HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author
Esko Heinonen

Työn nimi — Arbetets titel — Title
Makarovin lause harmoniselle mitalle

Oppiaine — Läroämne — Subject
Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Marraskuu 2013	80 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Kompleksianalyysissä Dirichlet'n ongelma voidaan määritellä seuraavasti: Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ rajoitettu alue ja olkoon f alueen Ω reunalla määritelty jatkuva reaaliarvoinen funktio. Tällöin Dirichlet'n ongelma on löytää alueessa Ω harmoninen funktio, joka yhtyy jatkuvaan funktioon f alueen Ω reunalla. Ratkaisemme tämän Dirichlet'n ongelman O. Perronin menetelmällä, joka perustuu subharmonisten ja superharmonisten funktioiden käyttöön.

Aloitamme esittämällä subharmonisten ja superharmonisten funktioiden määritelmät sekä niiden tärkeimpiä ominaisuuksia. Näiden avulla saamme osoitettua, että jatkuvat reunafunktiot ovat resolutiivisia eli niiden kohdalla yleistetty Dirichlet'n ongelma voidaan ratkaista. Lisäksi konstruktiosta seuraa, että tämä ratkaisu määrittelee positiivisen ja lineaarisen funktionaalin jatkuvien reunafunktioiden joukossa, jolloin Rieszin esityslause antaa tätä funktionaalia vastaavan mitan. Tämä mitta on harmoninen mitta. Alueen Ω reunan osajoukon E harmoninen mitta onkin siis karkeasti sanottuna ratkaisu Dirichlet'n ongelmaan, missä etsitään alueessa Ω harmonista funktiota, joka alueen reunalla vastaa joukon E karakteristista funktiota.

Jatkamme osoittamalla harmonisen mitan ominaisuuksia, tärkeimpänä sen, että harmoninen mitta säilyy tason konformisissa muunnoksissa. Näistä päädymme tarkastelemaan tasoalueessa Ω analyyttisten funktioiden käytöstä alueen reunalla. Plessnerin lauseen avulla saamme osoitettua, että analyyttinen injektio ei voi laajentaa liikaa niitä reunan osajoukkoja, missä se on konforminen. Tästä saamme johdettua Makarovin tuloksen, jonka mukaan harmoninen mitta on singulaarinen kaikkien 1-ulotteista karkeampien Hausdorff-mittojen kanssa. Tämä tarkoittaa, että harmonisen mitan kantajan Hausdorff-dimensio on korkeintaan 1.

Tarkastelemme myös hieman Bloch-funktioita ja osoitamme niille niin kutsutun Makarovin lain iteroidulle logaritmille. Tämän avulla saamme lopulta osoitettua Makarovin toisen suuren tuloksen koskien harmonista mittaa. Seuraa nimittäin, että harmoninen mitta on absoluuttisesti jatkuva tietynlaisen Hausdorff-mitan kanssa ja näin ollen harmonisen mitan kantajan Hausdorff-dimension täytyy olla vähintään 1. Yhdessä aiemman tuloksen kanssa näistä seuraa, että kompleksitasossa $\mathbb{C}$ harmonisen mitan kantajan Hausdorff-dimensio on tasan 1.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords
harmoninen mitta, harmonisen mitan kantaja, Hausdorff-dimensio, subharmoninen funktio

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited
Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

HELSINGIN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro Gradu

Makarovin lause harmoniselle mitalle

Kirjoittaja:
Esko Heinonen

Ohjaaja:
Prof. Eero Saksman

27. marraskuuta 2013

Sisältö

1 Johdanto

Funktioteoriassa, ja ennen kaikkea harmonisten funktioiden analyysissä, yksi keskeinen ongelma on löytää alueessa $\Omega \subset \mathbb{C}$ harmoninen funktio, joka saa tietyt arvot alueen reunalla $\partial\Omega$. Mitä jos vaatisimme, että tämän harmonisen funktion reuna-arvot vastaisivat tietyn reunan osajoukon karakteristista funktiota? Saisimmeko tällöin funktion, joka jokaisella kiinnitetyllä joukolla $E \subset \partial\Omega$ olisi alueessa Ω harmoninen muuttujan $z \in \Omega$ suhteen ja vastaavasti jokaisella kiinnitetyllä $z \in \Omega$ loisi jonkinlaisen mitan reunalle $\partial\Omega$? Kysymys on esitetty karkeasti yksinkertaistaen, mutta se antaa kuitenkin jonkinlaisen mielikuvan siitä, mikä harmoninen mitta oikein on.

Jos tutkittava alue $\Omega \subset \mathbb{C}$ on kiekko, niin edellä mainittu *Dirichlet'n ongelma* on varsin helppo ratkaista suoraan Poissonin kaavan avulla. Monimutkaisempien alueiden kohdalla joudutaan soveltamaan tehokkaampia menetelmiä ja yksi tapa ratkaista ongelma on hyödyntää subharmonisia ja superharmonisia funktioita. Näiden funktioiden avulla saamme konstruoitua lineaarisen kuvauksen $f \mapsto L_z(f)$, joka liittää jokaisella $z \in \Omega$ reunalla $\partial\Omega$ jatkuvaan reaaliarvoiseen funktioon f harmonisen funktion H_f. Tällöin Rieszin esityslause antaa meille yksikäsitteisen Borel-mitan μ_z, jolle pätee

$$H_f(z) = L_z(f) = \int_{\partial\Omega} f d\mu_z,$$

kun funktio f on jatkuva joukossa $\partial\Omega$. Tämä mitta on harmoninen mitta pisteessä $z \in \Omega$.

Kun olemme saaneet konstruoitua reunalle $\partial\Omega$ mitan, niin seuraavaksi on mielenkiintoista kysyä, että miten tämä mitta näkee reunan osajoukot. Minkälaiset joukot ovat harmonisen mitan mielessä 0-mittaisia ja mitä voidaan sanoa harmonisen mitan kantajasta? Tapauksessa, jossa alue Ω on kompleksitason yksikkökiekko, huomaamme, että harmoninen mitta on absoluuttisesti jatkuva 1-ulotteisen Lebesguen mitan suhteen. Toisaalta harmoninen mitta säilyy konformikuvauksissa, joten yhdesti yhtenäisissä tasoalueissa voimme Riemannin kuvauslauseen avulla palauttaa kysymyksen harmonisesta mitasta takaisin yksikkökiekkoon. Yleisemmin päädymme tutkimaan myös harmonisen mitan yhteyttä Hausdorff-mittoihin $\mathcal{H}_h$, jotka kuvaavat joukkoja Lebesguen mittaa tarkemmin.

Vuonna 1985 harmonisen mitan tutkimus koki suuren edistysaskeleen, kun venäläinen matemaatikko N. G. Makarov onnistui ratkaisemaan Øksendalin konjektuurin, eli että harmoninen mitta on singulaarinen kaikkien Hausdorff-mittojen $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha > 1$, kanssa. Samalla Makarov onnistui osoittamaan myös, että harmoninen mitta on absoluuttisesti jatkuva Hausdorff-mitan $\mathcal{H}_{h_K}$ kanssa, missä

$$h_K(t) = te^{K\sqrt{\log\frac{1}{t}\log\log\log\frac{1}{t}}}.$$

Yhdessä näistä seuraa, että harmonisen mitan kantajan Hausdorff-dimensio on tasan 1.

Harmoninen mitta ei ole mikään kompleksitason $\mathbb{C}$ erikoistapaus, vaan se voidaan määritellä myös korkeampiulotteisissa avaruuksissa $\mathbb{R}^n$. Itseasiassa esittämämme konstruktio toimii myös avaruudessa $\mathbb{R}^n$ hyvin pienillä muutoksilla. Tässä työssä käsittelemme harmonista mittaa kompleksitasossa ja esitämme yllä mainitut Makarovin tulokset. Korkeampiulotteisissa avaruuksissa tilanne on monimutkaisempi eikä näin tarkkoja arvioita harmonisen mitan kantajalle ole tiedossa.

Lyhyen johdannon harmonista mittaa koskevien tulosten historiaan voi lukea esimerkiksi lähteestä [Hei]. Tämä työ seurailee karkeasti tämän Juha Heinosen vuonna 1988 julkaistun artikkelin esitysjärjestystä.

2 Dirichlet'n ongelma

Harmonisten funktioiden teoriassa tärkeä Dirichlet'n ongelma voidaan määritellä seuraavasti:

Määritelmä 2.1. Olkoot $\Omega \subset \mathbb{C}$ rajoitettu alue ja $f\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Dirichlet'n ongelma on löytää alueessa Ω harmoninen funktio $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, jolle pätee

$$\lim_{z\to\xi} u(z) = f(\xi) \qquad \text{kaikilla } \xi \in \partial\Omega.$$

Tässä työssä käsittelemme vain rajoitettuja alueita, jolloin jatkuva funktio f on automaattisesti rajoitettu. On myös mahdollista tutkia rajoittamattomia alueita, mutta tällöin funktio f on oletettava jatkuvaksi laajennetun kompleksitason topologian suhteen.

Jos alue Ω on kiekko, niin ongelma voidaan ratkaista käyttämällä Poissonin kaavaa, mutta muussa tapauksessa joudumme turvautumaan monimutkaisempiin menetelmiin. Dirichlet'n ongelmaa ei osata ratkaista kaikissa tapauksissa, vaan ratkaisun olemassaolon takaamiseksi alueen reunalle joudutaan asettamaan tiettyjä vaatimuksia. Emme kuitenkaan käsittele näitä vaatimuksia (halutessaan lukija voi tarkastella lähteitä [Ahl], [Con1] ja [Sak1]), sillä yleistetty ratkaisu, joka ei välttämättä huomioi kaikkia alueen reunapisteitä, voidaan löytää ja se riittää harmonisen mitan konstruoimiseen.

Tulemme ratkaisemaan yleistetyn Dirichlet'n ongelman tasoalueessa $\Omega \subset \mathbb{C}$ O. Perronin menetelmää noudattaen. Tässä menetelmässä subharmoniset funktiot ovat tärkeässä roolissa, joten esitämme niiden määritelmän ja tärkeimpiä ominaisuuksia. Harmoniset funktiot oletamme tunnetuksi, mutta halutessaan lukija voi tarkastella harmonisten funktioiden teoriaa tarkemmin esimerkiksi lähteestä [Ahl].

2.1 Subharmoniset funktiot

Ennen tarkkaa määritelmää annamme mielikuvan siitä, millaisia subharmoniset funktiot ovat. Yhden muuttujan tapauksessa harmoniset funktiot ovat lineaarisia funktioita ja siten muotoa $f(x) = ax + b$. Vastaavasti yhden muuttujan *konveksi* funktio on jokaisella välillä lineaarisen funktion alapuolella ja yhtyy lineaariseen funktioon välin päätepisteissä. Kun tämä yleistetään tasoon $\mathbb{C}$, lineaariset funktiot vastaavat harmonisia funktioita ja konveksit funktiot vastaavat subharmonisia funktioita. Alueessa $\Omega \subset \mathbb{C}$ subharmoninen funktio on siis pienempi kuin harmoninen funktio, joka saa samat arvot alueen Ω reunalla.

Esitämme subharmonisten funktioiden teoriaa seuraten lähteitä [Ahl], [Con1] ja [Sak1].

Määritelmä 2.2. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ alue. Funktio $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ on subharmoninen alueessa Ω, jos se on jatkuva ja toteuttaa epäyhtälön

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

kaikilla kiekoilla $B(z_0, r)$, joille $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$ ja r riittävän pieni.

Huomautus. Tässä työssä määrittelemme subharmoniset funktiot jatkuvina funktioina, mutta yleisemmin ne voidaan määritellä vaatimalla vain puolijatkuvuus ylhäältä päin. Funktio v on ylhäältä puolijatkuva pisteessä z_0, jos pätee

$$\limsup_{z \to z_0} v(z) \leq v(z_0).$$

Määritelmä 2.3. Funktio $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ on superharmoninen, jos funktio $-u$ on subharmoninen.

Koska harmoniset funktiot toteuttavat keskiarvoperiaatteen, niin selvästi jokainen harmoninen funktio on myös subharmoninen. Seuraavissa lauseissa esitämme subharmonisten funktioiden tärkeitä ominaisuuksia.

Lause 2.4. Olkoot $\alpha, \beta \geq 0$ vakioita ja olkoot funktiot u_1 ja u_2 subharmonisia. Tällöin funktio $\alpha u_1 + \beta u_2$ on subharmoninen.

Todistus. Soveltamalla määritelmää 2.2 funktioon $\alpha u_1 + \beta u_2$ saadaan

$$\begin{aligned}(\alpha u_1 + \beta u_2)(z_0) &= \alpha(u_1(z_0)) + \beta(u_2(z_0)) \\ &\leq \alpha\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_1(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta + \beta\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_2(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\alpha u_1 + \beta u_2)(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.\end{aligned}$$

□

Lause 2.5. Olkoot funktiot u_1 ja u_2 subharmonisia. Tällöin funktio $u = \max(u_1, u_2)$ on subharmoninen.

Todistus. Koska funktiot u_1 ja u_2 ovat jatkuvia, niin myös funktio $\max(u_1, u_2)$ on jatkuva. Lisäksi

$$u_i(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max(u_1, u_2)(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta, \quad i = 1, 2,$$

joten myös

$$\max(u_1, u_2)(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max(u_1, u_2)(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

□

Lause 2.6. Olkoon u kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva funktio. Tällöin u on subharmoninen alueessa Ω jos ja vain jos $\Delta u(z) \geq 0$ kaikilla $z \in \Omega$.

