

Sur la mesure d'une force suiveuse mobile fléchissant une lame en grands déplacements

A. WATZKY^a, M.-A. BUENO^b

a. Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle (MSME), UMR 8208 CNRS
Univ. Paris-Est Créteil, Fac. S & T, 61 avenue du Général de Gaulle, 94010 CRÉTEIL

b. Laboratoire de Physique et Mécanique Textiles (LPMT), École Nationale d'Ingénieurs Sud Alsace
Université de Haute-Alsace, 11 rue Alfred Werner, 68093 MULHOUSE

Résumé :

On s'intéresse à la force exercée par un patin mobile en translation fléchissant une lame élastique encastrée à une extrémité. Le contact étant supposé obéir à une loi de frottement de Coulomb, la force est suiveuse et la forme de la lame est donnée par l'elastica via une transformation homothétique dont le facteur d'échelle est donné par la valeur de la force.

Après avoir rappelé la modélisation de ce problème non linéaire, nous verrons comment accéder expérimentalement à la raideur en flexion et au coefficient de frottement à partir de la mesure de la force et du déplacement du patin.

Outre la généralité de la situation, ce problème rentre dans le cadre de la caractérisation de surfaces textiles pileuses dont les propriétés mécaniques sont difficilement accessibles étant donnés les matériaux et les échelles considérés.

Abstract :

We study the force exerted by a slider moving at a constant height along an upward fixed elastic rod. Assuming a Coulomb dry friction, it is a follower force and the rod's shape is given by the elastica through a scale factor related to the force's modulus.

After having reminded the modelization of this non linear problem, we will explain how one can experimentally obtain the flexural rigidity and the friction angle from the measure of the force and the position of the slider.

This general situation arises from the question of characterizing hairy textile surfaces, in relation with their tactile feeling, whose mechanical properties are difficult to obtain directly.

Mots-clefs : elastica, flexion, grands déplacements, frottement, poutre, lame, fibre.

1 Position du problème

On s'intéresse à une poutre encastrée fléchi par un patin mobile. Cette question, d'un intérêt très général, est issue de la recherche de caractérisation expérimentale de surfaces textiles pileuses [1,2], et notamment de leur lien avec les sensations au toucher, alors que les propriétés mécaniques des fibres sont difficilement accessibles.

Le problème est plan et on considérera une lame afin d'assurer cette situation. La lame est supposée inextensible et linéairement élastique en flexion. En statique, elle prend entre l'encastrement en P et le point O d'application d'une force \mathbf{F} la forme d'une portion d'arc de l'elastica. On trouvera en [3] un historique de ce célèbre problème et les références correspondantes. L'originalité par rapport aux situations classiques en mécanique des poutres est que si l'on connaît les positions de P et O , la longueur de lame entre les deux est ici inconnue. Or, la portion de lame au-delà du patin étant libre, O est un point d'inflexion de l'elastica dont la portion \widehat{PO} utile ne dépend que de O , P et de l'orientation de la force.

Nous avons examiné dans la précédente contribution [3] le cas sans frottement où \mathbf{F} était donc toujours perpendiculaire à la lame et avons montré que lors du déplacement de son point d'application, la solution était toujours la même (elastica rectangle) à un facteur d'échelle près. Ainsi, on pouvait interpréter la situation (fig.

1) comme si la lame s'extrait au niveau de l'encastrement au fur et à mesure de l'avancée du patin, à une homothétie près permettant d'assurer les conditions aux limites en O et P . Ce remarquable résultat, directement issu de la modélisation du problème, montrait cependant un accord décevant avec des mesures dont l'objet était justement de remonter aux caractéristiques de la lame à partir de la force \mathbf{F} .

La comparaison théorie-expérience exhibait néanmoins un décalage constant dans l'orientation de la force relativement à la lame, révélateur d'un frottement non négligeable et faisant un angle constant avec la lame, c'est-à-dire d'un frottement classique de type Coulomb dont la conséquence essentielle est qu'il s'agit toujours d'une *force suiveuse*.

Il s'agit ici de poursuivre ce travail en prenant en compte un tel frottement. Nous allons voir que ce problème est analogue au précédent¹ que nous allons généraliser, y compris en envisageant une inclinaison de la lame au niveau de l'encastrement.

