

Influence du maillage sur la convergence de la solution d'un modèle numérique de lubrification hydrodynamique en présence de textures

M. ADJEMOUT, N. BRUNETIERE, J. BOUYER

Institut Pprime, Université de Poitiers, ENSMA, UPR 3346, Département Génie mécanique et systèmes Complexes, SP2MI, Boulevard Marie et Pierre Curie, BP 30179, F86926 Futuroscope Chasseneuil, Cedex, France

Résumé :

Le travail effectué dans cet article porte sur une étude paramétrique basée sur un modèle numérique réalisé pour traiter la lubrification hydrodynamique dans le cas d'une garniture mécanique texturée. Ce modèle numérique résout l'équation de Reynolds couplée avec un algorithme de cavitation. Afin d'estimer de manière quantitative l'erreur engendrée par le maillage, nous avons utilisé la méthode GCI (Grid Convergence Index), avec trois type de maillages (fin, moyen et grossier). Dans cette étude nous avons étudié trois motifs de textures (carré, hémisphère et triangle). L'influence du facteur de forme est également discutée pour le cas d'une texture triangulaire.

Abstract :

In this paper, a parametric study was carried out using a numerical model. This model solves the Reynolds equation coupled with a cavitation algorithm, and deals with the hydrodynamic lubrication in the case of mechanical seal with textured surfaces. In order to estimate quantitatively the discretization error, the GCI (Grid Convergence Index) method was applied using three levels of grid (fine, medium and coarse). Three shapes of texture (square, hemisphere and triangle) were used, and the aspect ratio was also discussed in the case of triangular texture.

Mots clefs : Surfaces texturées, Modélisation numérique, Garniture mécanique

1 Introduction

L'utilisation de surfaces texturées (par des motifs périodiques) peut améliorer significativement les performances hydrodynamiques des contacts lubrifiés comme par exemple dans les garnitures mécaniques, les butées, les paliers...etc. [1]. Cet effet positif est dû à la génération d'une pression hydrodynamique sur les bords convergents des aspérités et il est associé avec l'apparition de cavitation [2]. La présence de motif engendre des zones de discontinuité qui peuvent augmenter les pertes de précision dues à une insuffisance dans la discrétisation. Dans ce cas, il est plus judicieux d'utiliser un maillage variable raffiné près des zones de discontinuité. Cependant, cette démarche est difficile à mettre en œuvre en raison du nombre important de motifs en présence sur les surfaces de contact. Une autre solution consiste à utiliser un maillage régulier, mais celui-ci devrait être suffisamment fin de manière à ce que les imprécisions soient minimales. Une évaluation de l'erreur engendrée par la discrétisation s'avère nécessaire pour l'optimisation d'un code numérique. Afin d'estimer de manière quantitative l'erreur engendrée par le maillage, nous avons utilisé la méthode GCI (Grid Convergence Index) souvent appliquée pour les calculs CFD (Computational Fluid Dynamics). Cette méthode est basée sur la théorie de l'extrapolation généralisée de Richardson [6] : elle

permet d'estimer l'erreur du maillage sans avoir besoin d'une solution analytique du problème. Durant cette étude, les performances (portance, débit et zone de cavitation) d'une garniture mécanique, dont la surface est texturée par un seul motif, ont été mesurées et présentées avec des valeurs adimensionnées.

2 Modèle numérique

Le modèle numérique utilisé dans cette étude est basé sur l'équation de Reynolds couplée avec un algorithme de cavitation similaire à celui publié par Elrod [3]. Dans l'hypothèse où le stator est immobile (FIG.1-a), l'équation de Reynolds, pour un fluide Newtonien incompressible et en régime laminaire prend la forme :

$$F \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r h^3}{\mu} \frac{\partial D}{\partial r} \right) + F \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r h^3}{\mu r} \frac{\partial D}{\partial \theta} \right) = 6 V \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} + (1-F) \frac{\partial}{\partial \theta} (h D) \right] \quad (1)$$

Dans cette équation, h désigne l'épaisseur locale du film, μ la viscosité du fluide et V la vitesse du rotor. F et D sont des variables liées à l'algorithme de cavitation.

$$\begin{cases} D = p - p_{cav} > 0 \\ \rho = \rho_0 \\ F = 1 \end{cases} ; \begin{cases} p = p_{cav} \\ D = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 < 0 \\ F = 0 \end{cases} \quad (2)$$

