

Abaques virtuels pour l'optimisation géométrique des structures

A. Courard^{a,b}, D. Néron^a, P. Ladevèze^a, P. Andolfatto^b, A. Bergerot^b

a. LMT-Cachan (ENS Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud)
61, avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan Cedex, France

b. EADS-ASTRIUM Space Transportation
B.P. 20011 33165 St Médard en Jalles Cedex, France

Résumé :

Cet article présente le concept d'« Abaques Virtuels » en calcul de structures. Basé sur la méthode de réduction de modèle, appelée Proper Generalized Decomposition (PGD), l'idée est de créer un outil numérique d'aide à la conception pour les ingénieurs où seront stockées des quantités d'intérêt calculées pour l'ensemble des configurations géométriques. Deux approches différentes ont été développées afin d'introduire les variations géométriques au sein de la PGD. Des résultats prometteurs ont été obtenus sur des exemples académiques.

Abstract :

The paper presents the concept of "Virtual Charts" applied to computational structural mechanics. Based on the Proper Generalized Decomposition (PGD), a model reduction method, the idea is to create a numerical tool to help engineers to perform shape optimization, where quantities of interest, computed for all the geometrical configurations, will be stored. Two different approaches have been developed in order to introduce geometry variations as parameters in the PGD. Promising results were obtained for academic examples.

Mots clefs : PGD ; abaque virtuel ; variations géométriques ; réduction de modèle

1 Introduction

Malgré le progrès constant des moyens informatiques ces dernières années, les essais expérimentaux conservent une place prépondérante lors de la conception de structures dans l'industrie, car la résolution numérique de modèles complexes de grande taille demeure encore souvent hors de portée. Et même lorsque la simulation est possible, chaque nouvelle structure conçue en bureau d'études est abordée comme un nouveau problème, traité de manière indépendante des cas déjà étudiés, ce qui conduit à un très grand nombre de simulations. Le recours à des essais expérimentaux ainsi qu'à ces multiples simulations entraîne des coûts temporels et financiers importants dont la réduction est un enjeu crucial.

L'idée développée ici, consiste à regrouper les structures semblables (qui ne diffèrent que par les valeurs données à un certain jeu de paramètres) en « familles » et à précalculer la solution générale pour chacune des familles sous forme paramétrée. Les quantités d'intérêt utiles au dimensionnement sont alors stockées dans des « abaqués virtuels » qui seront utilisés en quasi temps réel par l'ingénieur lors de la phase de conception en particulierisant les solutions pour les valeurs de paramètres considérées. La construction de ces abaqués est basée sur la méthode de réduction de modèle PGD (Proper Generalized Decomposition) introduite pour la première fois en 1985 par P. Ladevèze sous le nom d'« Approximation Radiale » [4] afin de traiter des problèmes non linéaires dépendant du temps. Elle permet de générer la solution d'un problème paramétré pour l'ensemble des jeux de paramètres et son efficacité a été démontrée dans le cas de problèmes temps-espace [5], multiéchelles [6], multiphysiques [7]

et paramétriques [1]. Dans le cadre de cette étude avec ASTRUM-ST, les abaques virtuels sont créés pour prendre en compte les variations de géométrie, qui sont un des points clés dans le processus de conception. Il s'agit alors de considérer ces variations géométriques comme des paramètres dans la méthode PGD et de calculer les grandeurs d'intérêt à partir de la résolution de problèmes adjoints avec le contrôle de l'erreur.

Après un rappel succinct de la PGD, on présente deux approches différentes développées pour adapter la Proper Generalized Decomposition aux variations de géométrie puis leurs possibilités sont discutées au travers d'un exemple académique bidimensionnel.

