

# Comportement dynamique d'un système à un degré de liberté comprenant un élément de Saint-Venant couplé à un amortisseur non linéaire

MATHIEU WEISS<sup>a</sup>, ALIREZA TURE SAVADKOOHI<sup>b</sup>, CLAUDE-HENRI LAMARQUE<sup>b</sup>

a. Université de Lyon, École Nationale des Travaux Publics de l'État,  
LGCB,

rue Maurice Audin, 69518, Vaulx-en-Velin Cedex, France

b. Université de Lyon, École Nationale des Travaux Publics de l'État,  
LGCB et LTDS UMR CNRS 5513,

rue Maurice Audin, 69518, Vaulx-en-Velin Cedex, France

## Résumé :

*Cet article étudie les échanges d'énergie entre un oscillateur principal incluant un élément de Saint-Venant et un absorbeur non linéaire — ou nonlinear energy sink (NES) — par une approche multi-échelles en temps. Dans un premier temps, la démarche analytique permet d'obtenir un invariant du système en échelle rapide et des points fixes et/ou singuliers pour la première échelle lente. Cela nous permet de prédire les différents régimes possibles d'évolution du système. Les résultats de cette démarche sont confrontés à des simulations numériques qui permettent de voir les différents comportements de ce système et de valider le bien-fondé de la démarche analytique.*

## Abstract :

*Multi-scale vibratory energy exchange between a main oscillator including Saint-Venant term and a cubic nonlinear energy sink (NES) is studied. Analytically obtained invariant manifold of the system at fast time scale and detected fixed points and/or fold singularities at first slow time scale let us predict and explain different regimes that the system may face during the energy exchange process. The paper will be accompanied by some numerical results confirming our analytical predictions.*

**Mots clefs :** Échange d'énergie ; Absorbeur non linéaire ; Saint-Venant

## 1 Introduction

Les couplages non linéaires entre un degré de liberté et un absorbeur de petite masse, aussi appelé nonlinear energy sink (NES), permettent de localiser l'énergie vibratoire [3, 11, 12]. Il est alors possible d'effectuer un contrôle de la masse principale comme cela a été prouvé expérimentalement [4, 10]. De nombreux types de NES ont été étudiés, comme le vibro-impact avec Nucera et al [7] ou encore les NES linéaires par morceaux par Gendelman [2] et Lamarque et al. [5]. Ture Savadkoochi et al. [9] ont étudié le cas d'un NES linéaire par morceaux soumis à la gravité. Schmidt et Lamarque [8] ont étudié les transferts d'énergie entre un NES cubique et un degré de liberté possédant un terme de frottement.

Cet article étudie un système à un degré de liberté avec un élément de Saint-Venant couplé à un NES cubique. Il se décline en deux parties. La première partie décrit la démarche analytique qui permet de prédire les comportements possibles du système sous une excitation sinusoïdale. La seconde partie confronte ces prédictions analytiques à des résultats obtenus par intégration numérique du système.

## 2 Démarche analytique

Nous étudions le comportement dynamique du système représenté en Fig. 1. La masse principale ( $M, k, \tilde{\lambda}$ ), à laquelle un élément de Saint-Venant ( $\tilde{k}_p, \alpha$ ) est ajouté, est liée au NES ( $m, \tilde{C}_1, \tilde{\lambda}_1$ ) par un potentiel cubique (i.e.  $F : x \mapsto x^3$ ). Le rapport  $\epsilon$  des masses est très faible, c'est-à-dire :  $0 < \epsilon = \frac{m}{M} \ll 1$ . Les équations du système (1) décrivent la dynamique du système.

