

Homogénéisation périodique d'un matériau élasto-plastique compressible anisotrope : application aux structures sandwichs à coeur cellulaire.

ALEXANDRE ILTCHEV^a, VINCENT MARCADON^a, SERGE KRUCH^a,
BERTRAND LANGRAND^b, SAMUEL FOREST^c

a. Onera DMSM-MCE – 29 Avenue de la Division Leclerc, BP 72, 92322 Châtillon Cedex, France

b. Onera DADS-CRD – 5 Boulevard Paul Painlevé 59800 Lille

c. ENSMP, UMR 7633, Centre des Matériaux, BP 87, 91003 Evry Cedex

Résumé :

La modélisation d'architectures cellulaires de grandes dimensions est difficile à mettre en oeuvre car elle est couteuse en temps de calcul. Pour contourner cette difficulté, une modélisation multi-échelle basée sur l'identification de lois homogènes équivalentes du comportement multi-axial de ces matériaux à l'échelle de leur volume élémentaire représentatif est proposée. Des structures sandwichs sont ensuite modélisées en remplaçant le coeur cellulaire par son milieu homogène équivalent. Pour des cas de chargements quasistatiques, l'influence des effets de bords sur le comportement macroscopique de la structure en fonction des différents types d'empilement des tubes, de la taille des structures sandwichs et du type de chargement est analysée. La méthode donne des résultats satisfaisants mais présente des limites quant à la validité de la séparation des échelles, indispensable à l'approche par homogénéisation.

Abstract :

Modeling large cellular structures is difficult because of the computational cost of the finite element models. A multi-scale modeling strategy based on the identification of a macroscopic constitutive model is therefore proposed. The core is considered periodic and its multi-axial behavior is obtained by periodic homogenization on the unit cell. This method gives the macroscopic mechanical response on which an anisotropic compressible Homogeneous Equivalent Law is fitted. The core of a sandwich structure is then replaced by its Homogeneous Equivalent Medium. Quasi-static loadings are applied to finite sandwich structures to study the influence of the edge effects on the macroscopic behavior depending on the stacking pattern, the sandwich structure size and the load case. This approach gives satisfactory results but the hypothesis of scale separation is not satisfied.

Mots clefs : Homogénéisation non-linéaire, architectures cellulaires, comportement multi-axial

1 Introduction

Le développement de matériaux légers et ayant de bonnes propriétés mécaniques, notamment en termes de tenue structurale et de résistance à l'impact, représente un enjeu majeur pour l'industrie aéronautique. Les matériaux cellulaires architecturés apparaissent comme de bons candidats pour répondre à ces exigences. Cependant, l'analyse de ces matériaux nécessite l'étude de trois échelles caractéristiques : l'échelle macroscopique de la structure, l'échelle mésoscopique dépendant de l'architecture et de son Volume Élémentaire Représentatif (VER), et l'échelle microscopique associée au matériau constitutif. Par conséquent, une modélisation complète de ces matériaux tenant compte de ces différentes échelles est difficilement envisageable car nécessiterait des coûts de calcul importants. Nous proposons donc de développer une méthode de modélisation multi-échelle des architectures basée sur l'identification d'une Loi Homogène Equivalente (LHE). Pour mettre en place une telle approche, comme proposée dans [6], des structures sandwichs ayant pour coeur un empilement de tubes et des peaux en Inconel 600 ont été choisies comme matériaux modèles (fig. 1). Le comportement de ces structures cellulaires a été caractérisé, puis une loi de comportement modélisant le comportement multi-axial a été

identifiée afin de modéliser ces structures sandwichs finies en remplaçant le coeur cellulaire par son Milieu Homogène Equivalent (MHE).