2 Proper Generalized Decomposition et variations de géométrie

2.1 Proper Generalized Decomposition

Le lecteur pourra trouver une présentation approfondie de la méthode PGD dans [8] et une bibliographie détaillée sur le sujet dans [2]. Cette méthode est basée sur l'idée que la solution d'un problème donné peut être approximée avec une bonne précision grâce à un nombre réduit de modes. On peut remarquer l'analogie avec la dynamique où la majeure partie de l'information est contenue dans les premiers modes. Lorsque l'on ajoute des modes, la solution est alors enrichie.

Pour cela, un champ inconnu f est recherché en faisant l'hypothèse de séparation de variables. Un exemple d'approximation PGD est donné ci-dessous pour un problème défini sur le temps et l'espace :

$$\forall(\underline{M}, t) \in \Omega \times [0, T], f(\underline{M}, t) \approx \hat{f}_n(\underline{M}, t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \Lambda_i(\underline{M}) \quad (1)$$

où Λ_i sont les modes spatiaux et λ_i sont les fonctions temporelles.

En pratique, le nombre n de couples PGD nécessaires pour obtenir une bonne approximation de la solution est très faible. Les coûts de calcul et de stockage sont donc fortement réduits. De plus, les fonctions Λ_i et λ_i ne sont pas données *a priori*. Elles seront calculées par un processus itératif.

Cette démarche peut être étendue aux problèmes paramétriques et multidimensionnels.

$$f(\underline{M}, t, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \approx \hat{f}_n(\underline{M}, t, \alpha_1, \dots, \alpha_k) = \sum_{i=1}^n f_i^1(\alpha_1) \dots f_i^k(\alpha_k) \lambda_i(t) \Lambda_i(\underline{M}) \quad (2)$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont des paramètres définissant la géométrie.

L'objectif est de construire la solution du problème pour toutes les configurations géométriques, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ et d'en déduire une quantité d'intérêt utile au dimensionnement qui sera stockée dans un Abaque Virtuel pour une utilisation ultérieure par l'ingénieur.

2.2 Exemple

La Figure 1 présente un exemple de structure dont l'on souhaite optimiser deux dimensions géométriques en prenant comme grandeur d'intérêt pour le dimensionnement le maximum de la contrainte de Von Mises. On note α et β , les paramètres géométriques associés respectivement à une longueur et au rayon de courbure d'un congé, qui seront pris en compte dans la méthode PGD. La structure est encadrée et un chargement constant est appliqué à l'extrémité opposée. Il reste à adapter la PGD afin d'y incorporer les variations de géométrie.

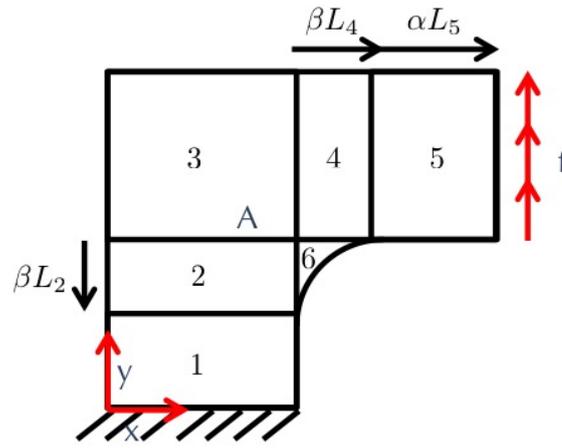


FIGURE 1 – Structure test

2.3 Méthode 1

Une structure de référence Ω_0 est définie et maillée. Pour chaque structure Ω_{α} , correspondant à une configuration géométrique paramétrée par $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, il est possible de revenir à la structure de référence grâce à des transformations géométriques [3]. Pour cela, on écrit la formulation variationnelle du problème paramétrique.

$$\forall \delta \underline{u} \in \mathcal{U}^*, \int_{\mathcal{A} \Omega_{\alpha}} \underline{\varepsilon}(\underline{u}(\underline{M}, \alpha)) : \underline{\kappa} \underline{\varepsilon}(\delta \underline{u}(\underline{M}, \alpha)) \, d\alpha d\Omega = \int_{\mathcal{A} \partial_f \Omega_{\alpha}} \underline{f}^T \delta \underline{u}(\underline{M}, \alpha) \, d\alpha d\Gamma \quad (3)$$