Nous finirons par une confrontation expérimentale avec deux types de patins pour une lame encastree verticalement. On cherchera à retrouver la forme de la lame, sa rigidité en flexion et l'angle de frottement à partir de la mesure de la force \mathbf{F} et de la position du patin.

2 Paramétrage

On se place dans le plan $(\xi P \zeta)$ où ξ est horizontal et ζ est la verticale ascendante (fig. 1a). Une poutre ou une lame est encastree vers le haut en P est fléchiée par une force concentrée \mathbf{F} de module F au point O en translation suivant ξ à la hauteur constante ζ_0 . Supposant un frottement solide de Coulomb, la force \mathbf{F} fait un angle de frottement $\phi = \arctan F_{//} / F_{\perp} \in] -\pi/2; +\pi/2[$ constant avec la normale à la lame et est donc une *force suiveuse* quel que soit son module.

Notre question première de la détermination de \mathbf{F} comme fonction de ξ renvoie à la détermination de l'arc \widehat{PO} . Or, dans notre problème de flexion plane, la force $-\mathbf{F}$ et son moment M en P représentent le torseur des efforts intérieurs exercé par un prolongement fictif de la lame de même courbure en P (la même remarque s'applique en O), de sorte que l'arc \widehat{OP} est assimilable à une portion d'une courbe plus longue y vérifiant les mêmes conditions aux limites.

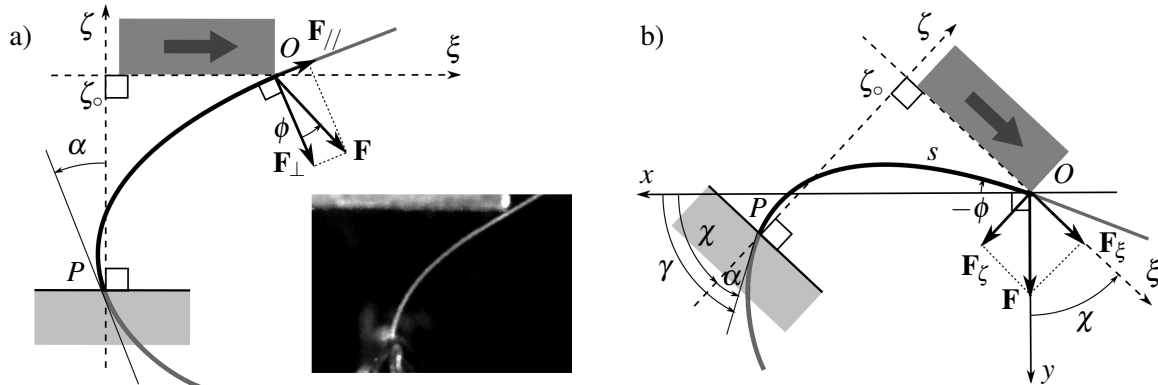


FIG. 1 – La lame et le patin : a) configuration expérimentale, b) paramétrage.

On définit les coordonnées cartésiennes dans le plan orthonormé $(O; x, y)$ où Oy est orienté suivant \mathbf{F} (fig. 1b). L'abscisse curviligne s est mesurée de O vers P .

La pente le long de \widehat{OP} est donnée par l'angle ψ fait avec Ox dont la valeur en P est $\psi(P) = \gamma$. La lame est encastree de sorte que sa tangente fait un angle α avec la verticale descendante et on note

$$\chi = \gamma - \alpha \tag{1}$$

l'angle de cette dernière avec Ox . Les axes ξ et ζ sont alors tournés de $\pi/2 + \chi$ par rapport à x et y . Tous les angles sont orientés dans le sens direct.

¹ On notera quelques changements de notations par rapport à [3].