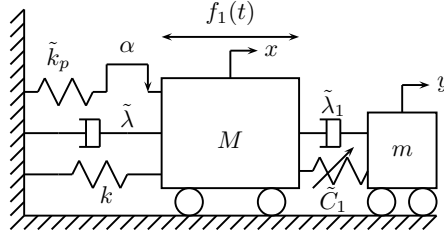


FIGURE 1 – Modèle étudié

$$\begin{cases} M \frac{d^2 x}{dt^2} + \tilde{\lambda} \frac{dx}{dt} + \tilde{\lambda}_1 \left( \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) + kx + \tilde{k}_p u + \tilde{C}_1 F(x - y) = f_1(t) \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} + \tilde{\lambda}_1 \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) + \tilde{C}_1 F(y - x) = 0 \\ \left( \frac{du}{dt} + \beta \left( \frac{\tilde{k}_p u}{\alpha} \right) \right) \ni \frac{dx}{dt} \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{avec le graph : } \beta(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \in ] - \infty, -1[ \cup ] 1, +\infty[ \\ 0 & \text{if } x \in ] - 1, 1[ \\ \mathbb{R}_- & \text{si } x = -1 \\ \mathbb{R}_+ & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Nous posons les nouvelles variables suivantes, avec  $w_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}$  la fréquence de résonance de l'oscillateur principal :  $\frac{\tilde{\lambda} w_1}{M w_1^2} = \epsilon \lambda_0$ ,  $\frac{\tilde{\lambda}_1}{M w_1^2} = \epsilon \lambda_{10}$ ,  $\frac{\tilde{C}_1}{M w_1^2} = \epsilon C_{10}$ ,  $\frac{\tilde{k}_p}{M w_1^2} = \epsilon k_p$ ,  $\eta = \frac{\alpha}{\tilde{k}_p}$ ,  $\frac{f_1(\frac{\tau}{w_1})}{M w_1^2} = \epsilon f_{10} \sin(\Omega \tau)$ .

Nous effectuons successivement le changement de temps  $\tau = w_1 t$ , et le changement de variables du système (3)(a), puis le changement de temps  $\tilde{\tau} = \Omega \tau$ , où  $\Omega$  est la fréquence de l'excitation en temps  $\tau$ , et le changement de variables du système (3)(b), qui introduit les variables complexes de Manevitch [6].

Nous notons  $\frac{dV}{d\tilde{\tau}}$  comme  $\dot{V}$  pour toute fonction  $V$ .

Il s'agit ensuite d'utiliser une méthode de Galerkin en tronquant les séries de Fourier de chaque fonction et de ne garder que la première harmonique, i.e.  $e^{i\tilde{\tau}}$ . Cette démarche mène au système (4).

$$\begin{cases} v = x + \epsilon y \\ w = x - y \end{cases} \quad (\text{a}) \quad \begin{cases} \phi_1 e^{i\tilde{\tau}} = \Omega(\dot{v} + iv) \\ \phi_2 e^{i\tilde{\tau}} = \Omega(\dot{w} + iw) \\ \phi_3 e^{i\tilde{\tau}} = \Omega(\dot{u} + iu) \end{cases} \quad (\text{b}) \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \dot{\phi}_1 - \frac{\Omega}{2i} \phi_1 + \frac{\epsilon \lambda_0 (\phi_1 + \epsilon \phi_2)}{2(1 + \epsilon)} + \frac{\phi_1 + \epsilon \phi_2}{2i\Omega(1 + \epsilon)} + \frac{\epsilon k_p}{2\Omega i} \phi_3 = \epsilon \frac{f_{10}}{2i} \\ \Omega \dot{\phi}_2 - \frac{\Omega}{2i} \phi_2 + \frac{\epsilon \lambda_0 (\phi_1 + \epsilon \phi_2)}{2(1 + \epsilon)} + \frac{\phi_1 + \epsilon \phi_2}{2i\Omega(1 + \epsilon)} + \frac{\epsilon k_p}{2\Omega i} \phi_3 \\ + (1 + \epsilon)(C_{10}\mathcal{F} + \frac{\lambda_{10}}{2}\phi_2) = \epsilon \frac{f_{10}}{2i} \\ \phi_3 = \frac{\phi_1 + \epsilon \phi_2}{(1 + \epsilon)\pi} \xi \left( \frac{|\phi_1 + \epsilon \phi_2|}{(1 + \epsilon)\Omega} \right) \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\text{avec } \forall z \in \mathbb{R}_+, \xi(z) = \begin{cases} \pi & \text{if } z \leq \eta \\ \theta + e^{-i\theta} \sin(\theta) - 4e^{-i\frac{\theta}{2}} \sin(\frac{\theta}{2}) - \frac{4\eta}{z} e^{-i(\theta + \frac{\pi}{2})} & \text{if } z > \eta \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{où } \theta = \arccos(1 - \frac{2\eta}{z}) \quad (6)$$

$$\text{et } \mathcal{F} = \frac{1}{2i} G(|\phi_2|^2) \phi_2 \text{ et } G : x \mapsto \frac{3x}{4} \quad (7)$$