- \mathcal{A} : espace des paramètres géométriques auquel appartient α
- $\underline{\varepsilon}$: champ des déformations
- $\underline{\kappa}$: tenseur de hooke
- \underline{u} : vecteur de déplacement
- \underline{f} : vecteur de chargement

Il est alors possible d'étudier le problème par rapport à la structure de référence grâce à un changement de variables.

$$\forall \delta \underline{u} \in \mathcal{U}^*, \int_{\mathcal{A} \Omega_0} \underline{\varepsilon}(\underline{u}(\underline{M}_0, \alpha)) : \underline{\kappa} \underline{\varepsilon}(\delta \underline{u}(\underline{M}_0, \alpha)) |\det \underline{J}_{\alpha}| \, d\alpha d\Omega = \int_{\mathcal{A} \partial_f \Omega_0} \underline{f}^T \delta \underline{u}(\underline{M}_0, \alpha) \, d\alpha d\Gamma \quad (4)$$

où \underline{J}_{α} est la matrice Jacobienne de la transformation géométrique qui transforme Ω_0 en Ω_{α} :

$$\forall \underline{M}_0 \in \Omega_0, \underline{M} = T(\underline{M}_0) \in \Omega_{\alpha} \quad (5)$$

Le champ inconnu, ici le déplacement \underline{u} , est recherché sous forme séparée :

$$\underline{u}(\underline{M}_0, \alpha) \approx \sum_{i=1}^n g_i(\alpha) \underline{U}_i(\underline{M}_0) \quad (6)$$

2.4 Méthode 2

Dans cette méthode, la structure de référence Ω_0 est définie comme la réunion de toutes les configurations géométriques Ω_{α} . Pour chaque configuration géométrique, la structure courante est comme

« plongée » dans un milieu « mou ». Une nouvelle relation de comportement doit alors être définie sur Ω_0 :

$$\tilde{\kappa} = \kappa\psi_\alpha + a\kappa(1 - \psi_\alpha) \text{ où } a \ll 1 \quad (7)$$

où

$$\begin{cases} \psi_\alpha(\underline{M}) &= 1 \text{ si } \underline{M} \in \Omega_\alpha \\ &= 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (8)$$

Pour calculer la matrice de rigidité d'un élément fini, on fait l'hypothèse que la structure de référence est maillée très finement. La matrice de rigidité devient :

$$\tilde{\underline{K}}_{el} = \begin{cases} \underline{K}_{el} & \text{si l'élément entier appartient à } \Omega_\alpha \\ a\underline{K}_{el} & \text{sinon} \end{cases} \quad (9)$$

où \underline{K}_{el} est la matrice de rigidité classique d'un élément fini calculée avec la relation de comportement κ .

Ensuite le déplacement \underline{u} est écrit sous la forme d'une approximation PGD et le problème est résolu sur la structure de référence.

2.5 Résultats

Les deux méthodes ont été testées sur l'exemple présenté précédemment. La Figure 2a montre la convergence de la méthode 1 par rapport au nombre de couples PGD calculés. Il peut être noté qu'avec seulement quatre couples, on obtient une erreur relative par rapport à une solution de référence calculée grâce à une résolution EF pour chaque configuration géométrique, inférieure à 1%. Un exemple d'Abaque Virtuel est aussi présenté Figure 2b où la quantité d'intérêt considérée est le maximum de la contrainte de Von Mises.