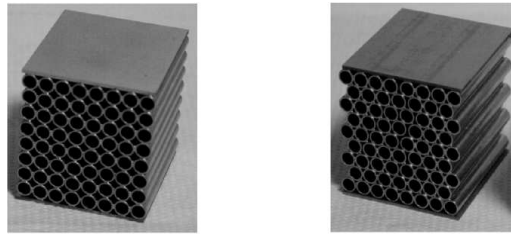


FIG. 1 – Structures sandwichs modèles considérées (les tubes et les peaux sont assemblées par brasage nickel-phosphore) : empilement carré à gauche, hexagonal à droite.

2 Homogénéisation périodique du matériau cellulaire

Afin d'appliquer les méthodes d'homogénéisation, il est nécessaire d'introduire les grandeurs macroscopiques classiques : la déformation macroscopique \underline{E} et la contrainte macroscopique $\underline{\Sigma}$. Elles sont respectivement obtenues par moyenne volumique sur le VER de la déformation microscopique $\underline{\varepsilon}$ et à la contrainte microscopique $\underline{\sigma}$ [3].

2.1 Définition du Volume Élémentaire Représentatif et hypothèses de modélisation

Le VER est défini comme la cellule unitaire du coeur périodique. Une discretisation spatiale en 2D suivant le plan d'extrusion des tubes est utilisée, on se place alors dans le cadre des déformations planes généralisées afin d'autoriser des chargements selon la direction longitudinale des tubes. Les calculs Eléments Finis (EF) sur le VER sont effectués avec des relations de périodicité entre noeuds homologues du pourtour du maillage. Le comportement du matériau constitutif est déterminé à partir de caractérisation expérimentale obtenue sur des échantillons ayant subi un traitement thermique de brasure. Ses caractéristiques sont : élasticité isotrope, critère de plasticité de Von Mises et écrouissage isotrope non linéaire (se référer à [5] pour les valeurs des paramètres du matériau). En première approche, le matériau constitutif est supposé homogène dans les tubes et dans les ménisques de brasure [5].



FIG. 2 – Volumes Élémentaires Représentatifs : a) empilement carré, b) empilement hexagonal.

2.2 Comportement multi-axial

Dans le but de caractériser le matériau, le comportement homogénéisé est d'abord présenté pour des chargements uni-axiaux effectués jusqu'à 5% de déformation macroscopique totale puis, dans un second temps, pour des cas de chargement multi-axiaux. Les calculs sont ici conduits sous l'hypothèse des petites déformations. Les réponses mécaniques macroscopiques rapportées à la figure 3, illustrant un comportement fortement anisotrope pour les deux types d'empilement. On retrouve dans la direction 33 (hors plan) le comportement du matériaux constitutif pondéré par la fraction de matière dans le VER. Les directions 11 et 22 (plan d'extrusion) ont également un comportement non linéaire, qui est dû à la fois au comportement du matériau constitutif élasto-plastique et à l'hétérogénéité de la distribution des contraintes dans l'architecture. Dans le cas de l'empilement hexagonal, l'orientation des ménisques de brasure est différente par rapport aux directions 11 et 22

de sollicitation, provoquant des concentrations de contraintes différentes induisant un comportement plastique anisotrope dans le plan du VER (fig 3). Le comportement multi-axial est représenté sous forme de surfaces de

