MATEMÁTICA FINANCIERA

MATERIAL DIDÁCTICO

González-Vila Puchades, Laura

Ortí Celma, Francesc J.

Sáez Madrid, José B.

Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial

Universitat de Barcelona

PRESENTACIÓN

El Espacio Europeo de Educación Superior, y con él la implantación de los nuevos grados universitarios, pretende impulsar un cambio en las metodologías docentes que deben centrar su objetivo en el proceso de aprendizaje del estudiante, y no en la mera transmisión de conocimientos por parte del docente.

Ello requiere, siempre que sea posible, el abandono de las tradicionales sesiones magistrales con el fin de dinamizar las clases, hacer participar en ellas a los alumnos, fomentar un aprendizaje activo de los mismos y promover su trabajo autónomo.

El material didáctico que presentamos para la asignatura *Matemática Financiera* del Grado de Administración y Dirección de Empresas de la Universidad de Barcelona persigue lograr estos fines. Desde la implantación de este grado han transcurrido ya tres cursos académicos, tiempo suficiente para que haya podido concretarse el Plan Docente de la asignatura y se tengan claramente definidos los contenidos que deben conocer los alumnos.

Siguiendo la estructura del Plan Docente, el material se divide en dos bloques temáticos:

- El primero de ellos, *Fundamentos del equilibrio financiero*, recoge los fundamentos matemáticos necesarios para el estudio de una operación financiera de financiación. Así se definen los conceptos de capital financiero y operación financiera y, tras describir qué se entiende por equivalencia financiera, se analizan los distintos regímenes financieros que más habitualmente se dan en el mercado financiero. Ello permite proceder a la valoración de conjuntos de capitales financieros y, en particular, de las rentas financieras.

- El segundo, *Operaciones Financieras*, utiliza los instrumentos de valoración financiera, descritos en el bloque anterior, para el estudio y análisis de los préstamos financieros y de los empréstitos.

En cada uno de los bloques temáticos presentamos un resumen-guía de los conceptos más importantes recogidos en el Plan Docente de la citada asignatura. El material recoge de forma detallada los contenidos que se desarrollan en las sesiones presenciales de la misma. Esto permitirá al alumno poder preparar con antelación las clases y disponer de forma bien estructurada de toda la información vista en las mismas.

Cada definición, cada ejemplo aclaratorio y cada ejercicio serán presentados en clase, paso a paso. Hemos pretendido que nuestro material plasme en papel lo esencial del contenido de las sesiones presenciales y que, además, sirva para ejercitarse en la resolución de ejercicios y casos reales extraídos del mercado financiero. Con tal fin, los ejercicios planteados van seguidos de un espacio en blanco, con algunas orientaciones para su resolución, para permitir que el alumno los trabaje sobre el propio manual.

Queremos indicar al lector que resulta conveniente que el presente manual se complemente con libros y otros materiales de consulta. A tal fin recogemos, al final de nuestro trabajo, la bibliografía que, en nuestra opinión, mejor puede ayudar al alumno a completar su formación.

Por último queremos agradecer a nuestros alumnos el seguimiento de este material. Ellos son el impulso para realizar con ilusión nuestro trabajo diario.

LOS AUTORES

Diciembre de 2013

NOTA: Dado el carácter no lucrativo y la finalidad docente del contenido de este material, los autores se acogen al artículo 32 de la *Ley de Propiedad Intelectual* vigente, respecto al uso parcial de obras ajenas como imágenes, gráficos, textos, etc.

ÍNDICE

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Bloque temático 1.
Fundamentos del equilibrio financiero

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

1.1 Capital financiero

Aunque habitualmente se habla de capital haciendo referencia únicamente a una cantidad de dinero, financieramente hablando es necesario considerar que la valoración de un capital depende del momento en el tiempo que se considere. Así, resulta evidente que, 1.000€ de hace 5 años no tienen el mismo valor que 1.000€ actuales

Es decir, cualquier cantidad de dinero tiene un valor intrínseco derivado del número de unidades monetarias que representa, y otro valor como consecuencia del momento del tiempo en que esté situado

Este segundo valor es el que se conoce como **valor temporal del dinero**

Se define **capital financiero** como cualquier **cantidad monetaria** disponible en un **instante temporal**

$$(C,T) \qquad C \geq 0,\ T \geq 0$$

C se denomina **CUANTÍA** y representa cualquier cantidad monetaria expresada en euros, dólares, libras, etc. Por defecto la expresaremos en euros

T se denomina **DIFERIMIENTO** y representa el instante temporal en que se sitúa la cuantía, expresado en años, meses, días, etc. respecto a un determinado origen. Por defecto lo expresaremos en años

Ejemplo:

$$\left(6.000, \frac{3}{12}\right)$$

Representan 6.000€ disponibles dentro de 3 meses

Ejercicio: ¿Qué representan los siguientes capitales financieros?

$$(2.500, 4)$$

$$\left(15.000, \frac{3}{4}\right)$$

$$\left(827, \frac{142}{365}\right)$$

Gráficamente, fijando un origen y la unidad de tiempo, representaremos los capitales financieros en un eje horizontal, situando las cuantías en la parte superior del eje y los instantes en la parte inferior del eje:

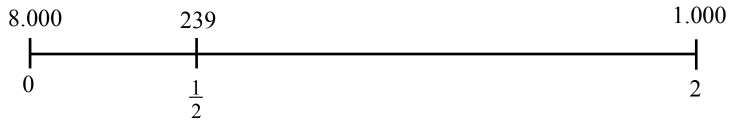
En esta zona representaremos las cuantías

En esta zona representaremos los instantes

1.1 Capital financiero

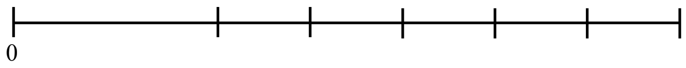
Ejemplo: Representar gráficamente los siguientes capitales financieros

$$(1.000, 2) \qquad (8.000, 0) \qquad \left(239, \tfrac{1}{2}\right)$$



Ejercicio: Representar gráficamente los siguientes capitales financieros

$$\left\{\left(430 + 5\cdot(r-1), 2 + \tfrac{r}{4}\right)\right\}_{r=1,2,\ldots,6}$$



1.2 Definición de operación financiera

Es el acuerdo para el **intercambio de capitales financieros**, entre personas (físicas o jurídicas), en **diferentes momentos de tiempo**

Ejercicio: Indicar cuáles de las siguientes situaciones puede considerarse como operación financiera.

a) Depositar en una Entidad Financiera 5.000€ a cambio de que en 1 año nos devolverá 5.200€

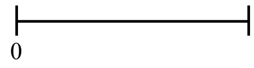
b) Ir a un Banco y pedir cambio de 500€ en billetes de 10€

c) Ir a un concesionario de motos y comprar al contado una moto valorada en 3.000€

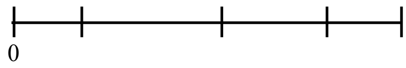
d) Concedernos el Banco un préstamo a devolver durante 3 años en cuotas mensuales para poder comprarnos la moto anterior

Ejercicio: Representar gráficamente los capitales financieros de las siguientes operaciones financieras:

a) Una empresa compra hoy por 31.246€ un activo financiero de nominal 32.000€ que vence de aquí a 183 días



b) Una cuenta se abrió hace 2 años con una imposición inicial de 4.000€. A los 5 meses de su apertura se realizó un ingreso de 800€, hace 8 meses se realizó una nueva imposición de 2.000€ y dentro 3 meses se ingresarán 600€



1.3 Elementos de una operación financiera

Toda operación financiera tiene tres elementos:

1) Elemento personal:

Son las personas físicas o jurídicas que intervienen en la operación

SUJETO ACTIVO: Persona que posee los capitales financieros y decide cederlos durante un plazo a cambio del cobro de una retribución

SUJETO PASIVO: Persona que recibe los capitales financieros y se compromete a su devolución futura y al pago de una retribución

2) Elemento objetivo, material o real:

Son las capitales financieros que se intercambian. Los capitales que cede el sujeto activo se denominan PRESTACIÓN, mientras que los que retorna el sujeto pasivo se denominan CONTRAPRESTACIÓN

3) Elemento convencional o formal:

Es el conjunto de acuerdos o pactos que realizan los sujetos para llevar a cabo el intercambio. Habitualmente se refleja en un contrato mercantil

1.3 Elementos de una operación financiera

Ejemplo: Juan invierte hoy en un Plan de Pensiones del Banco Z la cantidad de 8.000€. A cambio, en el momento de su jubilación, dentro de 15 años, el Banco pagará a Juan la cantidad de 13.402,80€. Indicar los distintos elementos de la operación:

Elemento personal

Sujeto activo: Juan

Sujeto pasivo: Banco Z

Elemento objetivo, material o real

Prestación: 8.000€ hoy o $(8.000,0)$

Contraprestación: 13.402,80€ dentro de 15 años o $(13.402,80\ ,\ 15)$

Elemento convencional o formal

Plan de Pensiones, firmado por ambas partes, en el que se establecen las condiciones de la operación financiera

1.4 Clasificación de las operaciones financieras

Según el número de capitales financieros existentes, una operación financiera se puede clasificar en:

1) Operación elemental:

Aquella en que tanto la prestación como la contraprestación tienen un único capital financiero

2) Operación parcialmente compleja:

Aquellas en que la prestación o la contraprestación tienen un único capital financiero, estando la otra formada por un conjunto de capitales financieros

3) Operación totalmente compleja:

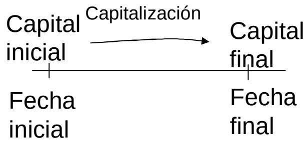
Aquella en que tanto la prestación como la contraprestación están formadas por un conjunto de capitales financieros

1.4 Clasificación de las operaciones financieras

Según el sujeto en el que se centra el estudio de la operación:

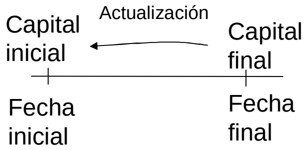
1) Operación de capitalización o de interés:

Operación en que el sujeto activo cede un capital en un determinado momento para recuperarlo en un instante posterior:



2) Operación de actualización o de descuento:

Operación en que al sujeto pasivo se le anticipa un capital disponible en el futuro a un momento anterior:



En muchos productos, a la fecha final también se la denomina **vencimiento**

2.1 Equivalencia financiera

Los sujetos que intervienen en una operación financiera de financiación (sujeto activo y sujeto pasivo) acuerdan, según unas determinadas condiciones o pactos, los capitales financieros que van a intercambiarse

Por tanto, los sujetos de la operación consideran que dichos capitales son financieramente equivalentes, es decir, se ha establecido una **equivalencia financiera** entre capitales financieros

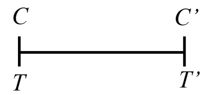
2.2 Representación de la equivalencia financiera

La equivalencia financiera entre los capitales financieros puede, habitualmente, representarse de las siguientes maneras:

1) Operación elemental:

Prestación: (C, T)

Contraprestación: (C', T')



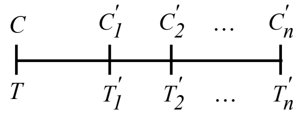
$$(C, T) \approx (C', T')$$

2) Operación parcialmente compleja:

Prestación: (C, T)

Contraprestación: $\left\{(C_1', T_1'), (C_2', T_2'), \ldots, (C_n', T_n')\right\}$

$$(C, T) \approx \left\{(C_1', T_1'), (C_2', T_2'), \ldots, (C_n', T_n')\right\}$$

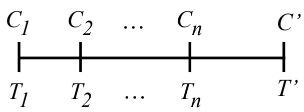


O bien:

Prestación: $\left\{(C_1, T_1), (C_2, T_2), \ldots, (C_n, T_n)\right\}$

Contraprestación: (C', T')

$$\left\{(C_1, T_1), (C_2, T_2), \ldots, (C_n, T_n)\right\} \approx (C', T')$$



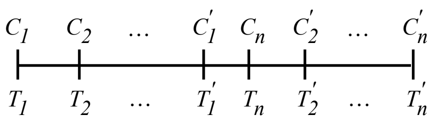
3) Operación totalmente compleja:

Prestación: $\left\{(C_1, T_1), (C_2, T_2), \ldots, (C_n, T_n)\right\}$

Contraprestación: $\left\{(C_1', T_1'), (C_2', T_2'), \ldots, (C_n', T_m')\right\}$

$$\left\{(C_1, T_1), (C_2, T_2), \ldots, (C_n, T_n)\right\} \approx \left\{(C_1', T_1'), (C_2', T_2'), \ldots, (C_n', T_m')\right\}$$

Por ejemplo:



2.3 Precios financieros de interés

Dada la operación financiera elemental

$$(C,T) \approx (C',T') \quad \text{con} \quad T' > T$$

se definen los tres precios financieros de interés siguientes:

Precio (interés) total: Es el beneficio total de la operación en términos monetarios

$$\Delta C = C' - C$$

Ejemplo: Dada la operación financiera elemental

$$(1.000, 0) \approx (1.120, 2)$$

calcular el precio total:

$$\Delta C = 1.120 - 1.000 = 120€$$

Esto significa que por los 1.000€ iniciales, el sujeto activo recibe al final de los 2 años una retribución de 120€

Precio unitario o Interés efectivo: Es el beneficio de la operación por cada unidad monetaria

$$I = \frac{\Delta C}{C} = \frac{C' - C}{C}$$

Ejemplo: Dada la operación financiera elemental

$$(1.000, 0) \approx (1.120, 2)$$

calcular el precio unitario:

$$I = \frac{\Delta C}{C} = \frac{C' - C}{C} = \frac{1.120 - 1.000}{1.000} = \frac{120}{1.000} = 0{,}12 \equiv 12\%$$

Esto significa que por cada euro inicial, el sujeto activo recibe al final de los 2 años una remuneración de 0,12 € (o bien, que por cada 100€ iniciales, se perciben 12€. Por ello se habla del 12% bienal)

Precio unitario y medio o Interés nominal: Es el beneficio de la operación por cada unidad monetaria y por año

$$i = \frac{I}{T'-T} = \frac{C'-C}{C\cdot(T'-T)} = \frac{C'-C}{C\cdot t}$$

siendo $T'-T=t$ el plazo de la operación expresado en años

Ejemplo: Dada la operación financiera elemental

$$(1.000, 0) \approx (1.120, 2)$$

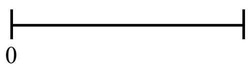
calcular el precio unitario y medio:

$$i = \frac{I}{T'-T} = \frac{C'-C}{C\cdot(T'-T)} = \frac{1.120-1.000}{1.000\cdot(2-0)} = \frac{0,12}{2} = 0,06 \equiv 6\%$$

Esto significa que por cada 100€ iniciales y por cada año, el sujeto activo recibe una retribución de 6€

Ejercicio: En una operación financiera, invirtiendo hoy 10.000€ se obtienen al cabo de 3 meses 10.200€. Se pide:

a) Representar formal y gráficamente dicha operación



b) Calcular e interpretar los tres precios financieros de dicha operación

IMPORTANTE: Cuando el plazo temporal de una operación financiera se expresa en días o en fechas de calendario, el valor de t (en años) dependerá del criterio o base que se utilice. En general hay 4 Bases:

- Si el plazo es inferior a 1 año:

Criterio o Base	Significado
Base $\frac{30}{360}$	Numerador: Todos los meses tienen 30 días Denominador: Siempre 360
Base $\frac{Act}{360}$	Numerador: Días reales de la operación Denominador: Siempre 360
Base $\frac{Act}{365}$	Numerador: Días reales de la operación Denominador: Siempre 365
Base $\frac{Act}{Act}$	Numerador: Días reales de la operación Denominador: 365 o 366 (si es bisiesto)

- Si el plazo es superior a 1 año, al número de años enteros se le añade la fracción de año restante calculada según alguna de las bases anteriores

Ejemplo: ¿Qué plazo temporal t existe entre el 18 de enero y el 18 de abril de un año bisiesto?

18-ene-A — 18-abr-A

$$T'-T=t$$

Criterio o Base	Valor de t
Base $\frac{30}{360}$	$t=\frac{12+30+30+18}{360}=\frac{90}{360}=\frac{1}{4}=0,25$
Base $\frac{Act}{360}$	$t=\frac{13+29+31+18}{360}=\frac{91}{360}=0,252\widehat{7}$
Base $\frac{Act}{365}$	$t=\frac{13+29+31+18}{365}=\frac{91}{365}=0,249315$
Base $\frac{Act}{Act}$	$t=\frac{13+29+31+18}{366}=\frac{91}{366}=0,248634$

3.1 Definición

Régimen financiero es la expresión formal del conjunto de características, pactos o acuerdos, que establecen los sujetos de una operación financiera

3.2 Clasificación

Clasificación de los regímenes financieros

1) Según el cálculo del precio:

- **R.F. SIMPLES**: Son aquéllos en que el plazo de la operación se considera como un único periodo, y por ello, el precio se calcula una sola vez. Se acostumbran a utilizar en operaciones a corto plazo
- **R.F. COMPUESTOS**: Son aquéllos en que el plazo de la operación se subdivide en periodos, y por ello, el precio se calcula para cada uno de ellos

2) Según el sujeto económico:

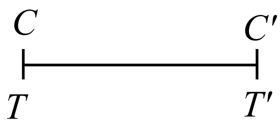
- **R.F. de INTERÉS o CAPITALIZACIÓN**: Son aquéllos que aparecen cuando se estudia la operación financiera desde el punto de vista del sujeto activo
- **R.F. de DESCUENTO o ACTUALIZACIÓN**: Son aquéllos que aparecen cuando se estudia la operación financiera desde el punto de vista del sujeto pasivo

Como consecuencia de estas clasificaciones desarrollaremos los siguientes regímenes financieros:

	R.F. INTERÉS o CAPITALIZACIÓN	R.F. DESCUENTO o ACTUALIZACIÓN
R.F. SIMPLES	**R.F. INTERÉS SIMPLE VENCIDO**	**R.F. DESCUENTO SIMPLE O COMERCIAL**
R.F. COMPUESTOS	**R.F. INTERÉS COMPUESTO A TANTO CONSTANTE**	
	R.F. INTERÉS COMPUESTO A TANTO VARIABLE	

4.1 R.F. interés simple vencido

En el R.F. de interés simple vencido, los sujetos de la operación financiera



acuerdan los siguientes **pactos**:

1) El precio total de la operación, ΔC **,** es proporcional a la cuantía inicial, ***C,*** y al plazo de la operación, ***T'-T* = *t***, mediante un tanto de proporcionalidad $\boldsymbol{i>0}$ (en tanto por uno)

$$\Delta C = C \cdot i \cdot \left(T' - T\right) = C \cdot i \cdot t$$

2) Dicho precio total se recibe al final de la operación ***T'*** junto con la cuantía inicial, obteniéndose en total ***C'***

$$C' = C + \Delta C$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Teniendo en cuenta las expresiones obtenidas con los dos pactos, y desarrollando, tendremos su **expresión formal**:

$$C' = C + \Delta C = C + \underbrace{C \cdot i \cdot \left(T' - T\right)}_{\Delta C} = C \cdot \left(1 + i \cdot \left(T' - T\right)\right)$$

$$\boxed{C' = C \cdot \left(1 + i \cdot t\right)}$$

Precio (interés) total: $\Delta C = C' - C = C \cdot i \cdot t$

Precio unitario o Interés efectivo: $I = \dfrac{\Delta C}{C} = \dfrac{C \cdot i \cdot t}{C} = i \cdot t$

Precio unitario y medio o Interés nominal: $i = \dfrac{I}{t} = \dfrac{i \cdot t}{t} = i$

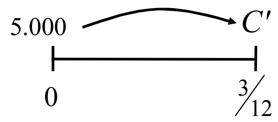
Este R.F. suele utilizarse en productos como cuentas corrientes, imposiciones a plazo fijo, Letras del Tesoro, …

Ejemplo: En la cuenta corriente de un Banco, un cliente ha tenido la cantidad de 5.000€ durante 3 meses. Si esta cuenta ha liquidado los intereses en régimen financiero de interés simple vencido a un interés del 2% anual. Calcular:

a) Los intereses que habrá obtenido dicho cliente

b) El capital final que tendrá en la cuenta corriente

c) Los precios financieros



a) Los intereses (precio total) en R.F. de interés simple vencido son:

$$\Delta C = Intereses = C \cdot i \cdot t = 5.000 \cdot 0,02 \cdot \frac{3}{12} = 25€$$

NOTA: En el mercado real estos intereses son brutos porque se les aplica una retención fiscal (actualmente del 21%), por lo que, realmente, lo que ingresa el cliente es menos. Este aspecto fiscal NO lo tendremos en cuenta en los ejercicios

b) El capital final que tendrá el cliente en la cuenta corriente será:

$$C' = \begin{cases} C + \Delta C = 5.000 + 25 = 5.025€ \\ C \cdot (1 + i \cdot t) = 5.000 \cdot \left(1 + 0,02 \cdot \frac{3}{12}\right) = 5.025€ \end{cases}$$

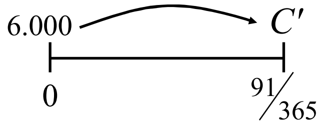
c) Los precios financieros son:

$$\Delta C = C' - C = 5.025 - 5.000 = 25€$$

$$I = \frac{\Delta C}{C} = \frac{25}{5.000} = 0,005 \equiv 0,5\% \text{ trimestral}$$

$$i = \frac{I}{t} = \frac{0,005}{3/12} = 0,02 \equiv 2\%$$

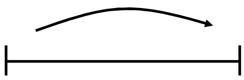
Ejercicio: Calcular el capital final y los precios financieros que se obtienen al colocar 6.000€ en un plazo fijo con vencimiento dentro de 91 días (Base Act/365) a un interés simple vencido del 1,75% anual



El capital final es:

Los precios financieros son:

Ejercicio: En un anuncio de prensa le ofrecen una inversión en R.F. de interés simple vencido según la cual, colocando hoy un capital de 50.000€ recibirá al cabo de 9 meses 51.687,50€. Calcular el tipo de interés nominal al que resulta dicha inversión.