Todistus. Olkoon u subharmoninen funktio, jolle pätee $\Delta u(z) < 0$ jollain pisteellä $z \in \Omega$. Tällöin funktion u jatkuvuuden perusteella on olemassa säde $r > 0$ ja kiekko $B(z, r)$, jolle pätee $\overline{B(z, r)} \subset \Omega$ ja $\Delta u(w) < 0$ kaikilla $w \in B(z, r)$. Merkitään

$$a(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{|x|=1} u(z + rx) ds.$$

Divergenssilauseen nojalla saamme

$$\begin{aligned} a'(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|x|=1} \nabla u(z + rx) \cdot x ds \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(z,r)} \nabla u(x) \cdot \bar{n} ds \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{B(z,r)} \nabla \cdot \nabla u(x) dA \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{B(z,r)} \Delta u(x) dA < 0, \end{aligned}$$

joten $a(r)$ on vähenevä funktio ja $u(z) = a(0) > a(r)$. Tämä on ristiriita subharmonisuuden kanssa, joten täytyy olla $\Delta u \geq 0$.

Olkoon nyt $\Delta u \geq 0$. Tällöin edellä olevan nojalla $a(r)$ on kasvava ja pätee $a(r) \geq a(0) = u(z)$. Siis u on subharmoninen. $\square$

Tasainen suppeneminen säilyttää yleensä hyvin funktioiden ominaisuudet ja seuraavassa lauseessa saamme huomata, että subharmonisuus ei muodosta poikkeusta. Itseasiassa subharmonisuuden säilymiseen riittää lokaali tasainen suppeneminen.

Lause 2.7. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ alue ja olkoon $\{u_n\}$, $u_n \colon \Omega \to \mathbb{R}$, jono subharmonisia funktioita, joka suppenee lokaalisti tasaisesti kohti funktiota u. Tällöin u on subharmoninen.

Todistus. Olkoot $z_0 \in \Omega$, $r > 0$ sellainen, että $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$ ja $\varepsilon > 0$. Koska suppeneminen on tasaista, niin funktio u on jatkuva. Lisäksi on olemassa n_0, jolle pätee $|u_n(z) - u(z)| < \varepsilon$ aina, kun $n \geq n_0$ ja $|z - z_0| \leq r$. Tällöin

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(z_0 + re^{i\theta}) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_n(z_0 + re^{i\theta}) - u(z_0 + re^{i\theta})| d\theta < \varepsilon, \end{aligned}$$

joten pätee

$$u(z_0) = \lim_{n\to\infty} u_n(z_0) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(z_0 + re^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta.$$

Koska z_0 ja r olivat mielivaltaisia, niin funktio u on subharmoninen alueessa Ω. □

Harmonisten funktioiden tapaan myös subharmoniset funktiot noudattavat maksimiperiaatetta.

Lause 2.8. Olkoon u subharmoninen funktio alueessa $\Omega \subset \mathbb{C}$. Jos funktio u saavuttaa supremuminsa jossain alueen Ω pisteessä z_0, niin tällöin u on vakio.

Todistus. Olkoon $z_0 \in \Omega$ piste, jossa u saavuttaa supremuminsa. Merkitään $u(z_0) = \sup_{z\in\Omega} u(z) = M$. Funktion u subharmonisuuden nojalla on olemassa sellainen kiekko $B(z_0, R) \subset \Omega$, että kaikilla positiivisilla $r < R$ pätee

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Tämän nojalla pätee

$$0 = M - u(z_0) \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (M - u(z_0 + re^{i\theta}))\, d\theta \geq 0,$$

joten funktion u jatkuvuuden perusteella täytyy olla $u(z) = M$ kaikilla $z \in B(z_0, R)$. Tämä osoittaa, että joukko $A := \{z \in \Omega : u(z) = M\}$ on avoin. Toisaalta A on myös suljettu, sillä pätee $A = u^{-1}(\{M\})$ ja u on jatkuva. Koska Ω on yhtenäinen, niin täytyy olla $\Omega = A$ ja siten u on vakio alueessa Ω. □

Seuraava lause karakterisoi subharmoniset funktiot ja esimerkiksi lähteessä [Ahl] se otetaan subharmonisten funktioiden määritelmäksi.

Lause 2.9. Olkoon $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tällöin u on subharmoninen jos ja vain jos se toteuttaa seuraavan ehdon: jos $\Omega' \subset \Omega$ on osa-alue ja $v\colon \Omega' \to \mathbb{R}$ on harmoninen funktio, niin tällöin funktio $u - v$ saavuttaa supremuminsa alueessa Ω' vain jos $u - v$ on vakio.

Todistus. Olkoon u subharmoninen funktio alueessa Ω ja olkoon v harmoninen funktio osa-alueessa $\Omega' \subset \Omega$. Nyt funktio $-v$ on subharmoninen ja siten myös funktio $u - v$ on subharmoninen. Jos $u - v$ saavuttaa supremuminsa, niin lauseen 2.8 nojalla se on vakio.

Oletetaan nyt, että u on jatkuva ja lauseen ehto on voimassa. Olkoon $z_0 \in \Omega$ ja $B(z_0, r)$ kiekko, jolle pätee $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$. Valitaan kiekossa $B(z_0, r)$ harmoniseksi funktioksi v funktio, joka on jatkuva suljetussa kiekossa $\overline{B(z_0, r)}$ ja jolle pätee

$$v|_{\partial B(z_0,r)} = u|_{\partial B(z_0,r)}.$$

Alla olevan Poissonin kaavan nojalla tällainen funktio on aina olemassa. Nyt täytyy olla $u \leq v$ kiekossa $B(z_0, r)$ sillä, jos $u(z) > v(z)$ jollain $z \in B(z_0, r)$, niin funktio $u - v$ saa maksimiarvonsa kiekon $\overline{B(z_0, r)}$ sisäpisteessä. Lauseen ehdon nojalla tästä seuraa, että $u - v$ on vakio eli $u = v$ kiekossa $B(z_0, r)$. Näin ollen pätee

$$u(z_0) \leq v(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Siis u on subharmoninen. □

Edellisessä todistuksessa kiekko $B(z_0, r)$ oli mielivaltainen avoin kiekko, jolle pätee $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$, joten saamme todistuksen loppuosasta seuraavan korollaarin.

Korollaari 2.10. Subharmoninen funktio $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ toteuttaa määritelmän 2.2 epäyhtälön kaikilla kiekoilla $B(z_0, r)$, joille pätee $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$.

Seuraavaksi esitämme harmonisia funktioita koskevan erityisen hyödyllisen Poissonin kaavan, sillä tarvitsemme sitä ja sen ominaisuuksia. Emme kuitenkaan todista kaavaa tai sen ominaisuuksia, sillä ne löytyvät useimmista perusteoksista.

Lause 2.11 (Poissonin kaava). Olkoon u harmoninen funktio kiekossa $B(0, R)$ ja jatkuva suljetussa kiekossa $\overline{B(0, R)}$. Tällöin kaikilla $|z| < R$ pätee

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|w|=R} \frac{R^2 - |z|^2}{|w - z|^2} u(w)\, dw$$

Todistus. Ks. [Ahl, Chap. 4, Thm. 22]. □

Valitsemalla Poissonin kaavassa harmoniseksi funktioksi u vakiofunktio $u = 1$, saadaan erikoistapaus

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|w|=R} \frac{R^2 - |z|^2}{|w - z|^2}\, dw = 1.$$

Valitaan seuraavaksi Poissonin kaavassa $R = 1$ ja määritellään kaikille paloittain jatkuville funktioille $u(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, Poissonin integraali P_u.

Määritelmä 2.12. Paloittain jatkuvan funktion u Poissonin integraali on

$$P_u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2} u(\theta)\, d\theta.$$

Poissonin integraalilla on seuraava tärkeä ominaisuus.

Lause 2.13. Funktio $P_u(z)$ on harmoninen kiekossa $B(0,1)$. Lisäksi kaikissa pisteissä θ_0, missä $u(\theta)$ on jatkuva, pätee

$$\lim_{z \to e^{i\theta_0}} P_u(z) = u(\theta_0).$$

Todistus. Ks. [Ahl, Chap. 4, Thm. 23]. $\square$

Määritelmä 2.14. Olkoot u subharmoninen funktio alueessa Ω ja B avoin kiekko, jolle $\overline{B} = \overline{B(z_0,r)} \subset \Omega$. Tällöin funktion u Poisson-modifikaatio on

$$u_B(z) = \begin{cases} u(z), & z \in \Omega \setminus B \\ h(z), & z \in B, \end{cases}$$

missä funktio h on saatu soveltamalla Poissonin kaavaa jatkuvaan funktioon $u|_{\partial B}$.

Lauseen 2.9 todistuksesta saadaan suoraan seuraava tulos subharmonisten funktioiden Poisson-modifikaatioille.

Lemma 2.15. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ alue ja olkoon $B(z_0,r)$ kiekko, jolle pätee $\overline{B(z_0,r)} \subset \Omega$. Olkoot $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ subharmoninen ja u_B funktion u Poisson-modifikaatio. Tällöin

$$u(z) \le u_B(z)$$

kiekossa $B(z_0,r)$.

Todistus. Olkoon $B(z_0,r)$ kiekko, jolle pätee $\overline{B(z_0,r)} \subset \Omega$. Nyt funktion u Poisson-modifikaatio u_B on harmoninen kiekossa $B(z_0,r)$, jatkuva suljetussa kiekossa $\overline{B(z_0,r)}$ ja pätee

$$u_B|_{\partial B(z_0,r)} = u|_{\partial B(z_0,r)}.$$

Funktiolle u_B pätee siis samat oletukset kuin lauseen 2.9 todistuksen loppuosassa funktiolle v. Tästä seuraa, että $u(z) \le u_B(z)$ kaikilla $z \in B(z_0,r)$. $\square$

Koska yllä epäyhtälö $u(z) \le u_B(z)$ pätee mielivaltaisessa kiekossa, niin tästä seuraa, että $u(z) \le u_B(z)$ koko alueessa Ω.

Lause 2.16. Subharmonisen funktion u Poisson-modifikaatio u_B on subharmoninen.

Todistus. Koska Poisson-modifikaation määritelmässä funktio h on jatkuva suljetussa kiekossa $\overline{B}$, funktio u on jatkuva joukossa $\Omega \setminus B$ ja pätee

$$h|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega},$$

niin selvästi u_B on jatkuva alueessa Ω. Lisäksi funktion u subharmonisuudesta seuraa, että u_B on subharmoninen joukossa $\Omega \setminus \overline{B}$ ja funktion h harmonisuudesta seuraa, että u_B on subharmoninen kiekossa B.

Olkoot nyt $z \in \partial B$ ja $\rho < \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$. Tällöin

$$u_B(z) = u(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+\rho e^{i\theta})\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_B(z+\rho e^{i\theta})\,d\theta.$$

Siis u_B on subharmoninen myös kiekon B reunapisteissä ja siten koko alueessa Ω. □

Esitämme vielä ilman todistuksia tämän luvun loppuun harmonisia funktioita koskevat Harnackin epäyhtälön ja Harnackin periaatteen, joita tulemme tarvitsemaan myöhemmin. Ensimmäinen antaa harmonisille funktioille tärkän arvion, jota tarvitaan ennen kaikkea jälkimmäisen todistamiseen.

Lause 2.17 (Harnackin epäyhtälö)**.** Olkoon u harmoninen funktio kiekossa $B(z_0, R)$ ja $u \geq 0$. Kun $r < R$, niin kaikilla $z \in B(z_0, r)$ pätee arvio

$$\frac{R-r}{R+r}u(z_0) \leq u(z) \leq \frac{R+r}{R-r}u(z_0).$$

Todistus. Ks. [Ahl, s.243] □

Lause 2.18 (Harnackin periaate)**.** Olkoon $\{u_n\}$ kasvava jono harmonisia funktioita alueessa Ω. Tällöin joko

1. $u_n(z) \to \infty$ lokaalisti tasaisesti, kun $n \to \infty$, tai

2. jono $\{u_n\}$ suppenee lokaalisti tasaisesti kohti harmonista funktiota $u(z) := \lim_{n\to\infty} u_n(z)$

Todistus. Ks. [Ahl, Chap. 6,Thm. 7.] □

2.2 Resolutiiviset funktiot

Seuraava esimerkki osoittaa, että emme välttämättä löydä ratkaisua Dirichlet'n ongelmaan edes siinä tapauksessa, että alue $\Omega \subset \mathbb{C}$ on punkteerattu yksikkökiekko $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. Olkoon $f\colon \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ ja $f(\xi) = 0$, kun $|\xi| = 1$. Oletetaan, että on olemassa punkteeratussa kiekossa $B(0,1) \setminus \{0\}$ harmoninen funktio u, joka saa nämä reuna-arvot. Nyt funktio u on rajoitettu, joten se voidaan jatkaa harmoniseksi funktioksi koko kiekkoon $\mathbb{D}$, jolloin $u(0) = 1$. Tällöin kuitenkin maksimiperiaatteen (ks. [Ahl, Chap. 4, Thm. 21]) nojalla sen täytyy olla vakiofunktio, mikä on ristiriita, eikä Dirichlet'n ongelmalle siis ole ratkaisua.

Seuraavaksi konstruoimme Perronin menetelmää (tunnetaan myös Perron-Wiener-Brelot (PWB-) menetelmänä) käyttäen yleistetyn ratkaisun jatkuville reunafunktiolle. Tämä yleistetty ratkaisu ei välttämättä huomioi kaikkia alueen reunapisteitä, mutta yhtyy Dirichlet'n ongelman ratkaisuun aina, kun ratkaisu on olemassa.

Edellisen kappaleen tuloksia hyödyntäen määrittelemme resolutiiviset reunafunktiot, joilla ratkaisu yleistettyyn Dirichlet'n ongelmaan on olemassa. Esittämämme teoria seuraa lähteitä [Ahl] ja [Hel].