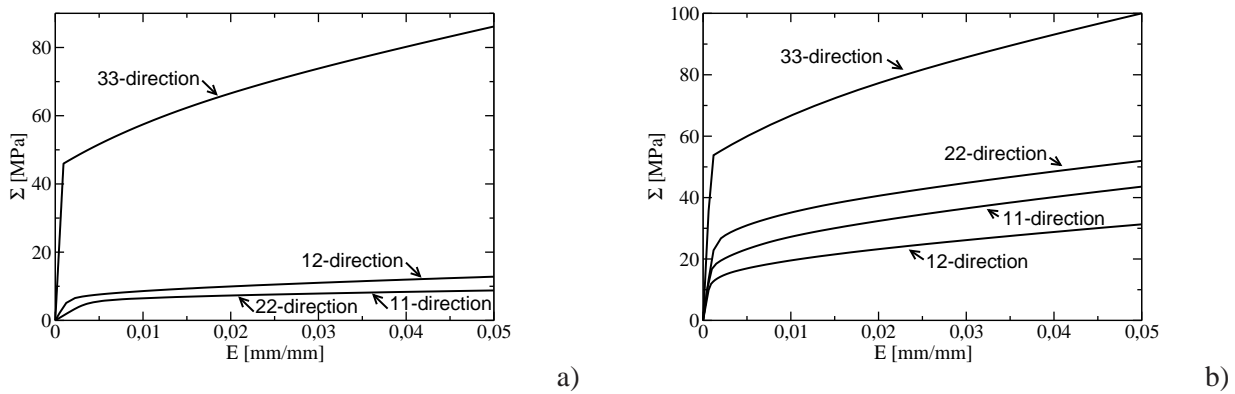


FIG. 3 – Réponses mécaniques macroscopiques : a) empilement carré, b) empilement hexagonal.

charge [7]. Ces surfaces sont construites par un ensemble de chargements proportionnels pilotés en contrainte macroscopique sur lesquels des seuils de plasticité cumulée p sont fixés où $\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\underline{E}}_p : \dot{\underline{E}}_p}$.