F est une fonction booléenne indiquant si la zone est cavitée ou non. D est une variable universelle qui représente alternativement la pression p ou la densité ρ , avec p_{cav} la pression de cavitation et ρ_0 la densité du fluide. La configuration géométrique étudiée est présentée sur la (FIG.1-a). Le problème est supposé stationnaire. Pour cela, la face du rotor est parfaitement lisse, tandis que la face du stator contient des microcavités. Le calcul est fait sur une portion angulaire de rayon interne R_i et de rayon externe R_0 comme indiqué sur la (FIG.1-a). La méthode des volumes finis a été utilisée pour discrétiser le domaine et une méthode directe a été adoptée pour résoudre cette équation discrétisée en appliquant les conditions aux limites sur le rayon interne et externe et une condition de périodicité dans la direction circonférentielle afin d'extrapoler le calcul sur toute la face du contact. Finalement, le calcul permet d'obtenir à la fois le champ de pression et le champ de densité.

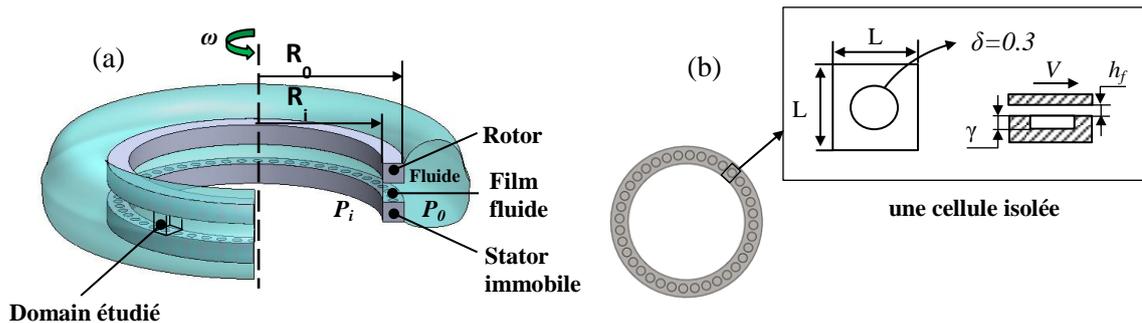


FIG.1 – Configuration du problème

Afin de valider ce modèle numérique, nous l'avons comparé avec les résultats obtenus par Zheng et Meng [4]. Dans ces travaux, les auteurs ont comparé leurs résultats numériques avec les résultats expérimentaux qu'ils ont obtenus avec un disque rainuré plongé dans un bain d'huile à pression atmosphérique et soumis à une charge normale F_N d'environ 44N. Les conditions utilisées sont données sur la deuxième colonne du tableau (Tableau.1) et les résultats de l'épaisseur du film à l'équilibre hydrodynamique sont présentés sur la figure (FIG.2). Cette figure montre que nos résultats sont en bon accord avec les résultats obtenus avec leur modèle par Zheng et Meng [4]. Un léger décalage est observé par rapport aux résultats expérimentaux. Notons que la mesure d'épaisseur de film est parfois entachée d'une certaine erreur.

Paramètre	Valeur (1)	Valeur (2)
R_i [m]	0.024	2.575×10^{-2}
R_0 [m]	0.032	2.595×10^{-2}
p_i [Pa]	1.0×10^5	0.10×10^5
p_0 [Pa]	1.0×10^5	0.10×10^5
p_{cav} [Pa]	0.3×10^5	0
F_N [N]	44	-
μ [Pa.s]	0.083	1.0×10^{-3}
ω [rpm]	71-296	25-250
γ [m]	4.6×10^{-6}	-
δ	56%	30%
L [m]	-	2.0×10^{-4}
h_f [m]	-	1.0×10^{-6}

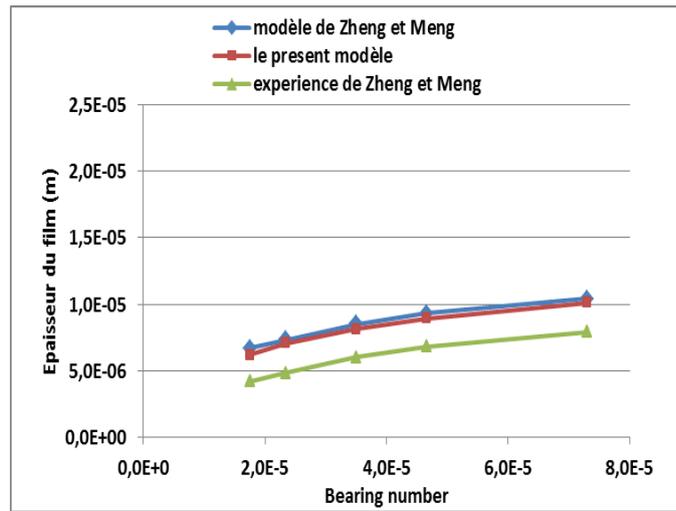


Tableau.1 – (1) Paramètres utilisés dans [4]
(2) Paramètres dans la suite de l'étude