Määritelmä 2.19. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ alue ja olkoon funktio $f\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$. Tällöin funktion f määräämä funktioiden $\mathcal{U}_f$ yläluokka on

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_f = \{&u : u \text{ superharmoninen tai identtisesti} + \infty \text{ alueessa } \Omega,\\ &\liminf_{z\to\xi} u(z) \geq f(\xi) \text{ kaikilla } \xi \in \partial\Omega \text{ ja } u \text{ alhaalta rajoitettu}\}.\end{aligned}$$

Funktion f määräämä funktioiden $\mathcal{L}_f$ alaluokka on

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_f = \{&u : u \text{ subharmoninen tai identtisesti} - \infty \text{ alueessa } \Omega,\\ &\limsup_{z\to\xi} u(z) \leq f(\xi) \text{ kaikilla } \xi \in \partial\Omega \text{ ja } u \text{ ylhäältä rajoitettu}\}.\end{aligned}$$

Huomautus. Sekä $\mathcal{U}_f$ että $\mathcal{L}_f$ ovat epätyhjiä, sillä $+\infty \in \mathcal{U}_f$ ja $-\infty \in \mathcal{L}_f$.

Määritelmä 2.20. Funktio

$$\overline{H}_f(z) := \inf\{u(z) : u \in \mathcal{U}_f\}$$

on yläratkaisu yleistetylle Dirichlet'n ongelmalle alueessa Ω reuna-arvoilla f. Funktio

$$\underline{H}_f(z) := \sup\{u(z) : u \in \mathcal{L}_f\}$$

on vastaava alaratkaisu alueessa Ω.

Lause 2.21. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ rajoitettu alue. Tällöin funktiot $\overline{H}_f$ ja $\underline{H}_f$ ovat joko harmonisia, identtisesti $+\infty$ tai identtisesti $-\infty$.

Todistus. Jos perhe $\mathcal{L}_f$ sisältää vain funktion, joka on identtisesti $-\infty$, niin tällöin $\underline{H}_f = -\infty$ ja väite pitää paikkansa. Oletetaan, että $\mathcal{L}_f$ sisältää funktion, joka ei ole identtisesti $-\infty$. Tällöin

$$\underline{H}_f = \sup\{u : u \in \mathcal{L}_f \text{ ja } u \text{ subharmoninen alueessa } \Omega\}.$$

Olkoon $B = B(z_0, r)$ kiekko, jolle $\overline{B} \subset \Omega$. Supremumin määritelmän nojalla on olemassa jono $\{v_n\} \subset \mathcal{L}_f$, jolle $\lim_{n\to\infty} v_n(z_0) = \underline{H}_f(z_0)$. Olkoon

$$V^n = \max\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

Tällöin $\{V^n\} \subset \mathcal{L}_f$ on kasvava jono ja lauseen 2.16 nojalla Poisson-modifikaatioille V_B^n pätee $V_B^n \in \mathcal{L}_f$. Myös $\{V_B^n\}$ on kasvava jono, jolle pätee

$$v_n(z_0) \le V^n(z_0) \le V_B^n(z_0) \le \underline{H}_f(z_0),$$

joten

$$\lim_{n\to\infty} V_B^n(z_0) = \underline{H}_f(z_0).$$

Funktiot V_B^n ovat harmonisia kiekossa B, joten Harnackin periaatteen nojalla funktio

$$U := \lim_{n\to\infty} V_B^n$$

on joko harmoninen tai identtisesti $+\infty$ kiekossa B ja $U(z_0) \le \underline{H}_f(z_0)$.

Olkoon nyt $z_1 \in B$ mielivaltainen piste. Valitaan jono $\{w_n\} \subset \mathcal{L}_f$, jolle $\lim_{n\to\infty} w_n(z_1) = \underline{H}_f(z_1)$ ja asetetaan $\bar{w}_n = \max\{v_n, w_n\}$. Nyt muodostamalla funktiot

$$W^n = \max\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_n\}$$

ja niitä vastaavien Poisson-modifikaatioiden jono $\{W_B^n\}$, saamme yllä olevaan tapaan funktion

$$U_1 := \lim_{n\to\infty} W_B^n,$$

joka on jälleen Harnackin periaatteen nojalla joko harmoninen tai identtisesti $+\infty$. Lisäksi pätee

$$U(z) \le U_1(z) \le \underline{H}_f(z),$$

$$U_1(z_0) = \underline{H}_f(z_0)$$

ja

$$U_1(z_1) = \underline{H}_f(z_1).$$

Jos pätee $U \equiv +\infty$, niin on $\underline{H}_f \equiv +\infty$ ja väite pätee. Jos taas $U < +\infty$, niin U on harmoninen, ja koska pätee

$$U_1(z_0) = \underline{H}_f(z_0) = U(z_0) < +\infty,$$

niin myös funktio U_1 on harmoninen. Nyt harmonisella funktiolla $U - U_1$ on nollakohta pisteessä z_0. Tämä nollakohta on myös maksimi, joten maksimiperiaatteen nojalla pätee $U \equiv U_1$.

Osoitimme siis, että mielivaltaisessa pisteessä $z_1 \in B$ pätee $\underline{H}_f(z_1) = U(z_1)$. Lisäksi kiekko $B \subset \Omega$ oli mielivaltainen, joten tästä seuraa, että $\underline{H}_f$ on joko harmoninen, identtisesti $-\infty$ tai identtisesti $+\infty$ alueessa Ω.

Osoitamme lemmassa 2.23, että $\overline{H}_{-f} = -\underline{H}_f$. Tämän ja ylläolevan nojalla funktio $\overline{H}_f$ on joko harmoninen, identtisesti $-\infty$ tai identtisesti $+\infty$. □

Määritelmä 2.22. Funktio f on resolutiivinen reunafunktio, jos sekä $\overline{H}_f$ että $\underline{H}_f$ ovat harmonisia alueessa Ω ja pätee $\overline{H}_f = \underline{H}_f$. Tällöin $H_f = \overline{H}_f = \underline{H}_f$ on yleistetty ratkaisu Dirichlet'n ongelmaan reuna-arvoilla f.

Seuraavassa lemmassa osoitamme ylä- ja alaratkaisun tärkeitä ominaisuuksia, joita tulemme tarvitsemaan myöhemmin. Resolutiivisen reunafunktion tapauksessa saamme epäyhtälöiden sijaan yhtälöitä.

Lemma 2.23. Olkoot $\Omega \subset \mathbb{C}$ alue, $f, g \colon \partial\Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ja α, $\beta \in \mathbb{R}$ vakioita. Tällöin seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

i) Jos $f(\xi) = \alpha$ kaikilla $\xi \in \partial\Omega$, niin f on resolutiivinen ja $H_f = \alpha$ alueessa Ω.

ii) $\overline{H}_{f+\alpha} = \overline{H}_f + \alpha$ ja $\underline{H}_{f+\alpha} = \underline{H}_f + \alpha$. Jos f on resolutiivinen, niin myös $f + \alpha$ on resolutiivinen ja $H_{f+\alpha} = H_f + \alpha$.

iii) Jos $\alpha > 0$, niin $\overline{H}_{\alpha f} = \alpha\overline{H}_f$ ja $\underline{H}_{\alpha f} = \alpha\underline{H}_f$. Jos f on resolutiivinen, niin myös αf on resolutiivinen ja $H_{\alpha f} = \alpha H_f$ kaikilla $\alpha \geq 0$.

iv) Jos $f \leq g$, niin $\overline{H}_f \leq \overline{H}_g$ ja $\underline{H}_f \leq \underline{H}_g$.

v) $\overline{H}_{-f} = -\underline{H}_f$. Jos f on resolutiivinen, niin myös $-f$ on resolutiivinen ja $H_{-f} = -H_f$.

vi) $\overline{H}_{f+g} \leq \overline{H}_f + \overline{H}_g$ ja $\underline{H}_{f+g} \geq \underline{H}_f + \underline{H}_g$ aina, kun kyseiset summat ovat määriteltyjä.

vii) Jos f ja g ovat resolutiivisia, niin myös $\alpha f + \beta g$ on resolutiivinen ja $H_{\alpha f+\beta g} = \alpha H_f + \beta H_g$.

Todistus.

i) Vakiofunktiot ovat subharmonisia ja superharmonisia, joten ne sisältyvät perheisiin $\mathcal{U}_f$ ja $\mathcal{L}_f$. Lisäksi subharmonisten funktioiden maksimiperiaatteesta seuraa, että perheessä $\mathcal{U}_f$ ei voi olla subharmonista funktiota, joka saisi suurempia arvoja alueen Ω sisäpisteissä. Vastaava pätee myös superharmonisille funktioille, joten väite seuraa suoraan määritelmästä.

ii) Subharmonisten (superharmonisten) funktioiden summa on subharmoninen (superharmoninen), joten väite seuraa suoraan määritelmästä.

iii) Funktio αu on subharmoninen (superhamoninen), joten jos $u \in \mathcal{L}_f$ ($u \in \mathcal{U}_f$), niin $\alpha u \in \mathcal{L}_{\alpha f}$ ($\alpha u \in \mathcal{U}_{\alpha f}$) ja näin ollen väite seuraa suoraan määritelmästä.

iv) Maksimiperiaatteen nojalla subharmoninen funktio ei voi saavuttaa maksimiaan (superharmoninen funktio ei voi saavuttaa minimiään) alueen Ω sisäpisteessä, joten jos $f \leq g$, niin pätee

$$\overline{H}_f = \inf\{u \,:\, u \in \mathcal{U}_f\} \leq \inf\{v \,:\, v \in \mathcal{U}_g\} = \overline{H}_g$$

ja

$$\underline{H}_f = \sup\{u \,:\, u \in \mathcal{L}_f\} \leq \sup\{v \,:\, v \in \mathcal{L}_g\} = \underline{H}_g.$$

v) Suoraan infimumin ja supremumin sekä limes inferiorin ja limes superiorin määritelmistä seuraa, että

$$\inf\{u \,:\, u \in \mathcal{U}_f\} = -\sup\{-u \,:\, u \in \mathcal{U}_f\}$$

ja

$$\liminf_{z\to\xi} u(z) \geq -f(\xi)$$

jos ja vain jos

$$\limsup_{z\to\xi} -u(z) \leq f(\xi).$$

Lisäksi, jos u on superharmoninen tai identtisesti $+\infty$, niin $-u$ on subharmoninen tai identtisesti $-\infty$, joten pätee

$$u \in \mathcal{U}_f$$

jos ja vain jos

$$-u \in \mathcal{L}_f,$$

mistä seuraa, että $\overline{H}_{-f} = -\underline{H}_f$.

vi) Osoitamme vain ensimmäisen epäyhtälön, sillä toisen epäyhtälön todistus on täysin samanlainen. Jos $\overline{H}_f$ tai $\overline{H}_g$ on identtisesti $+\infty$, niin epäyhtälö pätee selvästi. Olkoon nyt $u \in \mathcal{U}_f$ ja $v \in \mathcal{U}_g$ funktioita, jotka eivät ole identtisesti $+\infty$. Tällöin $u+v \in \mathcal{U}_{f+g}$ ja näin ollen $\overline{H}_{f+g} \leq u+v$. Väite seuraa, kun otamme epäyhtälössä molemmilla puolilla infimumin.

vii) Aiempien kohtien nojalla saadaan $\overline{H}_{\alpha f+\beta g} \leq \alpha\overline{H}_f + \beta\overline{H}_g = \alpha H_f + \beta H_g$ ja $\underline{H}_{\alpha f+\beta g} \geq \alpha\underline{H}_f + \beta\underline{H}_g = \alpha H_f + \beta H_g$. Tämä osoittaa väitteen.

□

Aiemmin saimme huomata, että subharmonisuus säilyy, jos funktiojono suppenee tasaisesti. Seuraavaksi osoitamme, että tämä pätee myös resolutiivisille funktioille.

Lemma 2.24. Olkoot $\Omega \subset \mathbb{C}$ rajoitettu alue ja $\{f_n\}$ jono jatkuvia reaaliarvoisia resolutiivisia funktioita, joka suppenee tasaisesti kohti funktiota f. Tällöin f on resolutiivinen ja H_{f_n} suppenee tasaisesti kohti funktiota H_f.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Jos $|f_n - f| < \varepsilon$, niin $f < f_n + \varepsilon$ ja lemman 2.23 nojalla alueessa Ω pätee $\overline{H}_f \leq \overline{H}_{f_n} + \varepsilon$. Vastaavasti $\overline{H}_f \geq \overline{H}_{f_n} - \varepsilon$, joten

$$|\overline{H}_f - \overline{H}_{f_n}| = |\overline{H}_f - H_{f_n}| < \varepsilon,$$

ja jono $\{H_{f_n}\}$ suppenee tasaisesti kohti funktioita $\overline{H}_f$. Vastaavan arvion nojalla jono $\{H_{f_n}\}$ suppenee tasaisesti kohti funktioita $\underline{H}_f$, jolloin raja-arvon yksikäsitteisyydestä seuraa, että $\overline{H}_f = \underline{H}_f$. Siis f on resolutiivinen. □

Haluamme löytää ehtoja, joilla pätee, että reunafunktio f on resolutiivinen. Seuraavan lemman nojalla tähän riittää se, että on olemassa subharmoninen funktio, jonka raja-arvo yhtyy funktion f arvoihin kaikissa reunan pisteissä.

Lemma 2.25. Olkoot $\Omega \subset \mathbb{C}$ rajoitettu alue ja $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ rajoitettu subharmoninen funktio, jolle raja-arvo $\lim_{z\to\xi} u(z) = f(\xi)$ on olemassa kaikilla $\xi \in \partial\Omega$. Tällöin f on resolutiivinen funktio.