Vamos a sustituir todos los datos que conocemos en la expresión formal del R.F. de interés simple vencido:

$$C' = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

Despejamos i:

4.2 R.F. descuento comercial

En el R.F. de descuento comercial, los sujetos de la operación financiera

acuerdan los siguientes **pactos**:

1) Se anticipa una cuantía disponible en el futuro a un momento anterior. El precio total de la operación, ΔC **,** es proporcional a la cuantía final, ***C'*,** también llamada **valor nominal**, y al plazo de la operación, ***T'*-*T*** = ***t***, mediante un tanto de proporcionalidad expresado en tanto por uno $d > 0$ (denominado **tasa de descuento**)

$$\Delta C = C' \cdot d \cdot \left(T' - T\right) = C' \cdot d \cdot t$$

2) Dicho precio total se paga al inicio de la operación ***T*** deduciéndose de la cuantía final, recibiéndose la cuantía ***C*,** también llamada **líquido o efectivo**

$$C = C' - \Delta C$$

Teniendo en cuenta las expresiones obtenidas con los dos pactos, y desarrollando, tendremos su **expresión formal**:

$$C = C' - \Delta C = C' - \underbrace{C' \cdot d \cdot \left(T' - T\right)}_{\Delta C} = C' \cdot \left(1 - d \cdot \left(T' - T\right)\right)$$

$$\boxed{C = C' \cdot \left(1 - d \cdot t\right)}$$

Precio (descuento) total: $\Delta C = C' - C = C' \cdot d \cdot t$

Precio unitario o Descuento efectivo: $D = \dfrac{\Delta C}{C'} = \dfrac{C' \cdot d \cdot t}{C'} = d \cdot t$

Precio unitario y medio o Descuento nominal: $d = \dfrac{D}{t} = \dfrac{d \cdot t}{t} = d$

Este R.F. se utiliza en productos financieros como efectos comerciales, letras de cambio,…

Ejemplo: Una empresa tiene el siguiente efecto comercial de valor nominal 8.600€ con vencimiento dentro de 4 meses:


Barcelona euros 8.600,00€

12-2-2014 18 de junio de 2014

Ocho mil seiscientos euros ---

BANCO SIETEMIL
Oficina Principal
08034 Barcelona

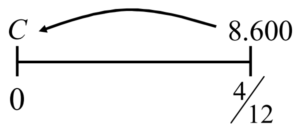
7000-0000-77-1234567890

EMPRESA COMPRADORA
Avgda. Diagonal, 690
08034 Barcelona

EMPRESA VENDEDORA
Domicilio

La empresa lo lleva a una entidad financiera que hoy se lo descuenta en R.F. de descuento comercial a una tasa del 6% anual

a) Calcular el valor líquido o efectivo ***C*** que hoy percibirá la empresa



$$C = C' \cdot (1 - d \cdot t) = 8.600 \cdot \left(1 - 0,06 \cdot \frac{4}{12}\right) = 8.428€$$

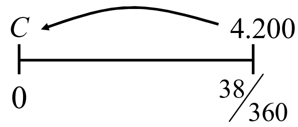
b) Calcular los precios financieros de descuento

$$\Delta C = C' - C = 8.600 - 8.428 = 172€$$

$$D = \frac{\Delta C}{C'} = \frac{172}{8.600} = 0,02 \equiv 2\% \quad \text{cuatrimestral}$$

$$d = \frac{D}{t} = \frac{0,02}{\frac{4}{12}} = 0,06 \equiv 6\%$$

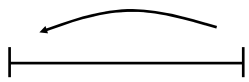
Ejercicio: Calcular el líquido que se obtendrá al descontar al 4,25% de descuento comercial, una letra de cambio de nominal 4.200€ y vencimiento dentro de 38 días (base Act/360)



El valor líquido o efectivo C que hoy percibirá la empresa será:

NOTA: A veces, las entidades cobran una comisión **sobre el valor nominal** del efecto. En tal caso, para obtener el valor líquido o efectivo debería restarse también la comisión

Ejercicio: Obtener el valor nominal de un efecto que vence de aquí a 2 meses si al descontarlo en R.F. de descuento comercial al 8% anual con una comisión del 0,4% sobre el nominal, se ha percibido una cuantía de 11.792€



Planteamos la expresión formal del R.F. de descuento simple comercial y le restamos la comisión:

Despejamos C':

Mientras que en el R.F. de interés simple vencido se paga el precio de la operación al final a un tanto de interés i, en el R.F. de descuento comercial se paga el precio de la operación al inicio a un tanto de descuento d.

Vamos a encontrar la equivalencia entre ambos tantos:

Del R.F. de interés simple vencido: $C' = C \cdot (1 + i \cdot t)$

Del R.F. de descuento comercial: $C = C' \cdot (1 - d \cdot t)$

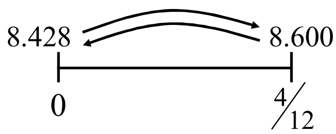
Sustituyendo la segunda expresión en la primera:

$$C' = C' \cdot (1 - d \cdot t)(1 + i \cdot t) \Leftrightarrow (1 - d \cdot t)(1 + i \cdot t) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(1 + i \cdot t) = \frac{1}{1 - d \cdot t} \Leftrightarrow i \cdot t = \frac{1}{1 - d \cdot t} - 1 = \frac{d \cdot t}{1 - d \cdot t} \Leftrightarrow \boxed{i = \frac{d}{1 - d \cdot t}}$$

NOTA: Si una operación tiene comisiones se han de considerar las expresiones generales y no aplicar directamente la fórmula anterior

Ejemplo: En un ejemplo anterior una empresa había recibido de la entidad financiera un valor efectivo de 8.428€ por descontar un efecto de valor nominal 8.600€ con vencimiento al cabo de 4 meses. Calcular el tanto de interés anual simple vencido al que le ha resultado la operación a la entidad financiera



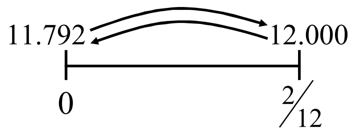
Aplicando la expresión del interés simple vencido:

$$8.600 = 8.428 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{4}{12}\right) \quad \text{de donde:} \quad i = 0{,}0612 \equiv 6{,}12\%$$

Al no haber comisiones, este tipo de interés también se podría haber obtenido a partir de la expresión:

$$i = \frac{d}{1 - d \cdot t} = \frac{0{,}06}{1 - 0{,}06 \cdot \frac{4}{12}} = 0{,}0612$$

Ejercicio: En un ejercicio anterior, por descontar un efecto comercial con vencimiento a los 2 meses y valor nominal 12.000€ al 8% anual con una comisión del 0,4% sobre el nominal, una empresa recibió 11.792€. Calcule el tipo de interés al que ha resultado la operación a la entidad financiera (o coste para la empresa)

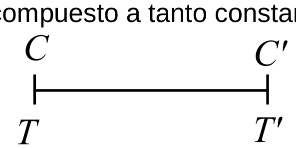


Al existir comisiones, debe aplicarse necesariamente la expresión del interés simple vencido:

de donde:

5.1 R.F. interés compuesto a tanto constante

En el R.F. de interés compuesto a tanto constante, los sujetos de la operación financiera



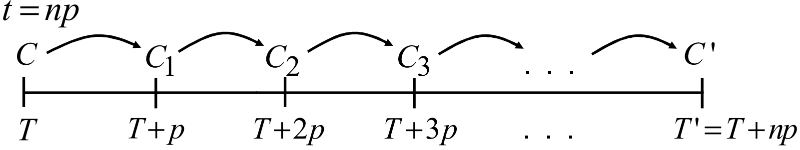
acuerdan los siguientes **pactos**:

1) El plazo de la operación, $T'-T = t$, se fracciona en periodos de duración p (expresado en años), calculándose el precio en cada uno de dichos periodos mediante un tanto de proporcionalidad $i>0$ (expresado en tanto por uno) aplicado a la cuantía al inicio del periodo y a la duración del mismo p. Dicho precio se acumula a la citada cuantía

De este modo la cuantía acumulada al final de un periodo coincide con la cuantía inicial del siguiente

2) El precio total de la operación **sólo** se recibe al final del plazo de la misma, en T'

Supongamos que al fraccionar el plazo de la operación $T'-T=t$ en periodos de duración p el número de periodos es exacto e igual a n, con $t=np$



El valor de las cuantías acumuladas en la operación al final de cada periodo serían:

En $T+p \Rightarrow C_1 = C\cdot(1+i\cdot p)$

En $T+2p \Rightarrow C_2 = C_1\cdot(1+i\cdot p) = C\cdot(1+i\cdot p)\cdot(1+i\cdot p) = C\cdot(1+i\cdot p)^2$

En $T+3p \Rightarrow C_3 = C_2\cdot(1+i\cdot p) = C\cdot(1+i\cdot p)^2\cdot(1+i\cdot p) = C\cdot(1+i\cdot p)^3$

. . .

En $T' = T+np \Rightarrow C' = C\cdot(1+i\cdot p)^n = C\cdot(1+i\cdot p)^{\frac{t}{p}} = C\cdot(1+i\cdot p)^{\frac{T'-T}{p}}$

En el R.F. de interés compuesto no basta con dar información sobre cuál es el tanto de interés anual aplicable en la operación. Además es preciso conocer el periodo de capitalización. Como p es el **periodo de capitalización** de los intereses (expresado en años), se define $m=\frac{1}{p}$ como la **frecuencia de capitalización** de los intereses, es decir, el número de periodos que hay en un año

Así, pueden encontrarse expresiones como:

$$i\% \begin{Bmatrix} \text{nominal} \\ \text{anual} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{capitalizable} \\ \text{acumulable} \\ \text{pagadero} \\ \text{liquidable} \\ \text{con devengo} \\ \text{periodificable, ...} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{anualmente} \\ \text{semestralmente} \\ \text{trimestralmente} \\ \text{mensualmente, ...} \end{Bmatrix}$$

En general, este tanto de interés que va acompañado de la información del periodo de capitalización se denomina **tanto de interés nominal** y se representa por i_m

El cociente entre el interés nominal y la frecuencia de capitalización se denomina **tanto de interés efectivo** y se representa por $\boldsymbol{I_m}$:

$$\boxed{I_m = \frac{i_m}{m}}$$

Este tanto representa el interés que se cobra (o paga) por unidad monetaria en cada periodo de capitalización. En este caso, se enuncia:

$$I\%\left(\text{efectivo}\right)\begin{Bmatrix}\text{anual}\\ \text{semestral}\\ \text{trimestral}\\ \text{mensual, ...}\end{Bmatrix}$$

Cualquier tipo de interés existente en el mercado, o es un interés nominal o es un interés efectivo

5. Regímenes financieros compuestos
5.1 R.F. interés compuesto a tanto constante

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejercicio: Especificar a qué tipo de interés se refieren cada una de las siguientes expresiones indicando la correspondiente frecuencia:

a) Una cuenta que rinde el 3% de interés nominal acumulable semestralmente

b) Préstamo pactado al 6% de interés anual pagadero mensualmente

c) Plazo fijo que se ha pactado a un 0,8% efectivo trimestral

d) Depósito que ofrece un 2,75% anual

e) Cuenta corriente que rinde a un 1,20% anual liquidable bimestralmente

f) Producto financiero que remunera un 0,75% cuatrimestral

Con esta notación, la expresión formal del R.F. de interés compuesto a tanto constante, puesto que $p=\frac{1}{m}$, también se podría expresar:

$$C' = C\cdot(1+i_m\cdot p)^{\frac{t}{p}} = C\cdot\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{m\cdot t} = C\cdot\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{n}$$

Y como la relación entre el interés efectivo y nominal es: $I_m=\dfrac{i_m}{m}$

Resulta que:

$$C' = C\cdot(1+I_m)^{m\cdot t} = C\cdot(1+I_m)^{n}$$

Además de para **capitalizar**, la expresión del R.F. de interés compuesto a tanto constante se puede utilizar también para **actualizar** capitales

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "(1+I_m)^{m\cdot t}"] & C' \\ 0 \arrow[r, dash] & t \arrow[l, bend left, "(1+I_m)^{-m\cdot t}"] \end{tikzcd}$$

$$C = C'\cdot(1+I_m)^{-m\cdot t}$$

Actualización

$$C' = C\cdot(1+I_m)^{m\cdot t}$$

Capitalización

Ejemplo: Calcular el capital final que se obtendrá al invertir 12.000 € durante 5 años en una cuenta que rinde el 3% de interés nominal acumulable trimestralmente

$$\begin{tikzcd} 12.000 \arrow[r, bend left] & C' \\ 0 \arrow[r, dash] & 5 \end{tikzcd}$$

$C = 12.000$

$t = 5$

$$\left.\begin{array}{l} i_m = 0,03 \\ m = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Por tanto,} \quad i_4 = 0,03 \qquad I_4 = \frac{0,03}{4} = 0,0075$$

$$C' = 12.000\cdot\left(1+\frac{0,03}{4}\right)^{4\cdot 5} = 12.000\cdot(1+0,0075)^{4\cdot 5} = 13.934,21€$$

Ejercicio: Hace 2 años se invirtieron 6.000€ en un plazo fijo que ofrece un interés del 3,60% anual pagadero mensualmente. Calcular el importe que se habrá retirado hoy del plazo fijo

$C =$

$t =$

$i \;\; = \qquad \Rightarrow I \;\; =$

$C' =$

NOTA: Hay que destacar que en muchas operaciones del mercado financiero existe devengo pero no acumulación de intereses

5. Regímenes financieros compuestos

5.1 R.F. interés compuesto a tanto constante

Ejercicio: Una persona desea tener un capital de 8.000 € dentro de 2 años y medio para comprarse una moto. Calcular el capital que debe ingresar hoy en una cuenta que ofrece el 2% de interés anual capitalizable bimestralmente para cumplir el objetivo

$C' =$

$t =$

$i \;\; = \qquad \Rightarrow I \;\; =$

5.2 R.F. Interés compuesto a tanto variable

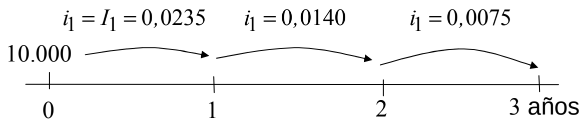
A lo largo del plazo de una operación, el tipo de interés puede ir variando. Llamando $I_m^{(s)}$ al tanto efectivo de cada uno de los n periodos, y considerando que las cuantías devengadas se vayan acumulando al capital, obtendremos el R.F. de interés compuesto a tanto variable:

$$C' = C \cdot \prod_{s=1}^{n} \left[1 + I_m^{(s)} \right]$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejemplo: La entidad Z ofrece un depósito de 10.000€ durante 3 años a un interés liquidable anualmente y variable cada año. Si los tipos de interés nominales son del 2,35%, 1,40% y 0,75% respectivamente, ¿cuál será la cuantía final acumulada?

Esquema:



Cuantía acumulada a los tres años:

$$C' = \underbrace{\underbrace{10.000 \cdot (1+0{,}0235)^1}_{10.235} \cdot (1+0{,}0140)^1}_{10.378{,}29} \cdot (1+0{,}0075)^1 = 10.456{,}13€$$

Ejercicio: Una entidad ofrece el siguiente depósito a plazo de 3 años:

Depósito Creciente 0,75 - 1,40 - 2,35

Ofrece una rentabilidad a 3 años, con un tipo de interés creciente.

Características:

Fuente: www.bbva.es

- Ofrecemos una gran rentabilidad a 3 años, con un **tipo de interés creciente año tras año, desde 3.000€**. Además, se puede disponer del dinero en cualquier momento.
- **Liquidación** de intereses a elección: anual o a vencimiento.
- Se puede **disponer** del dinero cuando se necesite, sin penalización.

El tipo de interés es creciente:

- Primer año: 0,75%.
- Segundo año: 1,40%.
- Tercer año: 2,35%.

En el caso de **liquidación de intereses a vencimiento**, ¿obtendremos mayor capital final con este depósito o con el ofrecido por la entidad Z del ejercicio anterior?

Ejemplo: Si en el depósito creciente del ejercicio anterior, la **liquidación de intereses se realizara anualmente y NO se acumularan,** un cliente que invirtiera 10.000€ recibiría anualmente y durante cada uno de los 3 años, respectivamente:

Al final del primer año: $10.000 \cdot 0,0075 \cdot 1 = 75€$

Al final del segundo año: $10.000 \cdot 0,0140 \cdot 1 = 140€$

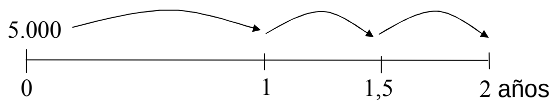
Al final del tercer año: $10.000 \cdot 0,0235 \cdot 1 = 235€$

Si esos intereses los ingresa en una cuenta vinculada que ofrece un interés del 0%, al final de los 3 años sólo dispondrá de:

$$10.000 + 75 + 140 + 235 = 10.450€$$

Obsérvese que este capital es inferior al obtenido en los ejercicios anteriores como consecuencia de la tasa de reinversión.

Ejercicio: Calcular la cuantía final que se obtendrá al invertir 5.000€ en un depósito a 2 años que rinde un 4% anual acumulable semestralmente el primer año, un 4,5% anual pagadero trimestralmente durante el primer semestre del segundo año y un 5% anual acumulable mensualmente durante el segundo semestre del segundo año



Cuantía acumulada a los dos años:

5.3 Interés efectivo anual y TAE

Supongamos que en R.F. de interés compuesto tenemos una operación financiera de duración t años en la que, invirtiendo una cuantía inicial C al tanto efectivo de frecuencia m, I_m, se obtiene una cuantía final igual a C'. Es decir:

$$C' = C \cdot \left(1 + I_m\right)^{m \cdot t}$$

Supongamos ahora que en R.F. de interés compuesto existe otra operación financiera de duración t años en la que, invirtiendo una cuantía inicial C al tanto efectivo de frecuencia k, I_k, se obtiene una cuantía final también igual a C'. Es decir:

$$C' = C \cdot \left(1 + I_k\right)^{k \cdot t}$$

Podríamos preguntarnos, ¿existe alguna relación entre I_m e I_k?

Si igualamos ambas expresiones obtendremos la relación existente entre tantos efectivos de interés de diferentes frecuencias en R.F. de interés compuesto, también denominados **tantos efectivos equivalentes**:

$$\boxed{\left(1+I_m\right)^m = \left(1+I_k\right)^k}$$

Esto significa que **toda cuantía monetaria** valorada en R.F. de interés compuesto a cualquiera de los dos tantos efectivos generará el mismo capital final con independencia del **plazo temporal** de la operación

Por ello se dice que $\boldsymbol{I_m}$ e $\boldsymbol{I_k}$ son **equivalentes**

Ejemplo: Calcular el tanto efectivo de interés semestral equivalente al 4% de interés nominal capitalizable mensualmente

$$i_{12} = 0,04 \Rightarrow I_{12} = \frac{0,04}{12} \Rightarrow I_{12} = 0,00\widehat{3}$$

$$\left(1+I_2\right)^2 = \left(1+I_{12}\right)^{12} \quad \Rightarrow \quad \left(1+I_2\right)^2 = \left(1+0,00\widehat{3}\right)^{12} = 1,0407415$$

$$I_2 = \sqrt{1,0407415} - 1 = 0,02017 \equiv 2,017\%$$

Esto significa que cualquier cuantía monetaria invertida al 4% de interés nominal capitalizable mensualmente generará el mismo capital final que si se invirtiera al 2,017% efectivo semestral cualquiera que sea el plazo de la operación

Ejercicio: Calcular el tanto efectivo de interés bimestral equivalente al 5% de interés anual pagadero trimestralmente

Uno de los tantos efectivos de interés más utilizados en el mercado es el de frecuencia anual, es decir, el **tanto efectivo anual, I_1**
Utilizando la metodología anterior, podemos conocer el tanto efectivo anual equivalente a cualquier interés efectivo o nominal

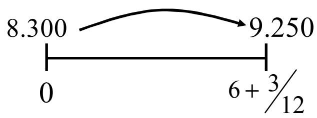
$$(1+I_m)^m = (1+I_k)^k \xrightarrow{si\ k=1} \boxed{I_1 = (1+I_m)^m - 1}$$

Ejercicio: Calcular el tanto efectivo anual equivalente al 2% de interés efectivo cuatrimestral

También se puede obtener el **tanto efectivo anual, I_1,** de cualquier operación a partir de la fórmula del R.F. de interés compuesto**,** una vez conocidas las cuantías inicial, final y el plazo de la operación

$$C' = C \cdot \left(1 + I_1\right)^t \Rightarrow \boxed{I_1 = \sqrt[t]{\left(\frac{C'}{C}\right)} - 1}$$

Ejemplo: Obtener el interés efectivo anual de una operación por la que invirtiendo hoy 8.300€ se obtienen al cabo de 6 años y 3 meses 9.250€



$$8.300 \cdot \left(1 + I_1\right)^{6+\frac{3}{12}} = 9.250€$$

$$I_1 = \sqrt[6+\frac{3}{12}]{\frac{9.250}{8.300}} - 1 = 0,01749 \equiv 1,749\%$$

Desde el año 1990 el Banco de España obliga a que se publique la **TAE** de cualquier operación financiera. La TAE es el tanto efectivo anual de una operación una vez que se han tenido en cuenta en la misma los gastos y comisiones que indica el Banco de España

Los gastos y comisiones que deben formar parte de la TAE han ido cambiando desde 1990 hasta hoy

Actualmente se han considerar la comisión de apertura, comisión de gestión, comisión de mantenimiento, etc. y, en cambio, no se tienen en cuenta los gastos de notaria

Si una operación no tiene comisiones ni gastos, la TAE será igual que el tanto efectivo anual

5. Regímenes financieros compuestos

5.3 Interés efectivo anual y TAE

Resumen de todos los tipos de interés estudiados hasta ahora:

Interés nominal (de frecuencia *m*) $\boxed{i_m}$

Interés efectivo (de frecuencia *m*) $\boxed{I_m}$

Interés efectivo (de frecuencia *k*) $\boxed{I_k}$

$$\boxed{I_m = \frac{i_m}{m}}$$

NOTA: Si $m=1$ el interés nominal coincide con el interés efectivo anual

$$\boxed{(1+I_m)^m = (1+I_k)^k}$$

Si $k=1$

Interés efectivo anual $\boxed{I_1}$ $\boxed{I_1 = (1+I_m)^m - 1}$

$$\boxed{I_1 = \left(\frac{C'}{C}\right)^{\frac{1}{t}} - 1}$$

Conocidos C', C, y t

TAE (Tasa anual equivalente) $\boxed{TAE}$

$$\boxed{TAE = I_1\,(\text{con gastos y comisiones})}$$

NOTA: Si NO hay gastos ni comisiones $TAE = I_1$

5. Regímenes financieros compuestos

5.3 Interés efectivo anual y TAE

Ejemplo: Un banco concede hoy un préstamo de 6.000€ a devolver dentro de 3 meses a un interés del 8% nominal acumulable mensualmente. Si el Banco cobra una comisión de apertura de 100€, se pide:

a) Calcular la cuantía a devolver al Banco dentro de 3 meses

b) Calcular el tanto efectivo anual del préstamo

c) Calcular la TAE de esta operación de préstamo

a) La cuantía a devolver al Banco dentro de 3 meses será:

$$6.000 \longrightarrow C' \qquad 0 \;\text{———}\; 3/12$$

$$i_{12} = 0{,}08$$

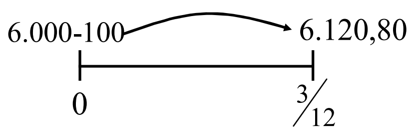
$$I_{12} = \frac{0{,}08}{12} = 0{,}00\widehat{6}$$

$$C' = 6.000 \cdot \left(1 + 0{,}00\widehat{6}\right)^3 = 6.120{,}80€$$

b) El tanto efectivo anual del préstamo es:

$$I_1 = \left(1+0,00\widehat{6}\right)^{12} - 1 = 0,0830 \equiv 8,30\%$$

c) La TAE de esta operación de préstamo es:



$$6.120,80 = 5.900 \cdot (1+TAE)^{3/12} \Rightarrow TAE = 0,15831 \equiv 15,831\%$$

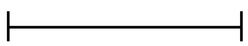
Ejercicio: Una cuenta de ahorro ha mantenido un saldo constante de 1.527€ durante 1 año. Dicha cuenta abona un interés anual del 1,25% y tiene una comisión de mantenimiento de 10€ que se liquida a final de año. Calcular:

a) La cuantía acumulada en la cuenta al cabo de un año antes de pagar la comisión y después de haberla pagado

b) El tipo de interés efectivo anual de la cuenta

c) La TAE de la cuenta

a) La cuantía acumulada en la cuenta al año, antes de pagar la comisión será:



La cuantía después de haber pagado la comisión será:

b) El tanto efectivo anual es del

c) Para calcular la TAE debe considerarse la comisión de mantenimiento. Luego:

Ejercicio: Calcular la TAE del siguiente plan de pensiones, que por una aportación de 6.000€ el 20 de diciembre de 2012 garantiza, en el momento de la jubilación el día 17 de mayo de 2025, un capital de 9.609,91€:

Venciment	Termini	Interès garantit fins a venciment	Capital garantit a data de venciment	TAE
17/05/2025	Data jubilació (65 anys)	3,87%	9.609,91 €	3,87%

20-12-2012

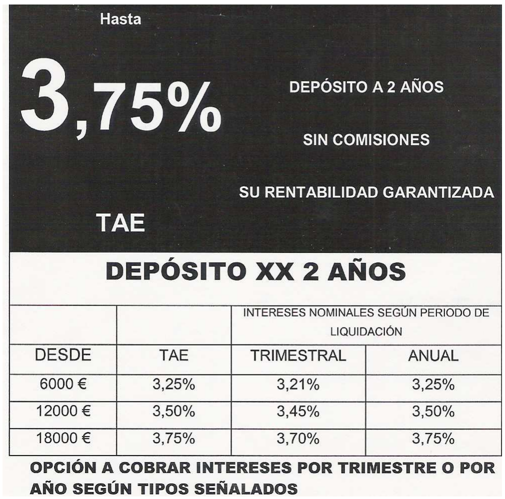
17-5-2025

Fuente: www.lacaixa.es

5. Regímenes financieros compuestos

5.3 Interés efectivo anual y TAE

Ejercicio: A partir de los tipos de interés nominal que aparecen en el anuncio adjunto, verificar si cada TAE está bien calculada



		INTERESES NOMINALES SEGÚN PERIODO DE LIQUIDACIÓN	
DESDE	TAE	TRIMESTRAL	ANUAL
6000 €	3,25%	3,21%	3,25%
12000 €	3,50%	3,45%	3,50%
18000 €	3,75%	3,70%	3,75%

OPCIÓN A COBRAR INTERESES POR TRIMESTRE O POR AÑO SEGÚN TIPOS SEÑALADOS

5. Regímenes financieros compuestos

5.3 Interés efectivo anual y TAE

$$i \;= 0,0321 \Rightarrow I \;=$$

$$i \;= 0,0345 \Rightarrow I \;=$$

$$i \;= 0,0370 \Rightarrow I \;=$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Fuente: www.ingdirect.es

Ejercicio: Comprobar si el interés nominal del 3,25% que se paga mensualmente equivale a una TAE del 3,30%, e interpretar este concepto

*T.A.E. calculada para cualquier importe. Abono mensual de intereses. Tipo de interés nominal anual aplicable a partir de la fecha del primer ingreso 3,25 % (3,30% T.A.E.) durante 4 meses y después se remunerará al tipo de interés en vigor de la cuenta NARANJA, actualmente 1,19% interés nominal anual (1,20% T.A.E.).

$$i = 0{,}0325$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

5. Regímenes financieros compuestos

5.3 Interés efectivo anual y TAE

Ejercicio: Para una inversión de 3.000€ a un plazo de 13 meses el mercado ofrece los 2 productos siguientes con la misma TAE y sin comisiones. ¿En cuál invertiría usted?