FIG.2 – Comparaison de notre modèle avec celui de [4]

3 Grid Convergence Index (GCI)

Cette méthode est basée sur la théorie de l'extrapolation généralisée de Richardson, elle permet d'estimer l'erreur due au maillage sans avoir besoin d'une solution analytique du problème. Pour cela, l'erreur est estimée par une fonction puissance de la taille caractéristique des mailles. Pour appliquer cette méthode nous avons suivi la démarche suggérée par Celik et al. [5]. La valeur du *GCI* indique de combien la solution est éloignée de la solution asymptotique. Pour un maillage uniforme et un calcul à deux dimensions, cette quantité est exprimée par :

$$GCI_{2,1} = \frac{1.25}{r_{2,1}^n - 1} \times \varepsilon_{2,1} \quad ; \quad GCI_{3,2} = \frac{1.25}{r_{3,2}^n - 1} \times \varepsilon_{3,2} \quad (3)$$

Avec $r_{2,1} = \sqrt{N_1/N_2}$ et $r_{3,2} = \sqrt{N_2/N_3}$ les indices de raffinement du maillage. $\varepsilon_{3,2} = |(f_2 - f_3)/f_2|$ et $\varepsilon_{2,1} = |(f_1 - f_2)/f_1|$ sont les erreurs relatives et f_1, f_2 et f_3 sont les variables significatives calculées respectivement avec les maillages dont le nombre total de nœuds est N_1, N_2 et N_3 ($N_1 > N_2 > N_3$). n est l'ordre apparent de la convergence. Ce dernier peut être calculé en utilisant l'expression :

$$n = \frac{|\ln|\varepsilon_{3,2} / \varepsilon_{2,1}|| + q(n)}{\ln(r_{2,1})} \quad (4)$$

$$\text{Avec } q(n) = \ln\left(\frac{r_{2,1}^n - s}{r_{3,2}^n - s}\right) \text{ et } s = \text{sign}(\varepsilon_{3,2} / \varepsilon_{2,1}) \quad (5)$$

L'équation (4) est transcendante et peut être résolue à l'aide d'une méthode itérative. Cependant, pour un indice de raffinement constant $r_{2,1} = r_{3,2}$, $q(n) = 0$ et l'équation (4) prend la forme simplifiée suivante:

$$n = \frac{|\ln|\varepsilon_{3,2} / \varepsilon_{2,1}||}{\ln(r_{2,1})} \quad (6)$$

Il faut noter que si $(f_2 - f_3)$ ou $(f_1 - f_2)$ sont très proches de zéro, cette procédure n'est pas applicable, et ces points ne sont pas pris en compte dans le calcul du *GCI*.

4 Etude paramétrique

La texture est réalisée sur la face stationnaire de la garniture comme indiqué sur la figure (FIG.1-b). Chaque motif est emprisonné dans une cellule assimilée à un carré de côté $L \approx 200 \mu\text{m}$. Etant donné que la cellule est une portion de disque, cette dernière présente une légère courbure. Pour analyser l'influence du maillage sur les résultats, trois variables significatives adimensionnées ont été analysées : la portance hydrodynamique adimensionnée, le débit radial moyen adimensionné et le taux de cavitation, donnés respectivement par :

$$\bar{p} = \frac{1}{S \times P_0} \int_S P \cdot ds - 1; \quad \bar{Q} = \frac{12\mu\Delta R}{2\pi P_0 h_f^3 R_{\text{moy}}} Q; \quad \bar{\zeta} = \frac{Nb_{\text{noeuds-cavités}}}{\delta \times Nb_{\text{noeuds}}} \tag{7}$$