Les coordonnées (X, Y) de P dans $(O; x, y)$ et celles (ξ, ζ_0) de O dans $(P; \xi, \zeta)$ sont liés par les relations

$$X = \zeta_0 \cos \chi + \xi \sin \chi, \quad Y = \zeta_0 \sin \chi - \xi \cos \chi \quad (2a)$$

$$\xi = X \sin \chi - Y \cos \chi, \quad \zeta_0 = X \cos \chi + Y \sin \chi \quad (2b)$$

et les composantes de \mathbf{F} sont données en fonction de la position du patin, par

$$F_\xi = F \cos \chi, \quad F_\zeta = -F \sin \chi \quad (3)$$

3 L'elastica

3.1 Équations d'équilibre

On suppose la lame linéairement élastique de rigidité B en flexion, c'est-à-dire que le moment fléchissant $M(s)$ est proportionnel à la courbure $\kappa = d\psi/ds$ et vérifie en chaque point :

$$B \kappa = M(s) = F x \quad (4)$$

qui se révèle être le problème géométrique de l'*elastica* reposant sur l'unique hypothèse d'une courbure proportionnelle à la distance x au support de la force [4,5].

Avec $dx/ds = \cos \psi$, la dérivation de (4) par rapport à s suivie d'une multiplication par $d\psi/ds$ conduit à l'intégrale première

$$\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 - \frac{2F}{B} \sin \psi = \frac{2F}{B} \sin \phi \quad (5)$$

la constante ϕ étant donnée par les conditions en O :

$$\psi(0) = \psi_0 = -\phi, \quad \frac{d\psi}{ds}(0) = 0 \quad (6)$$

où la partie de la lame d'abscisse $s < 0$ est libre ($M = 0$).

3.2 Adimensionnement et facteur d'échelle

Posant $\tilde{s} = \sqrt{F/B} s = s/\eta$, on introduit les autres variables géométriques adimensionnelles tildées $\tilde{x} = x/\eta$, $\tilde{y} = y/\eta$ et $\tilde{\kappa} = d\psi/d\tilde{s} = \eta \kappa$. Le problème normalisé équivalent, considérant qu'il s'agit de la même lame, est tel que $B \tilde{\kappa} = \tilde{F} \tilde{x}$ comme dans (4), de sorte que

$$\eta = \sqrt{B/F} = \sqrt{\tilde{F}/F} \quad (7)$$

et (4) se réduit à :

$$\tilde{\kappa} = \tilde{x} \quad (8)$$

Ainsi, l'arc \widehat{OP} dans la situation réelle est géométriquement homothétique à celui du problème normalisé dans un rapport η , et la force réelle \mathbf{F} dans un rapport $1/\eta^2$ par rapport à $\tilde{\mathbf{F}}$, avec

$$\tilde{F} \equiv B \quad (9)$$

4 Solution du problème normalisé

Bien que classique [6], on rappelle la procédure permettant d'obtenir la solution sous forme close avec les notations usuelles [7,8].

Un premier changement de variable

$$\theta = \pi/2 - \psi \quad \text{avec} \quad \theta_0 = \pi/2 - \psi_0 = \pi/2 + \phi \quad (10)$$

permet d'écrire l'équation (5) avec l'abscisse curviligne adimensionnelle \tilde{s} :

$$\frac{d\theta}{d\tilde{s}} = -\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)} \quad (11)$$

Définissant k et φ par

$$k = \sin \frac{\theta_0}{2} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\theta}{2} = k \sin \varphi \quad (12)$$

on obtient finalement $d\varphi/d\tilde{s} = -\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ d'où, avec φ décroissant à partir de $\pi/2$ quand \tilde{s} croît à partir de 0,

$$\tilde{s}(\varphi) = \int_{\varphi}^{\pi/2} \frac{d\tau}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tau}} = K(\frac{\pi}{2}|k) - K(\varphi|k) \quad (13)$$

où $K(\varphi|k) = \int_0^{\varphi} (1-k^2\sin^2\tau)^{-1/2} d\tau$ est l'intégrale elliptique de première espèce de module k . Cette relation peut être réécrite en termes de fonctions elliptiques comme

$$\sin \varphi = \text{sn}(K-\tilde{s}) = \text{sn} u \quad (14)$$

où $\varphi = \text{am} u$ est appelée l'amplitude de $u = K(\varphi|k)$.