Fuente: www.bancorreos.es

Depósito Solidez BanCorreos

Consigue un **2,25% TAE*** a un plazo de 13 meses. Liquidación de intereses a vencimiento, toda la solidez que tu inversión necesita.

Ahorrar y ganar con total tranquilidad.

Importe mínimo: 3.000€

Capital final que se obtendrá al vencimiento:

Fuente: www.catalunyacaixa.com

e-Depósito

Importe	Plazo	Abono intereses	Tipo de interés nominal	TAE	Intereses brutos(EUR)	Retención fiscal(*)	
3.000,00 euros	13 meses	Mensual	2,227 %	2,250 %	72,38	21%	Contrata

5. Regímenes financieros compuestos

5.3 Interés efectivo anual y TAE

Importe	Plazo	Abono intereses	Tipo de interés nominal	TAE	Intereses brutos(EUR)
3.000,00 euros	13 meses	Mensual	2,227 %	2,250 %	72,38

Verificación
de la TAE:

Capital final que se obtendrá
al vencimiento:

Intereses primer mes:

Intereses segundo mes:

	5,5675€	5,5675€	. . . . .	5,5675€	5,5675€
0	1 mes	2 mes	. . . . .	12 mes	13 mes

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

5. Regímenes financieros compuestos

5.3 Interés efectivo anual y TAE

Ejercicio: Usted desea comprarse un smartphone cuyo precio es de 699€. Como en estos momentos tiene una pequeña crisis de tesorería decide pedir el dinero a un banco que le concede un préstamo por dicho importe sin comisiones a un interés del 10% anual acumulable mensualmente y que deberá devolver en el plazo de 4 meses en un solo pago. Sin embargo, un colega suyo le presta el dinero sin intereses y al mismo plazo si le paga hoy una ronda de cubatas valorada en 40€. ¿Le interesa la propuesta de su colega?

TAE de la operación del Banco:

O bien:

TAE de la operación del colega:

Ejemplo: Una entidad financiera ofrece un depósito retribuido en especie a un plazo de 14 meses. Colocando un capital de 8.500€ la entidad entrega una cámara de fotos digital en el momento de realizar el depósito. Sabiendo que la TAE de esta operación es del 1,10%, calcular el importe de los intereses brutos del depósito (valor de la cámara digital)

El importe de los intereses brutos del depósito (valor de la cámara) es:

8.500
Intereses (Cámara) — 8.500

0 — $\frac{14}{12}$

$$8.500 = \text{Intereses} + 8.500 \cdot (1+0,0110)^{-14/12}$$

$$\text{Intereses} = 8.500 - 8.500 \cdot (1+0,0110)^{-14/12}$$

$$\text{Intereses (Cámara)} = 107,80€$$

Ejercicio: De los diferentes depósitos retribuidos en especie que ofrece una entidad financiera, usted está interesado en el juego de sartenes. Calcular los intereses de este depósito y realizar un análisis de la decisión a tomar

Fuente: www.lacaixa.es

Decisión:

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Bloque temático 1.
Fundamentos del equilibrio financiero

1. Operación financiera. Regímenes financieros

2. Valoración financiera

   1. Definición
   2. Rentas financieras

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

1.1 Suma financiera

Hasta ahora se ha estado trabajando con operaciones financieras elementales en las que aparece un solo capital en la prestación y contraprestación

Para las operaciones financieras complejas (parcial o totalmente) en las que aparecen conjuntos de capitales puede ser conveniente valorar dicho conjunto en un instante determinado. Es decir, sustituir el conjunto de capitales por un único capital que lo represente. Dicho capital es **equivalente** al conjunto de capitales y se denomina **suma financiera** (o valor financiero)

Es evidente que para sumar capitales financieros, hay que tener en cuenta la idea del valor temporal del dinero. En adelante, y salvo que se indique lo contrario, utilizaremos el **R.F. de interés compuesto** para valorar

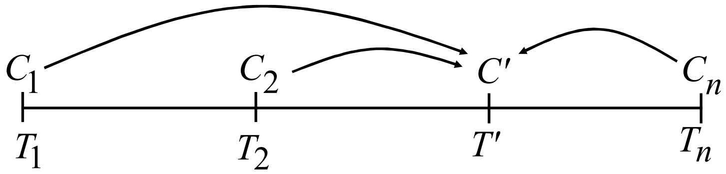
Dado el conjunto de capitales financieros:

$$\{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

y el tipo de interés de valoración I_m

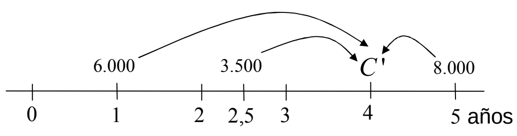
Definimos **suma financiera** en ***T'***, según el tipo de interés dado, como el capital financiero ***(C',T')*** donde:

$$C' = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot (1+I_m)^{m\cdot(T'-T_r)}$$



1. Definición
1.1 Suma financiera

Ejemplo: Calcular la suma financiera en T'=4 de unos pagos a realizar por unas cuantías de 6.000€ dentro de 1 año, 3.500€ dentro de 2 años y medio y de 8.000€ dentro de 5 años, si se valora a un 5% anual de interés:



$$i_1 = I_1 = 0,05$$

$$C' = 6.000\cdot(1+0,05)^3 + 3.500\cdot(1+0,05)^{1,5} + 8.000\cdot(1+0,05)^{-1}$$

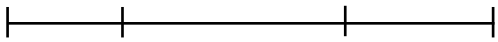
$$C' = 18.330,55€$$

La suma financiera en T'=4 de los pagos anteriores será el capital financiero:

$$(C',T') = (18.330,55\ ,\ 4)$$

Ejercicio: Una persona abrió hace 3 años una cuenta con 6.000€. Al cabo de 6 meses hizo otro ingreso de 8.000€. Si hace 9 meses retiró de la cuenta 5.000€, calcular el saldo que a fecha de hoy existe en la cuenta si ésta ha ofrecido un interés anual del 4% capitalizable trimestralmente

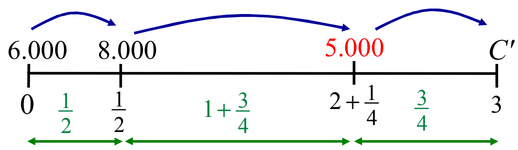
En primer lugar vamos a colocar gráficamente todos los capitales financieros de la operación:



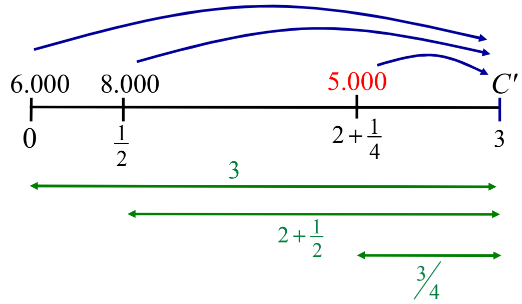
Vamos a resolver este ejemplo de 2 formas distintas

1. Definición
1.1 Suma financiera

Primera forma:



Segunda forma:



1. Definición

1.1 Suma financiera

Cuando se realiza la suma financiera de un conjunto de capitales financieros en un origen considerado, que generalmente se expresa como $\mathbf{0}$, la cuantía resultante se denomina **VALOR ACTUAL,** y se representa por V_0

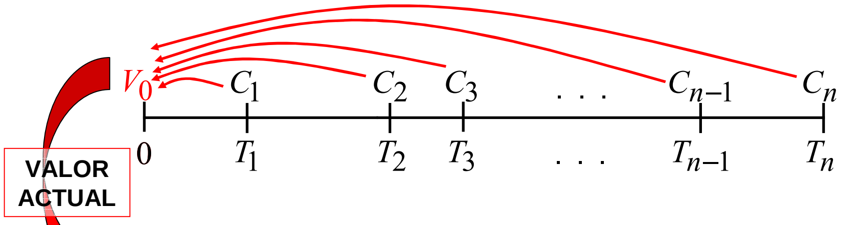
Análogamente, cuando se realiza la suma financiera de un conjunto de capitales financieros en un instante final, que generalmente se expresa como T_n, la cuantía resultante se denomina **VALOR FINAL,** y se representa por V_n

Es decir, dado el conjunto de capitales financieros:

$$\{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

y el tipo de interés de valoración I_m

Suma financiera de capitales en $\mathbf{0}$



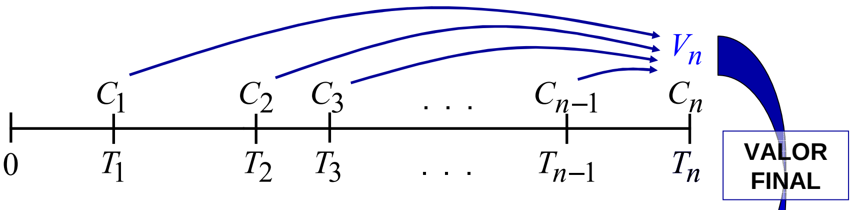
$$V_0 = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot (1+I_m)^{-m \cdot T_r}$$

Análogamente, dado el conjunto de capitales financieros:

$$\{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

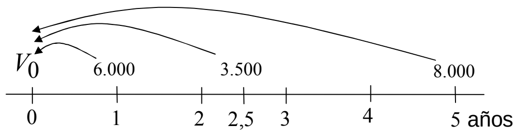
y el tipo de interés de valoración I_m

Suma financiera de capitales en $\boldsymbol{T_n}$



$$V_n = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot (1+I_m)^{m \cdot (T_n - T_r)}$$

Ejemplo: Calcular el valor actual de unos pagos a realizar por unas cuantías de 6.000€ dentro de 1 año, 3.500€ dentro de 2 años y medio y de 8.000€ dentro de 5 años, si se valora a un 5% anual de interés:



$$i_1 = I_1 = 0{,}05$$

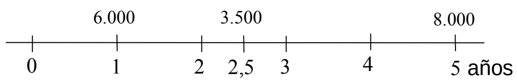
$$V_0 = 6.000 \cdot (1+0{,}05)^{-1} + 3.500 \cdot (1+0{,}05)^{-2{,}5} + 8.000 \cdot (1+0{,}05)^{-5}$$

$$V_0 = 15.080{,}59€$$

Esta cuantía representa el valor actual de dichos pagos futuros, es decir, lo que hay que abonar hoy para cancelar la deuda al tipo de interés considerado

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejercicio: Calcular el valor final (en el instante 5) de unos pagos a realizar por unas cuantías de 6.000€ dentro de 1 año, 3.500€ dentro de 2 años y medio y de 8.000€ dentro de 5 años, si se valora a un 5% anual de interés:

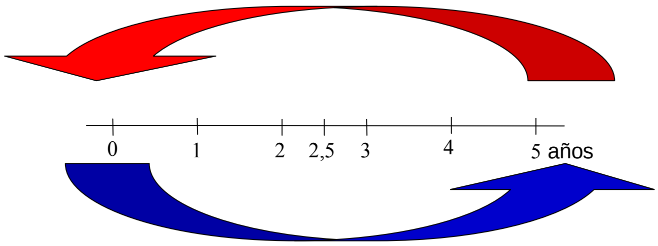


Esta cuantía representa el valor final de dichos pagos futuros, es decir, lo que hay que abonar dentro de 5 años para cancelar la deuda, si no se realizasen los pagos previstos, al tipo de interés considerado

1. Definición

1.1 Suma financiera

Ejercicio: Demostrar que la cuantía del valor actual y la del valor final obtenidas en los ejemplos anteriores son equivalentes si se valoran a un interés del 5% anual:

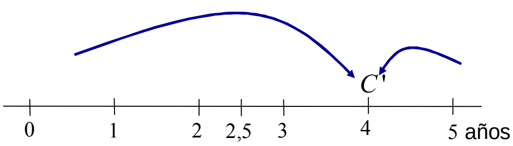


CONCLUSIÓN: Una vez se ha obtenido el valor actual (o el valor final) de un conjunto de capitales, podemos conocer su suma financiera en cualquier diferimiento

1. Definición

1.1 Suma financiera

Ejercicio: Demostrar que la cuantía de la suma financiera en el instante 4 obtenida para los pagos de los ejemplos anteriores (y que recordemos es de 18.330,55€) puede obtenerse a partir del valor actual y del valor final si se valoran a un interés del 5% anual:



1.2 Suma financiera versus Suma aritmética

En finanzas es muy importante no confundir la suma financiera con la suma aritmética de capitales

Ejemplo: Supongamos que usted puede comprar un coche a plazos y le ofrecen dos opciones:
a) Pagar dentro de 6 meses 5.000€, dentro de 2 años 6.000€ y dentro de 3 años 9.000€
b) Pagar dentro de 6 meses 9.000€, dentro de 1 año 7.000€ y dentro de 3 años 3.000€
¿Qué opción le interesa más como comprador si el tipo de interés de la operación fuese de un 6% anual?

En términos de suma aritmética parece mejor la opción b) pues si sumamos aritméticamente sus cuantías obtenemos:

$$9.000 + 7.000 + 3.000 = 19.000€$$

Por el contrario, con la opción a) la suma de sus cuantías es:

$$5.000 + 6.000 + 9.000 = 20.000€$$

En términos de suma financiera, lo que debemos hacer es calcular el valor actual (o el valor final o en cualquier otro diferimiento) de los capitales de ambas opciones a un interés del 6% anual y ver cuál es menor (ya que somos los compradores)

El valor actual de la opción a) sería:

$$V_0 = 5.000 \cdot (1+0,06)^{-1/2} + 6.000 \cdot (1+0,06)^{-2} + 9.000 \cdot (1+0,06)^{-3}$$

$$V_0 = 17.752,98€$$

El valor actual de la opción b) sería:

$$V_0 = 9.000 \cdot (1+0,06)^{-1/2} + 7.000 \cdot (1+0,06)^{-1} + 3.000 \cdot (1+0,06)^{-3}$$

$$V_0 = 17.864,20€$$

En consecuencia, **al tipo de interés considerado**, le interesaría más realizar los pagos según la opción a)

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2.1 Concepto de renta financiera

Un conjunto de capitales financieros

$$\{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

es una **renta financiera** si:

$$\forall r > 1, \quad T_r - T_{r-1} = P \quad \text{constante,}$$

donde:

P es el periodo de renta

$M = \dfrac{1}{P}$ es la frecuencia de renta

n es el número de términos de la renta

C_r es la cuantía de la renta correspondiente al periodo r

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2.2 Clasificación de las rentas financieras

1) Según el número de términos:
- **Renta temporal**: Cuando n es finito
- **Renta perpetua**: Cuando tiene infinitos términos

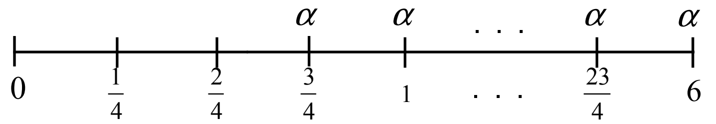
2) Según las cuantías (o términos):
- **Renta constante**: Cuando $\forall r, \quad C_r = \alpha$ constante
- **Renta variable**: Cuando C_r NO constante

3) Según el origen considerado:
- **Renta inmediata**: El origen considerado es igual al origen de la renta
- **Renta diferida**: El origen considerado es anterior al origen de la renta

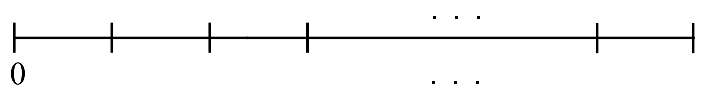
4) Según el periodo de la renta:
- **Renta mensual**: Cuando M=12
- **Renta trimestral**: Cuando M=4
- **Renta anual**: Cuando M=1, …

5) Según el vencimiento de la cuantía dentro de cada periodo:
- **Renta vencida** o **postpagable**: Cuando el término se sitúa al final
- **Renta anticipada** o **prepagable**: Cuando el término se sitúa al inicio

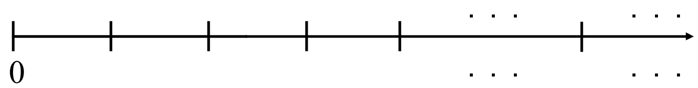
Ejemplo: Representar gráficamente una renta temporal de 22 términos constantes, trimestral, diferida 6 meses y vencida



Ejercicio: Representar gráficamente una renta temporal de 60 términos variables, mensual, inmediata y vencida



Ejercicio: Representar gráficamente una renta perpetua, constante, mensual, diferida 3 meses y anticipada



2.3 Rentas financieras constantes

Una renta financiera es constante si y sólo si todas las cuantías son iguales, es decir, si:

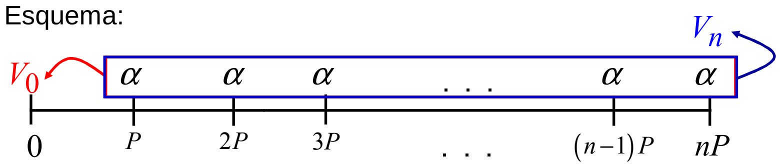
$$\forall r, \quad C_r = \alpha \quad \text{constante}$$

Vamos a valorar la renta que nos servirá de referencia fundamental para poder valorar el resto de tipos de rentas

Valoración de la renta de periodo *P*, temporal, inmediata y vencida

Estructura de los capitales financieros: $\{(\alpha, r\cdot P)\}_{r=1,2,\ldots,n}$

Esquema:



Nos vamos a centrar en la valoración de las rentas en el origen considerado (Valor actual) y al final del último periodo (Valor final), aunque se podría valorar en cualquier diferimiento

NOTA IMPORTANTE:

A la hora de valorar rentas, hay que tener muy presente que el tipo de interés efectivo que aparecerá en las fórmulas ha de tener la misma frecuencia que la que tenga la renta; es decir, M

En el caso de que el tipo de interés efectivo de la operación tuviera una frecuencia diferente, por ejemplo k, debería transformarse este tanto efectivo I_k en I_M, a partir de la expresión ya conocida:

$$(1+I_k)^k = (1+I_M)^M$$

Es decir:

$$I_M = (1+I_k)^{k/M} - 1$$

2. Rentas financieras
2.3 Rentas financieras constantes

Cálculo del **valor actual**:

$$V_0 = \sum_{r=1}^{n} \alpha \cdot (1+I_M)^{-r} = \alpha \cdot \sum_{r=1}^{n} (1+I_M)^{-r} = \alpha \cdot \left[(1+I_M)^{-1} + \ldots + (1+I_M)^{-n} \right]$$

Se trata de la suma de términos que varían en progresión geométrica:

$$\text{Suma} = \frac{\text{Primer término - Último término} \cdot \text{Razón}}{\text{1 - Razón}}$$

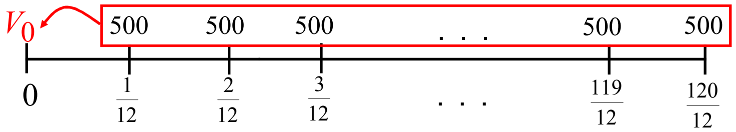
$$V_0 = \alpha \cdot \frac{(1+I_M)^{-1} - (1+I_M)^{-n} \cdot (1+I_M)^{-1}}{1-(1+I_M)^{-1}} = \alpha \cdot \frac{(1+I_M)^{-1} \cdot \left[1-(1+I_M)^{-n}\right]}{(1+I_M)^{-1} \cdot \left[(1+I_M)-1\right]}$$

Simplificando:

$$\boxed{V_0 = \alpha \cdot \frac{1-(1+I_M)^{-n}}{I_M} = \alpha \cdot a_{\overline{n}|I_M}}$$

donde $a_{\overline{n}|I_M}$ representa el valor actual de una renta unitaria, de n términos, inmediata y vencida al tipo de interés I_M

Ejemplo: Calcular el valor actual de una renta inmediata y vencida de 500€ mensuales durante 10 años a un interés del 6% anual capitalizable semestralmente