Toutes ces variables seront présentées en fonction d'un paramètre adimensionnée donnée par :

$$\psi = 6\mu\omega R_{\text{moy}} \Delta R / P_0 h_f^2 \tag{8}$$

Dans ces formules δ est la densité de texturation (ratio entre S l'aire totale de l'interface et l'aire du motif de texture) maintenue à 0.3, R_{moy} est le rayon moyen de la garniture, h_f est l'épaisseur du film imposée, Q est le débit radial volumique calculé. $Nb_{\text{noeuds-cavités}}$ est le nombre de nœuds cavités et Nb_{noeuds} le nombre total de nœuds utilisés pour le calcul. La colonne 3 du tableau (Tableau.1) présente les données que nous avons utilisées, et le tableau (Tableau.2) donne les cas que nous avons testés, avec un indice de raffinement constant $r_{2,1} = r_{3,2} = 2$.

Maillage	Motif de texture					
100X100						
200X200						
400X400						
facteur λ	1	5/2	5	5/2		5/2

Tableau.2 – Les cas testés dans cette étude

λ est le facteur de forme, rapport entre la profondeur de texture (γ) et l'épaisseur du film (h_f).

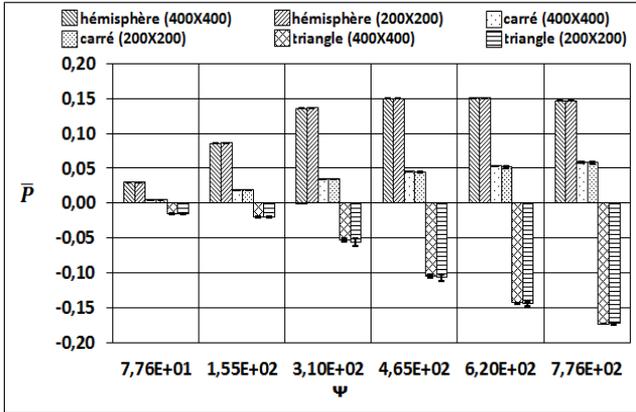
5 Résultats et discussion

Les incertitudes numériques engendrées par le maillage ont été représentées sous forme de barres d'erreurs en utilisant le GCI en conjonction avec une valeur moyenne de l'ordre $n = n_{\text{moy}}$ comme l'avait recommandé Celik et al [5]. Les résultats de nos calculs sont donnés sur les graphes de la figure (FIG.3), et les valeurs maximales du GCI pour chaque cas testé sont données sur le tableau (Tableau.3). La (FIG.3-b) donne les résultats du débit adimensionné pour les trois formes de motif pour un facteur $\lambda=5/2$. Sur cette figure, l'axe des ordonnées à gauche du graphe correspond aux motifs carrés et hémisphériques, et celui à droite au motif triangulaire.

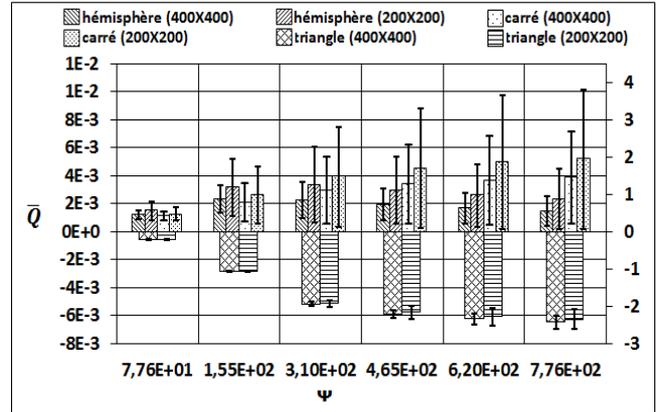
Forme	Carré			Hémisphère			Triangle								
	5/2			5/2			1			5/2			5		
Ratio λ	\bar{p}	\bar{Q}	$\bar{\zeta}$	\bar{p}	\bar{Q}	$\bar{\zeta}$	\bar{p}	\bar{Q}	$\bar{\zeta}$	\bar{p}	\bar{Q}	$\bar{\zeta}$	\bar{p}	\bar{Q}	$\bar{\zeta}$
n_{moy}	2.6	0.6	1.1	1.4	1	1.4	0.7	0.9	0.96	1.3	0.54	1.4	2	0.98	0.8
$GCI_{32}^{\text{max}} \%$	3.3	96	10	0.15	92	1.4	11	15	2.7	9.9	11	5.9	7.4	13.6	7.66
$GCI_{21}^{\text{max}} \%$	0.53	86	5	0.05	72	0.5	7.5	7.3	1.4	4.1	7.5	2.2	1.9	7.2	4.34