Todistus. Koska u on rajoitettu funktio ja raja-arvo $\lim_{z\to\xi} u(z) = f(\xi)$ on olemassa kaikilla $\xi \in \partial\Omega$, niin f on rajoitettu. Siis on olemassa $M \in \mathbb{R}$, jolle pätee $|f(\xi)| \leq M$ kaikilla $\xi \in \partial\Omega$. Näin ollen pätee $M \in \mathcal{U}_f$ ja $-M \in \mathcal{L}_f$. Täten myös $\overline{H}_f$ ja $\underline{H}_f$ ovat rajoitettuja ja siten harmonisia funktioita. Selvästi $u \in \mathcal{L}_f$ ja siten $u \leq \underline{H}_f$. Tästä seuraa, että

$$\liminf_{z\to\xi} \underline{H}_f(z) \geq \liminf_{z\to\xi} u(z) = f(\xi)$$

kaikilla $\xi \in \partial\Omega$, joten $\underline{H}_f \in \mathcal{U}_f$ ja $\underline{H}_f \geq \overline{H}_f$. Siis f on resolutiivinen funktio.

□

Kompakteissa joukoissa jatkuvia funktioita voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti subharmonisten funktioiden avulla.

Lemma 2.26. Olkoot $K \subset \mathbb{C}$ kompakti osajoukko, $f\colon K \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio ja $B \supset K$ avoin kuula. Tällöin on olemassa funktio $u\colon B \to \mathbb{R}$, joka on kahden subharmonisen funktion erotus, ja jolle pätee

$$\sup_{z \in K} |f(z) - u(z)| < \varepsilon.$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska K on kompakti, niin Stonen-Weierstrassin lauseen (ks. [Rud1, Thm. 7.32]) nojalla on olemassa kahden muuttujan polynomi P, $P(z) = P(a, b)$, $z = a + ib$, jolle pätee

$$\sup_{z \in K} |f(z) - P(z)| < \varepsilon.$$

Täytyy siis osoittaa, että polynomi P voidaan lausua kahden subharmonisen funktion erotuksena. Olkoon nyt $v\colon B \to \mathbb{R}$, $v(z) = |z|^2$. Tällöin $\Delta v = \Delta(a^2 + b^2) = 4$, joten αv on jatkuva subharmoninen funktio kaikilla $\alpha \geq 0$.Valitaan nyt $\alpha_0 \geq 0$ niin suureksi, että kiekossa B pätee $\Delta(P + \alpha_0 v) \geq 0$. Tällöin $P = (P + \alpha_0 v) - \alpha_0 v$, missä $(P + \alpha_0 v)$ ja $\alpha_0 v$ ovat subharmonisia, joten voimme valita $u = P$. □

Seuraava lause tunnetaan Wienerin lauseena ja se antaa tärkeän tuloksen koskien jatkuvia reunafunktioita.

Lause 2.27. Olkoot $\Omega \subset \mathbb{C}$ rajoitettu alue ja $f\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tällöin f on resolutiivinen.

Todistus. Koska Ω on rajoitettu, niin $\partial\Omega$ on kompakti ja voidaan soveltaa lemmaa 2.26. Olkoon nyt $B \supset \partial\Omega$ avoin kiekko. Tällöin on olemassa funktio $u = v - w$, missä v ja w ovat jatkuvia subharmonisia funktioita kiekossa B, ja jolle pätee

$$\sup_{\xi \in \partial\Omega} |f(\xi) - u(\xi)| < \varepsilon.$$

Lemman 2.25 nojalla funktiot $v|_{\partial\Omega}$ ja $w|_{\partial\Omega}$ ovat resolutiivisia, joten $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} - w|_{\partial\Omega}$ on resolutiivinen. Funktio $u|_{\partial\Omega}$ approksimoi funktiota f tasaisesti joukossa $\partial\Omega$ mielivaltaisella tarkkuudella, joten lemman 2.24 nojalla f on resolutiivinen. □

3 Harmoninen mitta

Resolutiivisten funktioiden kautta saamme Rieszin esityslauseen avulla määriteltyä harmonisen mitan. Harmoninen mitta voidaan määritellä koko avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja myös rajoittamattomille joukoille, mutta tässä työssä määrittelemme sen vain kompleksitason $\mathbb{C}$ rajoitetuissa osajoukoissa, sillä myöhemmin esitettävät Makarovin tulokset koskevat vain tätä tapausta. Esittämämme teoria seuraa lähdettä [Hel], jossa harmonista mittaa käsitellään myös yleisemmissä tapauksissa.

Aloitamme määrittelemällä yleisesti mittateoriian liittyvät käsitteet, joita tarvitsemme tässä työssä. Lisäksi Rieszin esityslauseen antamalla mitalla on tärkeitä ominaisuuksia, joiden määritelmät on syytä esitellä. Määritelmät seuraavat lähteitä [Rud2] ja [Mat].

Määritelmä 3.1. Olkoot μ_1 ja μ_2 mittoja σ-algebralla $\mathcal{M}$. Sanomme, että mitta μ_2 on absoluuttisesti jatkuva mitan μ_1 suhteen, jos $\mu_2(E) = 0$ kaikilla $E \in \mathcal{M}$, joille $\mu_1(E) = 0$. Tällöin merkitsemme $\mu_2 \ll \mu_1$.

Määritelmä 3.2. Olkoot μ_1 ja μ_2 mittoja σ-algebralla $\mathcal{M}$. Sanomme, että mitat μ_1 ja μ_2 ovat keskenään singulaariset, jos on olemassa joukko $A \in \mathcal{M}$, jolle pätee

$$\mu_1(A) = 0 = \mu_2(A^c).$$

Tällöin merkitsemme $\mu_1 \perp \mu_2$.

Määritelmä 3.3. Mitta μ on Borel-mitta, jos tason $\mathbb{C}$ kaikki Borel-joukot ovat mitallisia.

Pelkkä Borel-joukkojen mitallisuus ei aina riitä, vaan monesti haluamme mitalle myös hieman vahvempia ominaisuuksia, joiden avulla voimme approksimoida kaikkia mitallisia joukkoja avoimien ja kompaktien joukkojen avulla. Näin päädymme määrittelemään säännöllisen Borel-mitan.

Määritelmä 3.4. Borel-mitta μ on säännöllinen, jos sille pätee seuraavat ehdot:

1. $\mu(K) < \infty$ kaikilla kompakteilla joukoilla $K \subset \mathbb{C}$.
2. Kaikilla mitallisilla joukoilla E pätee
$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) \,:\, E \subset V,\, V \text{ avoin}\}.$$
3. Kaikilla avoimilla joukoilla $V \subset \mathbb{C}$ pätee
$$\mu(V) = \sup\{\mu(K) \,:\, K \subset V,\, K \text{ kompakti}\}.$$

Määritelmä 3.5. Avaruuden X mitta μ on todennäköisyysmitta, jos pätee $\mu(X) = 1$.

On syytä huomata, että kaikista mitoista, joilla koko avaruuden mitta on äärellinen, saadaan todennäköisyysmitta suoraan skaalaamalla koko avaruuden mitalla.

Määritelmä 3.6. Olkoon μ kompleksitason $\mathbb{C}$ säännöllinen Borel-mitta. Mitan μ kantaja, supp(μ), on pienin suljettu joukko F, jolle pätee $\mu(\mathbb{C} \setminus F) = 0$. Tarkemmin

$$\operatorname{supp}(\mu) = \mathbb{C} \setminus \bigcup\{V : V \subset \mathbb{C} \text{ avoin}, \mu(V) = 0\}.$$

Kaikki mitat eivät suinkaan ole säännöllisiä, mutta kuten seuraava lause osoittaa, niin ”hyvissä” avaruuksissa lokaalisti äärelliset mitat toteuttavat myös muut säännöllisyyden ehdot. Tarkemmin sanottuna ”hyväksi” avaruudeksi kelpaa lokaalisti kompaktit Haudorff-avaruudet, missä avoimet joukot voidaan lausua numeroituvana yhdisteenä kompakteista joukoista.

Lause 3.7. Olkoon μ kompleksitason lokaalisti äärellinen Borel-mitta, eli $\mu(K) < \infty$ kaikilla kompakteilla joukoilla $K \subset \mathbb{C}$. Tällöin μ on säännöllinen.

Todistus. Olkoon $E \subset \mathbb{C}$ avoin. Tällöin pätee

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cap K_n,$$

missä $F_n = \{z \in E : \operatorname{dist}(z, E^c) \geq 1/n\}$ ja $K_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n\}$. Jokainen $F_n \cap K_n$ on kompakti, joten mielivaltainen tason avoin osajoukko E voidaan lausua numeroituvana yhdisteenä kompakteista joukoista. Näin ollen lauseen [Rud2, Thm.2.18] nojalla mitta μ on säännöllinen. $\square$

Rieszin esityslause sanoo, että positiiviset ja lineaariset funktionaalit voidaan esittää säännöllisen Borel-mitan avulla. Haluammekin seuraavaksi osoittaa, että kuvaus $f \mapsto H_f$ täyttää vaadittavat ehdot, jolloin saisimme ehdokkaan harmoniseksi mitaksi.

Lause 3.8. Olkoot $\Omega \subset \mathbb{C}$ rajoitettu alue ja $z \in \Omega$. Tällöin kuvaus $L_z \colon C(\partial\Omega) \to \mathbb{R}$, $L_z(f) = H_f(z)$ on positiivinen ja lineaarinen funktionaali. Lisäksi on olemassa yksikäsitteinen reunan $\partial\Omega$ Borel-joukoilla Bor$(\partial\Omega)$ määritelty todennäköisyysmitta μ_z, jolle pätee

$$H_f(z) = L_z(f) = \int_{\partial\Omega} f d\mu_z, \tag{3.1}$$

kun $f \in C(\partial\Omega)$.

Todistus. Osoitetaan ensin kuvauksen L_z lineaarisuus. Olkoot $f, g \in C(\partial\Omega)$. Tällöin lauseen 2.27 nojalla molemmat funktiot ovat resolutiivisia ja lemman 2.23 nojalla pätee

1. $L_z(f+g) = H_{f+g}(z) = H_f(z) + H_g(z) = L_z(f) + L_z(g)$
2. $L_z(\alpha f) = H_{\alpha f}(z) = \alpha H_f(z) = L_z$,

joten L_z on lineaarinen. Olkoon $f \geq 0$. Tällöin lemman 2.23 nojalla

$$L_z(f) = H_f(z) \geq H_0(z) = 0.$$

Siis L_z on positiivinen ja lineaarinen funktionaali. Nyt Rieszin esityslauseen (ks. [Rud2, Thm 2.14]) nojalla on olemassa yksikäsitteinen Borel-mitta μ_z, jolle (3.1) pätee. Lisäksi, jos $g \equiv 1$, niin $H_g(z) \equiv 1$ ja siten $\mu_z(\partial\Omega) = 1$ kaikilla $z \in \Omega$. Siis μ_z on todennäköisyysmitta. $\square$

Lause 3.9. Olkoot $\Omega \subset \mathbb{C}$ rajoitettu alue sekä $z_1, z_2 \in \Omega$. Tällöin mitat μ_{z_1} ja μ_{z_2} ovat keskenään absoluuttisesti jatkuvia.

Todistus. Tarkastellaan ensin tapaus, missä molemmat pisteet kuuluvat avoimeen kiekkoon. Olkoon $B = B(z_0, R)$ avoin kuula, jolle pätee $\overline{B} \subset \Omega$ ja $z_1, z_2 \in B$ sekä olkoon $f\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Koska funktio H_f on harmoninen, niin Harnackin epäyhtälön nojalla on olemassa vakio $K \in \mathbb{R}$, jolle pätee

$$\frac{1}{K} H_f(z_0) \leq H_f(z_1) \leq K H_f(z_0)$$

ja

$$\frac{1}{K} H_f(z_0) \leq H_f(z_2) \leq K H_f(z_0).$$

Yhdistämällä nämä arviot saadaan

$$\frac{1}{K^2} H_f(z_2) \leq H_f(z_1) \leq K^2 H_f(z_2),$$

mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\frac{1}{K^2} \int_{\partial\Omega} f(\xi)\, d\mu_{z_2}(\xi) \leq \int_{\partial\Omega} f(\xi)\, d\mu_{z_1}(\xi) \leq K^2 \int_{\partial\Omega} f(\xi)\, d\mu_{z_2}(\xi). \tag{3.2}$$

Koska μ_z on säännöllinen Borel-mitta, niin kaikilla avoimilla joukoilla $V \subset \partial\Omega$ pätee

$$\mu_z(V) = \sup\{\mu_z(K) \,:\, K \subset V,\ K \text{ kompakti}\}.$$

Tästä seuraa, että pätee

$$\mu_z(V) = \sup\{H_f(z) \,:\, f \text{ jatkuva ja } 0 \le f \le \chi_V\},$$

ja kun $E \subset \partial\Omega$ mikä tahansa mitallinen joukko, niin

$$\mu_z(E) = \inf\{\mu_z(V) \,:\, E \subset V, \text{ V avoin}\}.$$

Koska yhtälössä (3.2) mitat μ_{z_1} ja μ_{z_2} eivät riipu jatkuvasta funktioista f, niin edellisen nojalla saadaan

$$\frac{1}{K^2}\mu_{z_2}(E) \le \mu_{z_1}(E) \le K^2\mu_{z_2}(E), \tag{3.3}$$

kun $E \subset \partial\Omega$. Tämä osoittaa, että mitat μ_{z_1} ja μ_{z_2} ovat keskenään absoluuttisesti jatkuvia.

Koska Ω on rajoitettu alue, niin jokainen pistepari $z_1, z_2 \in \Omega$ voidaan yhdistää äärellisellä ketjulla avoimia kuulia, jolloin mitoille μ_{z_1} ja μ_{z_2} saadaan epäyhtälö (3.3), missä vakio K riippuu vain pisteistä z_1 ja z_2. Tämä osoittaa väitteen. $\square$

Sen lisäksi, että mitat μ_{z_1} ja μ_{z_2} ovat keskenään absoluuttisesti jatkuvia, saamme kaavasta (3.3), että niiden Radon-Nikodym-tiheyksien suhde

$$\frac{\mu_{z_1}(B(z,r))}{\mu_{z_2}(B(z,r))}$$

on rajoitettu sekä alhaalta että ylhäältä.

