cette étude se fera en utilisant la méthode d'accumulation des déplacements.

2 Analyse des tolérances d'un système avec jeux

La plupart des mécanismes ont des jeux entre les pièces ce qui, dans le cas où f est une fonction analytique, complexifie le modèle de comportement du mécanisme. Les jeux sont considérés comme des variables libres, elles dépendent des réalisations des variations dimensionnelles et géométriques du mécanisme. Le modèle doit prendre en compte ces jeux en limitant les déplacements des pièces afin d'empêcher une inter-pénétration des surfaces les unes dans les autres. Ces limites sont prises en compte via des contraintes d'interface qui dépendent du type de liaison entre les surfaces. Les contraintes sont notées de la façon suivante :

$$\left\{ C^{(j)}(\mathbf{X}, \mathbf{G}) \leq 0 \right\}_{j=1, \dots, N_C} \quad (1)$$

où N_C est le nombre de contraintes d'interface. Le modèle comprend également des équations de compatibilité entre les écarts et les jeux afin de caractériser le comportement géométrique du mécanisme. Elles s'obtiennent en écrivant les relations de composition des déplacements dans les cycles topologiques du mécanisme. L'ensemble des équations, notées C_c , forme un système linéaire d'équations qui doivent être vérifiées.

$$\left\{ C_c^{(i)}(\mathbf{X}, \mathbf{G}) = 0 \right\}_{i=1, \dots, N_{C_c}} \quad (2)$$

où N_{C_c} est le nombre de conditions de compatibilité.

Dans le cas de l'assemblage, les contraintes d'interface et les conditions de compatibilité sont les seules équations à prendre en compte. Le mécanisme est considéré montable s'il existe au moins une configuration (*i.e.* valeurs des jeux) telle que ces équations sont vérifiées, voir Equation 3. Cette probabilité est calculée en maximisant la somme des jeux sous les contraintes d'interface. Une solution indique la montabilité du mécanisme, au contraire la violation d'au moins une contrainte montre la non montabilité, voir Equation 5.

Dans le cas fonctionnelle, une caractéristique fonctionnelle est comparée à une valeur seuil à ne pas dépasser. P_f est la probabilité que la condition fonctionnelle $C_f = (Y_s - Y) \geq 0$ ne soit pas respectée, avec Y la valeur de la caractéristique fonctionnelle du mécanisme et Y_s la valeur seuil à ne pas dépasser, voir Equation 4. La condition d'existence d'une configuration des jeux se traduit en cherchant la pire configuration des jeux, *i.e.* la configuration qui engendrera la plus mauvaise valeur de la condition fonctionnelle. Elle s'obtient, dans ce cas, en minimisant la condition fonctionnelle sous les contraintes d'interface, voir Equation 5.

$$P_{fa} = 1 - \text{Prob} \left[\exists \tilde{\mathbf{G}} | C(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{G}}) \leq 0 \right] \quad (3)$$

$$P_f = \text{Prob} \left[\exists \tilde{\mathbf{G}}_{\text{admissible}} | C_f(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{G}}) \leq 0 \right] \quad (4)$$

où $\tilde{\mathbf{G}}$ est le vecteur des jeux qui vérifie les équations de compatibilité $\{C_c^{(i)}(\mathbf{X}, \mathbf{G}) = 0\}$ pour $i = 1, \dots, N_{C_c}$ et l'écriture $\tilde{\mathbf{G}}_{\text{admissible}}$ signifie que ce sont les valeurs des jeux tels que les contraintes d'interface sont toutes respectées. Les expressions des probabilités deviennent :

$$P_{fa} = \text{Prob} \left(\begin{array}{c} \# \max_{\tilde{\mathbf{G}}} \sum \tilde{\mathbf{G}} \\ \text{sous } C^{(1)}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{G}}) \leq 0 \\ \vdots \\ C^{(N_c)}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{G}}) \leq 0 \end{array} \right) \quad P_f = \text{Prob} \left(\begin{array}{c} \min_{\tilde{\mathbf{G}}} C_f(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{G}}) \leq 0 \\ \text{sous } C^{(1)}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{G}}) \leq 0 \\ \vdots \\ C^{(N_c)}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{G}}) \leq 0 \end{array} \right) \quad (5)$$