Puesto que la renta es mensual, lo primero que debe hacerse es buscar el tanto efectivo mensual:

$$\left.\begin{array}{l} i_2 = 0{,}06 \Leftrightarrow I_2 = \dfrac{0{,}06}{2} = 0{,}03 \\ (1+0{,}03)^2 = (1+I_{12})^{12} \\ I_{12} = (1+0{,}03)^{2/12} - 1 = 0{,}0049386 \end{array}\right\}$$

$$V_0 = 500 \cdot \frac{1-(1+0{,}0049386)^{-120}}{0{,}0049386}$$

$$V_0 = 45.187{,}12€$$

Cálculo del **valor final**:

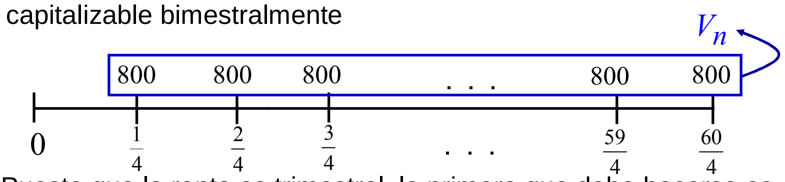
Partiendo de la expresión del valor actual, tendremos:

$$V_n = V_0 \cdot (1+I_M)^n = \alpha \cdot \frac{1-(1+I_M)^{-n}}{I_M} \cdot (1+I_M)^n$$

$$\boxed{V_n = \alpha \cdot \frac{(1+I_M)^n - 1}{I_M} = \alpha \cdot s_{\overline{n}|I_M}}$$

donde $s_{\overline{n}|I_M}$ representa el valor final de una renta unitaria, de n términos, inmediata y vencida al tipo de interés I_M

Ejemplo: Calcular el valor final de una renta inmediata y vencida de 800€ trimestrales durante 15 años a un interés del 5% anual capitalizable bimestralmente



Puesto que la renta es trimestral, lo primero que debe hacerse es buscar el tanto efectivo bimestral:

$$i_6 = 0,05 \Leftrightarrow I_6 = \frac{0,05}{6} = 0,008\hat{3} \qquad \left(1+0,008\hat{3}\right)^6 = \left(1+I_4\right)^4$$

$$I_4 = \left(1+0,008\hat{3}\right)^{6/4} - 1 = 0,012526$$

$$V_n = 800 \cdot \frac{(1+0,012526)^{60} - 1}{0,012526} \qquad V_n = 70.920,05€$$

NOTA IMPORTANTE:

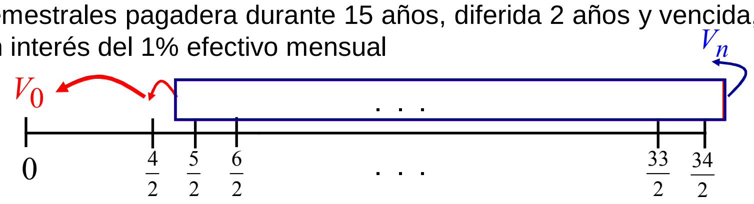
Hasta ahora hemos obtenido el valor actual (o final) de la renta temporal, inmediata y vencida

Para valorar el resto de rentas temporales:

- **diferidas y vencidas**
- **inmediatas y anticipadas**
- **diferidas y anticipadas**

capitalizaremos o actualizaremos la cuantía obtenida en la renta temporal, inmediata y vencida al instante que nos interese

Ejercicio: Calcular el valor actual y el valor final de una renta de 50€ semestrales pagadera durante 15 años, diferida 2 años y vencida, con un interés del 1% efectivo mensual

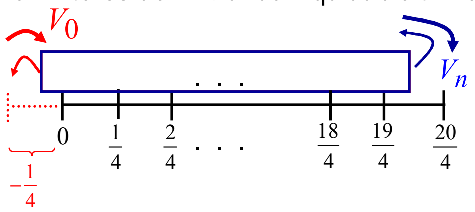


Para calcular el tanto efectivo semestral:

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

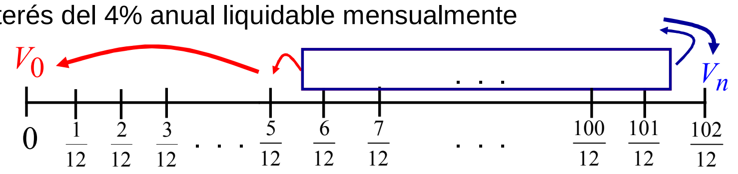
2. Rentas financieras
2.3 Rentas financieras constantes

Ejercicio: Calcular el valor actual y el valor final de una renta trimestral, inmediata y anticipada de 300€ cada término, pagadera durante 5 años a un interés del 4% anual liquidable trimestralmente



El tanto efectivo trimestral es:

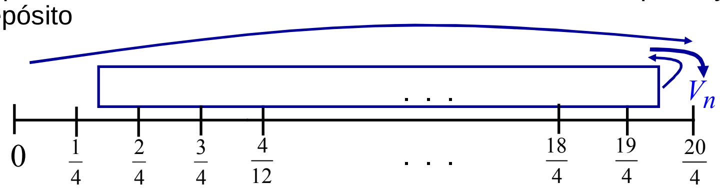
Ejercicio: Calcular el valor actual y el valor final de una renta anticipada de 350€ mensuales pagadera durante 8 años y diferida 6 meses a un interés del 4% anual liquidable mensualmente



El tanto efectivo mensual es:

2. Rentas financieras
2.3 Rentas financieras constantes

Ejercicio: Un depósito bancario se abrió hace 5 años con una cantidad de 6.000€ y en él se han ido realizando imposiciones trimestrales constantes de 400€. La primera imposición se hizo a los 6 meses de abrir el depósito, y la última hace 3 meses. Si el tipo de interés aplicado al depósito ha sido del 0,75% bimestral, calcular el saldo que hoy tiene el depósito

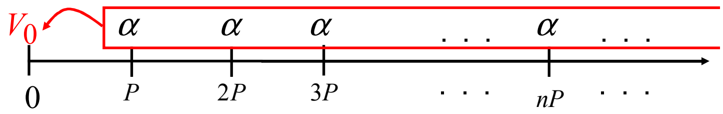


El tanto efectivo trimestral es:

Valoración de la renta de periodo *P*, perpetua, inmediata y vencida

Estructura de los capitales financieros: $\left\{(\alpha, r \cdot P)\right\}_{r=1,2,\ldots,\infty}$

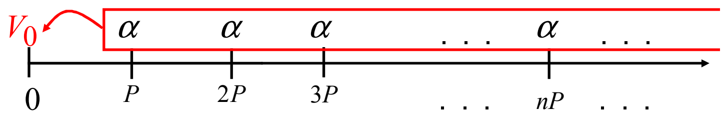
Esquema:



En el caso de **rentas perpetuas** sólo tiene sentido calcular su valor actual

Para su cálculo se seguirá el mismo procedimiento que para las rentas temporales, es decir, se obtendrá el valor actual de la renta de periodo P inmediata y vencida:

$$V_0 = \sum_{r=1}^{\infty} C_r \cdot (1+I_M)^{-r}$$



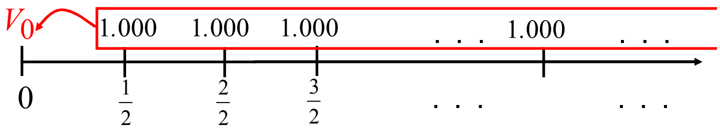
Cálculo del **valor actual**:

$$V_0 = \sum_{r=1}^{\infty} \alpha \cdot (1+I_M)^{-r} = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \alpha \cdot (1+I_M)^{-r} = \lim_{n\to\infty} \alpha \cdot \frac{1-(1+I_M)^{-n}}{I_M}$$

Por tanto:

$$\boxed{V_0 = \frac{\alpha}{I_M}}$$

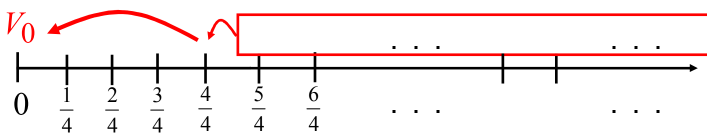
Ejemplo: Calcular el valor actual de una renta inmediata, vencida y perpetua de 1.000€ semestrales a un interés del 8% anual capitalizable mensualmente



Buscamos el tanto efectivo semestral:

$$\left.\begin{array}{l} i_{12} = 0{,}08 \Leftrightarrow I_{12} = \dfrac{0{,}08}{12} = 0{,}00\overset{\frown}{6} \\ \left(1+0{,}00\overset{\frown}{6}\right)^{12} = \left(1+I_2\right)^2 \\ I_2 = \left(1+0{,}00\overset{\frown}{6}\right)^{12/2} - 1 = 0{,}0406726 \end{array}\right\} \quad V_0 = \frac{1.000}{0{,}0406726} = 24.586{,}56€$$

Ejercicio: Calcular el valor actual de una renta diferida 1 año, vencida y perpetua de 675€ trimestrales a un interés del 3% anual pagadero semestralmente

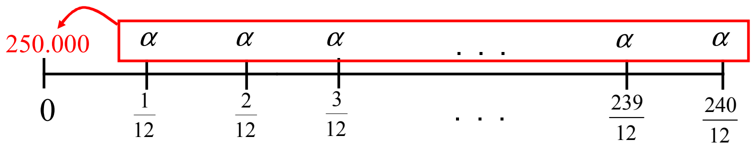


El tanto efectivo trimestral es:

Existen bastantes aplicaciones financieras de las rentas constantes. Ahora veremos dos:

- **Amortización periódica de un capital.** Es decir, obtención de la cuota constante que debe pagarse periódicamente por la concesión de un préstamo
  En este caso se trata de despejar α en la fórmula del valor actual de la renta correspondiente
- **Reconstrucción periódica de un capital.** Es decir, obtención de la cantidad constante que debe aportarse periódicamente a una cuenta para alcanzar una cantidad determinada
  En este caso se trata de despejar α en la fórmula del valor final de la renta correspondiente

Ejemplo: Una persona solicita un préstamo hipotecario de 250.000€ a devolver en cuotas mensuales inmediatas y vencidas durante 20 años a un interés del 3% nominal pagadero mensualmente. Calcular el importe de la cuota mensual constante que amortiza el préstamo



El tanto efectivo mensual será:

$$i_{12} = 0,03$$

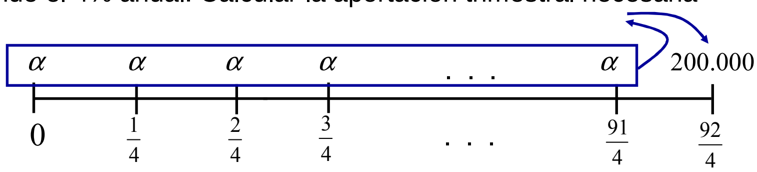
$$I_{12} = \frac{0,03}{12} = 0,0025$$

La mensualidad será:

$$250.000 = \alpha \cdot \frac{1-(1+0,0025)^{-240}}{0,0025}$$

$$\alpha = 1.386,49€$$

Ejemplo: Una persona querría obtener el día de su jubilación, dentro de 23 años, una cantidad de 200.000€. Para ello realizará desde hoy aportaciones constantes, trimestrales y anticipadas en un plan que rinde el 4% anual. Calcular la aportación trimestral necesaria



El tanto efectivo trimestral será: $I_1 = 0{,}04$

$$(1+0{,}04)^1 = (1+I_4)^4 \qquad I_4 = (1+0{,}04)^{1/4} - 1 = 0{,}0098534$$

$$\underbrace{\alpha \cdot \frac{(1+0{,}0098534)^{92} - 1}{0{,}0098534}}_{\text{Valor en } T=\frac{91}{4}} \cdot (1+0{,}0098534) = 200.000$$

$$\alpha = 1.332{,}31€$$

2.4 Rentas financieras geométricas

Una renta financiera es variable en progresión geométrica si:

$$\forall r > 1, \quad C_r = C_{r-1} \cdot q = C_1 \cdot q^{r-1} \quad \text{con } q > 0$$

Si $q > 1$ **la renta es creciente**

Si $0 < q < 1$ **la renta es decreciente**

Ejemplo: Una persona inicia hoy, al cumplir 45 años, un plan de ahorro en el que realizará aportaciones mensuales, crecientes un 0,5% mensual acumulativo, con el objetivo de disponer de un capital al cumplir los 65. Si la primera imposición es de 100€, determinar la estructura de los ingresos

El primer ingreso es de 100€, $C_1 = 100$

El segundo será de $C_2 = 100 + 100 \cdot 0{,}005 = 100 \cdot (1+0{,}005) = 100 \cdot 1{,}005$

El tercero $C_3 = 100 \cdot 1{,}005 + 100 \cdot 1{,}005 \cdot 0{,}005 =$

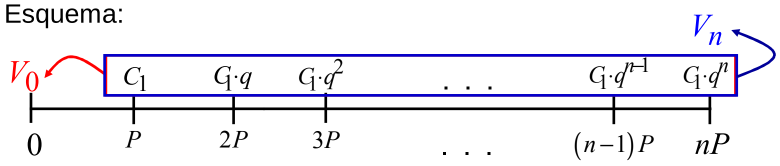
$$= 100 \cdot 1{,}005 \cdot (1+0{,}005) = 100 \cdot 1{,}005^2$$

Por tanto, los ingresos forman una renta variable en progresión geométrica de razón $q = 1{,}005$ y primer término $C_1 = 100$. Es decir, $C_r = 100 \cdot 1{,}005^{r-1}$

Valoración de la renta de periodo *P*, temporal, inmediata y vencida

Estructura de los capitales financieros: $\left\{\left(C_r, r\cdot P\right)\right\}_{r=1,2,\ldots,n}$

Esquema:



Cálculo del **valor actual**:

$$V_0=\sum_{r=1}^{n}C_r\cdot\left(1+I_M\right)^{-r}=\sum_{r=1}^{n}C_1\cdot q^{r-1}\cdot\left(1+I_M\right)^{-r}$$

Desarrollando resulta:

$$\boxed{V_0=\begin{cases}C_1\cdot\dfrac{1-q^n\cdot\left(1+I_M\right)^{-n}}{1+I_M-q} & \text{si}\quad q\neq 1+I_M\\[2ex] C_1\cdot n\cdot\left(1+I_M\right)^{-1} & \text{si}\quad q=1+I_M\end{cases}}$$

Cálculo del **valor final**:

Partiendo de la expresión del valor actual puede calcularse

$$V_n=V_0\cdot\left(1+I_M\right)^n$$

NOTA IMPORTANTE:

Para valorar el resto de rentas temporales:

- **diferidas y vencidas**
- **inmediatas y anticipadas**
- **diferidas y anticipadas**

capitalizaremos o actualizaremos la cuantía obtenida en la renta temporal, inmediata y vencida al instante que nos interese

Ejemplo: Una persona inicia hoy, al cumplir 45 años, un plan de ahorro en el que realizará aportaciones mensuales, crecientes un 0,5% mensual acumulativo, con el objetivo de disponer de un capital al cumplir los 65. Si la primera imposición es de 100€ y el plan de ahorro rinde un interés del 3% efectivo anual. Se pide:

a) Calcular el importe de la última aportación que se realizará
(Considerar que en el momento de cumplir los 65 años no se realiza ingreso)

b) Calcular el capital acumulado cuando la persona cumpla los 65 años

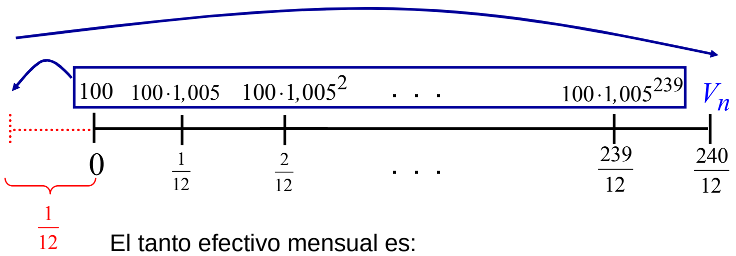
a) Tal como se ha visto en el ejemplo anterior, los ingresos forman una renta variable en progresión geométrica de razón $q = 1{,}005$ y primer término $C_1 = 100$. Es decir,

$$C_r = 100 \cdot 1{,}005^{r-1}$$

Dado que se realizarán aportaciones mensuales durante 20 años la renta tendrá 240 términos, el importe del último será:

$$C_{240} = 100 \cdot 1{,}005^{240-1} = 329{,}37€$$

b) Calcular el capital acumulado cuando la persona cumpla los 65 años



El tanto efectivo mensual es:

$$I_1 = 0{,}03 \Rightarrow I_{12} = (1+0{,}03)^{1/12} - 1 = 0{,}002466$$

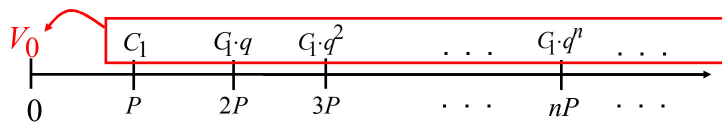
luego $q \neq 1 + I_M$

$$V_n = 100 \cdot \frac{1 - 1{,}005^{240} \cdot (1+0{,}002466)^{-240}}{1 + 0{,}002466 - 1{,}005} \cdot (1+0{,}002466)^{241} = 59.509{,}20€$$

Valoración de la renta de periodo *P*, perpetua, inmediata y vencida

Estructura de los capitales financieros: $\{(C_r, r \cdot P)\}_{r=1,2,\ldots,\infty}$

Esquema:



En el caso de **rentas perpetuas** sólo tiene sentido calcular su valor actual

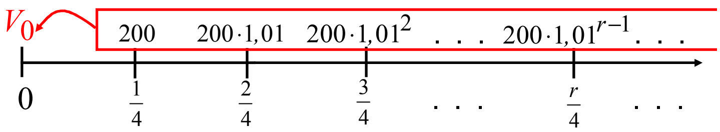
Para su cálculo se seguirá el mismo procedimiento que para las rentas temporales, es decir, se obtendrá el valor actual de la renta de periodo P inmediata y vencida:

$$V_0 = \sum_{r=1}^{\infty} C_r \cdot (1+I_M)^{-r} = \sum_{r=1}^{\infty} C_1 \cdot q^{r-1} \cdot (1+I_M)^{-r}$$

Desarrollando resulta:

$$\boxed{V_0 = \frac{C_1}{1+I_M-q} \quad \text{si} \quad q<1+I_M}$$

Ejemplo: Calcular el valor actual de una renta trimestral, inmediata, vencida y perpetua cuyos términos crecen trimestralmente un 1% acumulativo siendo el primer término de 200€ a un tipo de interés del 6% anual capitalizable trimestralmente

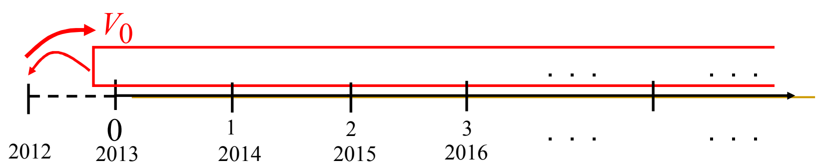


$$\left.\begin{array}{l} i_4 = 0{,}06 \Rightarrow I_4 = \dfrac{0{,}06}{4} = 0{,}015 \\ q = 1{,}01 \end{array}\right\}$$

Como: $q = 1{,}01 < 1{,}015 = 1 + I_4$

$$V_0 = \frac{200}{1+0{,}015-1{,}01} = 40.000€$$

Ejercicio: A final del año 2013, Banco STD pagará un dividendo de 0,64€ por cada acción. El consejo de Administración piensa incrementar cada año dicho dividendo un 4% acumulativo. Si para comprar acciones de STD los inversores exigen un interés del 15% anual y suponiendo que STD tendrá una vida ilimitada, calcule el valor actual (final del año 2013) de los futuros dividendos de STD



Puesto que:

2.5. Rentas financieras aritméticas

Una renta financiera es variable en progresión aritmética (lineal) si:

$$\forall r > 1, \quad C_r = C_{r-1} + h = C_1 + (r-1) \cdot h$$

Si $h > 0$ **la renta es creciente**

Si $h < 0$ **la renta es decreciente**

Ejemplo: Una pequeña empresa prevé, para los próximos 5 años, unos gastos trimestrales y vencidos que crecerán linealmente a razón de 350€ cada trimestre. Si para el primer trimestre los gastos ascienden a 6.000€, ¿cuál es la estructua de los gastos trimestrales previstos?