Seuraavaksi huomaamme, että edellä määritellyn mitan avulla saadaan rajoitetusta Borel-mitallisesta funktiosta mudostettua harmoninen funktio.

Lause 3.10. Olkoot $\Omega \subset \mathbb{C}$ rajoitettu alue ja $f\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ rajoitettu Borel-funktio. Tällöin funktio

$$H_f(z) = \int_{\partial\Omega} f(\xi)\, d\mu_z(\xi), \quad z \in \Omega$$

on harmoninen alueessa Ω.

Todistus. Funktio f on rajoitettu Borel-funktio, joten pätee $f \in L^1(\partial\Omega, \mu_z)$. Koska jatkuvien funktioiden avaruus $C(\partial\Omega) \subset L^1(\partial\Omega, \mu_z)$ on tiheä (ks. [Rud2, Thm 3.14]), niin on olemassa jono $\{g_j\}$, missä funktiot g_j ovat jatkuvia, ja

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\partial\Omega} g_j(\xi)\, d\mu_z(\xi) = \int_{\partial\Omega} f(\xi)\, d\mu_z(\xi). \tag{3.4}$$

Lauseen 3.9 nojalla kaikki mitat μ_z ovat keskenään absoluuttisesti jatkuvia, joten Radonin-Nikodymin lauseesta (ks. [Rud2, Thm 6.10]) seuraa, että yhtälön (3.4) suppeneminen pätee kaikilla $z \in \Omega$. Nyt funktiot

$$\int_{\partial\Omega} g_j(\xi)\, d\mu_z(\xi) = H_{g_j}(z)$$

ovat harmonisia alueessa Ω ja suppenevat lokaalisti tasaisesti kohti funktioita $H_f(z)$, joten H_f on harmoninen alueessa Ω. □

Nyt olemme saaneet osoitettua, että Rieszin esityslauseen antamalla mitalla on kaikki halutut ominaisuudet, joten olemme valmiit määrittelemään tason $\mathbb{C}$ harmonisen mitan.

Määritelmä 3.11. Olkoot $\Omega \subset \mathbb{C}$ rajoitettu alue ja funktio $f \in C(\partial\Omega)$. Reunan $\partial\Omega$ Borel-joukkojen muodostamassa σ-algebrassa $\mathrm{Bor}(\partial\Omega)$ määritelty mitta μ_z, joka saadaan kaavalla

$$H_f(z) = L_z(f) = \int_{\partial\Omega} f d\mu_z$$

on harmoninen mitta pisteessä $z \in \Omega$.

Joukon $E \subset \partial\Omega$ harmoninen mitta pisteessä $z \in \Omega$ on $\mu_z(E)$, joten voimme karkeasti ottaen sanoa, että joukon E harmoninen mitta on ratkaisu Dirichlet'n ongelmaan

$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0 & \text{kun } z \in \Omega \\ u(z) = \chi_E(z) & \text{kun } z \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Tapauksessa, jossa Ω on yksikkökiekko, joukon E harmoninen mitta saadaan Poissonin kaavan avulla ja sillä on suora yhteys Lebesguen mittaan $|E|$.

Lause 3.12. Olkoot $\Omega = \mathbb{D}$ yksikkökiekko ja $E \subset \partial\mathbb{D}$ Borel-joukko. Tällöin joukon E harmoninen mitta pisteessä $z \in \mathbb{D}$ on

$$\mu_z(E) = \frac{1}{2\pi} \int_E \frac{1 - |z|^2}{|z - \xi|^2} d\xi.$$

Erityisesti pätee

$$\mu_0(E) = \frac{|E|}{2\pi}.$$

Todistus. Olkoon $f \in C(\partial\mathbb{D})$ jatkuva funktio. Nyt lauseen 2.13 nojalla

$$P_f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z|^2}{|z-\xi|^2} f(\xi)d\xi$$

on harmoninen funktio yksikkökiekossa $\mathbb{D}$, jolle pätee

$$\lim_{z\to\xi} P_f(z) = f(\xi)$$

kaikilla $\xi \in \partial\mathbb{D}$. Näin ollen määritelmän 3.11 nojalla pätee

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|z-\xi|^2}d\xi = d\mu_z$$

ja ylläoleva tiheys määrittelee harmonisen mitan yksikkökiekon reunalle pisteen $z \in \mathbb{D}$ suhteen. Joukon E harmoninen mitta pisteen z suhteen saadaan siis kaavalla

$$\mu_z(E) = \frac{1}{2\pi}\int_E \frac{1-|z|^2}{|z-\xi|^2}d\xi$$

ja erityisesti pisteen $z = 0$ suhteen pätee

$$\mu_0(E) = \frac{1}{2\pi}\int_E \frac{1}{|\xi|^2}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_E d\xi = \frac{|E|}{2\pi}.$$

$\square$

Lauseen 3.9 nojalla joukon E harmoninen mitta $\mu_{z_0}(E) = 0$ jollakin $z_0 \in \mathbb{D}$ jos ja vain jos $\mu_z(E) = 0$ kaikilla $z \in \mathbb{D}$. Tämän ja edellä olevan lauseen perusteella harmoninen mitta on yksikkökiekossa absoluuttisesti jatkuva Lebesguen mitan suhteen.

3.1 Harmoninen mitta ja konformikuvaukset

Harmoniset funktiot säilyvät harmonisina tason konformisissa muunnoksissa, joten on syytä odottaa, että myöskään harmoninen mitta ei muutu konformikuvauksissa. Tarkastelemme tätä ensin Jordan-alueiden tapauksessa, sillä tiedämme, että tällöin alueiden välinen konformikuvaus voidaan laajentaa homeomorfismiksi myös alueiden reunoille (ks. [Pom3, Thm. 9.10]).

Lause 3.13. Olkoot $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ rajoitettuja alueita ja olkoon $E \subset \partial\Omega$ Borel-joukko. Oletetaan, että on olemassa homeomorfismi $f\colon \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$, joka on konforminen alueen Ω sisäpisteissä. Tällöin kaikilla $z \in \Omega$ pätee

$$\mu_z^{\Omega}(E) = \mu_{f(z)}^{\Omega'}(f(E)).$$

Todistus. Olkoon $g \in C(\partial\Omega')$. Tällöin pätee $g \circ f \in C(\partial\Omega)$ ja

$$\int_{\partial\Omega} (g \circ f)(\xi) d\mu_z^\Omega := H_{g\circ f}(z)$$

on alueessa Ω harmoninen funktio, jolle pätee

$$\lim_{w\to\zeta} H_{g\circ f}(w) = g \circ f(\xi),$$

kun $\xi = f^{-1}(\zeta)$ ja $z = f^{-1}(w)$.

Toisaalta funktio

$$\int_{\Omega'} g(\zeta) d\mu_w^{\Omega'} := H_g(w)$$

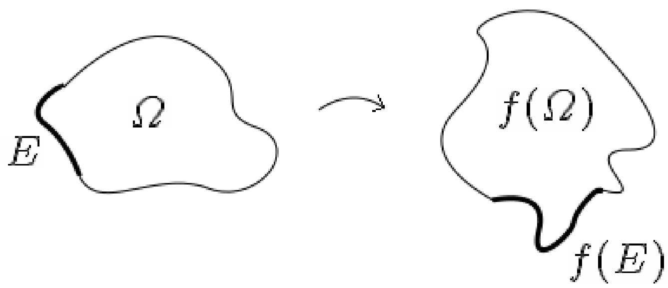
on harmoninen alueessa Ω' ja pätee

$$\lim_{w\to\zeta} H_g(w) = g(\zeta),$$

näin ollen harmoniset mitat μ_z^Ω ja $\mu_{f(z)}^{\Omega'}$ yhtyvät jatkuvilla funktiolla. Koska Borel-joukkojen karakteristiset funktiot ovat integroituvia, joukon E mitta saadaan integroimalla funktiota χ_E ja

$$\mu_{f(z)}^{\Omega'}(E) = \int_{f^{-1}(E)} d\mu_z^\Omega = \mu_z^\Omega(f^{-1}(E)).$$

□



Kuva 1: Funktio f kuvaa Jordan-alueen Ω ja joukon E konformisesti Jordan-alueeksi $f(\Omega)$ ja joukoksi $f(E)$.

Riemannin kuvauslauseen, tarkemmin Caratheodoryn version (ks. [Pom3, Thm. 9.9]), nojalla jokaisella Jordan-alueella Ω on olemassa konformikuvaus $f\colon \mathbb{D} \to \Omega$, joka jatkuu homeomorfismiksi alueiden reunalle. Näin ollen Jordan-alueiden tapauksessa saamme harmoniselle mitalle seuraavan tuloksen.

Korollaari 3.14. Olkoot Ω Jordan-alue, $E \subset \partial\Omega$, $z \in \Omega$ ja $f\colon \mathbb{D} \to \Omega$ konforminen, jolle pätee $f(0) = z_0$. Tällöin joukon E harmoninen mitta saadaan kaavalla

$$\mu_{z_0}(E) = \frac{|f^{-1}(E)|}{2\pi}.$$

Jos Ω ei ole Jordan-alue, niin tilanne on hieman monimutkaisempi, sillä tällöin konformikuvauskuvaus ei ole suoraan jatkettavissa reunalle asti. Osoittautuu kuitenkin, että harmonisella mitalla ja Lebesguen mitalla on edellisen kaltainen yhteys myös tässä tapauksessa. Tämän osoittamiseksi käytämme harmonisten mittojen heikko* suppenemista.

Määritelmä 3.15. Olkoon mitat μ_k, $k \in \mathbb{N}$, ja μ tason $\mathbb{C}$ säännöllisiä Borel-mittoja. Sanomme, että mitat μ_k suppenevat heikko*:sti kohti mittaa μ, jos kaikilla funktioilla $f \in C_0(\mathbb{C})$ pätee

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{C}} f\, d\mu_k = \int_{\mathbb{C}} f\, d\mu.$$

Lemma 3.16. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ rajoitettu alue ja olkoot $\Omega_k \subset \Omega$ alueita, joille pätee

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots \subset \Omega_k \subset \Omega = \bigcup_k \Omega_k$$

ja olkoon $z \in \Omega$. Tällöin alueiden Ω_k reunoilla määritellyt harmoniset mitat μ_z^k suppenevat heikko*:sti kohti alueen Ω reunalla määriteltyä mittaa μ_z.

Todistus. Koska $z \in \Omega$, niin on olemassa k_0, jolle pätee $z \in \Omega_k$, kun $k \geq k_0$. Näin ollen voimme olettaa, että pätee $z \in \Omega_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja olkoon funktio $f \in C_0(\mathbb{C})$. Koska f on kompaktikantajainen, se on tasaisesti jatkuva. Nyt on olemassa säde $r_1 > 0$, jolle kaikilla $\xi \in \partial\Omega$ ja kaikilla $z \in B(\xi, r_1)$ pätee

$$|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon/2.$$

Olkoon $u \in \mathcal{U}_{f|_{\partial\Omega}}$ superharmoninen funktio. Koska kaikilla $\xi \in \partial\Omega$ pätee

$$\liminf_{z\to\xi} u(z) \geq f(\xi),$$

niin jokaista pistettä $\xi \in \partial\Omega$ vastaa säde r_ξ, jolla pätee

$$u(z) + \varepsilon/2 \geq f(\xi)$$

kaikilla $z \in B(\xi, r_\xi) \cap \Omega$.

Valitaan nyt reunalle $\partial\Omega$ avoin peite

$$\{B(\xi, r_\xi) \,:\, \xi \in \partial\Omega\},$$

missä säteet r_ξ ovat kuten edellä. Koska $\partial\Omega$ on kompakti joukko, on olemassa äärellinen osapeite. Voimme siis valita äärellisen määrän kuulia $B(\xi_i, r_{\xi_i})$, joilla pätee

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(\xi_i, r_{\xi_i}).$$

Voimme olettaa, että tämä yhdiste ei sisällä koko aluetta Ω. Koska kuulia on äärellinen määrä, on olemassa

$$r_2 := \min\left\{\mathrm{dist}(z,\xi) \,:\, z \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B(\xi_i, r_{\xi_i}),\ \xi \in \partial\Omega\right\} > 0.$$

Olkoon nyt $r = \min\{r_1, r_2\}$ ja merkitään

$$B(\partial\Omega, r) = \{z \in \Omega \,:\, \mathrm{dist}(z, \partial\Omega) < r\}.$$

Tällöin kaikilla $z \in B(\partial\Omega, r)$ pätee

$$u(z) + \varepsilon > f(z).$$

Joukko $\Omega \setminus B(\partial\Omega, r) \subset \Omega$ on kompakti ja sisältyy joukkojen Ω_k yhdisteeseen, joten voimme valita äärellisen kokoelman joukkoja Ω_k, jotka peittävät sen. Olkoon nyt k_0 maksimi tämän kokoelman indekseistä. Koska $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$, niin kaikilla $j \geq k_0$ pätee $\partial\Omega_j \subset B(\partial\Omega, r)$ ja näin ollen

$$\liminf_{z\to\xi} u|_{\Omega_j}(z) + \varepsilon \geq f|_{\partial\Omega_j}(\xi)$$

kaikilla $\xi \in \partial\Omega_j$ ja $j \geq k_0$. Tämän nojalla pätee $u|_{\Omega_j} + \varepsilon \in \mathcal{U}_{f|_{\partial\Omega_j}}$.