Les variations \mathbf{X} sont modélisées par des variables aléatoires. Les probabilités sont alors calculées grâce au couplage de la simulation de Monte-Carlo et d'un algorithme d'optimisation pour, dans un cas maximiser la somme des jeux et, dans l'autre minimiser la condition fonctionnelle.

L'écriture des contraintes d'interface dépend du type de liaison à modéliser, certaines liaisons entraînent la formulation de contraintes quadratiques. Or ces contraintes quadratiques entraînent des difficultés importante lors de l'optimisation. Afin de palier ce problème, il est nécessaire de linéariser ces contraintes. Il est possible d'envisager plusieurs stratégies de linéarisation, l'objectif étant de trouver celle qui permet d'obtenir les meilleurs résultats en terme de précision sur le calcul des probabilités de défaillance tout en étant conservatifs par rapport à la probabilité réelle. L'application suivante sur un exemple 2D étudie 3 stratégies différentes de linéarisation et leur impact sur la probabilité de défaillance.

3 Illustration

3.1 Présentation de l'exemple

L'exemple, montré Figure 1, est un mécanisme hyperstatique en 2D composé de 4 pièces. C'est un mécanisme classique composé d'un appui plan et deux goupilles étudié en vue du dessus. Les deux goupilles (2) et (3) sont encastrées dans la pièce (4). La liaison appui plan de la pièce (4) avec la pièce (1) est supposée parfaite donc sans jeu. Du point de vue fonctionnelle, le déplacement du point C de la surface c de la pièce (4) par rapport au point C de la surface c de la pièce (1) est étudié, il ne doit pas dépasser une valeur seuil.

Plusieurs types de variations sont modélisés par des variables aléatoires : les variations dimensionnelles des goupilles (diamètres d_{1a} , d_{2a} , d_{1b} et d_{2b}) ainsi que des écarts de positions par rapport au nominale des surfaces a , b et c de chaque pièce. Par exemple, les écarts de la surface a de la pièce (1) par

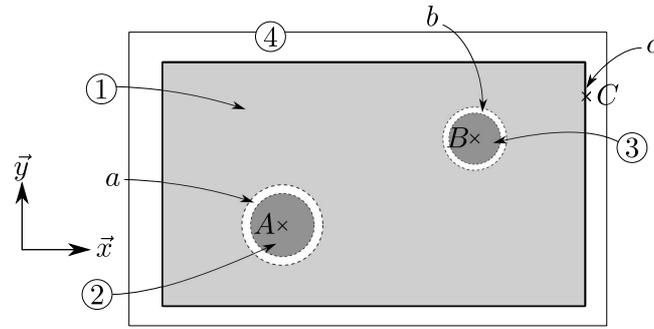


FIGURE 1 – Exemple du mécanisme 2D

rappart à son nominale sont notés u_{1a1} (translation d'axe Ox), v_{1a1} (translation d'axe Oy) et γ_{1a1} (rotation d'axe Oz). Toutes ces variations sont modélisées par des variables aléatoires de loi normale $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_{X_i}, \sigma_{X_i})$. Le paramétrage est arbitraire et ne dépend pas d'une possible cotation fonctionnelle ou processus de fabrication d'un tel mécanisme.

La représentation des jeux entre les surfaces se fait grâce à l'utilisation des torseurs des petits déplacements [2]. Un torseur existe pour chaque liaison, il y a donc 3 torseurs : $G_{1a/2a,A}$, $G_{1b/3b,B}$ et $G_{1c/4c,C}$. Par exemple la liaison entre la surface 1a (pièce (1), surface a) et 2a, exprimée au point A, s'écrit de la façon suivante :

$$\overrightarrow{G}_{1a/2a,A} = \begin{Bmatrix} u_{1a/2a,A} & - \\ v_{1a/2a,A} & - \\ - & \gamma_{1a/2a} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Le torseur est composé des déplacements possibles suivant les axes Ox et Oy , respectivement $u_{1a/2a,A}$ et $v_{1a/2a,A}$ et de la rotation possible autour de l'axe Oz : $\gamma_{1a/2a}$.