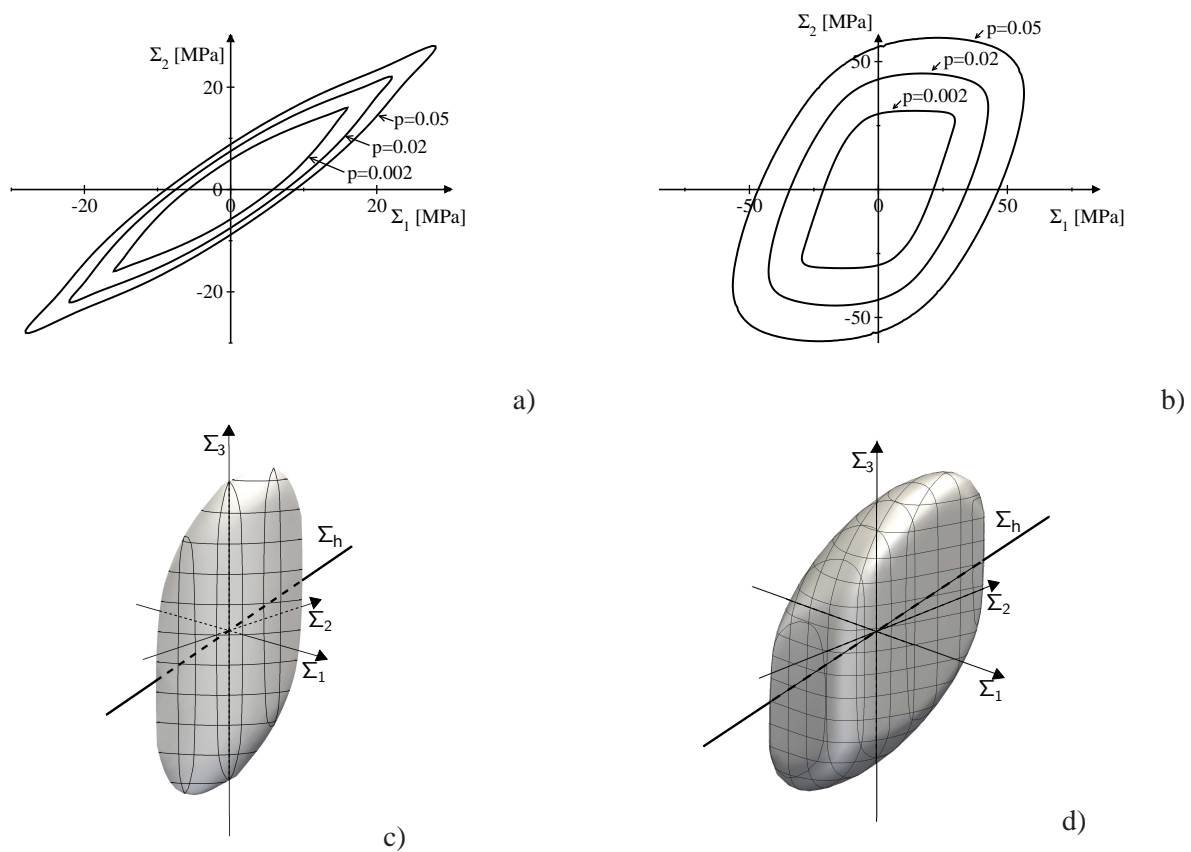


FIG. 4 – Comportement macroscopique bi-axial dans l’espace des contraintes principales $\Sigma_1 - \Sigma_2$ en haut ; Dans l’espace des contraintes principales $\Sigma_1 - \Sigma_2 - \Sigma_3$ en bas : a) et c) carré, b) et d) hexagonal.

3 Identification de LHE

Le matériau montre un comportement élastique anisotrope, ainsi qu'un comportement plastique anisotrope, y compris lors de chargements hydrostatiques (figs. 4c et 4d). Par ailleurs, le comportement multi-axial de l'empilement carré infini est quadratique (fig. 4a), alors que celui de l'empilement hexagonal est non quadratique (fig. 4b). Afin de modéliser le comportement multi-axial macroscopique par une LHE, le modèle phénoménologique choisi doit rendre compte de ces différentes caractéristiques.

3.1 Formulation du modèle

La déformation totale \underline{E} suit la décomposition additive $\underline{E} = \underline{E}_{el} + \underline{E}_p$, où la déformation élastique \underline{E}_{el} suit la loi d'élasticité linéaire anisotrope classique et la déformation plastique \underline{E}_p suit la loi d'écoulement suivante :

$$\dot{\underline{E}}_p = \lambda \frac{df}{d\underline{\Sigma}} \quad (1)$$

avec λ le multiplicateur plastique et f la fonction de charge $f = \Sigma_{eq} - \Sigma_y$ avec Σ_y le scalaire associé à l'écrouissage isotrope non linéaire. Le critère de plasticité elliptique anisotrope, permettant de prendre en compte un comportement plastique sous chargement hydrostatique, est choisi de la forme suivante [2] :

$$\Sigma_{eq} = \sqrt{3C\Sigma_e^2 + F\Sigma_m^2} \quad (2)$$

où C et F sont des paramètres matériaux. $\Sigma_m = c_1\Sigma_{11} + c_2\Sigma_{22} + c_3\Sigma_{33}$ est la trace modifiée de $\underline{\Sigma}$ par les paramètres matériaux c_1 , c_2 et c_3 pour tenir compte de l'anisotropie de la compressibilité et Σ_e est une contrainte équivalente générale non-quadratique introduite par Bron et Besson [1] :

$$\Sigma_e = \left(\alpha (\psi^1)^a + (1 - \alpha) (\psi^2)^a \right)^{1/a} \quad (3)$$

où α et a sont des coefficients du matériau et où ψ^1 et ψ^2 sont des fonctions du déviateur des contraintes qui gouvernent l'anisotropie du comportement par des paramètres matériaux (se référer à [1] pour le détail des expressions du modèle).

3.2 Résultats

L'identification des paramètres est effectuée à partir des composantes des réponses mécaniques des chargements bi-axiaux et uni-axiaux. Seuls des chargements dans le plan d'extrusion sont considérés ici, les résultats sont présentés sous forme de surfaces seuils de densité de travail plastique W_p où $\dot{W}_p = \underline{\Sigma} : \dot{\underline{E}}_p$. Le compor-