Funktio $u \in \mathcal{U}_{f|_{\partial\Omega}}$ oli mielivaltainen, joten ottamalla infimum yli funktioiden u, saadaan

$$\overline{H}_{f|_{\partial\Omega}} \geq \overline{H}_{f|_{\partial\Omega_j}} - \varepsilon = H_{f|_{\partial\Omega_j}} - \varepsilon, \quad j \geq k_0.$$

Olkoon nyt $u \in \mathcal{L}_{f|_{\partial\Omega}}$ subharmoninen funktio. Yllä olevaan tapaan löydämme indeksin k_0 niin, että kaikilla $\xi \in \partial\Omega_j$ pätee

$$\limsup_{z\to\xi} u|_{\Omega_j}(z) + \varepsilon \leq f|_{\partial\Omega_j}(\xi),$$

kun $j \geq k_0$. Ottamalla nyt supremum yli funktioiden u saamme

$$\underline{H}_{f|_{\partial\Omega}} \leq \underline{H}_{f|_{\partial\Omega_j}} + \varepsilon = H_{f|_{\partial\Omega_j}} + \varepsilon, \quad j \geq k_0.$$

Näin ollen riittävän suurella j joukossa Ω_j pätee

$$H_{f|\partial\Omega} - \varepsilon \leq H_{f|\partial\Omega_j} \leq H_{f|\partial\Omega} + \varepsilon.$$

Tarkastelemalla tätä pisteessä z, saamme funktion H_f määritelmän nojalla, että

$$\int_{\mathbb{C}} f|_{\partial\Omega}(\xi)\, d\mu_z(\xi) - \varepsilon \leq \int_{\mathbb{C}} f|_{\partial\Omega}(\xi)\, d\mu_z^j(\xi) \leq \int_{\mathbb{C}} f|_{\partial\Omega}(\xi)\, d\mu_z(\xi) + \varepsilon.$$

Tämä osoittaa väitteen. □

Lause 3.17. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ rajoitettu yhdesti yhtenäinen alue. Oletetaan, että on olemassa konformikuvaus $f\colon \mathbb{D} \to \Omega$. Olkoon $z_0 \in \Omega$ piste, jolle pätee $z_0 = f(0)$ ja olkoon $E \subset \partial\Omega$. Tällöin joukon E harmoninen mitta pisteessä z_0 saadaan kaavalla

$$\mu_{z_0}(E) = \frac{|f^{*-1}(E)|}{2\pi},$$

missä f^* on funktion f jatke reunalle kaikissa niissä pisteissä, joissa radiaalinen raja-arvo $\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) = f^*(e^{i\theta})$ on olemassa.

Todistus. Koska alue Ω on rajoitettu ja yhdesti yhtenäinen, niin Riemannin kuvauslauseen nojalla on aina olemassa haluttu konformikuvaus f. Lisäksi funktiolle f pätee, että raja-arvo

$$\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) = f^*(e^{i\theta})$$

on olemassa melkein kaikilla pisteillä $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$ (ks. [Rud2, Thm. 11.32]).

Olkoon $r_k = 1 - 1/k$ ja olkoon $B(0, r_k)$ avoimia kiekkoja. Tällöin pätee

$$B(0, r_1) \subset B(0, r_2) \subset \ldots \subset B(0, r_k) \subset \mathbb{D} = \bigcup_k B(0, r_k),$$

ja olkoon nyt $\Omega_k = f(B(0, r_k))$. Tällöin alueille $\Omega_k \subset \Omega$ pätee

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots \subset \Omega_k \subset \Omega = \bigcup_k \Omega_k.$$

Olkoon nyt funktio $g \in C_0(\mathbb{C})$ ja $z_0 \in \Omega$ piste, jolle pätee $z_0 = f(0)$. Tällöin $z_0 \in \Omega_k$ kaikilla k ja integroimalla funktiota g alueen Ω_k reunalla määritellyn harmonisen mitan $\mu_{z_0}^k$ suhteen saadaan Poissonin kaavan avulla

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} g(\xi)\, d\mu_{z_0}^k(\xi) &= \int_{\partial\Omega_k} g(\xi)\, d\mu_{z_0}^k(\xi) \\
&= H_g^{\Omega_k}(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(f(r_k e^{i\theta}))\frac{r_k^2 - |0|^2}{|r_k e^{i\theta} - 0|^2}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(f(r_k e^{i\theta}))\, d\theta.
\end{aligned}$$

Lemman 3.16 nojalla mitat μ_z^k suppenevat heikko*:sti kohti mittaa μ_z ja raja-arvo $f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ on olemassa melkein kaikissa reunan $\partial\mathbb{D}$ pisteissä. Toisaalta ylläolevan yhtälön oikealla puolella voimme käyttää dominoidun konvergenssin lausetta, joten voidaan ottaa raja-arvo puolittain. Tällöin saadaan

$$\int_{\mathbb{C}} g(\xi)\, d\mu_z(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(f^*(e^{i\theta}))\, d\theta.$$

Olkoon nyt $E \subset \partial\Omega$ avoin joukko. Tällöin on olemassa avoin joukko $F \subset \mathbb{C}$, jolle pätee $E = F \cap \partial\Omega$. Avointen joukkojen karakteristisia funktioita voidaan approksimoida kasvavalla jonolla jatkuvia funktioita. Lisäksi jatkuva funktio rajoitettuna pienempään joukkoon on edelleen jatkuva, joten edellisen nojalla pätee

$$\mu_{z_0}(E) = \int_{\partial\Omega} \chi_E(\xi)\, d\mu_{z_0}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_{f^{*-1}(E)}(e^{i\theta})\, d\theta = \frac{|f^{*-1}(E)|}{2\pi}.$$

Koska mitat yhtyvät kaikilla avoimilla joukoilla, niin säännöllisen mitan määritelmän mukaan ne yhtyvät kaikissa joukoissa. □

4 Hausdorff-mitoista

Lebesguen mitta on monessa tilanteessa liian suurpiirteinen mitatakseen joukkoja tarkasti. Esimerkiksi tasossa sekä piste että suora ovat 2-ulotteisen Lebesguen mitan mielessä nollamittaisia. Esittelemme seuraavaksi tason $\mathbb{C}$ Borel-joukkojen σ-algebrassa määritellyt Hausdorff-mitat $\mathcal{H}_h$, jotka muodostavat Lebesguen mittaa herkemmän mittaperheen. Määrittelemme Hausdorff-mitat seuraamalla lähteitä [Gar] ja [Rog], joista voi lukea enemmän, sillä esitämme vain tuloksia, joita tarvitsemme myöhemmin tässä työssä.

Määritelmä 4.1. Jatkuva ja kasvava funktio $h\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, jolle pätee $h(0) = 0$ ja $h(t) > 0$, kun $t > 0$ on mittafunktio.

Määritelmä 4.2. Olkoot h mittafunktio ja $\delta > 0$. Jokaiselle tason rajoitetulle osajoukolle $E \subset \mathbb{C}$ määrittelemme

$$\mathcal{H}_h^\delta(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty h(r_i) \;:\; E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(z_i, r_i),\, 0 < r_i \leq \delta\right\}.$$

Tällöin $\mathcal{H}_h^\delta$ on muuttujan δ suhteen vähenevä funktio ($\mathcal{H}_h^\delta$ pienenee, kun δ kasvaa), joten raja-arvo

$$\mathcal{H}_h(E) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}_h^\delta(E)$$

on olemassa (arvo $+\infty$ on mahdollinen). Luku $\mathcal{H}_h(E)$ on joukon E h-Hausdorff-mitta.

Yleisin mittafunktio on $h(t) = t^\alpha$, missä $\alpha > 0$. Tällöin käytämme merkintää $\mathcal{H}_h = \mathcal{H}_\alpha$ ja sanomme mittaa $\mathcal{H}_\alpha$ α-ulotteiseksi Hausdorff-mitaksi. Karkeasti ottaen $\mathcal{H}_1$-mitta vastaa pituusmittaa ja $\mathcal{H}_2$-mitta pinta-alaa.

Lause 4.3. Mitta $\mathcal{H}_h$ on Borel-mitta.

Todistus. [Rog, Thm. 27] $\square$

Seuraavan lemman avulla saamme tietoa Hausdorff-mittojen absoluuttisesta jatkuvuudesta.

Lemma 4.4. Olkoot $E \subset \mathbb{C}$ ja h_1 sekä h_2 mittafunktioita, joille on voimassa

$$\lim_{t\to 0} \frac{h_1(t)}{h_2(t)} = 0.$$

Tällöin $\mathcal{H}_{h_1}(E) = 0$ aina, kun $\mathcal{H}_{h_2}(E) < +\infty$ ja $\mathcal{H}_{h_2}(E) = +\infty$ aina, kun $\mathcal{H}_{h_1}(E) > 0$.

Todistus. Olkoon $\mathcal{H}_{h_2}(E) = M < +\infty$ ja olkoot $\varepsilon > 0$ sekä $\delta > 0$ mielivaltaisia. Koska $h_1(t)/h_2(t) \to 0$, kun $t \to 0$, niin voimme valita luvun t_0, jolle pätee $0 < t_0 < \delta$ ja

$$\frac{h_1(t)}{h_2(t)} < \frac{\varepsilon}{M+1},$$

kun $0 \leq t \leq t_0$. Valitaan nyt kuulat $B(z_i, r_i)$, joille pätee $r_i \leq t_0$, $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(z_i, r_i)$ ja $\sum_{i=1}^{\infty} h_2(r_i) < M+1$. Koska h_1 on mittafunktio, niin $h_1(0) = 0$ ja pätee

$$h_1(r_i) \leq \frac{\varepsilon}{M+1} h_2(r_i),$$

mistä seuraa, että

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_1(r_i) \leq \frac{\varepsilon}{M+1} \sum_{i=1}^{\infty} h_2(r_i) < \varepsilon$$

ja edelleen

$$\mathcal{H}_{h_1}^{\delta}(E) < \varepsilon.$$

Koska luvut ε ja δ olivat mielivaltaisia, niin täytyy olla $\mathcal{H}_{h_1}(E) = 0$. Lemman toinen puoli seuraa suoraan ylläolevasta, sillä päädymme ristiriitaan tekemällä vastaoletuksen, että $\mathcal{H}_{h_2}(E) < +\infty$, kun $\mathcal{H}_{h_1}(E) > 0$. $\square$

Lemmasta 4.4 seuraa selvästi, että jos $\alpha < \beta$ ja $\mathcal{H}_\alpha(E) = 0$, niin $\mathcal{H}_\beta(E) = 0$. Vastaavasti jos pätee $\mathcal{H}_\alpha(E) > 0$, niin $\mathcal{H}_\beta(E) = +\infty$. Tämän nojalla voimme määritellä jokaisella tason osajoukolla $E \subset \mathbb{C}$ yksikäsitteisen luvun $\dim_{\mathcal{H}}(E)$.

Määritelmä 4.5. Joukon $E \subset \mathbb{C}$ Hausdorff-dimensio on luku

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) = \inf \{\alpha : \mathcal{H}_\alpha(E) = 0\}.$$

Hausdorff-dimensio kuvaa joukon ”kokoa”ja luontevasti jokaisen suoran Hausdorff-dimensio on yksi ja jokaisen pinta-alaltaan positiivisen joukon Hausdorff-dimensio on kaksi. Yleisesti Hausdorff-dimensiosta ei kuitenkaan voida sanoa mitään, vaan se voi tason osajoukoilla olla tapauskohtaisesti mikä tahansa luku väliltä $[0, 2]$.

5 Harmonisen mitan ja Hausdorff-mitan singulaarisuus

Øksendalin konjektuuri väittää, että kompleksitasossa harmoninen mitta on singulaarinen kaikkien Hausdorff-mittojen $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha > 1$, kanssa. Makarov ratkaisi Øksendalin konjektuuria hieman yleisemmän ongelman vuonna 1985 tapauksessa, jossa alue Ω on yhdesti yhtenäinen. Makarovin tuloksesta seuraa, että harmonisen mitan kantajan Hausdorff-dimensio on korkeintaan yksi.

Pommerenke laajensi Makarovin tulosta vuonna 1986 ja seuraamme tässä työssä tätä julkaisua [Pom1]. Osoittaaksemme Pommerenken väitteen tarvitsemme tuloksia myös lähteistä [Pom3] ja [Sak2].

5.1 Analyyttisten funktioiden raja-arvoista

Tiedämme, että harmoniset funktiot toteuttavat maksimiperiaatteen, mutta seuraavaksi osoitamme, että harmonisille funktioille saadaan yläraja myös hieman heikommilla oletuksilla. Seuraava lause tunnetaan Lindelöfin maksimiperiaatteena.

Lemma 5.1 (Lindelöfin maksimiperiaate)**.** Olkoon u harmoninen ja ylhäältä rajoitettu funktio alueessa Ω, jolle $\overline{\Omega} \neq \mathbb{C}$. Olkoon $F \subset \partial\Omega$ äärellinen joukko ja oletetaan, että

$$\limsup_{z\to\xi} u(z) \le M$$

kaikilla $\xi \in \partial\Omega \setminus F$. Tällöin $u(z) \le M$ kaikilla $z \in \Omega$.

Todistus. Olkoon $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$. Tällöin kuvaus $z \mapsto 1/(z - z_0)$ kuvaa alueen Ω rajoitetuksi alueeksi, joten voimme olettaa, että Ω on rajoitettu. Olkoon $\varepsilon > 0$. Merkitään $F = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ja määritellään funktio

$$u_\varepsilon(z) := u(z) - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \log\left(\frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{|z - \xi_j|}\right), \quad z \in \Omega.$$

Nyt funktio u_ε on harmoninen ja kaikilla $\xi \in \partial\Omega$ pätee

$$\limsup_{z\to\xi} u_\varepsilon(z) \le M,$$

joten maksimiperiaatteen nojalla $u_\varepsilon(z) \le M$ kaikilla $z \in \Omega$. Näin ollen saadaan

$$u(z) \le M + \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \log\left(\frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{|z - \xi_j|}\right) = M.$$

□

Olemme jo aiemmin todenneet, että rajoitetuilla analyyttisillä funktioilla $f\colon \mathbb{D} \to \Omega$ on olemassa raja-arvo sädettä pitkin melkein kaikissa reunan $\partial\mathbb{D}$ pisteissä ([Rud2, Thm. 11.32]). Seuraavaksi haluaisimme laajentaa tätä tulosta siinä mielessä, että säteittäisen raja-arvon olemassaolosta seuraisi, että raja-arvo on olemassa myös kun reunapistettä lähestytään jotain sektoria pitkin.