Il s'agit maintenant d'étudier le comportement du système autour de la résonance 1 : 1 ( $\Omega = 1 + \sigma\epsilon$ ) avec une approche asymptotique d'échelles multiples en temps en introduisant des échelles rapides  $\tau_0$  et lentes  $\tau_1, \tau_2, \dots$

$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0, \tilde{\tau}_1 = \epsilon \tilde{\tau}_0, \tilde{\tau}_2 = \epsilon^2 \tilde{\tau}_0 \dots \text{ et } \frac{d}{d\tilde{\tau}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}_2} + \dots \quad (8)$$

Le système est étudié aux deux premiers ordres en  $\epsilon$ , i.e.  $\epsilon^0$  et  $\epsilon^1$ . À l'ordre  $\epsilon^0$ , la recherche de points fixes dans la seconde équations du système (4) (i.e.  $\frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{\tau}_0} = 0$ ) permet d'écrire la relation (9). En posant  $\phi_1 = N_1 e^{i\delta_1}$  et  $\phi_2 = N_2 e^{i\delta_2}$ , nous obtenons les liaisons (10) et (11). La liaison (10) entre  $N_1$  et  $N_2$  est l'invariant en échelle de temps rapide du système. Lui et ses domaines de stabilité [5, 9] sont tracés sur la Fig. 2 pour un jeu de paramètres. S'il possède des extrema, en respectant le critère  $\lambda_{10} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ , des bifurcations sont possible.

$$\phi_1 = \phi_2 - C_{10}G(|\phi_2|^2)\phi_2 - i\lambda_{10}\phi_2 \quad (9)$$

$$N_1 = N_2 \sqrt{(1 - C_{10}G(N_2^2))^2 + \lambda_{10}^2} \quad (10)$$

$$\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1 = \arctan\left(\frac{\lambda_{10}}{1 - C_{10}G(N_2^2)}\right) + \frac{\pi}{2}(1 - \text{sgn}(1 - C_{10}G(N_2^2))) \quad (11)$$

À l'ordre  $\epsilon^1$ , il s'agit d'injecter dans la première équation du système (4) les expressions de  $\phi_1$  et  $\phi_3$  en fonction de  $\phi_2$  (ou encore  $N_2$  et  $\delta_2$ ) obtenues à l'ordre  $\epsilon^0$ , i.e. respectivement la relation (9) et la troisième équation à l'ordre  $\epsilon^0$  de (4). Il est alors possible d'obtenir un système réduit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_2}{\partial \tilde{\tau}_1} = \frac{f(N_2, \delta_2)}{C(N_2)} \\ \frac{\partial \delta_2}{\partial \tilde{\tau}_1} = \frac{g(N_2, \delta_2)}{N_2 C(N_2)} \end{array} \right. \quad (12)$$

Ainsi, l'étude des lieux d'annulation communs à  $f$  et  $g$  va nous permettre de définir des points fixes en première échelle de temps lente ( $\tilde{\tau}_1$ ), qui correspondent à des régimes périodiques, ainsi que les lieux d'annulations communs à  $f, g$  et  $C$  qui nous permettent de définir des points singuliers du système. Ces derniers suggèrent l'apparition de quasi-périodicité [5].