El importe de los gastos del primer trimestre es de 6.000€, $C_1 = 6.000$

Para el segundo será $C_2 = 6.000 + 350 = 6.350$

En el tercero $C_3 = 6.000 + 350 + 350 = 6.000 + 2 \cdot 350 = 6.700$

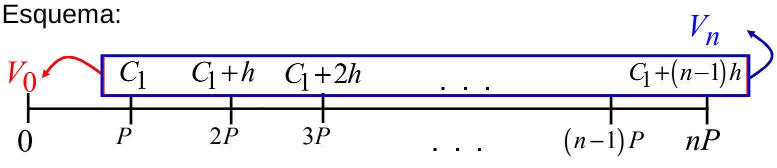
Por tanto, los ingresos forman una renta variable en progresión aritmética de diferencia $h = 350$ y primer término $C_1 = 6.000$. Es decir,

$$C_r = 6.000 + (r-1) \cdot 350$$

Valoración de la renta de periodo *P*, temporal, inmediata y vencida

Estructura de los capitales financieros: $\{(C_r, r \cdot P)\}_{r=1,2,\dots,n}$

Esquema:



Cálculo del **valor actual**:

$$V_0 = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot (1+I_M)^{-r} = \sum_{r=1}^{n} (C_1 + (r-1) \cdot h) \cdot (1+I_M)^{-r}$$

Desarrollando resulta:

$$V_0 = \left(C_1 + \frac{h}{I_M} + nh \right) \cdot a_{\overline{n}|I_M} - \frac{nh}{I_M}$$

Cálculo del **valor final**:
Partiendo de la expresión del valor actual puede calcularse:

$$V_n = V_0 \cdot (1 + I_M)^n$$

NOTA IMPORTANTE:

Para valorar el resto de rentas temporales (diferidas y vencidas, inmediatas y anticipadas y diferidas y anticipadas) capitalizaremos o actualizaremos la cuantía obtenida en la renta temporal, inmediata y vencida al instante que nos interese

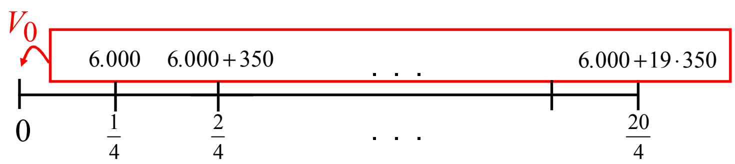
Ejemplo: Una pequeña empresa prevé, para los próximos 5 años, unos gastos trimestrales y vencidos que crecerán linealmente a razón de 350€ cada trimestre. Si para el primer trimestre los gastos ascienden a 6.000€, determinar el valor de los gastos, a día de hoy, para un tipo de interés del 4% nominal pagadero trimestralmente

Tal y como se ha visto en el ejemplo anterior, los ingresos forman una renta variable en progresión aritmética de diferencia $h = 350$ y primer término $C_1 = 6.000$

Es decir

$$C_r = 6.000 + (r - 1) \cdot 350$$

Luego, el valor de los gastos, a día de hoy, para un tipo de interés del 4% nominal pagadero trimestralmente se obtendrá considerando el siguiente esquema



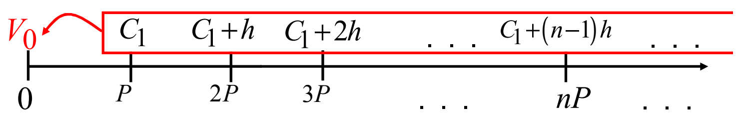
El tanto efectivo trimestral es: $i_4 = 0,04 \Leftrightarrow I_4 = \dfrac{0,04}{4} = 0,01$

$$V_0 = \left(6.000 + \frac{350}{0,01} + 20 \cdot 350\right) \cdot a_{\overline{20}|0,01} - \frac{20 \cdot 350}{0,01} = 166.186,54€$$

Valoración de la renta de periodo *P*, perpetua, inmediata y vencida

Estructura de los capitales financieros: $\left\{\left(C_r, r \cdot P\right)\right\}_{r=1,2,\ldots,\infty}$

Esquema:



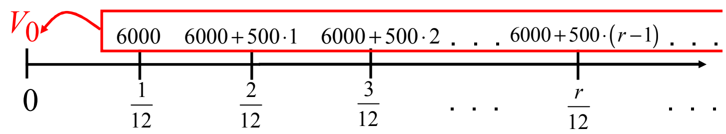
En el caso de **rentas perpetuas** sólo tiene sentido calcular su valor actual

Para su cálculo se seguirá el mismo procedimiento que para las rentas temporales, es decir, se obtendrá el valor actual de la renta de periodo P inmediata y vencida:

$$V_0 = \sum_{r=1}^{\infty} C_r \cdot \left(1 + I_M\right)^{-r} = \sum_{r=1}^{\infty} \left(C_1 + (r-1) \cdot h\right) \cdot \left(1 + I_M\right)^{-r}$$

Desarrollando resulta: $\boxed{V_0 = \dfrac{C_1}{I_M} + \dfrac{h}{I_M^2}}$

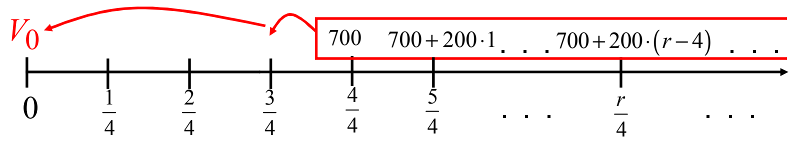
Ejemplo: Calcular el valor actual de una renta mensual, inmediata, vencida y perpetua cuyos términos crecen linealmente 500€ mensuales siendo el primer término de 6.000€ a un tipo de interés del 8% anual



$$I_1 = 0{,}08 \Rightarrow I_{12} = (1+0{,}08)^{1/12} - 1 = 0{,}006434 \qquad h = 500$$

$$V_0 = \frac{6.000}{0{,}006434} + \frac{500}{0{,}006434^2} = 13.010.786{,}25€$$

Ejercicio: Calcular el valor actual de una renta trimestral, diferida 1 año, anticipada y perpetua cuyos términos crecen linealmente 200€ trimestrales siendo el primer término de 700€ a un tipo de interés del 6% anual liquidable trimestralmente



Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Bloque temático 2.
Operaciones financieras

1. Préstamos

1. Definición y clasificación
2. Reserva matemática. Magnitudes
3. Préstamos con amortización única de capital
4. Préstamos con amortización periódica: Préstamo francés
5. Modificación de condiciones

2. Empréstitos

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

1. Definición y clasificación

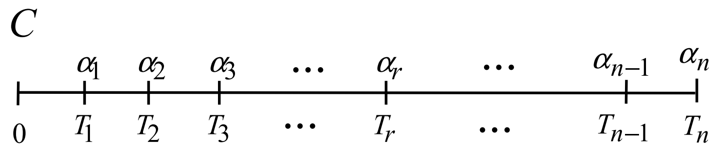
Un préstamo es una operación financiera en la que una persona, llamada **prestamista o sujeto activo**, entrega a otra persona, llamada **prestatario o sujeto pasivo**, una cuantía monetaria denominada **nominal del préstamo,** C. A cambio el sujeto pasivo se compromete a reembolsar o amortizar en un plazo concreto, ya sea mediante un único pago o mediante desembolsos sucesivos, la cantidad prestada y el pago de un precio o interés.

Por tanto, en el momento de concertarse el préstamo se establece una equivalencia financiera a interés compuesto entre el capital que cede el sujeto activo (**prestación**) y el capital o capitales que retorna el sujeto pasivo (**contraprestación**), fruto de los acuerdos que han adoptado.

Entonces, se puede representar una operación de préstamo:

Prestación: $(C, 0)$

Contraprestación: $\{(\alpha_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$



Si dicho préstamo ha sido pactado al tipo de interés efectivo I_m , de la prestación y contraprestación anterior resulta la siguiente **equivalencia financiera**:

$$(C,0) \underset{\underset{I_m}{\downarrow}}{\approx} \{(\alpha_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

De los posibles criterios de clasificación de los préstamos destacamos los siguientes:

a) Según la forma de amortización del nominal del préstamo:

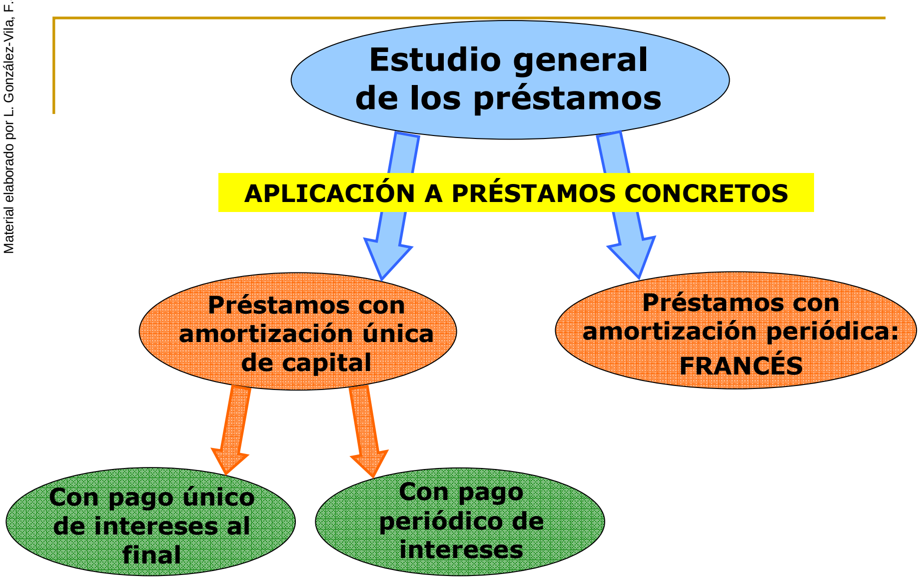
- Préstamo con amortización única de capital
- Préstamo con amortización periódica de capital

b) Según las formas de pago de los intereses:

- Préstamo con pago único de intereses
- Préstamo con pago periódico de intereses

Y, en concreto, estudiaremos los 3 préstamos siguientes:

- Préstamo con amortización única de capital y pago único de intereses
- Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses
- Préstamo con amortización periódica de capital y pago periódico de intereses: Préstamo francés



1. Definición y clasificación

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Estudio general de los préstamos

1. Reserva matemática
2. Término amortizativo
3. Cuota de interés
4. Cuota de amortización
5. Total amortizado
6. Capital pendiente
7. Valor del préstamo
8. Tanto efectivo prestatario
9. TAE del préstamo

2. Reserva matemática. Magnitudes

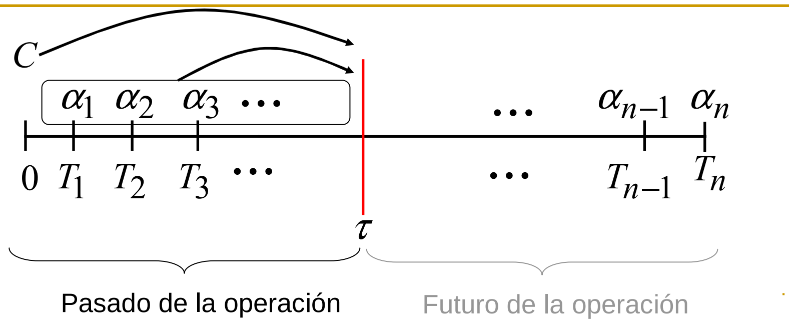
La **reserva matemática** en un instante cualquiera de la vida del préstamo es el importe que el prestatario debe entregar al prestamista, para cancelar la operación en dicho instante, considerando únicamente los capitales que intervienen en la equivalencia financiera

Existen dos formas de calcular la reserva matemática en un instante determinado:

- Analizando el pasado de la operación hasta ese instante (incluido)
  Reserva **retrospectiva**
- Analizando el futuro desde dicho instante
  Reserva **prospectiva**

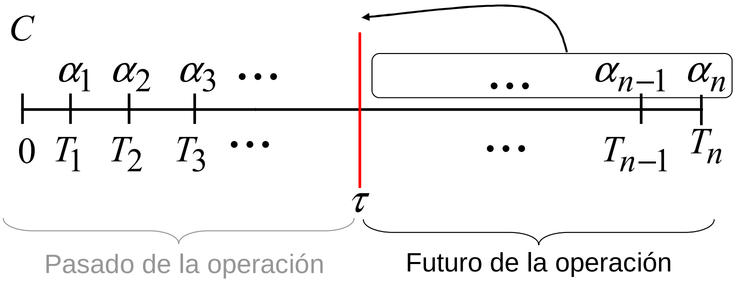
Vamos a estudiar la reserva matemática y las magnitudes de un préstamo con la siguiente equivalencia financiera:

$$(C,0) \underset{\substack{\downarrow \\ I_m}}{\approx} \{(\alpha_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$



La **reserva matemática retrospectiva** en τ es la resta del valor financiero del capital de la prestación, C, menos el valor financiero de los capitales de la contraprestación que han habido desde el origen de la operación hasta dicho instante (incluido). Es decir:

$$R_\tau^{ret} = C \cdot (1+I_m)^{m\cdot\tau} - \sum_{\forall T_r \leq \tau} \alpha_r \cdot (1+I_m)^{m\cdot(\tau - T_r)}$$



La **reserva matemática prospectiva** en τ es el valor financiero de los capitales de la contraprestación que hay desde dicho instante (no incluido) hasta el final de la operación. Es decir:

$$R_\tau^{pro} = \sum_{\forall T_r > \tau} \alpha_r \cdot (1+I_m)^{-m\cdot(T_r-\tau)}$$

PROPIEDAD:
La reserva matemática retrospectiva y prospectiva en un instante τ son **iguales**. En efecto, de la equivalencia financiera:

$$(C,0) \underset{\substack{\downarrow \\ I_m}}{\approx} \{(\alpha_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

valorando todos los capitales en τ se tiene:

$$C\cdot(1+I_m)^{m\cdot\tau} = \sum_{\forall T_r \le \tau} \alpha_r \cdot (1+I_m)^{m\cdot(\tau-T_r)} + \sum_{\forall T_r > \tau} \alpha_r \cdot (1+I_m)^{-m\cdot(T_r-\tau)}$$

y pasando el primer miembro de la suma a la otra parte de la igualdad:

$$\underbrace{C\cdot(1+I_m)^{m\cdot\tau} - \sum_{\forall T_r \le \tau} \alpha_r \cdot (1+I_m)^{m\cdot(\tau-T_r)}}_{R_\tau^{ret}} = \underbrace{\sum_{\forall T_r > \tau} \alpha_r \cdot (1+I_m)^{-m\cdot(T_r-\tau)}}_{R_\tau^{pro}}$$

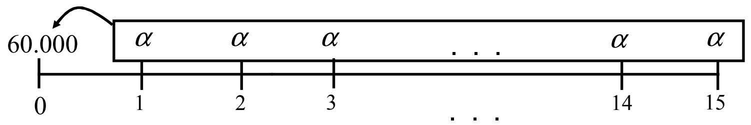
$$\boxed{R_\tau^{ret} = R_\tau^{pro}}$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejemplo: Una persona solicita un préstamo de 60.000€ que debe devolver mediante el pago de anualidades contantes y vencidas, pagaderas durante 15 años. Si el tanto de interés pactado es del 6% efectivo anual, se pide:

a) Importe de la anualidad

b) Reserva matemática retrospectiva y prospectiva a los 5 años y a los 5 años y medio de solicitado el préstamo



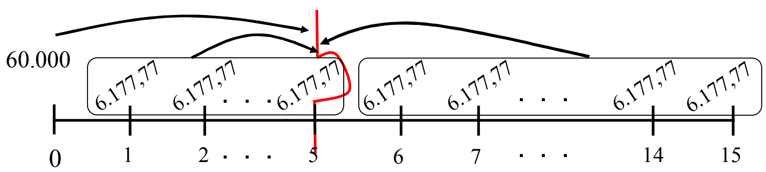
El tanto efectivo anual es: $I_1 = 0{,}06$

La anualidad se obtendrá de:

$$60.000 = \alpha \cdot \frac{1-(1+0{,}06)^{-15}}{0{,}06} \qquad \alpha = 6.177{,}7658 \cong 6.177{,}77€$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

b) Para calcular la reserva matemática retrospectiva a los **5 años**, al valor financiero del capital de la prestación le restamos el valor financiero de los capitales de la contraprestación que han habido desde el origen de la operación hasta dicho instante (incluidos)

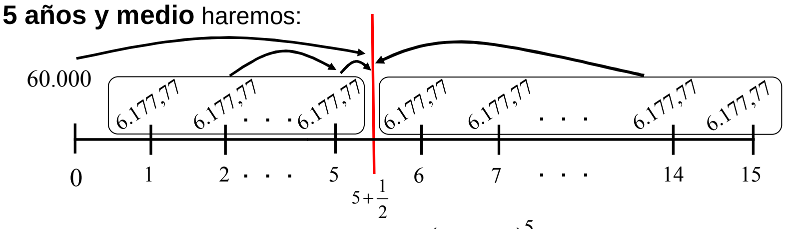


$$R_5^{ret} = 60.000 \cdot (1+0{,}06)^5 - 6.177{,}77 \cdot \frac{(1+0{,}06)^5 - 1}{0{,}06} = 45.468{,}89€$$

Para calcular la reserva matemática prospectiva a los **5 años**, calculamos el valor financiero de los capitales de la contraprestación que habrán desde dicho instante (no incluido) hasta el final de la operación

$$R_5^{pro} = 6.177{,}77 \cdot \frac{1-(1+0{,}06)^{-10}}{0{,}06} = 45.468{,}89€$$

De forma análoga, para calcular la reserva matemática retrospectiva a los **5 años y medio** haremos:



$$R_{5,5}^{ret} = 60.000 \cdot (1+0,06)^{5,5} - 6.177,77 \cdot \frac{(1+0,06)^5 - 1}{0,06} \cdot (1+0,06)^{0,5} = 46.813,09€$$

Obsérvese que también puede calcularse:

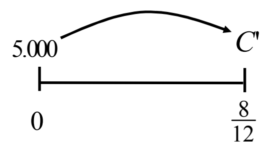
$$R_{5,5}^{ret} = R_5^{ret} \cdot (1+0,06)^{0,5} = 45.468,9 \cdot (1+0,06)^{0,5} = 46,813,09€$$

La reserva matemática prospectiva a los **5,5 años** será:

$$R_{5,5}^{pro} = 6.177,77 \cdot \frac{1-(1+0,06)^{-10}}{0,06} \cdot (1+0,06)^{0,5} = 46.813,09€$$

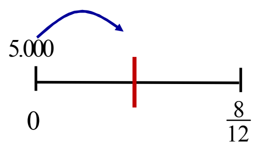
Ejercicio: Una persona solicita un préstamo de 5.000€ que debe devolver mediante un único pago de capital e intereses dentro de 8 meses. Si el tanto de interés pactado es del 5% anual acumulable mensualmente, se pide:

a) Importe que debe devolver la persona dentro de 8 meses



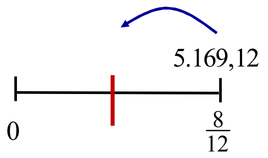
El tipo de interés del préstamo es:

b) Reserva matemática retrospectiva y prospectiva a los 4 meses de solicitado el préstamo



2. Reserva matemática. Magnitudes

Prospectivamente será:



c) Reserva matemática retrospectiva y prospectiva a los 4 meses y medio de solicitado el préstamo

2. Reserva matemática. Magnitudes

A partir de la equivalencia financiera:

$$(C,0) \underset{I_m}{\overset{\downarrow}{\approx}} \{(\alpha_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

y suponiendo que los pagos realizados por el prestatario son periódicos y de frecuencia m, es decir $T_r = rp$, con $p = 1/m$, además de la reserva matemática definimos las siguientes **magnitudes del préstamo**:

α_r : **Término amortizativo (Cuota total) correspondiente al periodo *r*-ésimo**

Importe del pago total realizado por el prestatario en el periodo r

$$\alpha_r = Y_r + A_r \qquad \text{donde:}$$

Y_r **: Cuota de interés correspondiente al periodo *r***

Parte del término amortizativo destinada al pago de intereses

A_r : **Cuota de amortización correspondiente al periodo *r***

Parte del término amortizativo destinada a amortizar parte del nominal del préstamo. Se cumple:

$$\sum_{r=1}^{n} A_r = C$$

La suma de todas las cuotas de amortización debe coincidir con el nominal del préstamo

M_τ : **Total amortizado en τ**

Parte del nominal del préstamo amortizada hasta el instante τ

Denotaremos por M_r al total amortizado tras el pago del término amortizativo correspondiente al periodo r:

$$M_r = \sum_{s=1}^{r} A_s = M_{r-1} + A_r$$

Además: $M_0 = 0$ $\qquad M_n = C$

CP_τ : **Capital pendiente en τ**

Parte del nominal del préstamo pendiente de amortizar en el instante τ

Denotaremos por CP_r al capital pendiente tras el pago del término amortizativo correspondiente al periodo r:

$$CP_r = \sum_{s=r+1}^{n} A_s = C - M_r$$

El capital pendiente es el nominal del préstamo menos el total amortizado

Además:

$$CP_0 = C$$

$$CP_n = 0$$

Todas estas magnitudes pueden recogerse, periodo a periodo, en el **cuadro de amortización del préstamo**

r	α_r	Y_r	A_r	M_r	CP_r

r	Término Amortizativo α_r	Cuota de Interés Y_r	Cuota de Amortización A_r	Total Amortizado M_r	Capital Pendiente CP_r
0				$M_0 = 0$	$CP_0 = C$
1	$\alpha_1 = Y_1 + A_1$	Y_1	A_1	$M_1 = A_1$	$CP_1 = C - M_1$
2	$\alpha_2 = Y_2 + A_2$	Y_2	A_2	$M_2 = M_1 + A_2$	$CP_2 = C - M_2$
3	$\alpha_3 = Y_3 + A_3$	Y_3	A_3	$M_3 = M_2 + A_3$	$CP_3 = C - M_3$
…	…	…	…	…	…
n	$\alpha_n = Y_n + A_n$	Y_n	A_n	$M_n = C$	$CP_n = 0$

Ejercicio: A una persona le han concedido un préstamo de 5.000€ que debe devolver mediante un único pago de capital e intereses dentro de 8 meses. Al interés pactado del 5% anual acumulable mensualmente, hemos calculado anteriormente que dicho pago único asciende a 5.169,12€. Se pide:

a) Desglosar el pago único del mes 8 en cuota de interés y cuota de amortización

$$\alpha_n = Y_n + A_n$$

b) Indicar el total amortizado de dicho préstamo en los 3 instantes siguientes:

b.1) En el momento de concederse el préstamo

b.2) A los 5 meses de haberse concedido el préstamo

b.3) Tras haber realizado el pago único a los 8 meses

c) Indicar el capital pendiente de dicho préstamo en los 3 instantes siguientes:

c.1) En el momento de concederse el préstamo

c.2) A los 5 meses de haberse concedido el préstamo

c.3) Tras haber realizado el pago único a los 8 meses

d) Construir el cuadro de amortización de este préstamo

r	Término Amortizativo α_r	Cuota de Interés Y_r	Cuota de Amortización A_r	Total Amortizado M_r	Capital Pendiente CP_r
0					
n					

V_τ **: Valor del préstamo en el instante** τ

Valor financiero de los términos amortizativos pendientes de pagar a partir del instante τ al tipo de interés de mercado

Ejercicio: A una persona le han concedido un préstamo de 5.000€ que debe devolver mediante un único pago de capital e intereses dentro de 8 meses. Al interés pactado del 5% anual acumulable mensualmente, sabemos que el pago único asciende a 5.169,12€

Si a los 6 meses de haberse concedido el préstamo, el tipo de interés del mercado para este tipo de operaciones ha aumentado al 6% anual acumulable mensualmente, calcular el valor financiero del préstamo a los 6 meses

En toda operación de préstamo suelen existir una serie de gastos y comisiones como, por ejemplo, los gastos de tasación, comisión de apertura, comisión de estudio, gastos de notario, registro, etc.

Según los gastos y comisiones que se consideren aparecen:

Tanto efectivo prestatario (sujeto pasivo)

Tipo de interés efectivo al que le resulta la operación de préstamo al prestatario. Se obtiene de considerar la equivalencia:

$$\boxed{\text{Prestación efectiva para el prestatario}} \approx \boxed{\text{Contraprestación efectiva para el prestatario}}$$

$$\downarrow$$

Tanto efectivo prestatario

Tanto efectivo anual (TAE) del préstamo

Tipo de interés efectivo anual al que resulta la operación financiera según la normativa del Banco de España (Circular 5/2012):

En el cálculo de la TAE se incluirán los intereses, comisiones y demás gastos que el cliente esté obligado a pagar a la entidad como contraprestación por el crédito o préstamo recibido o los servicios inherentes al mismo.