Lause 5.2. Olkoon f sellainen rajoitettu ja analyyttinen funktio yksikkökiekossa $\mathbb{D}$, että f laajenee jatkuvaksi funktioksi kaarelle $\left\{e^{i\theta} : \theta \in (0, \theta_0)\right\}$. Merkitään

$$\Gamma_\alpha = \left\{z \in \mathbb{D} : \arg(1-z) < \alpha\right\},$$

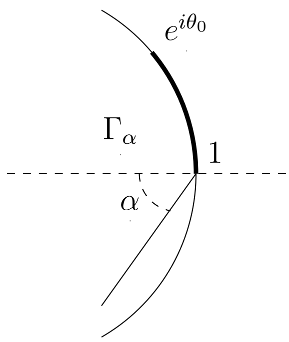
missä $\alpha < \pi/2$, ja oletetaan, että pätee

$$\lim_{\theta \to 0} f(e^{i\theta}) = a.$$

Tällöin pätee

$$\lim_{z \to 1} f(z) = a,$$

kun $z \in \Gamma_\alpha$.



Kuva 2: Funktiolla f on raja-arvo pisteessä $\xi = 1$, kun pistettä 1 lähestytään pitkin kaarta $e^{i\theta}$.

Todistus. Yksikkökiekko $\mathbb{D}$ voidaan kuvata Möbius-kuvauksella ylemmäksi puolitasoksi $\mathbb{C}^+ = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\right\}$ niin, että yksikkökiekon reuna kuvautuu reaaliakseliksi ja piste $(1, 0)$ origoksi. Voidaan siis olettaa, että f on rajoitettu ja analyyttinen funktio alueessa $\mathbb{C}^+$, ja että f laajenee jatkuvaksi funktioksi välille $(0, x_0]$, $x_0 > 0$, ja

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = a.$$

Jos $a \neq 0$, niin tutkitaan funktiota $f - a$.

Olkoon $\delta > 0$, ja olkoon $r > 0$ niin pieni, että $|f(x)| < \delta$, kun $0 < x \leq r$, ja olkoon $\alpha(z)$ janojen $[r, z]$ ja $[0, z]$ välinen kulma. Tällöin funktiolle

$$\omega_0(z) := \frac{1}{\pi}\alpha(z)$$

pätee

1. $0 \leq \omega_0(z) \leq 1$
2. $\lim_{z \to x} \omega_0(z) = \chi_{(0,r)}(x)$, kun $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, r\}$
3. ω_0 on harmoninen alueessa $\mathbb{C}^+$.

Itseasiassa ω_0 on välin $(0, r)$ harmoninen mitta alueessa $\mathbb{C}^+$.

Jos ympyrän sisälle piirretään kolmio, jonka kaikki kulmat ovat ympyrän kehällä, valitaan kolmion yksi sivu kannaksi ja muodostetaan toinen kolmio yhdistämällä kannan päät janoilla ympyrän keskipisteeseen, niin klassisesta geometriasta seuraa, että muodostuva keskuskulma on kaksinkertainen vastaavaan kehäkulmaan verrattuna. Näin ollen kehäkulman suuruus ei riipu ympyrän kehän kohdasta, jossa kolmion kärki on. Tästä seuraa, että joukot $\{z \in \mathbb{C} : \omega_0(z) = c\}$ ovat ympyröitä, jotka leikkaavat reaaliakselin pisteissä 0 ja r.

Olkoon $\alpha < \pi/2$, jolloin $\alpha + \pi/2 < \pi$, ja asetetaan

$$A_r = \left\{ z \in \mathbb{C}^+ : |z| < r,\ 0 < \arg z < \alpha + \frac{\pi}{2} \right\}$$

sekä merkitään

$$2b := \inf_{z \in A_r} \omega_0(z).$$

Tällöin pätee $0 < b < 1/2$ ja b riippuu vain kulmasta α, sillä funktio ω_0 lähestyy pienintä arvoaan, kun piste z lähestyy pistettä $re^{i(\alpha+\pi/2)}$. Geometrian perusteella janojen $[r, re^{i(\alpha+\pi/2)}]$ ja $[0, re^{i(\alpha+\pi/2)}]$ välinen kulma ei riipu säteestä r. Olkoon

$$B_r = \{z \in \mathbb{C}^+ : \omega_0(z) > b\}.$$

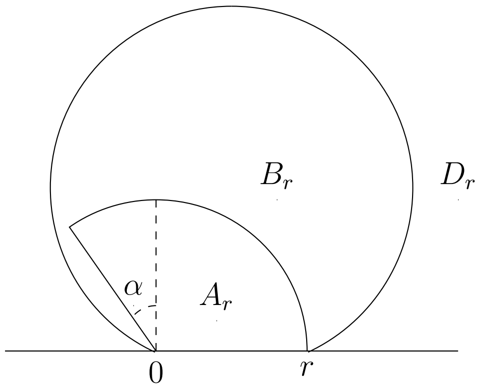
Koska kaikilla $z \in A_r$ pätee $\omega_0(z) \geq 2b$, niin joukon B_r määritelmästä seuraa, että $A_r \subset B_r$. Määritellään nyt funktio

$$\omega(z) := \frac{\omega_0(z) - b}{1 - b}.$$

Tällöin konstruktion perusteella funktiolle ω pätee

1. $0 \leq \omega(z) \leq 1, \quad z \in B_r$
2. $\lim_{z\to\xi} \omega(z) = \begin{cases} 0, & \xi \in \partial B_r \cap \mathbb{C}^+ \\ 1, & \xi \in (0,r) \end{cases}$
3. ω on harmoninen alueessa B_r.

Erityisesti ω on välin $(0,r)$ harmoninen mitta alueessa B_r.



Kuva 3: Raja-arvo pisteessä 0, kun origoa lähestytään pitkin positiivistä reaaliakselia.

Väitteen todistamiseksi riittää näyttää, että $|f(z)| < \varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$, kun $z \in A_r$ ja r riittävän pieni. Voidaan olettaa, että $|f(z)| \leq M$, sillä f on rajoitettu. Merkitään

$$C = \{z \in B_r \,:\, f(z) = 0\}.$$

Määritellään harmoninen funktio $g\colon B_r \setminus C \to \mathbb{R}$,

$$g(z) = \log\left|\frac{f(z)}{M}\right| + \log\left(\frac{M}{\delta}\right)\omega(z).$$

Alueen $B_r \setminus C$ reuna voidaan jakaa neljään osaan kirjoittamalla

$$\partial(B_r \setminus C) = (0,r) \cup C \cup D_r \cup F,$$

missä $F = \{0, r\}$ ja $D_r = \partial B_r \cap \mathbb{C}^+$. Tällöin pätee

$$\limsup_{z\to\xi} g(z) \leq 0, \quad \xi \in \partial(B_r \setminus C) \setminus F,$$

sillä

- $\limsup_{z\to\xi} g(z) = -\infty$, kun $\xi \in C$
- $\lim_{z\to\xi} g(z) \le \log\delta/M + \log M/\delta = \log 1 = 0$, kun $\xi \in (0, r)$
- $\omega(\xi) = 0$ ja $\log|f(\xi)/M| \le 0$, kun $\xi \in D_r$.

Näin ollen lemman 5.1 nojalla $g(z) \le 0$ alueessa $B_r \setminus C$. Lisäksi kaikilla $z \in A_r$ pätee $\omega(z) \ge b/(1-b)$, sillä alueessa A_r pätee $\omega_0(z) \ge 2b$. Näin ollen saadaan

$$\log\left|\frac{f(z)}{M}\right| + \log\left(\frac{M}{\delta}\right)\omega(z) \le 0,$$

mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\left|\frac{f(z)}{M}\right| \le \left(\frac{M}{\delta}\right)^{-\omega(z)}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} |f(z)| &\le M\cdot\left(\frac{M}{\delta}\right)^{-b/(1-b)} \\ &= M\cdot\frac{\delta^{b/(1-b)}}{M^{b/(1-b)}}. \end{aligned}$$

Lisäksi, koska

$$M\cdot\frac{\delta^{b/(1-b)}}{M^{b/(1-b)}} \to 0,$$

kun $\delta \to 0$, niin olemme todistaneet väitteen. □

Korollaari 5.3. Olkoot $\xi \in \partial\mathbb{D}$ ja f sellainen rajoitettu ja analyyttinen funktio yksikkökiekossa $\mathbb{D}$, että raja-arvo

$$\lim_{r\to 1} f(r\xi) = a,$$

$\xi \in \partial\mathbb{D}$, $0 \le r \le 1$, on olemassa. Tällöin raja-arvo

$$\lim_{z\to\xi} f(z) = a$$

on olemassa pitkin jokaista sektoria, joka sisältyy kiekkoon $\mathbb{D}$, ja jonka kärki on pisteessä ξ.

Todistus. Määritellään Möbius-kuvaus $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}\setminus\{[0,1)\}$,

$$g(z) = \left(2\frac{\sqrt{i\frac{1-z}{1+z}}}{1+\sqrt{i\frac{1-z}{1+z}}} - 1\right)^2.$$

Nyt kuvaus g laajenee jatkuvaksi kuvaukseksi $\bar{g}$ suljettuun yksikkökiekkoon $\overline{\mathbb{D}}$ ja pätee $\bar{g}(i) = 0$ sekä $\bar{g}(1) = 1 = \bar{g}(-1)$.

Funktiolle $f \circ g$ pätee

$$\lim_{\theta \to \pi^-} f \circ g(e^{i\theta}) = a = \lim_{\theta \to 0^+} f \circ g(e^{i\theta}),$$

joten lauseen 5.2 nojalla pätee

$$\lim_{\substack{z \to -1 \\ z \in \Gamma_\alpha^1}} f \circ g(z) = a = \lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Gamma_\alpha^2}} f \circ g(z),$$

missä

$$\Gamma_\alpha^1 = \{z \in \mathbb{D} : \arg(-1+z) > \alpha\}$$

ja

$$\Gamma_\alpha^2 = \{z \in \mathbb{D} : \arg(-1+z) < \alpha\},$$

$\alpha < \pi/2$. Näin ollen pätee

$$\lim_{z \to \xi} f(z) = a$$

pitkin jokaista yksikkökiekon $\mathbb{D}$ sektoria, jonka kärki on pisteessä ξ. $\square$

Jatkossa tulemme käsittelemään normeerattuja analyyttisiä injektioita, jotka muodostavat tärkeän erityisryhmän analyyttisten funktioiden joukossa. Normeeratut analyyttiset injektiot ovat funktioita, joille pätee $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$. Näitä funktioita koskevat määritelmät ja tämän työn kannalta tärkeimmät perustulokset on koottu kappaleeseen 8.1.

Lemma 5.4. Olkoot f yksikkökiekossa $\mathbb{D}$ määritelty normeerattu analyyttinen injektio ja $B \subset \partial\mathbb{D}$ mitallinen joukko, jolle pätee

$$|f'(r\xi)| \le M, \tag{5.1}$$

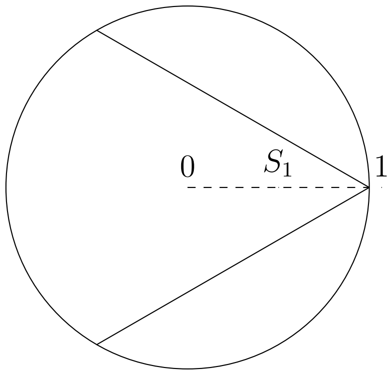
kun $0 \le r < 1$ ja $\xi \in B$. Tällöin on olemassa raja-arvot $f(\xi)$ pitkin sektoreita S_ξ, joiden kärki on pisteessä ξ, ja luvusta M riippumaton positiivinen vakio K_1, jolle pätee

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \le K_1 M |\xi_1 - \xi_2|, \tag{5.2}$$

kun $\xi_1, \xi_2 \in B$.

Todistus. Olkoon $r_k = 1 - 1/k$. Tällöin integroimalla saadaan

$$|f(r_{k_1}\xi) - f(r_{k_2}\xi)| = \left| \int_{r_{k_1}}^{r_{k_2}} f'(r\xi)\xi \, dr \right| \le \int_{r_{k_1}}^{r_{k_2}} |f'(r\xi)\xi| \, dr \le M|r_{k_2} - r_{k_1}|,$$



Kuva 4: Sektori S_1, jonka kärki on pisteessä $\xi = 1$.

joten $f(r_k\xi)$ on Cauchy-jono, ja siten raja-arvo $f(\xi)$ on olemassa pitkin sädettä $r\xi$, $0 \leq r < 1$, kaikilla $\xi \in B$. Korollaarin 5.3 nojalla raja-arvo $f(\xi)$ on olemasa myös pitkin jokaista sektoria S_ξ, jonka kärki on pisteessä ξ.