L'étude de ce mécanisme implique l'écriture de 3 conditions de compatibilité $C_c(\mathbf{X}, \mathbf{G}) = 0$ ainsi que 2 contraintes d'interface $C(\mathbf{X}, \mathbf{G}) \leq 0$. Ces contraintes d'interface sont issues des conditions de non inter-pénétration de matière entre les goupilles et la pièce (1), ce qui donne les inéquations quadratiques suivantes :

$$C^{(1)}(\mathbf{X}, \mathbf{G}) = u_{1a2a}^2 + v_{1a2a}^2 \leq \left(\frac{d_{1a} - d_{2a}}{2} \right)^2 \quad (7)$$

$$C^{(2)}(\mathbf{X}, \mathbf{G}) = u_{1b3b}^2 + v_{1b3b}^2 \leq \left(\frac{d_{1b} - d_{2b}}{2} \right)^2 \quad (8)$$

Ces contraintes correspondent à la zone admissible des déplacements du centre des goupilles (2) et (3) afin de ne pas pénétrer dans la pièce (1). L'étape d'optimisation est rendue très complexe à cause de l'utilisation de telles contraintes, il est donc nécessaire de les linéariser. Le modèle de comportement doit cependant rester inchangé.

La condition fonctionnelle s'exprime de la façon suivante :

$$C_f(\mathbf{X}, \mathbf{G}) = d_{seuil} - (u_{1c4c} + v_{1c4c}) \geq 0 \quad (9)$$

où d_{seuil} est la valeur du déplacement seuil à ne pas dépasser pour assurer le bon fonctionnement du mécanisme et u_{1c4c} et v_{1c4c} sont les déplacements du point C suivant les axes Ox et Oy .

3.2 Stratégies de linéarisation

Les différentes stratégies de linéarisation se basent sur une linéarisation à l'ordre 1 des inéquations au point P_k de coordonnées $(R \cos \theta_k, R \sin \theta_k)$, où R est un rayon dépendant de la stratégie de linéarisation et $\theta_k = \frac{2k\pi}{N_d}$ pour $k = 1, \dots, N_d$, un angle dont le paramètre N_d permet d'ajuster le nombre de

linéarisations de l'inéquation. La linéarisation correspond en réalité à une discrétisation de la zone admissible, qui est un cercle en 2D, en un polygone dont le nombre de cotés dépend de N_d . Les stratégies s'articulent autour de la façon de discrétiser la zone admissible ainsi que du nombre de facettes, voir Figure 2 :

Type 1 : linéarisation suivant un polygone inscrit à la zone admissible.

Type 2 : linéarisation suivant un polygone moyen à la zone admissible (moyenne entre les polygones inscrit et circonscrit).

Type 3 : linéarisation suivant un polygone circonscrit à la zone admissible.

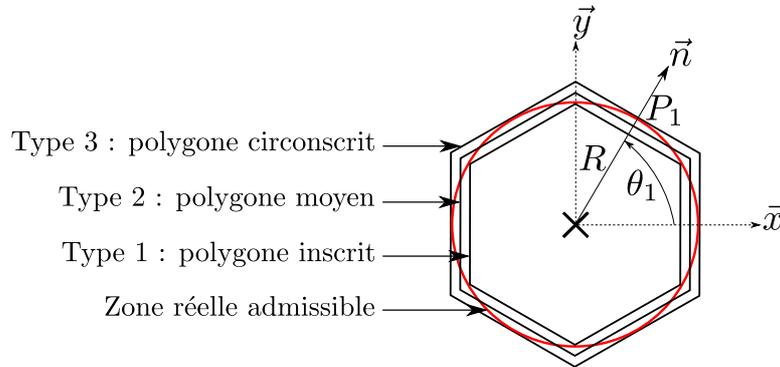


FIGURE 2 – Trois types de discrétisation de la zone réelle admissible, ici avec 6 facettes.