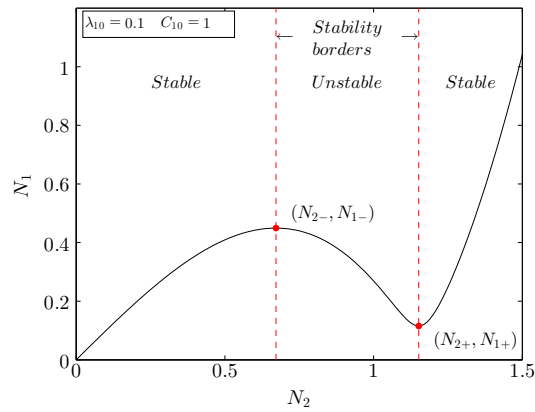


FIGURE 2 – Invariant du système en échelle rapide et ses domaines de stabilité

### 3 Comparaison des résultats analytique et numérique

Les solutions  $x$  et  $y$  du système (1), après le premier changement de variables, i.e.  $\tau = w_1 t$  et (3)(a), peuvent être calculées numériquement en utilisant un schéma d'Euler [8, 1]. Cette solution peut être considérée comme exacte si le pas de temps utilisé est assez petit. Dans ce cas, nous pouvons appliquer le changement de variables (3)(b) pour obtenir  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $\delta_1$  et  $\delta_2$  exacts à comparer aux prédictions analytiques, l'invariant (10) en échelle rapide et les régimes liés aux points fixes ou singuliers issus de l'analyse de (12) en première échelle lente.

Nous traitons dans cette partie un exemple d'oscillations forcées avec les paramètres suivants :  $\epsilon = 0.001$ ,  $\lambda_0 = 0.1$ ,  $\lambda_{10} = 0.1$ ,  $C_{10} = 1$ ,  $k_p = 1$ ,  $\eta = 0.3$ ,  $f_{10} = 0.75$  et  $\sigma = 1$ . Le système est intégré pour un temps  $\tau \in [0, 100000]$ , le pas de temps étant égal à  $\Delta\tau = 10^{-5}$ . Les conditions initiales utilisées sont  $x(0) = 0.5$ ,  $u(0) = 0.3$ ,  $y(0) = 0$  et  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ .

La Fig. 3 donne toutes les dynamiques possibles pour le système soumis à cette excitation. Il n'existe qu'un seul point fixe  $A$  (5.9740, 1.0543) associé à un régime périodique et deux points singuliers,  $\alpha$  (3.6632, 0.6717) et  $\beta$  (6.0616, 0.6717), qui sont des nœuds. Le point  $A$  se trouve dans la zone instable de l'invariant, ce régime ne peut s'établir. Ainsi, seul le régime quasi-périodique, suggéré par les deux points singuliers, est possible pour le système sous cette excitation.

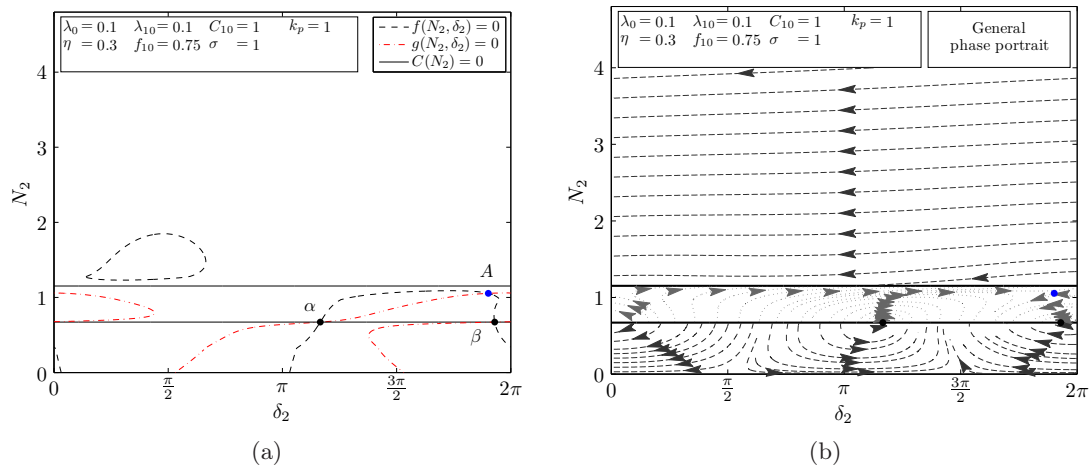


FIGURE 3 – Dynamiques possibles du système : (a) positions des points fixes et singuliers ; (b) Portrait de phase du système. Le seul point fixe du système est instable, donc le comportement analytiquement prévu pour le système est un régime quasi-périodique.