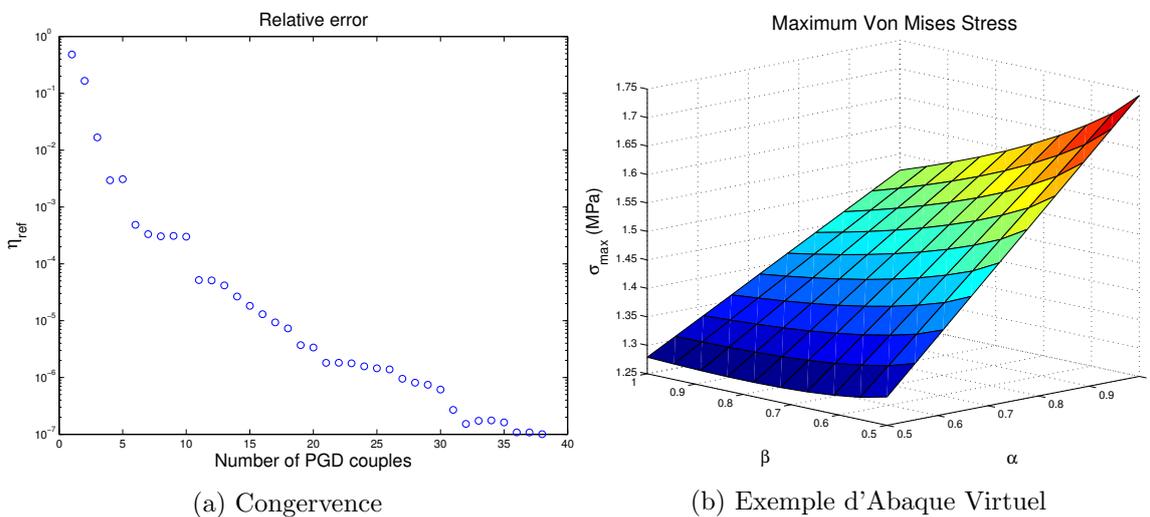


FIGURE 2 – Résultats d'une simulation utilisant la méthode 1

3 Conclusions

Deux approches différentes ont été introduites dans le cadre de la Proper Generalized Decomposition et utilisées dans des exemples académiques où des variations de géométrie sont prises en considération en tant que paramètres. Il a alors été possible de construire des « Abaqués Virtuels » pour des quantités d'intérêt utiles au dimensionnement. La prochaine étape est d'appliquer ces méthodes à des problèmes

plus complexes afin de se rapprocher des contraintes industrielles d'ASTRIUM-ST. En particulier, dans l'exemple présenté dans cet article, la quantité d'intérêt (maximum de la contrainte de Von Mises) a été calculée à partir du problème direct. Par la suite, les quantités d'intérêt seront déterminées à partir de la résolution de problèmes adjoints en comprenant le contrôle de l'erreur.

Références

- [1] Chinesta, F., Ammar, A., Keunings, R. 2011 An overview of the proper generalized decomposition with applications in computational rheology. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. **166** 578-592
- [2] Chinesta, F., Ladevèze, P., Cueto, E. 2011 A short review on model order reduction based on Proper Generalized Decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*. **18** 395-404
- [3] Ghnatios, C., Ammar, A., Cimetière, A., Hamdouni, A., Leygue, A., Chinesta, F. First steps in the space separated representation of models defined in complex domains. *Proceedings of the ASME 2012 11th Biennial Conference On Engineering Systems Design and Analysis.*, Nantes, France, 2-4 July 2012.
- [4] Ladevèze, P. 1989 The large time increment method for the analyse of structures with nonlinear constitutive relation described by internal variables. *Compte rendu de l'académie des Sciences*. **309** 1095-1099
- [5] Ladevèze, P. 1999 *Nonlinear Computational Structural Mechanics – New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag.
- [6] Ladevèze, P., Passieux, J.-C., Néron, D. 2010 The LATIN multiscale computational method and the Proper Generalized Decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **199** 1287-1296
- [7] Néron, D., Ladevèze, P. 2010 Proper Generalized Decomposition for Multiscale and Multiphysics Problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*. **17** 351-372
- [8] Nouy, A. 2010 A priori model reduction through Proper Generalized Decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **199** 1603-1626