3.3 Résultats

Les trois stratégies, présentées ci-dessus, ont été appliquées à l'exemple en faisant varier le nombre de linéarisation de 8 à 70. La méthode de résolution utilisée est la simulation de Monte-Carlo avec une population de 3.10^6 réalisations identiques pour toutes les simulations. Le coefficient de variation sur les résultats est inférieur 1%. Les valeurs des probabilités obtenues sont répertoriées dans le tableau 1, les courbes sont montrées dans la figure 3.

Nombre de linéarisations	8	12	16	20	25	30	40	50	60	70
P_{fa} inscrit ($\times 10^{-3}$)	4.776	4.777	4.780	4.776	4.777	4.776	4.776	-	-	-
P_{fa} moyen ($\times 10^{-3}$)	4.766	4.775	4.777	4.776	4.777	4.776	4.776	-	-	-
P_{fa} circonscrit ($\times 10^{-3}$)	4.758	4.771	4.776	4.775	4.776	4.776	4.776	-	-	-
P_f inscrit ($\times 10^{-3}$)	4.51	6.57	6.36	7.23	7.40	7.44	7.53	7.60	7.65	7.67
P_f moyen ($\times 10^{-3}$)	7.55	8.21	7.16	7.82	7.77	7.71	7.67	7.66	7.75	7.70
P_f circonscrit ($\times 10^{-3}$)	11.98	10.16	8.07	8.43	8.12	7.94	7.83	7.75	7.78	7.74

TABLE 1 – Résultat des probabilités de défaillance d'assemblage et fonctionnelle.

Les résultats montrent que la linéarisation impacte peu la probabilité de défaillance dans le cas de l'assemblage mais elle a une grande influence sur la probabilité de défaillance fonctionnelle. La linéarisation par un polygone circonscrit permet d'avoir des résultats conservatifs par rapport à la probabilité réelle. Dans le cas où il est requis d'avoir un certain niveau de qualité via une probabilité cible, il est préférable d'utiliser le type circonscrit avec un nombre de linéarisations moyen afin d'avoir une première estimation. Si celle-ci est inférieure à la probabilité cible alors le niveau de qualité demandé est atteint, sinon il est possible de calculer une autre probabilité avec la stratégie du polygone inscrit afin d'avoir un intervalle contenant la probabilité réelle. La probabilité cible doit alors se trouver dans cet intervalle (suffisamment petit) afin de pouvoir conclure sur le niveau de qualité.

4 Conclusions

Evaluer la qualité d'un produit lors de sa conception est primordiale, cela permet d'avoir des produits de meilleurs qualités tout en minimisant les coûts de fabrication. Prédire la qualité du produit né-