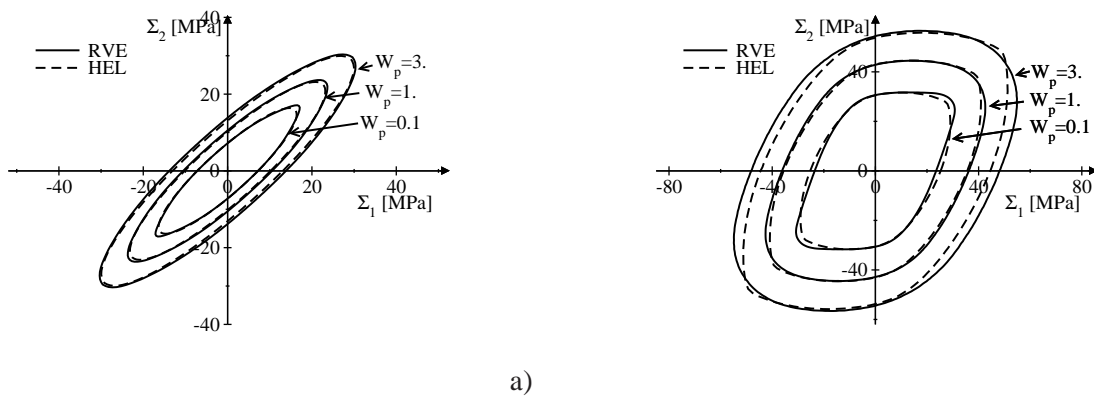


FIG. 5 – Comportement macroscopique multi-axial de la LHE dans l'espace des contraintes principales $\Sigma_1 - \Sigma_2 - \Sigma_3$: a) empilement carré, b) empilement hexagonal.

tement homogénéisé du VER est bien décrit par le modèle phénoménologique choisi (fig. 5). En effet les LHE identifiées rendent compte du comportement quadratique du VER de l'empilement carré, ainsi que de l'anisotropie dans le plan et du comportement non quadratique du VER de l'empilement hexagonal.

4 Modélisation de structures sandwichs finies

Grâce aux LHE identifiées précédemment, on se propose maintenant de modéliser des structures sandwichs finies. Le coeur périodique des structures sandwichs est remplacé par son milieu homogène, avec comme lois de comportement les LHE identifiées pour les deux types d'empilement.

4.1 Stratégies de modélisation

Le coeur cellulaire de la structure sandwich à empilement carré est périodique et est représenté par son VER (fig. 2a). Dans le cas de l'empilement hexagonal, le VER (fig. 2b) n'est plus respecté à l'interface entre le coeur et les peaux ou sur les bords libres car, topologiquement, les tubes possèdent moins de voisins. Des comportements différents sont donc observés dans ces tubes lors du calcul EF de référence. Une comparaison est alors menée entre un coeur entièrement remplacé par son MHE et un modèle conservant maillés les tubes de pourtour (fig. 6d). Afin de se placer volontairement sous l'hypothèse de la séparation de échelles, des