Les résultats numériques sont comparés à l'invariant (10) sur la Fig. 4. Le comportement réel oscille autour de la courbe analytique prévue. Ces résultats numériques contiennent toutes les harmoniques alors que l'invariant analytique n'a été calculé que pour la première, ce qui peut expliquer les oscillations. Un régime de cycles, qui correspond bien à un régime quasi-périodique, est observable sur cette figure. Cela est confirmé par la Fig. 5 où l'on observe une réponse sous forme de battements pour  $N_1$  et  $N_2$ . Ce type de comportement est intéressant pour le contrôle passif de structures, surtout quand l'écart entre les sauts sont petits pour  $N_1$  ( $N_{1+}$  proche de  $N_{1-}$  sur la Fig. 2) et grand pour  $N_2$  ( $N_{2+}$  loin de  $N_{2-}$  sur la Fig. 2). Cela permet de piéger beaucoup d'énergie dans un cycle, ce qui est aussi utile pour la récupération d'énergie.

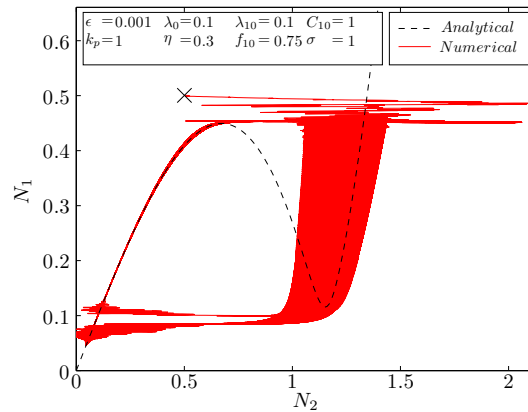


FIGURE 4 – Invariant du système (---) et les résultats numériques correspondants (—). Les résultats numériques sont obtenus par intégration pour  $\tau \in [0, 100000]$  en partant des conditions initiales notées par le symbole  $\times$  sur la figure ( $x(0) = 0.5$ ,  $u(0) = 0.3$ ,  $y(0) = 0$  et  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ ).  $N_1$  et  $N_2$  oscillent autour de l'invariant avec un comportement quasi-périodique.