Tableau.3 – Les valeurs maximales du GCI obtenus sur chaque variable

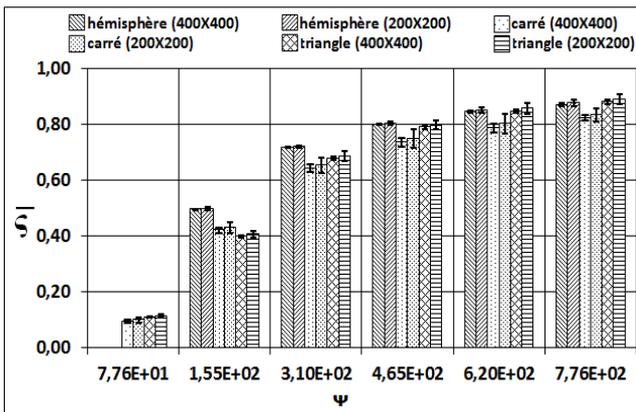
Comme première remarque, on peut voir que l'erreur de discrétisation est très importante avec les motifs carrés et hémisphériques dont les valeurs maximales de GCI sont respectivement $GCI_{21}^{max} = 86\% - 72\%$ et $GCI_{32}^{max} = 96\% - 92\%$. Ceci, indique que les résultats numériques sont encore loin de la solution asymptotique et qu'ils sont très influencés par l'erreur de discrétisation. Ces grandes erreurs de discrétisation, peuvent être expliquées par le faible débit de fuite obtenu avec ces deux formes de motif de texture, ce qui rend les résultats très sensibles à l'erreur de discrétisation.



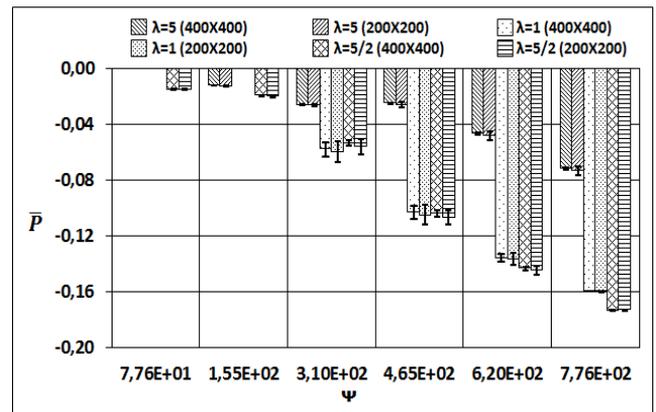
(a) Portance adimensionnée pour les trois motifs



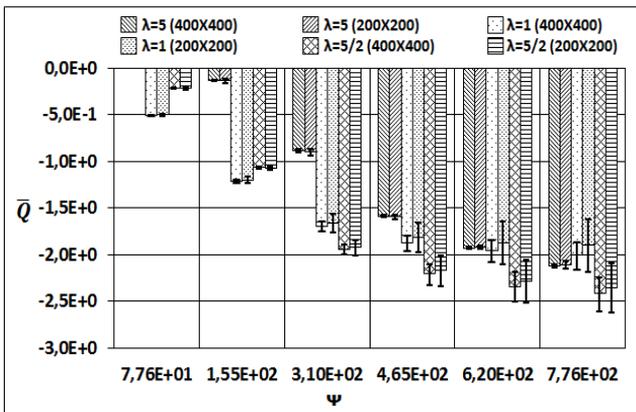
(b) Débit de fuite adimensionné pour les trois motifs



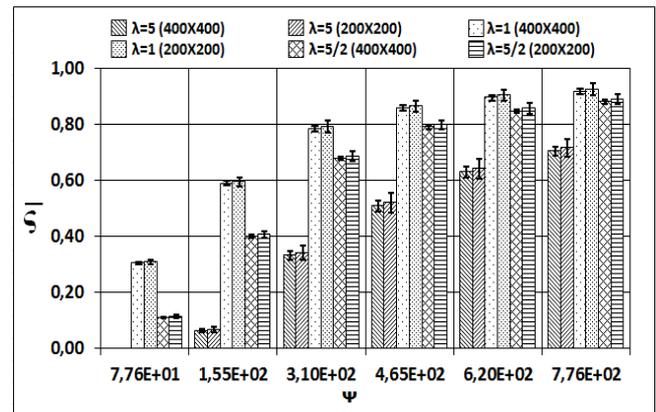
(c) Taux de cavitation pour les trois motifs