Ejercicio: A una persona le han concedido un préstamo de 5.000€ que debe devolver mediante un único pago de capital e intereses dentro de 8 meses. Al interés pactado del 5% anual acumulable mensualmente, sabemos que el pago único asciende a 5.169,12€

Los gastos asociados a dicho préstamo son:

- La persona debe pagar a la entidad una comisión de apertura del préstamo del 2% sobre el valor nominal
- La persona debe pagar 330€ al notario en el momento de la firma del préstamo

Con la información anterior, se pide:

a) Calcular el tanto efectivo prestatario

Prestación efectiva para el prestatario	≈	Contraprestación efectiva para el prestatario

↓

Tanto efectivo prestatario

Si valoramos en el origen de la operación:

Cuyo interés efectivo anual equivalente es:

b) Calcular la TAE del préstamo

Según la normativa establecida por el Banco de España, de todos los gastos de esta operación, el único que puede formar parte de la TAE del préstamo es la comisión de apertura

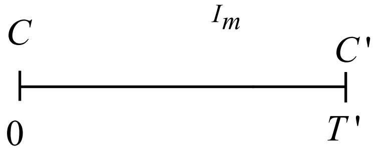
Si valoramos en el origen de la operación:

3.1. Préstamo con amortización única de capital y pago único de intereses

Características

1. La amortización del nominal del préstamo se realiza mediante un único pago al final de la operación
2. La cuota de interés es única y se hace efectiva al final del plazo, según el tipo de interés del préstamo I_m

Equivalencia financiera $(C,0) \underset{\substack{\downarrow \\ I_m}}{\approx} (C',T')$



La cuantía total que se tendrá que pagar al final de la operación es:

$$C' = C \cdot (1+I_m)^{m \cdot t}$$

donde t es el plazo de la operación

De dicha cuantía total, la cuota de interés asciende a:

$$Y = C' - C = C \cdot (1+I_m)^{m \cdot t} - C$$

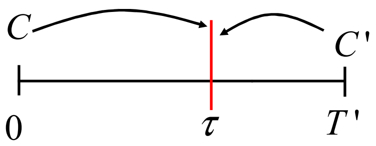
Y la cuota de amortización es: $A = C$

A continuación vamos a estudiar la reserva matemática, el capital pendiente y el total amortizado de este préstamo en 3 instantes concretos:

- En el origen del préstamo: 0
- En un instante cualquiera dentro del plazo del préstamo: $\tau \in (0, T')$
- En el instante final del préstamo: T'

Reserva matemática

- En 0 : $R_0 = C$
- En τ : $R_\tau = \begin{cases} \xrightarrow{\text{retrosp.}} C\cdot(1+I_m)^{m\cdot\tau} \\ \xrightarrow{\text{prosp.}} C'\cdot(1+I_m)^{-m\cdot(T'-\tau)} \end{cases}$



- En T' : $R_{T'} = 0$

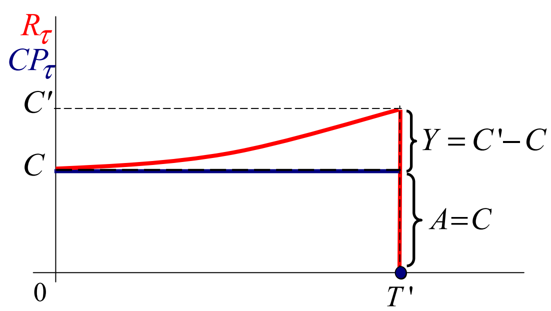
3. Préstamos con amortización única de capital

3.1 Préstamo con amortización única de capital y pago único de intereses

Capital pendiente

- En 0 : $CP_0 = C$
- En τ : $CP_\tau = C$
- En T' : $CP_{T'} = 0$

Evolución de la reserva matemática y del capital pendiente:



La reserva matemática y el capital pendiente solo coinciden en 0 y T'

Total amortizado

- En 0 : $M_0 = 0$
- En τ : $M_\tau = 0$
- En T' : $M_{T'} = C$

En resumen:

Instante	Reserva matemática		Capital pendiente	Total amortizado
0	C		C	0
τ	**Retrospectiva**	$C \cdot (1+I_m)^{m\cdot\tau}$	C	0
	Prospectiva	$C' \cdot (1+I_m)^{-m\cdot(T'-\tau)}$		
T'	0		0	C

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

3. Préstamos con amortización única de capital
3.1 Préstamo con amortización única de capital y pago único de intereses

Además, también puede calcularse el **valor financiero**, para un determinado tipo de interés de mercado, en cualquier momento de la vida del préstamo

Para determinar el **tanto efectivo prestatario y TAE** procederemos de la forma descrita en el apartado 2

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejercicio: Sea un préstamo de nominal 30.000€ a amortizar mediante un solo pago, comprensivo de capital e intereses, a los 4 años de su concesión pactado al 7,5% efectivo anual. El prestatario paga en el momento de la concesión una comisión de apertura de 300€ y un pago de 600€ a terceros. Se pide:

a) Cantidad a devolver a los 4 años para cancelar el préstamo

b) Cuota de amortización y cuota de interés

c) Reserva matemática y capital pendiente a los 2 años y medio de su concesión

d) Valor del préstamo a los 2 años y medio de su concesión si el tanto de interés del mercado es del 6% anual

e) Cantidad a abonar a los 2 años y medio de su concesión para cancelarlo anticipadamente bajo los siguientes supuestos:

e.1) Se mantiene el tanto de interés inicialmente pactado

e.2) El tanto de interés aplicable es del 6% efectivo anual

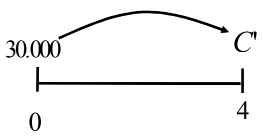
f) Tanto efectivo prestatario y TAE

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

3. Préstamos con amortización única de capital

3.1 Préstamo con amortización única de capital y pago único de intereses

a) Cantidad a devolver a los 4 años para cancelar el préstamo



El tipo de interés del préstamo es:

b) Cuota de amortización y cuota de interés

La cuota de interés es

La cuota de amortización es

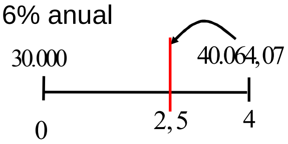
c) Reserva matemática y capital pendiente a los 2 años y medio de su concesión

La reserva matemática es:

$R_{2,5} =$ retrosp. / prosp.

Y el capital pendiente

d) Valor del préstamo a los 2 años y medio de su concesión si el tanto de interés del mercado es del 6% anual



e) Cantidad a abonar a los 2 años y medio de su concesión para cancelarlo anticipadamente bajo los siguientes supuestos:

e.1) Se mantiene el tanto de interés inicialmente pactado

La cantidad que deberá abonarse es igual a la reserva matemática en ese instante, es decir,

e.2) El tanto de interés aplicable es del 6% efectivo anual

La cantidad a abonar será el valor del préstamo en ese momento a dicho tipo de interés, es decir,

f) Tanto efectivo prestatario y TAE

Para calcular el tanto efectivo prestatario

Prestación efectiva para el prestatario	$\approx$	Contraprestación efectiva para el prestatario

$\downarrow$

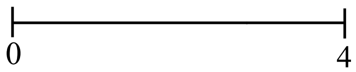
Tanto efectivo prestatario

Si valoramos en el origen de la operación:

3.1 Préstamo con amortización única de capital y pago único de intereses

Para determinar la TAE del préstamo, del total de gastos que paga el prestatario, únicamente se ha de considerar la comisión de apertura, es decir, 300€

O de forma equivalente:



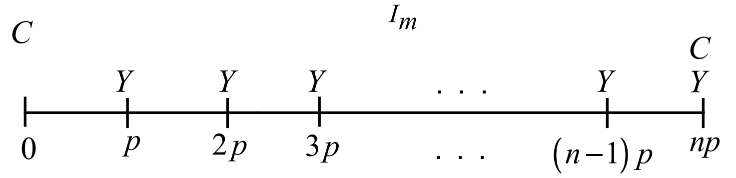
Si valoramos en el origen de la operación:

3.2. Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

Características

1. La amortización del nominal del préstamo se realiza mediante un único pago al final de la operación
2. Las cuotas de interés se hacen efectivas periódicamente, por vencido, según el tipo de interés del préstamo I_m

Equivalencia financiera $(C,0) \underset{\substack{\downarrow \\ I_m}}{\approx} \{(Y,rp),(C,np)\}_{r=1,2,\ldots n}$



$$C = Y \cdot a_{\overline{n|}I_m} + C \cdot (1+I_m)^{-n}$$

La cuota de interés periódica es $Y = C \cdot I_m$

La cuota de amortización que se hace efectiva al final del préstamo es

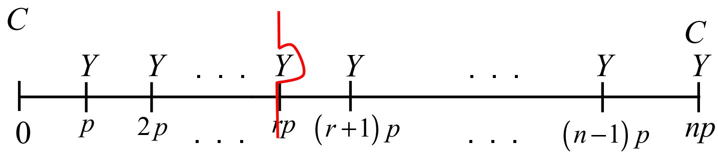
$$A = C$$

A continuación vamos a estudiar la reserva matemática, el capital pendiente y el total amortizado de este préstamo en 4 instantes concretos:

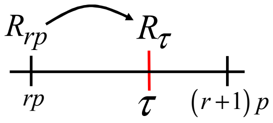
- En el origen del préstamo: 0
- Al final de cada uno de los periodos del préstamo: $\boldsymbol{rp}$
- Dentro de un periodo concreto del préstamo:
$$\tau \in \left(rp, (r+1)p\right)$$
- En el instante final del préstamo: $\boldsymbol{np}$

Reserva matemática

- En 0 : $R_0 = C$
- En $\boldsymbol{rp}$: $R_{rp} = \begin{cases} \text{retrosp.} & C \cdot (1+I_m)^r - Y \cdot s_{\overline{r}|I_m} = C \\ \text{prosp.} & Y \cdot a_{\overline{n-r}|I_m} + C \cdot (1+I_m)^{-(n-r)} = C \end{cases}$



- En τ :

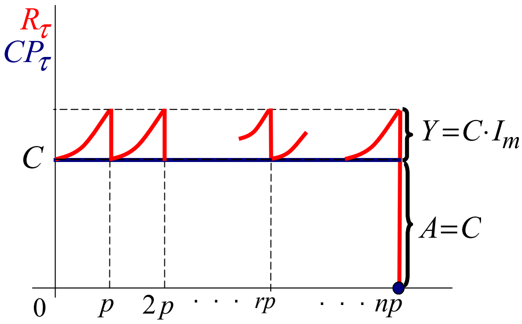


- En $\boldsymbol{np}$: $R_{np} = 0$

Capital pendiente

- En 0 : $CP_0 = C$
- En ***rp*** : $CP_r = C$
- En τ : $CP_\tau = CP_r = C$
- En ***np*** : $CP_n = 0$

Evolución de la reserva matemática y del capital pendiente:



La reserva matemática y el capital pendiente coinciden en el origen, en el final de la operación y al final de cada periodo (una vez efectuado el pago de la cuota de interés)

3. Préstamos con amortización única de capital
3.2 Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

Total amortizado

- En 0 : $M_0 = 0$
- En ***rp*** : $M_r = 0$
- En τ : $M_\tau = M_r = 0$
- En ***np*** : $M_n = C$

En resumen:

Instante	Reserva matemática		Capital pendiente	Total amortizado
0	C		C	0
rp	**Retrospectiva**	C	C	0
	Prospectiva	C		
τ	$R_{rp} \rightarrow R_\tau$ (rp, τ, $(r+1)p$)		C	0
np	0		0	C

3. Préstamos con amortización única de capital

3.2 Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

Además, también puede calcularse el **valor financiero**, para un determinado tipo de interés de mercado, en cualquier momento de la vida del préstamo

Para determinar el **tanto efectivo prestatario y TAE** procederemos de la forma descrita en el apartado 2

3. Préstamos con amortización única de capital

3.2 Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

Ejercicio: Sea un préstamo de nominal 5.000€ pactado al 12% anual pagadero trimestralmente con abono trimestral de intereses por vencido y amortización única de capital a los 2 años. Para su concesión el prestatario paga una comisión de apertura del 1,5% y 135€ de gastos notariales. Determinar:

a) Importe de la cuota de interés a pagar trimestralmente

b) Reserva matemática y capital pendiente a los 6 y 7 meses de concertado el préstamo

c) Cuadro de amortización

d) Valor del préstamo al año de concertado si el tanto de interés del mercado es del 10% efectivo anual

e) Plantear las ecuaciones que permiten determinar el tanto efectivo prestatario y la TAE

3. Préstamos con amortización única de capital

3.2 <u>Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses</u>

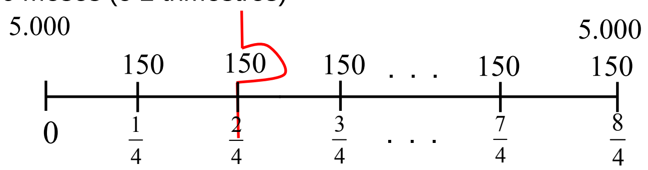
a) Importe de la cuota de interés a pagar trimestralmente

El tipo de interés del préstamo es

Por tanto, la cuota de interés es

b) Reserva matemática y capital pendiente a los 6 y 7 meses de concertado el préstamo

• A los 6 meses (o 2 trimestres)



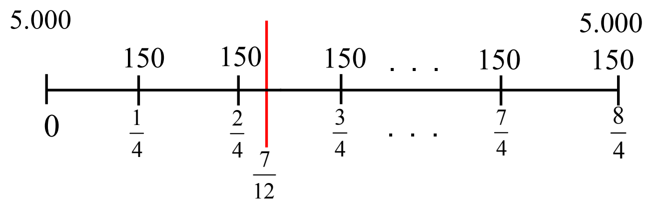
Este instante corresponde al final del segundo trimestre, por tanto, coinciden la reserva matemática y el capital pendiente y ambas son igual al nominal del préstamo:

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

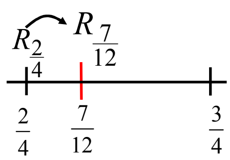
3. Préstamos con amortización única de capital

3.2 <u>Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses</u>

• A los 7 meses



Para calcular la reserva matemática a los 7 meses basta con tomar la reserva matemática a los 6 meses (o 2 trimestres) y capitalizarla 1 mes



El capital pendiente a los 7 meses es el nominal del préstamo

3. Préstamos con amortización única de capital

3.2 Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

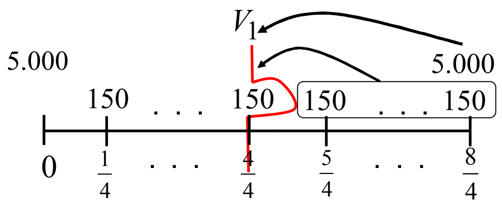
c) Cuadro de amortización

r	Término Amortizativo α_r	Cuota de Interes Y_r	Cuota de Amortización A_r	Total Amortizado M_r	Capital Pendiente CP_r
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

3. Préstamos con amortización única de capital

3.2 Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

d) Valor del préstamo al año de concertado si el tanto de interés del mercado es del 10% efectivo anual



El tipo de interés de valoración es $I_1 = 0{,}10$

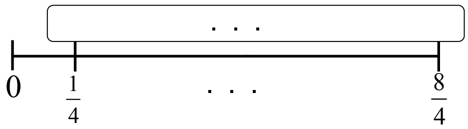
Luego

3. Préstamos con amortización única de capital

3.2 Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

e) Plantear las ecuaciones que permiten determinar el tanto efectivo prestatario y la TAE

Para calcular el **tanto efectivo prestatario** consideramos la prestación y contraprestación efectiva para éste



Como el pago de intereses tiene frecuencia trimestral, debe valorarse con un interés efectivo trimestral. Si valoramos en el origen:

3. Préstamos con amortización única de capital

3.2 Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

Para determinar la **TAE** del préstamo, del total de gastos que paga el prestatario, únicamente se ha de considerar la comisión de apertura, es decir, 75€

Como el pago de intereses tiene frecuencia trimestral, debe valorarse con un interés efectivo trimestral. Si valoramos en el origen:

A partir de esta expresión se obtiene un tipo de interés efectivo trimestral, I_4 . Calculando el efectivo anual equivalente se obtiene la TAE del préstamo

3. Préstamos con amortización única de capital

3.2 Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

Ejercicio: Por un préstamo de 50.000€ pactado al 6% de interés nominal pagadero mensualmente se está pagando una cuota mensual de 250€. Tras 20 años de pagar dichas cuotas, el prestatario considera que el capital pendiente ya debe ser pequeño o nulo y acude a la entidad con su boina y su vara habituales para liquidarla definitivamente

Aquel día se encuentra usted sólo en la agencia bancaria y los ordenadores no funcionan debido a una subida de tensión

Calcular el capital pendiente de su préstamo

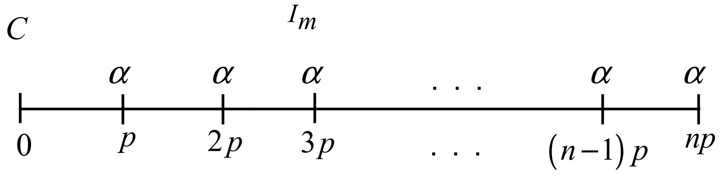
4. Préstamo con amortización periódica de capital: Préstamo francés

Características

1. La amortización del nominal del préstamo se realiza de forma periódica, por vencido
2. Las cuotas de interés se hacen efectivas periódicamente, por vencido, según el tipo de interés del préstamo I_m
3. Los términos amortizativos, que son la suma de la cuota de interés y la cuota de amortización, son constantes y vencidos

Equivalencia financiera

$$(C,0) \underset{\substack{\downarrow \\ I_m}}{\approx} \{(\alpha, rp)\}_{r=1,2,\ldots n}$$



Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

El término amortizativo del préstamo se obtendrá:

$$C = \alpha \cdot a_{\overline{n}|I_m} \quad \text{de donde:} \quad \alpha = \frac{C}{a_{\overline{n}|I_m}}$$

La cuota de interés que se hace efectiva al final de cada periodo es:

$$Y_r = CP_{r-1} \cdot I_m$$

La cuota de amortización que se hace efectiva al final de cada periodo es:

$$A_r = \alpha - Y_r$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

Ejercicio: Se concede un préstamo de 1.000€ a devolver en 3 años por el sistema francés, con términos amortizativos semestrales, al 8% nominal acumulable semestralmente. Construir el cuadro de amortización

r	α_r	Y_r	A_r	M_r	CP_r
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

En el cuadro de amortización anterior puede observarse que, a pesar de que el término amortizativo es constante, conforme va transcurriendo la operación **la cuota de interés disminuye** y la **cuota de amortización aumenta**. Esto es así porque la cuota de interés pagada a final de un periodo se calcula aplicando el tipo de interés del préstamo sobre el capital pendiente al inicio de dicho periodo. Puesto que la amortización se realiza de forma progresiva el capital pendiente va disminuyendo progresivamente periodo a periodo

A continuación vamos a estudiar la reserva matemática, el capital pendiente y el total amortizado de este préstamo en 4 instantes concretos:

- En el origen del préstamo: 0
- Al final de cada uno de los periodos del préstamo: $\boldsymbol{rp}$
- Dentro de un periodo concreto del préstamo:

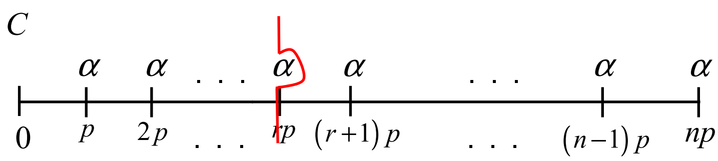
$$\tau \in \left(rp, (r+1)\,p\right)$$

- En el instante final del préstamo: $\boldsymbol{np}$

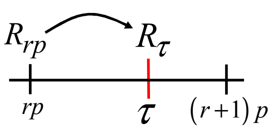
4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

Reserva matemática

- En 0: $R_0 = C$
- En $\boldsymbol{rp}$: $R_{rp} = \begin{cases} \text{retrosp.} & C \cdot (1+I_m)^r - \alpha \cdot s_{\overline{r|}I_m} \\ \text{prosp.} & \alpha \cdot a_{\overline{n-r|}I_m} \end{cases}$



- En τ:



- En $\boldsymbol{np}$: $R_{np} = 0$

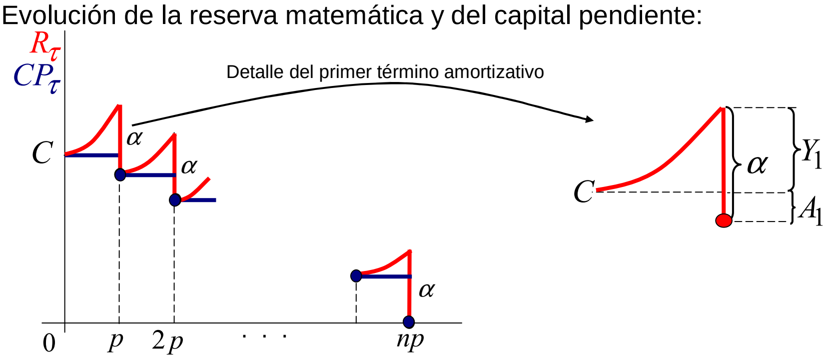
4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

Capital pendiente

- En 0 : $CP_0 = C$
- En ***rp*** : $CP_r = R_{rp}$
- En τ : $CP_\tau = CP_r$
- En ***np*** : $CP_n = 0$

La reserva matemática y el capital pendiente coinciden en el origen, en el final de la operación y al final de cada periodo (una vez efectuado el pago del término amortizativo)

Evolución de la reserva matemática y del capital pendiente:



Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

Total amortizado

- En 0 : $M_0 = 0$
- En ***rp*** : $M_r = C - CP_r = C - R_{rp}$
- En τ : $M_\tau = M_r$
- En ***np*** : $M_n = C$

En resumen:

Instante	Reserva matemática		Capital pendiente	Total amortizado
0	C		C	0
rp	**Retrospectiva**	$C \cdot (1+I_m)^r - \alpha \cdot s_{\overline{r}\rceil I_m}$	R_{rp}	$C - R_{rp}$
	Prospectiva	$\alpha \cdot a_{\overline{n-r}\rceil I_m}$		
τ	$R_{rp} \to R_\tau$; rp , τ , $(r+1)p$		R_{rp}	$C - R_{rp}$
np	0		0	C

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

Veamos que en un préstamo amortizable por el sistema francés las **cuotas de amortización** varían en progresión geométrica:

A partir del término amortizativo $\alpha = Y_r + A_r$ tenemos $A_r = \alpha - Y_r$

Además sabemos que $Y_r = CP_{r-1} \cdot I_m$ luego:

$$A_r = \alpha - CP_{r-1} \cdot I_m = \left\{ CP_r = R_{rp} = \alpha \cdot a_{\overline{n-r}|I_m} \right\} =$$

$$= \alpha - \alpha \cdot a_{\overline{n-(r-1)}|I_m} \cdot I_m = \alpha \cdot \left(1 - \frac{1-(1+I_m)^{-(n-r+1)}}{I_m} \cdot I_m \right) =$$

$$= \alpha \cdot (1+I_m)^{-n+r-1} = \alpha \cdot \frac{1}{(1+I_m)^n} \cdot (1+I_m)^{r-1} = A_1 \cdot (1+I_m)^{r-1}$$

por tanto, se trata de una progresión geométrica de primer término

$$A_1 = \frac{\alpha}{(1+I_m)^n} = \alpha - Y_1 = \alpha - C \cdot I_m \qquad \text{y razón} \quad 1+I_m$$

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

Ejemplo: En el cuadro de amortización del préstamo francés de nominal 1.000€ a devolver en 3 años, con términos amortizativos semestrales, al 8% nominal acumulable semestralmente se ha obtenido:

$$A_1 = 150,76 \quad A_2 = 156,79 \quad A_3 = 163,07 \quad A_4 = 169,59 \quad A_5 = 176,37 \quad A_6 = 183,42$$

Se cumple que: $\boxed{A_r = 150,76 \cdot 1,04^{r-1}}$

Así, por ejemplo: $A_3 = 150,76 \cdot 1,04^{3-1} = 163,07$

$$A_6 = 150,76 \cdot 1,04^{6-1} = 183,42$$

En un préstamo amortizable por el sistema francés, también puede calcularse el **valor financiero**, para un determinado tipo de interés de mercado, en cualquier momento de la vida del préstamo

Para determinar el **tanto efectivo prestatario y TAE** procederemos de la forma descrita en el apartado 2

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

Ejercicio: Sea un préstamo francés amortizable mensualmente, de nominal 125.000€, duración 15 años, pactado al 6% nominal acumulable mensualmente. El prestatario paga una comisión de apertura del 2% sobre el nominal y unos gastos iniciales de notario y registro de 550€. Se pide:

a) Calcular el término amortizativo

b) Reserva matemática y capital pendiente a los 6 años y a los 6 años y 15 días de concertado el préstamo

c) Desglose del décimo término amortizativo

d) Calcular el capital pendiente de amortizar y el total amortizado a los 10 años de su concesión tras el pago del término amortizativo correspondiente