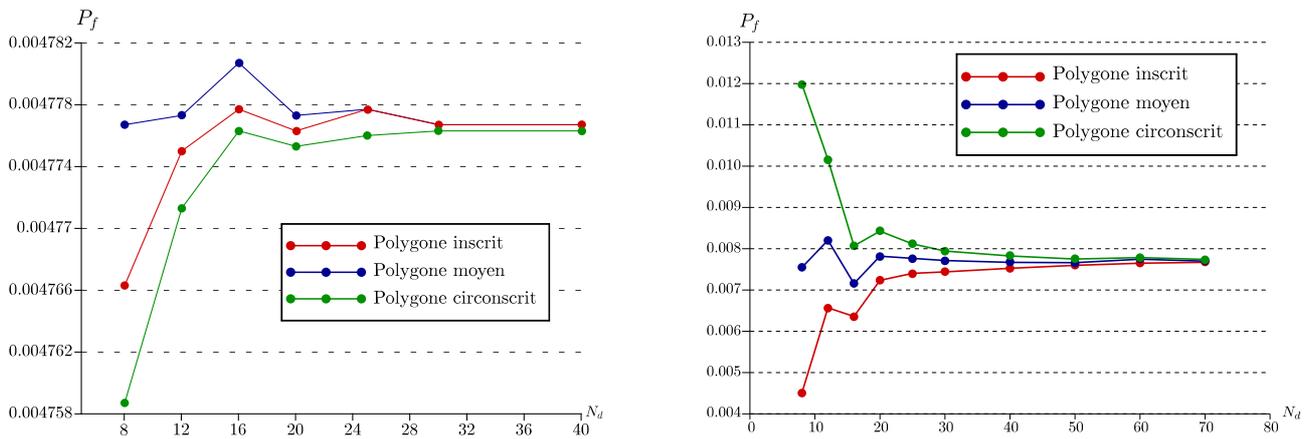


FIGURE 3 – Courbes des résultats des probabilités de défaillance d’assemblage et fonctionnelle pour les trois types de discrétisation et en fonction du nombre de discrétisations.

cessite de pouvoir modéliser le comportement de celui-ci or une modélisation ne peut être parfaite. Les erreurs de modélisation existent à différents niveaux de la modélisation. Il est nécessaire de minimiser ces erreurs afin d’avoir des modèles cohérents avec la réalité physique. La modélisation de comportement de mécanismes hyperstatiques par des fonctions analytiques nécessitent des simplifications altérant le modèle de base. L’étude menée montre que cette simplification via une linéarisation des équations quadratiques a un impact non négligeable sur les valeurs calculées. Il est donc nécessaire d’avoir une réflexion en se demandant quelle est l’erreur de modélisation acceptable en faisant une telle simplification. Cela permettra de choisir telle ou telle stratégie suivant l’objectif poursuivi.

Références

- [1] S. Bhide, G. Ameta, J.K. Davidson, and J.J. Shah. Tolerance-maps applied to the straightness and orientation of an axis. *CD ROM Proc., 9th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing, Arizona State University, Tempe, AZ, USA, 2005*.
- [2] P. Bourdet and A. Clément. Controlling a complex surface with a 3 axis measuring machine. *Annals of the CIRP*, 25 :359–364, 1976.
- [3] K.W. Chase, S.P. Magleby, and C.G. Glancy. *Tolerance Analysis of 2-D and 3-D Mechanical Assemblies with Small Kinematic Adjustments*, volume 218, pages 1869–1873. Advanced Tolerancing Techniques Zhang H. C. Ed. : Wiley, 2004.
- [4] J. Gao, K.W. Chase, and S.P. Magleby. Generalized 3-d tolerance analysis of mechanical assemblies with small kinematic adjustments. *IIE Transactions*, 30 :367–377, 1998.
- [5] M. Giordano and D. Duret. Clearance space and deviation space : Application to three-dimensional chain of dimensions and positions. *3rd CIRP Design Seminar on Computer-Aided Tolerancing, 1993*.
- [6] J.P. Loose, S.Y. Zhou, and D. Ceglarek. Kinematic analysis of dimensional variation propagation for multistage machining processes with general fixture layouts. *Ieee Transactions on Automation Science and Engineering*, 4 :141–152, 2007.
- [7] J. Qureshi, J.Y. Dantan, V. Sabri, P. Beaucaire, and N. Gayton. A statistical tolerance analysis approach for over-constrained mechanism based on optimization and monte carlo simulation. *Computer Aided Design*, 44 :132–142, 2012.
- [8] D. Teissandier, V. Delos, and Y. Couétard. Operations on polytopes : application to tolerance analysis. In Houten F. v. and Kals H., editors, *Global Consistency of Tolerances*, pages 425–434, presented at : 6th CIRP International Seminar on Computer–Aided Tolerancing, University of Twente, Enschede, The Netherlands, 1999.