La courbe de l'*elastica* s'écrit alors sous forme paramétrique en fonction de φ ou u à partir de :

$$-\frac{d\tilde{x}}{du} = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{s}} = \cos \psi = \sin \theta = 2k \sin \varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = 2k \text{sn} u \text{dn} u = -2k \frac{d}{du} \text{cn} u \quad (15a)$$

$$-\frac{d\tilde{y}}{du} = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{s}} = \sin \psi = \cos \theta = 1 - 2k^2 \sin^2 \varphi = 1 - 2k^2 \text{sn}^2 u = 2 \text{dn}^2 u - 1 = \frac{d}{du} [2E(\varphi|k) - u] \quad (15b)$$

et finalement, avec la condition (6)₂ qui s'écrit ici $\tilde{x}(\frac{\pi}{2}) = \tilde{y}(\frac{\pi}{2}) = 0$,

$$\tilde{x}(\varphi) = 2k \cos \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \arccos \frac{\tilde{x}}{2k} \quad (16a)$$

$$\tilde{y}(\varphi) = [K(\varphi|k) - K(\frac{\pi}{2}|k)] - 2[E(\varphi|k) - E(\frac{\pi}{2}|k)] = \int_{\varphi}^{\pi/2} \left(2\sqrt{1-k^2\sin^2\tau} - \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tau}} \right) d\tau \quad (16b)$$

où $E(\varphi|k) = \int_0^{\varphi} (1-k^2\sin^2\tau)^{+1/2} d\tau$ est l'intégrale elliptique de deuxième espèce.

La pente le long de la courbe découle des définitions (10) et (12) et vaut

$$\psi(\varphi) = \frac{\pi}{2} - 2 \arcsin(k \sin \varphi) \quad (17)$$

Pour φ balayant l'intervalle $[0; \pi/2]$, on décrit un quart de période *elastica* complet avec un point d'inflexion en O .

5 La situation expérimentale

Le problème normalisé n'étant régi que par la seule variable φ , pour k donné, *i.e.* l'angle de frottement ϕ qui contrôle la forme de la courbe, on peut exprimer $\tilde{\xi}$ et $\tilde{\zeta}$ (sous des formes plus ou moins compliquées). La forme de l'arc réel limité en P par $\psi = \gamma$ se déduit par le facteur d'échelle η qui s'obtient avec (2b)₂ et (1) pour ζ_0 donné, par :

$$\eta = \frac{\zeta_0}{\tilde{\zeta}} = \frac{\zeta_0}{\tilde{X} \cos(\gamma - \alpha) + \tilde{Y} \sin(\gamma - \alpha)} \quad (18)$$

et la force F , qui dépend de la rigidité en flexion de la lame, par (7) avec (9) pour B donné.

La photographie figure 1, montre le dispositif expérimental. Une lame de polyester, d'environ 0,1 mm d'épaisseur et 5 mm de large, est encastrée dans le support inférieur qui se déplace à la vitesse de 5 mm/s horizontalement vers la gauche sous un patin. Celui-ci est fixé à un bras instrumenté de sorte que la composante horizontale de la force exercée par le patin sur la lame est mesurée par une jauge de déformation et la verticale par un capteur piézoélectrique sur lequel il prend appui, avec une fréquence d'acquisition de 128 Hz.

5.1 Détermination des caractéristiques mécaniques

Les valeurs mesurées de F_ξ et F_ζ en fonction de ξ conduisent directement avec les relations (1) et (3) à :

$$\gamma = \chi = -\arctan \frac{F_\zeta}{F_\xi} \quad \text{et} \quad F^2 = F_\zeta^2 + F_\xi^2 \quad (19)$$

L'équation d'équilibre global (5) donne avec (4) écrite en P :

$$\left(\frac{F}{B} X\right)^2 = \frac{d\psi}{ds} \Big|_P = \frac{2F}{B} (\sin \chi + \sin \phi)$$

et finalement, avec (2a), l'angle de frottement ϕ peut être obtenu pour B constant par :

$$\sin \phi = \frac{F}{2B} (\zeta_0 \cos \chi + \xi \sin \chi)^2 - \sin \chi = \frac{1}{2BF} (\zeta_0 F_\xi - \xi F_\zeta)^2 - \frac{F_\zeta}{F} \quad (20)$$

Les valeurs de B et $\sin \phi$ sont obtenues par optimisation avec la méthode des moindres carrés.