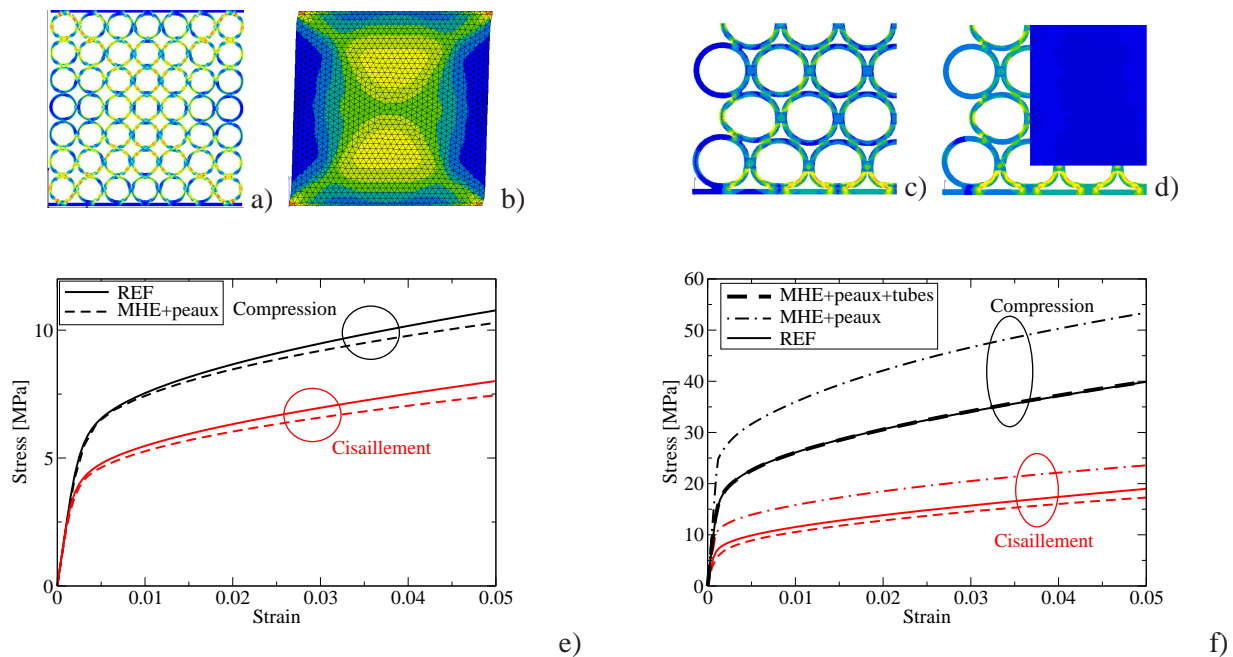


FIG. 6 – Calculs EF de glissements simples sur structures sandwichs à empilement carré : a) de référence, b) avec MHE ; Calculs EF de compression sur structures sandwichs en empilement hexagonal : c) de référence, d) avec MHE ; Réponses contraintes-déformations pour des structures sandwichs 7×7 tubes : e) empilement carré, f) empilement hexagonal.

chargements uniformes sont imposés sur ces structures : compression du sandwich et glissement simple (figs. 6e et 6f). Les réponses macroscopiques confirment que le coeur peut être remplacé par son MHE dans la sa totalité, aussi bien pour le cas du glissement simple que pour celui de la compression (fig. 6e). Au contraire, les réponses mécaniques effectives de l'empilement hexagonal avec son coeur entièrement remplacé par un MHE surestiment largement le comportement en glissement et en compression à cause des tubes de bord (fig. 6f) où se localise la déformation du coeur. Le choix de ne remplacer que la partie centrale du coeur par son MHE est donc pertinente pour un sandwich de 7×7 tubes.

4.2 Effets de taille

L'influence des effets de bords dus à la présence de la peau a été étudiée en fonction de la taille de la structure (fig. 7). Ainsi, pour l'empilement carré les effets de bords se sont révélés négligeables pour les cas de chargement considérés. On observe une convergence lente vers le comportement du milieu infini, la présence de peaux ayant un rôle rigidifiant (fig. 7a). En revanche, pour l'empilement hexagonal, le comportement des bords ne peut être négligé (fig. 7) à moins de surestimer largement la raideur effective (fig. 7b). La convergence se fait ici par la diminution de la contribution de la demi rangée de tubes à faible raideur près des peaux. L'utilisation

de maillages mixtes, c'est-à-dire en remplaçant le centre du coeur par son MHE et en conservant les tubes aux bords maillés, permet de rendre compte cet effet de bords jusqu'à des déformations macroscopiques de 5% (fig. 7).