(d) Portance adimensionnée du triangle pour différents λ



(e) Débit de fuite adimensionné du triangle pour différents λ



(f) Taux de cavitation du triangle pour différents λ

FIG.3 – Résultats de l'étude paramétrique

Avec la texture à motif triangulaire, le débit fuite est très important (environ 1000 fois supérieur aux autres), et l'erreur de discrétisation a une très faible influence sur la convergence vers la solution asymptotique, $GCI_{21}^{\max} = 7.5\%$ et $GCI_{32}^{\max} = 11\%$. Le signe négatif du débit de fuite indique que la fuite est vers le rayon interne de la garniture.

Les figures (FIG.3-(a) et FIG.3-(c)) montrent les résultats de portance adimensionnée et de taux de cavitation. Les erreurs maximales de discrétisation obtenues sur ces deux variables sont faibles, et varient entre 0.05% et 10%. Les graphes (d), (e) et (f) de la figure (FIG.3), donnent les résultats que nous avons obtenus avec le motif triangulaire en faisant varier le facteur de forme λ . Pour la portance adimensionnée, on remarque que l'erreur de discrétisation diminue quand on augmente le facteur de forme λ . L'erreur de discrétisation sur le taux de cavitation est proportionnelle au facteur de forme λ . Pour le débit radial adimensionné, l'erreur varie peu avec λ .

Dans tous les cas que nous avons testés durant cette étude, les valeurs de GCI_{21} sont plus faibles que les valeurs de GCI_{32} , ce qui signifie que l'erreur de discrétisation est logiquement diminuée en réduisant la taille des mailles. Cependant, le temps de calcul devient plus grand. Par exemple, dans les cas traités ici, le temps de calcul avec le maillage 400X400 est environ 9 fois plus grand que celui obtenu avec le maillage 200X200. Le choix de la taille du maillage est défini par un compromis entre la précision et le temps de calcul. Dans cette étude, une seule rangée de motifs a été prise en compte sur la face de la garniture. Dans la pratique, plusieurs séries de motifs seront considérées de manière à occuper toute la largeur radiale de l'interface. Pour maintenir les temps de calcul à une valeur acceptable, sans pour autant sacrifier la précision des résultats, nous pouvons admettre que le maillage 200X200 est satisfaisant.

6 Conclusion

Cette étude nous a permis de faire une analyse quantitative de l'influence de la discrétisation sur la convergence de la solution numérique. En utilisant la méthode GCI, nous avons pu constater que l'erreur engendrée par la discrétisation varie en fonction du motif de texturation et du ratio λ , ainsi que d'une variable significative à une autre. Parmi les maillages que nous avons utilisés, le maillage 400X400 donne les résultats les plus précis, mais le temps de calcul dans ce cas est très important. Le maillage 200X200 donne des résultats légèrement perturbés par l'erreur de discrétisation, de l'ordre de quelques pourcent sur la portance pour un temps de calcul 9 fois plus faible que celui du maillage 400X400.

Remerciement

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'ANR portant la référence ANR-11-RMNP-0008

Références

- [1] I. Etsion, State of the art in Laser Surface Texturing, *Journal of Tribology*, 127, 248-253, January 2005.
- [2] D.B. Hamilton, J.A. Walowit and C.M. Allen, A Theory of Lubrication by Micro-irregularities, *ASME Journal of Basic Engineering*, 88,177-185, 1966.
- [3] H.G. Elrod, A Cavitation Algorithm, *Journal of lubrication Technology*, 103, 350-354, July 1981.
- [4] J. Zhang, Y. Meng, Direct Observation of Cavitation Phenomenon and Hydrodynamic Lubrication Analysis of Textured Surfaces, *Tribology Letters*, 46, 147-158, 2012.
- [5] I.B. Celik, U. Ghia, P.J. Roache, C.J. Freitas, H. Coleman and P.E. Raad, Procedure for Estimation and Reporting of Uncertainty Due to Discretization in CFD Applications, *Journal of Fluids Engineering*, 130, 1-4, July 2008.
- [6] P.J. Roache, Perspective: A Method for Uniform Reporting of Grid Refinement Studies, *Journal of Fluids Engineering*, 116,405-413, September 1994.