5.2 Résultats et validation du modèle

Les caractéristiques de la lame sont indiquées tableau suivant.

Épaisseur	Largeur	Module d'Young
$84,4 \pm 1,5 \mu\text{m}$	$5,3 \pm 0,2 \text{ mm}$	$4,28 \pm 0,37 \text{ GPa}$

On présente ici les résultats pour deux patins (frotteurs) différents, l'un en PTFE et l'autre en aluminium.

Outre le calcul par optimisation à partir des mesures de la force sur l'ensemble de la courbe où seule l'arrête du patin frotte, la valeur de B est estimée à partir du moment quadratique I de la lame et de son module d'Young E mesuré par un essai en traction uniaxiale.

B ($\text{N} \cdot \text{m}^2$)	Frotteur PTFE	Frotteur aluminium
Mesuré (EI)	$(1,13 \pm 0,11) \cdot 10^{-6}$	$(1,13 \pm 0,11) \cdot 10^{-6}$
Calculé (optimisation)	$2,18 \cdot 10^{-6}$	$2,15 \cdot 10^{-6}$

Pour chaque patin, on note un écart important (facteur 2) entre les deux valeurs de B obtenues. Celles-ci pourraient s'expliquer par l'inhomogénéité de la lame dans son épaisseur due à son procédé de fabrication.

De même, l'angle de frottement ϕ est aussi mesuré lors du plateau apparaissant lorsque la tangente à la lame en O devient horizontale. La force restant constante pendant cette phase alors que la surface de contact croît accreditte l'hypothèse d'un frottement de type Coulomb.

ϕ (rad)	Frotteur PTFE	Frotteur aluminium
Mesuré lors du plateau	0,13	0,20
Calculé (optimisation)	0,14	0,35

La valeur de ϕ montre pour le PTFE un bon accord. Le patin en aluminium semble présenter des défauts de surface que l'on retrouvera dans les courbes suivantes.

On a représenté en traits pleins, figure 2, la force \mathbf{F} et ses composantes mesurées, le facteur d'échelle η calculé avec le B optimal et l'*elastica* reconstruite à partir des précédentes et de l'angle de frottement ϕ optimal. Les courbes en pointillés sont les courbes théoriques calculées à partir des mêmes B et ϕ .

On note un écart important sur le facteur d'échelle au voisinage de la prise contact qui s'explique par son asymptote verticale. Il se traduit par l'effet inverse dans les valeurs des forces.

Une modification du banc permettra bientôt de considérer expérimentalement une inclinaison α de la lame.