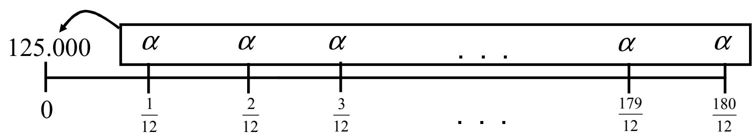
e) Plantear las ecuaciones que permiten determinar el tanto efectivo prestatario y la TAE

f) Si el tanto de interés del mercado es del 10% efectivo anual, calcular el valor financiero del préstamo a los 10 años de haberse concedido, tras el pago del término amortizativo correspondiente

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

a) Calcular el término amortizativo



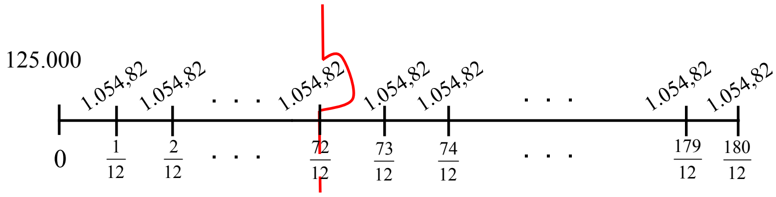
El tipo de interés del préstamo es:

Por tanto, el término amortizativo se obtendrá de:

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

b) Reserva matemática y capital pendiente a los 6 años y a los 6 años y 15 días de concertado el préstamo

- A los 6 años (o 72 meses)



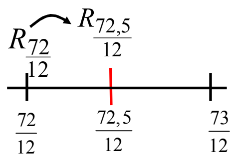
$$R_{\frac{72}{12}} = \begin{cases} \text{retrosp.} \\ \text{prosp.} \end{cases}$$

Este instante coincide con el final de un periodo, por tanto, la reserva matemática y el capital pendiente son iguales

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

- A los 6 años y 15 días (o 72,5 meses)

Para calcular la reserva matemática a los 6 años y 15 días basta con tomar la reserva matemática a los 6 años (o 72 meses) y capitalizarla 15 días (medio mes)



El capital pendiente a los 72,5 meses coincide con el capital pendiente a los 72 meses

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

c) Desglose del décimo término amortizativo

Sabemos que $\alpha = Y_{10} + A_{10}$

$\alpha = 1.054,82$

Además antes se ha visto que $A_r = A_1 \cdot (1 + I_m)^{r-1}$

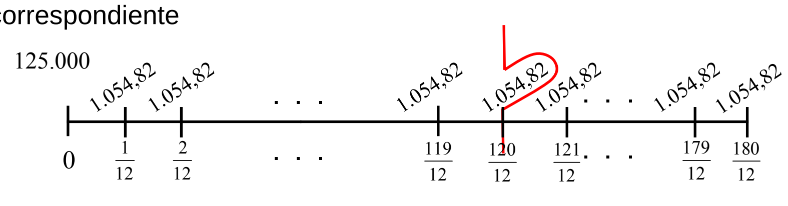
$$A_1 = \alpha - Y_1 = \alpha - C \cdot I_m$$

En este caso

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

d) Calcular el capital pendiente de amortizar y el total amortizado a los 10 años de su concesión tras el pago del término amortizativo correspondiente

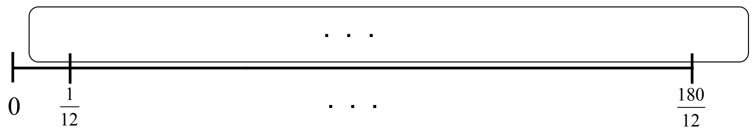


A los 10 años de la concesión del préstamo han transcurrido 120 meses y aún quedan 5 años de plazo. Por tanto,

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

e) Plantear las ecuaciones que permiten determinar el tanto efectivo prestatario y la TAE

Para calcular el **tanto efectivo prestatario** consideramos la prestación y contraprestación efectiva para éste



Como el pago del término amortizativo tiene frecuencia mensual, debe valorarse con un interés efectivo mensual. Si valoramos en el origen:

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

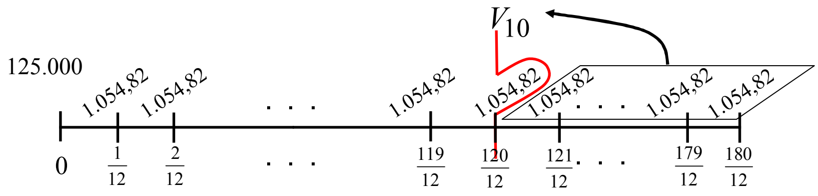
Para determinar la **TAE** del préstamo, del total de gastos que paga el prestatario, únicamente se ha de considerar la comisión de apertura, es decir, 2.500€

Como el término amortizativo tiene frecuencia mensual, debe valorarse con un interés efectivo mensual. Valorando en el origen:

A partir de esta expresión se obtiene un tipo de interés efectivo mensual, I_{12} . Calculando el efectivo anual equivalente se obtiene la TAE del préstamo

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

f) Si el tanto de interés del mercado es del 10% efectivo anual, calcular el valor financiero del préstamo a los 10 años de haberse concedido, tras el pago del término amortizativo correspondiente



El tipo de interés de valoración es

$$I_1 = 0{,}10$$

Luego

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

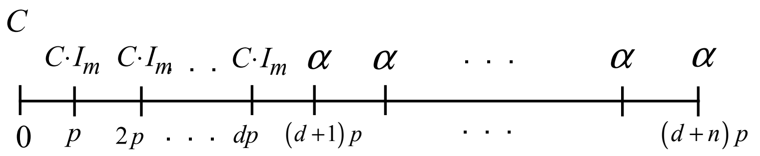
El préstamo francés puede pactarse con:

- **Carencia parcial:** Existe un plazo de d periodos durante el cual solo se abona periódicamente la cuota de interés. Finalizado dicho plazo comienzan a pagarse n términos amortizativos constantes compresivos de capital e intereses

- **Carencia total:** Existe un plazo de d periodos durante el cual no se se abona ninguna cantidad (ni cuota de interés ni cuota de amortización). Finalizado dicho plazo comienzan a pagarse n términos amortizativos constantes compresivos de capital e intereses

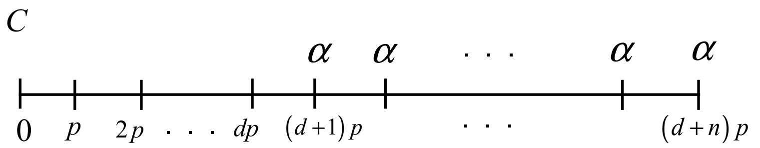
4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

- **<u>Carencia parcial:</u>**



$$C = C \cdot I_m \cdot a_{\overline{d|}I_m} + \alpha \cdot a_{\overline{n|}I_m} \cdot (1+I_m)^{-d}$$

- **<u>Carencia total:</u>**



$C = \alpha \cdot a_{\overline{n|}I_m} \cdot (1+I_m)^{-d}$ o bien: $C \cdot (1+I_m)^{d} = \alpha \cdot a_{\overline{n|}I_m}$

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

Ejercicio: Sea un préstamo de nominal 10.000€, amortizable mediante términos amortizativos semestrales, constantes y vencidos. La duración del préstamo es de 10 años siendo los 2 primeros de carencia parcial, en los que sólo se abonan los intereses por semestres vencidos. Si el tanto de interés pactado es del 5% semestral, calcular:

a) Importe de la cuota semestral de interés a pagar durante el plazo de carencia

b) Importe del término amortizativo

Considerando que el tipo de interés del préstamo es $I_2 = 0{,}05$, el importe de la cuota semestral de interés de los 2 primeros años es:

Como el capital pendiente al final del plazo de carencia es de 10.000€, el término amortizativo semestral para el resto del plazo de la operación será:

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

Ejercicio: Sea un préstamo de nominal 10.000 € a amortizar mediante el pago de 60 términos amortizativos mensuales, constantes y vencidos, tras un plazo de 2 años de carencia total. Tanto de interés: 8% efectivo anual. Calcular el importe del término amortizativo

El tipo de interés del préstamo es:

Por lo que el término amortizativo se obtendrá de:

O de forma equivalente:

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

5. Modificación de condiciones

Durante el plazo de vigencia de un préstamo es posible que se produzcan algunas modificaciones respecto a las condiciones inicialmente pactadas. Estas modificaciones pueden ser, entre otras:

- Variación del importe del término amortizativo
- Variación del plazo de la operación
- Amortización o cancelación parcial del capital pendiente
- Variación del tipo de interés
- Cancelación total anticipada del préstamo

En todas estas situaciones deberá considerarse cuál es el capital pendiente de amortizar del préstamo y, en su caso, recalcular las magnitudes correspondientes

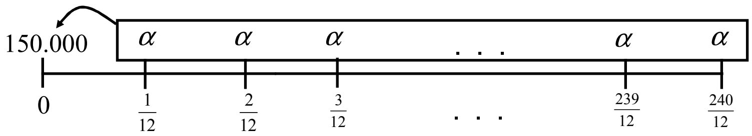
Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejercicio: Sea un préstamo francés amortizable mensualmente, de nominal 150.000€, duración 20 años, pactado al 5,64% nominal acumulable mensualmente. Se pide:

a) Calcular el término amortizativo

b) A los 5 años de pactado el préstamo, una vez realizado el pago del término amortizativo correspondiente, prestamista y prestatario acuerdan que a partir de ese momento el término amortizativo pase a ser de 1.500€, ¿cuál será el nuevo plazo de la operación?

a)



El tipo de interés del préstamo es:

Por tanto, el término amortizativo se obtendrá de:

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

b) A los 5 años de pactado el préstamo, una vez realizado el pago del término amortizativo correspondiente, prestamista y prestatario acuerdan que a partir de ese momento el término amortizativo pase a ser de 1.500€, ¿cuál será el nuevo plazo de la operación?

En primer lugar calculamos el capital pendiente al cabo de 5 años (o 60 meses):

El nuevo término amortizativo es de 1.500€. Se trata de determinar durante cuántos meses debe pagarse este importe para amortizar el capital pendiente, es decir:

Ejercicio: En un préstamo francés amortizable mensualmente, de nominal 150.000€, duración 20 años, pactado al 5,64% nominal acumulable mensualmente, se ha visto que el término amortizativo es de 1.043,73€. A los 5 años de pactado el préstamo, una vez realizado el pago del término amortizativo correspondiente, prestamista y prestatario pactan reducir el plazo de la operación en 6 años, ¿cuál será el importe del nuevo término amortizativo?

Sabemos, del ejercicio anterior, que el capital pendiente al cabo de 5 años (o 60 meses) es:

Se trata de determinar qué importe constante debe pagarse mensualmente, durante los 9 años restantes, para amortizar el capital pendiente, es decir:

Ejercicio: En un préstamo francés amortizable mensualmente, de nominal 150.000€, duración 20 años, pactado al 5,64% nominal acumulable mensualmente, se ha visto que el término amortizativo es de 1.043,73€. A los 5 años de pactado el préstamo, una vez realizado el pago del término amortizativo correspondiente, el prestatario decide realizar una amortización parcial de 25.000€. Se pide:

a) Determinar el importe del nuevo término amortizativo si se mantiene el resto de las condiciones del préstamo

b) Obtener el nuevo plazo de la operación si se mantienen el resto de las condiciones del préstamo

a) Sabemos, del ejercicio anterior, que el capital pendiente al cabo de 5 años (o 60 meses) es:

Se trata de determinar el nuevo término amortizativo mensual constante que debe pagarse durante los 15 años restantes, para amortizar 101.584,61€, es decir:

b) Obtener el nuevo plazo de la operación si se mantienen el resto de las condiciones del préstamo

Ejercicio: En un préstamo francés amortizable mensualmente, de nominal 150.000€, duración 20 años, pactado al 5,64% nominal acumulable mensualmente, se ha visto que el término amortizativo es de 1.043,73€. A los 5 años de pactado el préstamo, una vez realizado el pago del término amortizativo correspondiente, se produce una revisión del tipo de interés pasando a ser el Euribor más un diferencial del 2,25%. Se pide:

a) Determinar el importe del nuevo término amortizativo si en el momento de la revisión el índice Euribor es del 0,55% y si se mantienen el resto de las condiciones del préstamo

b) Obtener el nuevo plazo de la operación si se mantienen el resto de las condiciones del préstamo

a) El nuevo tipo de interés es:

Sabemos, por el ejercicio anterior, que el capital pendiente al cabo de 5 años (o 60 meses) es:

Se trata de determinar el nuevo término amortizativo mensual constante que debe pagarse durante los 15 años restantes, para amortizar este capital pendiente considerando el nuevo tipo de interés:

b) Obtener el nuevo plazo de la operación si se mantienen el resto de las condiciones del préstamo

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Bloque temático 2.
Operaciones financieras

1. Préstamos

2. Empréstitos

1. Definición, magnitudes y clasificación
2. Empréstitos cupón cero
3. Empréstitos con cupón periódico

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

1.1 Definición. Conceptos previos

¿Quién puede necesitar muchísimo dinero?

El Tesoro Público (Estado), las Comunidades Autónomas, grandes empresas, etc.

¿Qué hacen estas entidades para obtener ese dinero?

Emitir un empréstito, es decir, un préstamo en el que el sujeto activo está formado por un conjunto de prestamistas y el sujeto pasivo es un único prestatario

¿Cómo se materializa un empréstito?

Emitiendo títulos con el mismo valor nominal, de tal forma que el producto del número de títulos por el valor efectivo cobrado por cada uno de ellos cubra las necesidades monetarias del prestatario

Estos títulos se conocen genéricamente en el mercado con el nombre de activos de renta fija, pero concretamente reciben distintas denominaciones como pagarés, letras, bonos, obligaciones, …

Emisor, sujeto pasivo o prestatario: Persona que recibe el dinero en el momento de la emisión del empréstito

Suscriptor, sujeto activo o prestamista: Cada una de las personas que entrega el dinero al emisor en el momento de la emisión del empréstito

Título valor, bono, obligación, letra, cédula, pagaré, etc.: Documento que el emisor entrega al suscriptor como reconocimiento de la deuda contraída. Todos los títulos de una misma emisión tienen el mismo **valor nominal** C

Tras la emisión, estos títulos se pueden comprar y vender a los precios que coticen en los mercados organizados. Para que los títulos de cada emisión puedan ser identificados de forma inequívoca en cualquier mercado, se le asigna una referencia alfanumérica de 12 caracteres denominada Código ISIN *(International Securities Identification Number)*

Por tanto, un empréstito es un préstamo en que la figura del sujeto activo está formada por un conjunto de prestamistas, denominados **suscriptores**, y en que el sujeto pasivo es un único prestatario que recibe el nombre de **emisor**

Obligacionista: Persona que posee un titulo del empréstito. Como un título puede haber sido comprado con posterioridad al momento de su emisión, no todo obligacionista tiene porque ser suscriptor

Cupón del empréstito: Es el importe que en concepto de intereses debe pagar el emisor a los obligacionistas. Unas veces se expresa en unidades monetarias y otras veces en función de un tipo de interés (**tipo de interés de la emisión**)

1.2 Magnitudes de un empréstito

Nominal de un título: C
Número de títulos emitidos: N
Nominal del empréstito: S, donde $S = C \cdot N$
Prima de emisión de un título (P_e) es el valor que se suma o resta al nominal para obtener el **precio de emisión** de un título (C_e): $C_e = C \pm P_e$

- Si $C_e > C$ se habla de emisión sobre la par
- Si $C_e = C$ se habla de emisión a la par
- Si $C_e < C$ se habla de emisión bajo la par

Fecha o momento de emisión o liquidación del empréstito: 0
Efectivo del empréstito: S_e, donde $S_e = C_e \cdot N$
Prima de amortización de un título (P_a) es el valor que se suma o resta al nominal para obtener el **precio de amortización** de un título (C_a):

$$C_a = C \pm P_a$$

- Si $C_a > C$ se habla de amortización sobre la par
- Si $C_a = C$ se habla de amortización a la par
- Si $C_a < C$ se habla de amortización bajo la par

Fecha o momento de amortización del empréstito: T'
Amortización del empréstito: S_a, donde $S_a = C_a \cdot N$

Al intervenir tantas personas diferentes en un empréstito, y cada uno de ellos tener una perspectiva diferente de la operación en cuanto a los cobros y pagos realizados, es lógico que aparezcan diferentes tipos de interés:

Tanto emisor: Es el tipo de interés al que resulta la operación al sujeto pasivo o emisor del empréstito teniendo en cuenta exclusivamente los capitales de la prestación y contraprestación asociados a él

Tanto suscriptor: Es el tipo de interés al que resultaría la operación a un suscriptor del empréstito en el supuesto de que:

- Mantenga los títulos valores hasta su vencimiento
- Todos los suscriptores compren y amorticen sus títulos en las mismas condiciones

Los dos tantos anteriores son únicos para cada empréstito y pueden obtenerse en el momento de su emisión

Tanto obligacionista: Es el tipo de interés al que resulta la operación a cada obligacionista concreto en función de los capitales de la prestación y contraprestación asociados a él desde el momento de adquirir los títulos valores hasta el momento de venderlos

Luego, este tanto puede ser diferente para cada obligacionista del empréstito

Tipo de interés anual publicado del empréstito: Los títulos de un empréstito cotizan continuamente en un mercado organizado. Al final de cada sesión se calcula y publica el interés anual al que resultaría la operación a un obligacionista que adquiriese un título valor al precio de mercado, cobrase todos los cupones pendientes y lo mantuviese hasta el vencimiento sin tener en cuenta ningún tipo de gastos

Por tanto, este tipo de interés anual suele cambiar cada día, y en el mercado se denomina **TIR, rendimiento interno medio, tipo de interés medio, …**

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

1. Definición, magnitudes y clasificación
1.2 Magnitudes de un empréstito

V_{τ} **: Valor de un título en el instante** τ

Puesto que las condiciones de los mercados financieros cambian continuamente, sobre todo en lo referente a los tipos de interés, puede que al emisor le interese valorar el empréstito en un momento determinado, o bien el obligacionista quiera saber por cuánto podría vender sus títulos valores en caso de necesitar liquidez

Para resolver esto se calcula el **valor de un título** en un instante τ como el valor actual de todos los cobros futuros a que da derecho el título a partir de ese instante y hasta su vencimiento, al tipo de interés vigente en el mercado en ese momento

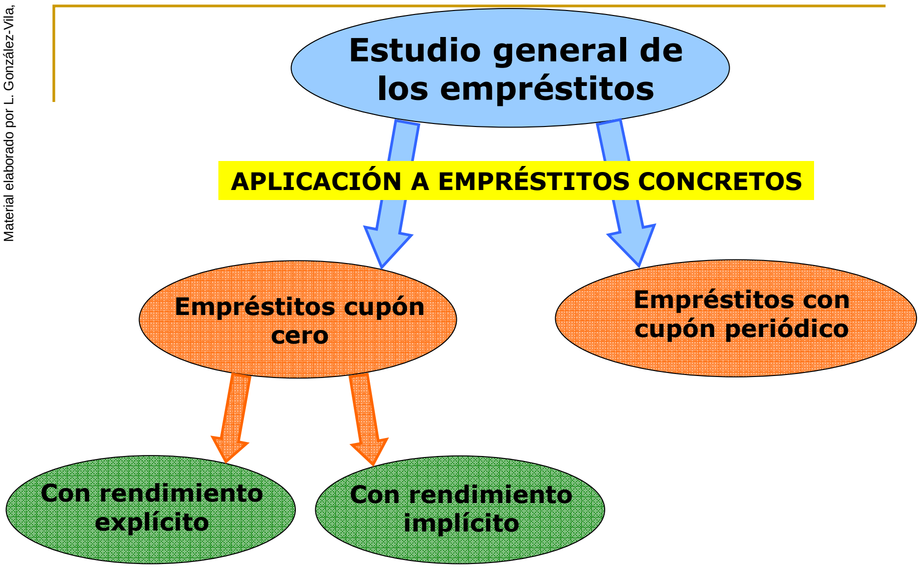
1.3 Clasificación de los empréstitos

➢ **Según el número de cupones del empréstito**:

- **Empréstitos cupón cero**: Son aquéllos que no pagan cupones periódicos y, por tanto, el emisor no paga nada hasta el vencimiento del empréstito. Pueden ser de dos tipos:
  - ❖ **Empréstitos de rendimiento explícito**: Son aquéllos en que el emisor paga al vencimiento el nominal del empréstito más los intereses generados (cupón del empréstito)
  - ❖ **Empréstitos de rendimiento implícito**: Son aquéllos en que el emisor sólo paga al vencimiento el valor nominal y en la fecha de emisión cobra un precio inferior a éste. Por esta razón también se les conoce como empréstitos emitidos al descuento
- **Empréstitos con cupón periódico**: Son aquéllos en que el emisor paga periódicamente y por vencido los cupones del empréstito hasta el vencimiento, momento en que también paga el precio de amortización

➢ **Según la titularidad del emisor del empréstito**:

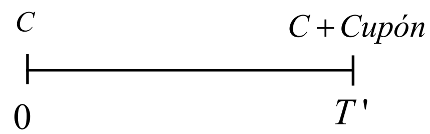
- **Empréstitos de deuda pública**: Son aquéllos en que el emisor es un ente público como por ejemplo la Generalitat de Catalunya, el Tesoro Público, etc. Los títulos de estos empréstitos se suelen negociar en el Mercado de Deuda Pública
- **Empréstitos de deuda privada**: Son aquéllos en que el emisor es una empresa privada como por ejemplo un Banco (BBVA), una empresa de energía (Iberdrola), una empresa de comunicaciones (Telefónica), etc. Los títulos de estos empréstitos se suelen negociar en el Mercado de Renta Fija Privada (AIAF)



2. 1 Empréstitos de rendimiento explícito

Características

1. El precio de emisión del empréstito es, generalmente, su valor nominal
2. El empréstito se amortiza de una sola vez a su vencimiento por su valor nominal
3. La cuantía total que el emisor abona al obligacionista al vencimiento, por cada título, es la suma del valor nominal más el cupón
4. El cupón se abona de una sola vez al vencimiento y se calcula, generalmente, aplicando el régimen financiero de interés compuesto al valor nominal C según el interés efectivo de la emisión, conocido de forma explícita, I_m



La cuantía total que paga el emisor a los obligacionistas al vencimiento del empréstito por cada título emitido es:

$$C' = C \cdot \left(1 + I_m\right)^{m \cdot t}$$

donde t es el número de años del empréstito y el cupón es $C'-C$

En el caso de que para este tipo de empréstitos se pida:

- El tanto efectivo emisor
- El tanto efectivo suscriptor
- El tanto efectivo de un determinado obligacionista
- El tipo de interés efectivo anual publicado en un momento de tiempo concreto

bastará con considerar la prestación y la contraprestación, para cada caso, plantear la ecuación de equilibrio en régimen financiero de interés compuesto, y despejar

Además, también puede calcularse el **valor financiero**, para un determinado tipo de interés de mercado, en cualquier momento de la vida del empréstito

Ejercicio: Hace 2 años una empresa emitió un empréstito cupón cero de rendimiento explícito de las siguientes características:

- Nominal del empréstito: 800 millones de euros
- Nominal de cada título: 200€
- Gastos de emisión del empréstito a cargo de la empresa: 0,42% del nominal
- El empréstito se emite a la par libre de gastos para el suscriptor
- El empréstito se amortiza a los 3 años de su emisión
- El empréstito paga al vencimiento un interés efectivo anual del 5%

Se pide:

a) Número de títulos emitidos

b) Indicar el importe total que deberá pagar la empresa al vencimiento del empréstito indicando el importe del cupón y el precio de amortización

c) Interés efectivo anual emisor

d) Interés efectivo anual suscriptor

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

a) Número de títulos emitidos

b) El importe total que deberá pagar la empresa al vencimiento del empréstito desglosado en importe del cupón y precio de amortización será:

	Por cada título	Por todo el empréstito
Nominal		
Precio amortización		
Cupón		
Total a pagar:		

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

c) Interés efectivo anual emisor

PRESTACIÓN (Cobros) del emisor:

Efectivo del empréstito:

CONTRAPRESTRACIÓN (Pagos) del emisor:

Gastos de emisión:

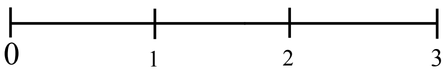
Cupón (véase apdo. b):

Amortización del empréstito (véase apdo. b):

2. Empréstitos cupón cero

2.1 Empréstitos de rendimiento explícito

Gráficamente, la ubicación de la prestación y contraprestación para calcular el **tanto efectivo anual del emisor** sería:



Luego, el **tanto efectivo anual del emisor** se obtendrá al despejar de la siguiente ecuación de equilibrio:

2. Empréstitos cupón cero

2.1 Empréstitos de rendimiento explícito

d) Interés efectivo anual suscriptor: Cálculos para el suscriptor de 1 título

PRESTACIÓN (Pagos) del suscriptor:

Precio de emisión:

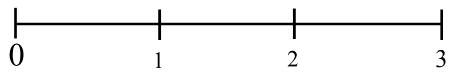
Comisión de suscripción:

CONTRAPRESTRACIÓN (Cobros) del suscriptor:

Cupón (véase apdo. b):

Precio de amortización (véase apdo. b) :

Gráficamente, la ubicación de la prestación y contraprestación para calcular el **tanto efectivo anual del suscriptor** sería:



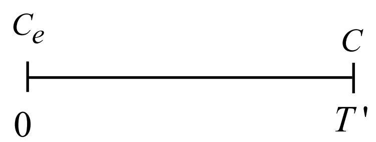
Luego, el **tanto efectivo anual del suscriptor** se obtendrá al despejar de la siguiente ecuación de equilibrio:

2. 2 Empréstitos de rendimiento implícito

Características

1. El empréstito se amortiza de una sola vez a su vencimiento por su valor nominal
2. El precio de emisión del empréstito es inferior a su nominal
3. En el momento de la emisión, cada suscriptor paga por cada título un precio inferior (C_e) a su nominal (C). La diferencia entre este precio y el valor nominal permite determinar el rendimiento que, de forma implícita, ofrece el empréstito

   Por esta razón, este tipo de empréstitos es frecuente encontrarlos con la denominación de **emitidos al descuento**



Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2. Empréstitos cupón cero

2.2 Empréstitos de rendimiento implícito

Para calcular los siguientes tantos:

- El tanto emisor
- El tanto suscriptor
- El tanto obligacionista
- Tipo de interés anual publicado del empréstito

se ha de considerar el plazo t de la operación:

- Si t es inferior a un año se obtendrá, cada uno de ellos, valorando la prestación y la contraprestación en régimen financiero de interés simple vencido
- Si t es superior a un año se obtendrá, cada uno de ellos, valorando la prestación y la contraprestación en régimen financiero de interés compuesto

Estos empréstitos se materializan, entre otros, en los siguientes títulos valores:

- Letras del Tesoro para el caso de empréstitos de deuda pública
- Pagarés de empresa o para el caso de empréstitos de deuda privada

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2. Empréstitos cupón cero

2.2 Empréstitos de rendimiento implícito

Características principales de las **Letras del Tesoro**:

- El valor nominal siempre es de 1.000€
- En la actualidad existen emisiones con vencimientos a 3, 6, 9, 12 y 18 meses (aproximadamente)
- El precio de emisión de las Letras se establece en el mercado primario mediante subasta
- Para el cálculo del plazo de la operación t se utiliza el criterio Actual/360
- Conocido el precio de emisión, el rendimiento implícito se obtiene aplicando el régimen financiero de interés simple vencido para plazos inferiores a 1 año o el régimen financiero de interés compuesto para plazos superiores a 1 año

Mientras que las condiciones de emisión de las Letras del Tesoro pueden consultarse en la página web www.tesoro.es, una vez se encuentran circulando por el mercado secundario (Mercado de Deuda Pública) la información de un día en concreto se encuentra en la página web www.bde.es

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejercicio: Calcular el precio medio de adquisición de la siguiente Letra del Tesoro a 12 meses el día de su liquidación en el mercado primario

Resultados de la última subasta de Letras a 12 meses

Fecha de la subasta: 10/12/2013

Fecha de vencimiento: 12/12/2014

Importe en millones de Euros

LETRAS A 12 MESES	
Fecha de liquidación	13/12/2013
Nominal solicitado	7.529,43
Nominal adjudicado	2.849,21
Nominal adjudicado (2ª vuelta)	44,93
Precio mínimo aceptado	99,094
Tipo de interés marginal	0,905
?? → Precio medio	
Tipo de interés medio	0,883
Adjudicado al marginal	150,00
1er precio no admitido	99,093
Volumen peticiones a ese precio	150,00
Peticiones no competitivas	167,20
Efectivo solicitado	7.457,13
Efectivo adjudicado	2.823,79

C $\qquad i = 0{,}883\%$ $\qquad$ **1.000**

13-Dic-2013 ¿Número de días? **12-Dic-2014**

364 días

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Explicar la siguiente información extraída de la web www.bde.es:

BANCO DE ESPAÑA Eurosistema

Boletín del Mercado de Deuda Pública IBERCLEAR

Año 26 Número 6430 12 de diciembre de 2013

Importes en millones de euros y precios en tanto por ciento

I. OPERACIONES DE COMPRAVENTA SIMPLE AL CONTADO

1. DEUDA DEL ESTADO

E M I S I O N	NUMERO OPERACS	IMPORTE CONTRATADO	PRECIO (EX-CUPON) MEDIO	MAXIMO	MINIMO	RENDTO. INTERNO MEDIO	ANTERIOR PRECIO MEDIO (FECHA)
ES00000121H0 B EST 4.25 31.01.14	5	55,07	100,437	100,450	100,415	0,68	100,500 (10/12/2013)
ES00000123D5 B EST 3.40 30.04.14	2	0,08	100,990	101,004	100,975	0,68	101,068 (10/12/2013)
....							
ES0L01409199 L EST CUP-0 19.09.14	3	47,69	99,376	99,390	99,350	0,81	99,360 (10/12/2013)
ES0L01411211 L EST CUP-0 21.11.14	1	20,00	99,204	99,204	99,204	0,85	99,224 (11/12/2013)
ES0L01412128 L EST CUP-0 12.12.14	3	101,02	99,091	99,113	99,086	0,92	99,137 (11/12/2013)

Código ISIN

Letras Tesoro cupón cero

Fecha Vencimiento

Ejercicio: A partir de la información recogida en la diapositiva anterior, a fecha 12 de diciembre de 2013 del Boletín del Banco de España, comprobar el rendimiento interno medio de la emisión de Letras del Tesoro, cuyo código ISIN de referencia es ES0L01411211, sabiendo que desde la fecha de liquidación (que será el 16 de diciembre de 2013) hasta su vencimiento hay 340 días

Es lo que hay que pagar por cada Letra del Tesoro → **992,04€**

Todas las Letras del Tesoro tienen este valor nominal → **1.000€**

99,204	100

→ **Lo que se publica**

16-Dic-13	**21-Nov-14**
Fecha Liquidación	**Fecha Vencimiento**

Base $\frac{\text{Act}}{360}$ ⇒ 0

Características de los **Pagarés de empresa**:

- Pueden tener cualquier valor nominal (aunque suele ser múltiplo de 1.000€)
- Pueden tener cualquier vencimiento (aunque lo más habitual es que sea inferior a 2 años)
- Suelen ofrecer un rendimiento superior al que ofrecen las Letras del Tesoro debido a los riesgos de crédito y liquidez asociados a la empresa emisora
- Para el cálculo del plazo de la operación t se utiliza normalmente el criterio Actual/365
- El rendimiento implícito se obtiene aplicando el régimen financiero de interés simple vencido para plazos inferiores a 1 año o el régimen financiero de interés compuesto para plazos superiores a 1 año

Las condiciones de emisión de los Pagarés de empresa pueden consultarse en la página web www.cnmv.es, pero una vez se encuentran circulando por el Mercado secundario de Renta Fija Privada (AIAF) la información se encuentra en la web www.aiaf.es

Ejercicio: Los datos más significativos de una emisión de Pagarés de empresa emitidos por TRONIC S.A. son:

- Nominal del empréstito: 450.000.000€
- Nominal del título: 10.000€
- Precio al que se ha emitido un título: 98,05%
- Fecha emisión y desembolso: 2-Marzo-2014
- Fecha amortización: 11-Octubre-2014

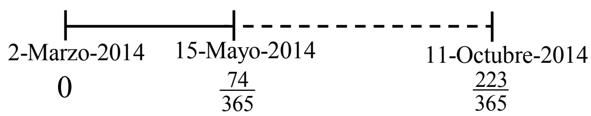
Se pide:

a) Número de títulos emitidos en el empréstito

b) Indicar el importe efectivo que recibirá TRONIC de los suscriptores

	Por cada título	Por todo el empréstito
Importe efectivo:		

c) Interés anual del obligacionista que adquiere 10 títulos en el momento de la emisión y los vende el 15-Mayo-2014 al 98,74% cada uno pagando en ese momento unos gastos del 0,1% sobre el valor de venta



Por ser el plazo de la operación inferior a un año, el **tanto anual del obligacionista** se obtendrá al despejar de la siguiente ecuación de equilibrio valorada en el momento de la venta en régimen financiero de interés simple vencido:

d) Tipo de interés anual publicado del empréstito en el momento de la emisión

Este tipo de interés es el que obtendría un obligacionista que adquiriese en el momento de la emisión un título, y lo mantuviese hasta el vencimiento sin tener en cuenta ningún tipo de gastos

Gráficamente, la ubicación de la prestación y contraprestación para calcular el **tipo de interés anual publicado el 2-Marzo-2014** sería:

Por ser el plazo de la operación inferior a un año resolveremos la ecuación planteada en régimen financiero de interés simple vencido:

e) Tipo de interés anual publicado del empréstito a fecha 15-Mayo-2014

Este tipo de interés es el que obtendría un obligacionista que adquiriese el 15 de Mayo de 2014 al precio de mercado (ver apdo. c) un título, y lo mantuviese hasta el vencimiento sin tener en cuenta ningún tipo de gastos

Por ser el plazo de la operación inferior a un año, el **tipo de interés anual publicado el 15 de Mayo de 2014** se obtendrá al despejar de la siguiente ecuación de equilibrio en régimen financiero de interés simple vencido:

2. Empréstitos cupón cero

2.2 Empréstitos de rendimiento implícito

Ejercicio: Un título de un empréstito cupón cero de rendimiento implícito tiene hoy un precio de compra de 973,75€. Sabiendo que el nominal de dicho título es de 1.000€ y que vence de aquí a 465 días, se pide calcular el interés anual del empréstito publicado hoy en los dos casos siguientes:

a) El título es una Letra del Tesoro

Por ser el plazo de la operación superior a un año, el **tipo de interés anual publicado** se obtendrá al despejar de la siguiente ecuación de equilibrio valorada en régimen financiero de interés compuesto:

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2. Empréstitos cupón cero

2.2 Empréstitos de rendimiento implícito

b) El título es un Pagaré de Empresa

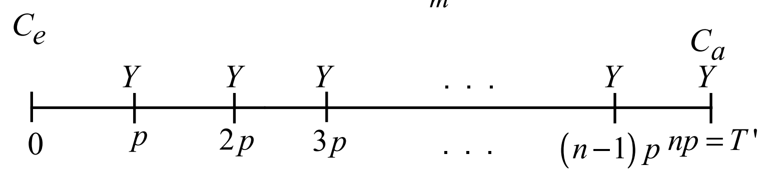
Por ser el plazo de la operación superior a un año, el **tipo de interés anual publicado** se obtendrá al despejar de la siguiente ecuación de equilibrio valorada en régimen financiero de interés compuesto:

3 Empréstitos con cupón periódico

Características

1. El precio de emisión del empréstito puede coincidir o no con su valor nominal
2. El empréstito se amortiza de una sola vez a su vencimiento. El precio de amortización puede coincidir o no con su valor nominal
3. El emisor abona al obligacionista por vencido y con una periodicidad p, por cada título, un cupón Y calculado sobre el valor nominal C según el interés efectivo de la emisión, I_m

Gráficamente, considerando que $p = \frac{1}{m}$:



donde: $Y = C \cdot I_m$

En este tipo de empréstitos, para obtener:

- El tanto efectivo emisor
- El tanto efectivo suscriptor
- El tanto efectivo de un determinado obligacionista
- El tipo de interés publicado del empréstito

bastará con considerar la prestación y la contraprestación, para cada caso, plantear la ecuación de equilibrio en régimen financiero de interés compuesto, y obtenerlo (normalmente con ayuda de ordenador)

Además, también puede calcularse el **valor financiero**, para un determinado tipo de interés de mercado, en cualquier momento de la vida del empréstito

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejercicio: La empresa FONSA emitió hace 4 años y medio un empréstito con títulos de renta fija privada con las siguientes características:

- Nominal de cada título (Obligación): 200€
- Número de títulos emitidos: 40 millones
- Gastos de emisión del empréstito para FONSA: 0,32% del nominal
- El empréstito se emitió bajo la par con una prima de emisión del 3%
- Fecha de amortización del empréstito: A los 8 años de su emisión
- El empréstito tiene una prima de amortización sobre la par de 2€ por cada Obligación
- Cupón periódico semestral
- Tipo de interés nominal de la emisión: 5,40%
- Los suscriptores de títulos de este empréstito pagarán al intermediario financiero una comisión del 0,2% del efectivo de los títulos adquiridos
- Al vencimiento, no existen gastos de amortización del empréstito ni para el emisor ni para los obligacionistas

Con toda la información anterior, se pide:

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

a) Importe nominal del empréstito y efectivo recibido por FONSA:

Nominal del empréstito:

Efectivo del empréstito:

b) Interés efectivo anual emisor:

PRESTACIÓN (Cobros) del emisor:

Efectivo del empréstito:

CONTRAPRESTACIÓN (Pagos) del emisor:

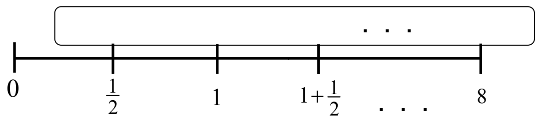
Gastos de emisión:

Cupón semestral que se paga al final de cada semestre natural:

Amortización empréstito:

3. Empréstitos con cupón periódico

Gráficamente, la ubicación de la prestación y contraprestación para calcular el tanto efectivo anual del emisor sería:



Como el pago de cupones tiene frecuencia semestral, plantearemos la ecuación de equilibrio en el origen para obtener (con ordenador) el interés efectivo semestral:

Luego, el **tanto efectivo anual del emisor** sería:

3. Empréstitos con cupón periódico

c) El tanto efectivo anual suscriptor (cálculos para un título):

<u>PRESTACIÓN (Pagos) del suscriptor</u>:

Precio de emisión:

Comisión de suscripción:

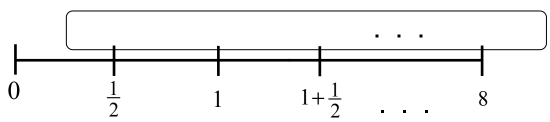
<u>CONTRAPRESTACIÓN (Cobros) del suscriptor</u>:

Cupón semestral:

Gastos amortización:

Precio de amortización:

Gráficamente sería:

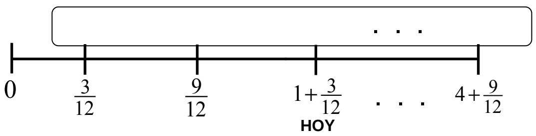


Como el pago de cupones tiene frecuencia semestral, plantearemos la ecuación de equilibrio en el origen para obtener (con ordenador) el interés efectivo semestral:

Luego, el **tanto efectivo anual del suscriptor** sería:

d) Valor de las Obligaciones de este empréstito hace 1 año y 3 meses si el tipo de interés efectivo anual vigente en el mercado (TIR) en dicho momento era del 5,118%

Un obligacionista que adquiriese hace 1 año y 3 meses Obligaciones de FONSA y las mantuviese hasta el vencimiento tendría, sin tener en cuenta los gastos, los siguientes ingresos (cálculo para un título):



El interés efectivo semestral equivalente al 5,118% anual es:

El **valor de una Obligación** en el mercado hace 1 año y 3 meses fue:

e) Tanto efectivo anual que habrá obtenido un obligacionista que adquirió hace 1 año y 3 meses 3.000 Obligaciones de FONSA (véase el precio de compra en el apartado d), y las vende hoy al precio de 201,84€ tras haber cobrado el cupón correspondiente, y ha tenido unos gastos del 0,1% sobre el importe de la compra y del 0,2% sobre el importe de la venta

PRESTACIÓN (Pagos) del obligacionista:

Precio de compra:

Gastos de compra:

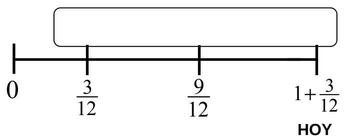
Gastos de venta:

CONTRAPRESTACIÓN (Cobros) del obligacionista:

Cupón semestral:

Precio de venta:

Gráficamente sería:



Planteamos la ecuación de equilibrio al momento de la compra para obtener (con ordenador) el interés efectivo semestral:

Luego, el **tanto efectivo anual de este obligacionista** sería:

3. Empréstitos con cupón periódico

f) Con la información del apartado anterior obtener la TIR anual publicada del empréstito a fecha de hoy

PRESTACIÓN (Pagos) de un obligacionista que compre hoy sin gastos:

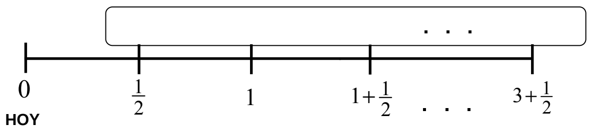
Precio de compra:

CONTRAPRESTACIÓN (Cobros) de un obligacionista que compre hoy y venda al vencimiento sin gastos:

Cupón semestral:

Precio de amortización:

Gráficamente:



3. Empréstitos con cupón periódico

Como el pago de cupones tiene frecuencia semestral, plantearemos la ecuación de equilibrio a día de hoy para obtener (con ordenador) el interés efectivo semestral:

Por tanto, la **TIR anual publicada de este empréstito** a fecha de hoy sería:

Si tras la emisión de un empréstito con cupón periódico, un inversor acude, en un momento determinado, al mercado para comprar o vender un título, ha de pagar o cobrar su valor financiero. Este valor se descompone en:

Cupón corrido (CC): Es la parte proporcional del cupón periódico de un título generado desde que se pagó el último cupón hasta el momento de compra o venta

Cotización ex-cupón (P^{ex}): Precio que se fija en el mercado sobre un título por la interacción de la oferta y la demanda

$$\boxed{\text{Valor financiero}} = \boxed{\text{Cupón corrido}} + \boxed{\text{Cotización ex-cupón}}$$

Explicar la siguiente información extraída de la web www.bde.es:

BANCO DE ESPAÑA Eurosistema

Boletín del Mercado de Deuda Pública

IBERCLEAR

Año 26 Número 6429 11 de diciembre de 2013

Importes en millones de euros y precios en tanto por ciento

I. OPERACIONES DE COMPRAVENTA SIMPLE AL CONTADO

1. DEUDA DEL ESTADO

E M I S I O N	NUMERO OPERACS	IMPORTE CONTRATADO	PRECIO (EX-CUPON) MEDIO	MAXIMO	MINIMO	RENDTO. INTERNO MEDIO	ANTERIOR PRECIO MEDIO (FECHA)
ES0000012098 O EST 4.75 30.07.14	2	1,05	102,445	102,445	102,442	0,77	102,465 (09/12/2013)
ES00000121P3 B EST 3.30 31.10.14	1	10,00	102,120	102,120	102,120	0,85	102,071 (09/12/2013)
ES00000124C5 O EST 5.15 31.10.28	3	21,00	106,919	106,920	106,890	4,50	106,243 (10/12/2013)
ES0000011868 O EST 6.00 31.01.29	1	7,00	116,315	116,315	116,315	4,49	114,154 (06/12/2013)
ES0000012411 O EST 5.75 30.07.32	5	24,50	114,333	114,350	114,289	4,59	112,538 (09/12/2013)

Cupón

Vencimiento

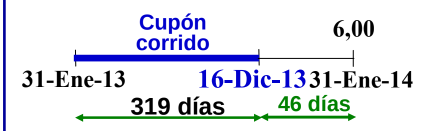
Precio ex-cupón

TIR

3. Empréstitos con cupón periódico

Ejercicio: A partir de la información recogida en la diapositiva anterior del Boletín del Banco de España, calcular el valor financiero de la Obligación del Estado, cuyo código ISIN de referencia es ES0000011868, sabiendo que paga anualmente el cupón cada 31 de enero y que la fecha de liquidación es el 16 de diciembre de 2013

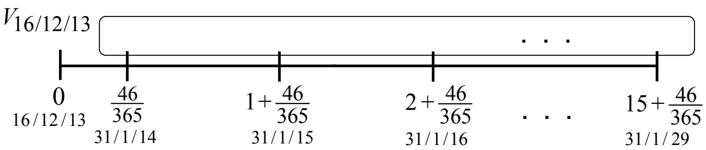
Valor financiero = Cupón corrido + Cotización ex-cupón



NOTA: Si entre el pago de 2 cupones hubiese 366 días por encontrarse el 29 de febrero, para el cálculo del cupón corrido se dividiría entre 366

3. Empréstitos con cupón periódico

Comprobemos que este valor financiero también puede obtenerse valorando en la fecha de liquidación 16 de diciembre de 2013 todos los cobros futuros a que da derecho la Obligación a partir de ese momento, a la TIR anual publicada del 4,49%



BIBLIOGRAFÍA DE REFERENCIA

ALEGRE, P. [et al.]. *Ejercicios resueltos de matemática de las operaciones financieras*. 2ª. ed. Madrid: AC, 2005

BADÍA, C. [et al.]. *Introducción a la matemática financiera*. 4ª ed. Barcelona : Universidad de Barcelona. Dep. de Matemática Económica, Financiera y Actuarial, 2005

GIL, L. *Matemática de las operaciones financieras*. 2ª. ed. Madrid : AC, 1993

MARTÍN, M.; TRUJILLO, A. *Manual de mercados financieros*. Madrid : Thomson, 2004

NAVARRO, E.; NAVE, JM. *Fundamentos de matemáticas financieras*. Barcelona : Bosch, 2001

RODRÍGUEZ, A. *Matemática de la financiación*. Barcelona : Ediciones S, 1994

TERCEÑO, A. [et al.]. *Matemática financiera*. Barcelona : Pirámide, 1997