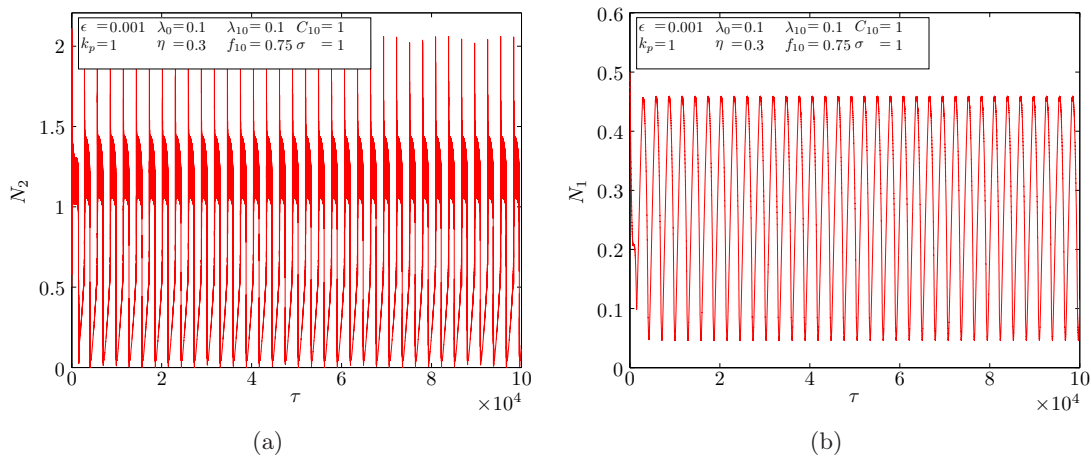


FIGURE 5 – Amplitudes du système en fonction du temps  $\tau$  ((a)  $N_2$ ; (b)  $N_1$ ) obtenues par intégration numérique pour  $\tau \in [0, 100000]$  avec les conditions initiales  $x(0) = 0.5$ ,  $u(0) = 0.3$ ,  $y(0) = 0$  et  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ . Le système présente une réponse sous forme de battements associés au régime quasi-périodique.

## 4 Conclusion

Dans ce document, nous avons décrit le comportement d'un système à deux degrés de liberté couplés, une masse principale avec un terme de Saint-Venant couplée à un NES cubique. La démarche analytique a permis, par une méthode de Galerkin utilisant des séries de Fourier tronquées, de traduire la loi comportement non régulière de l'oscillateur principal, l'élément de Saint-Venant, sous la forme d'une relation algébrique. Cela nous permet par la suite de caractériser le système au travers d'un invariant en échelle de temps rapide et d'exhiber les régimes périodique ou quasi-périodique possible en première échelle lente.

Nous avons ensuite confronté les résultats de cette démarche à un résultat numérique pour en montrer son application. Il est donc possible maintenant d'utiliser cette démarche analytique pour dimensionner un NES pour différentes problématiques, comme le contrôle de structures ou la récupération d'énergie.

## Références

- [1] Bastien J., Bernardin F., Lamarque C.-H., Non Smooth Deterministic or Stochastic Discrete Dynamical Systems : Applications to Models with Friction or Impact, 515, Wiley, 2013.
- [2] Gendelman O.V. : Targeted energy transfer in systems with non-polynomial nonlinearity, *Journal of Sound and Vibration*, 2008, **315** : 732-745.
- [3] Gendelman O.V., Manevitch L. I., Vakakis A.F., M'Closkey R., Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators I : dynamics of the underlying hamiltonian systems, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2001, **68** : 34-41.
- [4] Gourdon E., Alexander, N. A., Taylor, C. A., Lamarque, C.-H., Pernot, S., Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling : theoretical and experimental results, *Journal of Sound and Vibration*, 2007, **300** : 522-551.
- [5] Lamarque C.-H., Gendelman O.V., Ture Savadkoochi A., Etcheverria E. : Targeted energy transfer in mechanical systems by means of non-smooth nonlinear energy sink, *Acta Mechanica*, 2011, **221** : 175-200.
- [6] Manevitch L. I., The description of localized normal modes in a chain of nonlinear coupled oscillators using complex variables, *Nonlinear Dynamics*, 2001, **25**, 95-109.
- [7] Nucera F., Vakakis A. F., McFarland D. M., Bergman L. A., Kerschen G., Targeted energy transfers in vibro-impact oscillators for seismic mitigation, *Nonlinear Dynamics*, 2007, **50** : 651-677.
- [8] Schmidt F., Lamarque C.-H. : Energy Pumping for Mechanical Systems involving Non-Smooth Saint-Venant terms, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2010, **45** : 866-875.
- [9] Ture Savadkoochi A., Lamarque C.-H., Dimitrijevic Z. : Vibratory energy exchange between a linear and a non-smooth system in the presence of the gravity, *Nonlinear Dynamics*, 2012, **70** : 1473-1483.
- [10] Ture Savadkoochi A., Vaurigaud B., Lamarque C.-H., Pernot S. : Targeted energy transfer with parallel nonlinear energy sinks, part II : theory and experiments, *Nonlinear dynamics, Nonlinear Dynamics*, 2012, **67** : 37-46.
- [11] Vakakis A. F., Gendelman O. V., energy pumping in nonlinear mechanical oscillators II : resonance capture, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2001, **68** : 42-48.
- [12] Vakakis A. F., Gendelman O. V., Bergman L. A., McFarland D. M., Kerschen G., Lee Y. S., Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems I and II, 375, Springer, 2009.