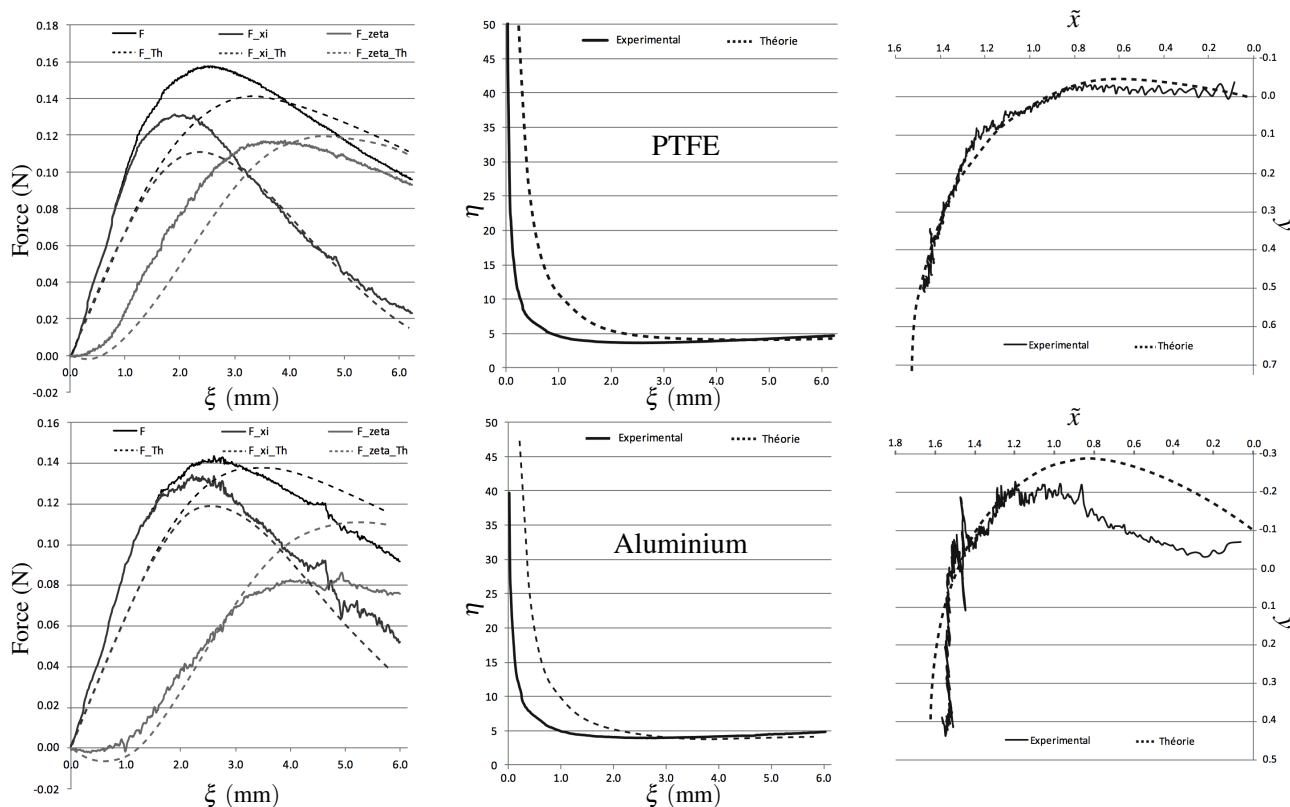


FIG. 2 – Force et reconstruction de l'elastica pour deux patins : en haut PTFE, en bas aluminium.

6 Conclusion

Notre approche à partir d'un modèle exact en grands déplacements permet d'approximer la rigidité en flexion B et le coefficient de frottement ϕ entre ici une lame lisse et un frotteur et devrait pouvoir être appliquée pour des fibres de longueur 1 ou 2 mm et de diamètre de 20-30 μm . Pour des fibres en polyester de ce type la rigidité en flexion est délicate à obtenir expérimentalement par une mesure en flexion du fait des échelles considérées. Inversement, elle permettrait d'appréhender quantitativement les forces mises en œuvre lors du frottement de surfaces pileuse lors que l'on change la rigidité en flexion du fil et le coefficient frottement.

Références

- [1] M. Dayiari, S. Shaikhzadeh Najar, M. Shamsi, *A new theoretical approach to cut-pile carpet compression based on elastic-stored bending energy*, Journal of the Textile Institute, **100**, 688-694 (2009).
- [2] B. Camillieri, M.-A. Bueno, R. Rossi, S. Derler, *Brush model to predict the friction of hairy textile fabrics from indentation measurements*, Wear, **296**, 519-527 (2012).
- [3] A. Watzky, M.-A. Bueno, *L'elastica revisitée sous l'angle des efforts*, 20^e Congrès Français de Mécanique, communication 1075, Besançon (2011).
- [4] J. Bernoulli, *Curvatura laminæ elasticae*, Acta Erud. 262-275 (juin 1694), repris in *Opera*, T1, § LVIII, 576-600, Cramer & Philibert, Genève (1744).
- [5] L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (Additamenta 1 *De curvis elasticis* & 2 pour les planches), E65, Bousquet, Lausanne & Genève (1744).
- [6] A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge University Press (1927).
- [7] A. M. Legendre, *Traité des fonctions elliptiques*, T.1, Huzard-Courcier, Paris (1825).
- [8] L. M. Milne-Thomson, *Handbook of Mathematical Functions*, Chap. 16 & 17, Éd. M. Abramowitz & I. A. Stegun, National Bureau of Standards, AMS 55 (1964).