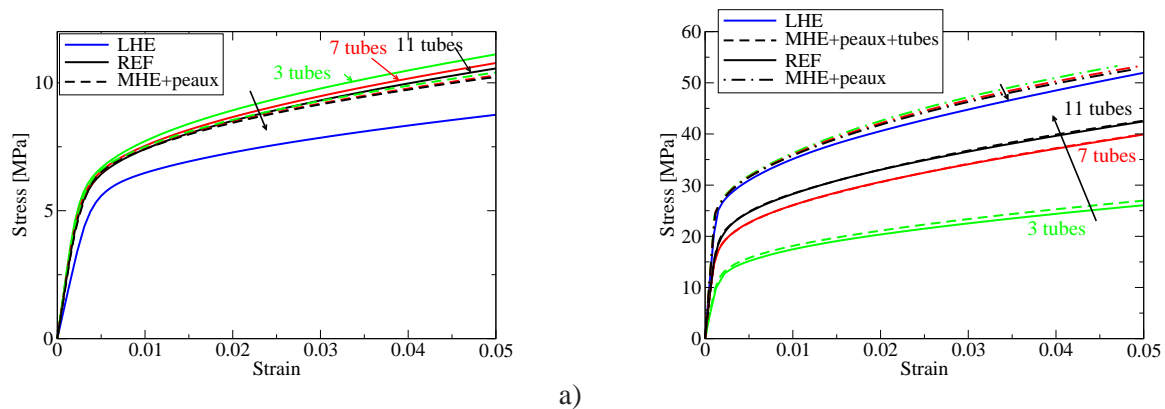


FIG. 7 – Réponses contraintes-déformations pour des structures sandwichs en compression de 3×3 , 7×7 et 11×11 tubes : a) empilement carré, b) empilement hexagonal.

5 Conclusion

L'homogénéisation d'un matériau cellulaire architecturé a été étudiée ici. La caractérisation des matériaux par calcul de leur VER a permis d'identifier des LHE modélisant correctement leur comportement multi-axial. Ainsi, la modélisation pour des cas de chargement simples de structure sandwichs de grandes dimensions a été rendue possible en remplaçant le coeur cellulaire par son MHE. Cependant, pour des chargements plus sévères ou pour des chargements non uniformes, le non-respect de l'hypothèse de séparation des échelles se traduit par une très forte influence des effets de bords sur le comportement macroscopique de la structure. Une étude en grandes déformations des modes d'instabilité des empilements de tubes, et de la localisation de la déformation au voisinage des peaux, conduira à s'interroger sur une voie possible d'amélioration des modèles en considérant des milieux continus généralisés [4]. En effet, un milieu à microstructure permettrait de régulariser, grâce à la présence d'une longueur interne, la singularité à l'interface coeur/peau et la sensibilité à la taille du coeur pour la localisation de la déformation.

Références

- [1] F. Bron and J. Besson, 2004, A Yield function for anisotropic materials Application to aluminum alloys, *Int. J. of Plast.* Vol. 20, 937-963
- [2] R.J. Green, 1972, A plasticity theory for porous solids, *Int. J. of Mech. Sci.* Vol. 14, Pages 215-224
- [3] R. Hill, 1972, On Constitutive Macro-Variables for Heterogeneous Solids at Finite Strain, *Proc. R. Soc. Lond.* Vol. 326 no. 1565 131-147
- [4] V. Kouznetsova, M.G.D. Geers and W.A.M. Brekelmans, 2002, Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme *Int. J. Numer. Meth. Engng* 54, 1235-1260
- [5] V. Marcadon, S. Kruch, 2011, Roles of mechanical heterogeneities and damage on the overall mechanical behaviour of hollow-tube stackings *Proc. Engng.* Vol. 10, Pages 2815-2820
- [6] M. Tsuda, E. Takemura, T. Asada, N. Ohno, T. Igari, 2010, Homogenized elastic-viscoplastic behavior of plate-fin structures at high temperatures : Numerical analysis and macroscopic constitutive modeling, *Int. J. of Mech. Sci.* Vol. 52, Pages 648-656
- [7] D.-A. Wang, J. Pan, 2006, A non-quadratic yield function for polymeric foams, *Int. J. of Plast.* Vol. 22, Pages 434-458