Yhtälön (5.2) osoittamiseksi riittää tarkastella tapausta, missä $|\xi_1 - \xi_2| < 1/4$. Koska yksikköympyrän kehän pituus on 2π, niin yleisessä tapauksessa reunan $\partial\mathbb{D}$ kahden pisteen yhdistämiseen tarvitaan korkeintaan 13 kappaletta tällaisia pistepareja. Olkoot nyt $\xi_1, \xi_2 \in B$ tällaiset pisteet. Lemman 8.6 nojalla pätee

$$\left| z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2},$$

joten kolmioepäyhtälön avulla saadaan arvio

$$\left| z\frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{6}{1-|z|^2} \leq \frac{6}{1-|z|}.$$

Toisaalta

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log f'(re^{i\theta}) = \frac{f''(re^{i\theta})rie^{i\theta}}{f'(re^{i\theta})},$$

joten pisteelle $z = re^{i\theta}$ pätee

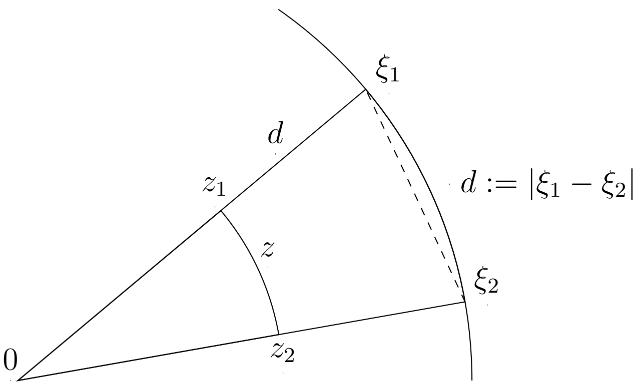
$$\left| \frac{\partial}{\partial\theta} \log f'(re^{i\theta}) \right| = \left| z\frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{6}{1-|z|} = \frac{6}{1-r}.$$

Merkitään nyt $d := |\xi_1 - \xi_2|$ sekä olkoot $r := 1 - d$ ja $z_1 = r\xi_1$. Pisteelle

$z = re^{i\vartheta}$, $\theta_1 \leq \vartheta \leq \theta_2$, $\theta_i = \arg \xi_i$, saadaan tällöin arvio

$$\begin{aligned}
|\log f'(z)| &\leq |\log f'(z_1)| + |\log f'(z) - \log f'(z_1)| \\
&= |\log f'(z_1)| + \left| \int_{\theta_1}^{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \theta} \log f'(re^{i\theta}) \right| \\
&\leq |\log f'(z_1)| + \int_{\theta_1}^{\vartheta} \left| \frac{\partial}{\partial \theta} \log f'(re^{i\theta}) \right| \\
&\leq |\log f'(z_1)| + \frac{6}{d} |\vartheta - \theta_1| \\
&\leq \log(K' \cdot M),
\end{aligned}$$

sillä $|\vartheta - \theta_1| \approx d$ ja $z_1 = r\xi_1$, $\xi_1 \in B$. Näin ollen $|f'(z)| \leq K'M$ kaikilla $z = re^{i\vartheta}$, $\theta_1 \leq \vartheta \leq \theta_2$.



Kuva 5: Integroimalla funktion f derivaattaa f' pisteestä ξ_1 ensin sädettä pitkin pisteeseen z_1, sen jälkeen ympyrän kaarta pitkin pisteeseen z_2 ja lopuksi sädettä pitkin pisteeseen ξ_2, saadaan arvio luvulle $|f(\xi_1) - f(\xi_2)|$.

Nyt integroimalla ensin pisteestä ξ_1 säteen suuntaisesti pisteeseen z_1, sen jälkeen ympyrän kaarta pitkin pisteeseen z_2, ja sädettä pitkin pisteeseen ξ_2, saadaan arvio

$$\begin{aligned}
|f(\xi_1) - f(\xi_2)| &= \left| \int_1^r f'(r'e^{i\theta_1})\, dr' + \int_{\theta_1}^{\theta_2} f'(re^{i\theta})\, d\theta + \int_r^1 f'(r'e^{i\theta_2})\, dr' \right| \\
&\leq \int_1^r |f'(r'e^{i\theta_1})|\, dr' + \int_{\theta_1}^{\theta_2} |f'(re^{i\theta})|\, d\theta + \int_r^1 |f'(r'e^{i\theta_2})|\, dr' \\
&\leq \int_1^r M\, dr' + \int_{\theta_1}^{\theta_2} K'M\, d\theta + \int_r^1 M\, dr' \\
&\leq (2 + K')M|\xi_1 - \xi_2| \\
&= K_1 M |\xi_1 - \xi_2|.
\end{aligned}$$

□

Lemma 5.5. Olkoon f yksikkökiekossa määritelty normeerattu analyyttinen injektio ja olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa joukko $E \subset \partial\mathbb{D}$, jolle pätee $|E| < \varepsilon$ ja

$$\int_0^1 |f'(re^{i\theta})| dr < K_\varepsilon,$$

kaikilla $\theta \notin E$ ja vakio K_ε riippuu vain luvusta ε.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Määritellään funktion f palloderivaatta $f^\#$ asettamalla

$$f^\#(z) = \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}.$$

Jotta todistusta olisi helpompi seurata, teemme heti alkuun seuraavat valinnat: olkoot $0 < \delta < \pi/2 - \arctan\left(e^{20/\varepsilon}\right)$ ja $e^{-\delta^2\varepsilon/2\pi} < \rho < 1$. Tarve näiden parametrien valinnalle selviää myöhemmin todistuksessa. Kun δ ja ρ on kiinnitetty, niin määritellään joukot

$$E_1 = \left\{\theta \,:\, \int_\rho^1 f^\#(re^{i\theta}) dr > \delta\right\}$$

ja

$$B = \{re^{i\theta} \,:\, \rho \leq r < 1,\, \theta \in E_1\}.$$

Nyt Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön (ks. [Rud2, 4.2]) nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\log\frac{1}{\rho}} \int_{E_1} \left(\int_\rho^1 f^\#(re^{i\theta}) dr\right)^2 d\theta &= \frac{1}{\log\frac{1}{\rho}} \int_{E_1} \left(\int_\rho^1 f^\#(re^{i\theta})\sqrt{r}\frac{1}{\sqrt{r}} dr\right)^2 d\theta \\
&\leq \frac{1}{\log\frac{1}{\rho}} \int_{E_1} \int_\rho^1 \left(f^\#(re^{i\theta})\sqrt{r}\right)^2 dr \int_\rho^1 \frac{1}{r} dr d\theta \\
&= \int_{E_1} \int_\rho^1 f^\#(re^{i\theta})^2 r \, dr d\theta = \int_B f^\#(z)^2 dA \\
&= \int_B \frac{|f'(z)|^2}{(1 + |f(z)|^2)^2} dA = \int_B \frac{|\det(Df)(z)|}{(1 + |f(z)|^2)^2} dA \\
&= \int_{f(B)} \frac{dA}{(1 + |w|^2)^2} \leq \int_{\mathbb{C}} \frac{dA}{(1 + |w|^2)^2} \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r \, d\theta dr}{(1 + r^2)^2} = \pi.
\end{aligned}$$

Yllä voitiin tehdä sijoitus $w = f(z)$, sillä f on injektio. Joukon E_1 määritelmän nojalla saadaan

$$\frac{1}{\log \frac{1}{\rho}} \int_{E_1} \left(\int_\rho^1 f^\#(re^{i\theta}) dr \right)^2 d\theta \geq \frac{1}{\log \frac{1}{\rho}} \int_{E_1} \delta^2 d\theta = \frac{1}{\log \frac{1}{\rho}} |E_1| \delta^2,$$

joten pätee

$$|E_1|\delta^2 \leq \pi \log \tfrac{1}{\rho},$$

ja $|E_1| < \varepsilon/2$, kun $e^{-\frac{\delta^2 \varepsilon}{2\pi}} < \rho < 1$.

Määritellään nyt joukko E_2,

$$E_2 = \left\{ \theta \,:\, |f(\rho e^{i\theta})| > e^{20/\varepsilon} \right\},$$

ja funktio u,

$$u(z) = \log \left| \frac{4}{z} f(z) \right|, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Koeben distortiolauseen nojalla voimme arvioida funktiota f, jolloin

$$\left| \frac{4}{z} f(z) \right| \geq \left| \frac{4}{z} \frac{|z|}{1 + |z|^2} \right| = \frac{4}{1 + |z|^2} > 1,$$

ja toisaalta pätee

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = f'(0) = 1.$$

Näin ollen $u(0) = \log 4$ ja u on positiivinen ja harmoninen funktio. Joukon E_2 määritelmän nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{20}{\varepsilon} |E_2| &= \int_{E_2} \frac{20}{\varepsilon} dz \leq \int_{E_2} \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta \leq \int_0^{2\pi} \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta \\
&\leq \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{4}{\rho e^{i\theta}} f(\rho e^{i\theta}) \right| d\theta = \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta}) d\theta = 2\pi u(0) \\
&= 2\pi \log 4 < 10,
\end{aligned}$$

joten pätee $|E_2| < \varepsilon/2$.

Nyt joukolle $E = E_1 \cup E_2$ pätee $|E| < \varepsilon$. Kun $\theta \notin E$ sekä $\rho \leq r < 1$, niin pisteiden 0 ja $f(re^{i\theta})$ etäisyydelle pallometriikan suhteen saadaan arvio

$$\begin{aligned} d(0, f(re^{i\theta})) &\leq \int_0^r f^\#(r'e^{i\theta})dr' \\ &= \int_0^r \frac{|f'(r'e^{i\theta})|}{1+|f(r'e^{i\theta})|^2}dr' \\ &\leq \int_0^\rho \frac{|f'(r'e^{i\theta})|}{1+|f(r'e^{i\theta})|^2}dr' + \int_\rho^r \frac{|f'(r'e^{i\theta})|}{1+|f(r'e^{i\theta})|^2}dr' \\ &\leq \arctan(|f(\rho e^{i\theta})|) + \delta \\ &\leq \arctan(e^{20/\varepsilon}) + \delta \\ &< \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

kun $0 < \delta < \pi/2 - \arctan(e^{20/\varepsilon})$. Koska $\pi/2 < d(0,\infty) = 2$, niin on olemassa vakio K_1, jolle pätee

$$|f(re^{i\theta})| < K_1, \quad \theta \notin E,\ \rho \leq r < 1.$$

Tästä seuraa, että on olemassa vakio K_2, jolle pätee

$$\begin{aligned} \int_\rho^1 |f'(re^{i\theta})|dr &= \int_\rho^1 (1+|f(re^{i\theta})|^2)f^\#(re^{i\theta})dr \\ &\leq (1+K_1^2)\int_\rho^1 f^\#(re^{i\theta})dr \leq K_2, \end{aligned}$$

kun $\theta \notin E$. Lisäksi Koeben distortiolauseen nojalla pätee

$$|f'(re^{i\theta})| \leq \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3},$$

kun $r \leq \rho$. Yhdistämällä nämä arviot olemme osoittaneet, että kun $\theta \notin E$, niin pätee

$$\int_0^1 |f'(re^{i\theta})|dr < K_\varepsilon.$$

□

Huomautus. Lemmasta 5.5 seuraa, että säteittäinen raja-arvo $f(\xi)$ on olemassa jokaisella pisteellä $\xi \notin E$ ja korollaarin 5.3 nojalla tämä raja-arvo on olemassa myös pitkin jokaista sektoria S_ξ, jonka kärkipiste on ξ.

5.2 Makarovin lause ja Pommerenken yleistys

Lemma 5.6. Olkoon $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analyyttinen injektio, jolle pätee $f'(z) \neq 0$ ja olkoon $z_0 \in \mathbb{D}$. Tällöin funktio $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) - f(z_0)}{f'(z_0)(1-|z_0|^2)},$$

on normeerattu analyyttinen injektio.

Todistus. Selvästi g on analyyttinen injektio, sillä se on yhdistetty kuvaus analyyttisistä injektioista ja $g(0) = 0$. Derivoimalla saadaan

$$g'(z) = \frac{f'\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right)\frac{1-|z_0|^2}{(1+\bar{z}_0 z)^2}}{f'(z_0)(1-|z_0|^2)} = \frac{f'\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right)}{f'(z_0)(1+\bar{z}_0 z)^2},$$

joten

$$g'(0) = \frac{f'(z_0)}{f'(z_0)} = 1.$$

Siis g on normeerattu analyyttinen injektio. □

Lemma 5.7. Olkoon f yksikkökiekossa $\mathbb{D}$ määritelty analyyttinen injektio ja olkoon $z_0 \in \mathbb{D}$, $z_0 \neq 0$. Tällöin on olemassa mitallinen joukko $B \subset \partial\mathbb{D}$, jolle pätee

$$B \subset \left\{e^{i\theta} : |\theta - \arg z_0| < 1 - |z_0|\right\}, \tag{5.3}$$

$|B| > 1 - |z_0|$ ja raja-arvo $\lim_{r\to 1} f(r\xi) = f(\xi)$ on olemassa kaikilla $\xi \in B$. Lisäksi pätee

$$|f(\xi) - f(z_0)| < K(1-|z_0|)|f'(z_0)|, \tag{5.4}$$

jollain vakiolla $K > 0$.

Todistus. Määritellään funktio $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = \frac{f(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}) - f(z_0)}{f'(z_0)(1-|z_0|^2)}.$$

Tällöin lemman 5.6 nojalla g on normeerattu analyyttinen injektio. Lemman 5.5 nojalla on olemassa joukko $E \subset \partial\mathbb{D}$, jolle pätee

$$|E| > 2\pi - \varepsilon$$

ja jokaisella pisteellä $\xi \in E$ raja-arvo $g(\xi)$ on olemassa pitkin sektoria S_ξ, lisäksi on olemassa vakio $K_\varepsilon > 0$, jolle pätee $|g(\xi)| \leq K_\varepsilon$.

Nyt joukon $\{\xi : \xi \in \partial\mathbb{D}, |\arg\xi - \arg z_0| < 1 - |z_0|\}$ mitalle pätee

$$|\{\xi : \xi \in \partial\mathbb{D}, |\arg\xi - \arg z_0| < 1 - |z_0|\}| = \frac{2(1-|z_0|)}{2\pi}2\pi = 2(1-|z_0|),$$

joten kun $\varepsilon > 0$ on valittu riittävän pieneksi, niin joukolle

$$B := \left\{\xi = \frac{\zeta + z_0}{1+\bar{z}_0\zeta} : \zeta \in E\right\} \cap \{\xi : \xi \in \partial\mathbb{D}, |\arg\xi - \arg z_0| < 1 - |z_0|\}$$

pätee $|B| > 1 - |z_0|$. Koska raja-arvo $g(\zeta)$ on olemassa kaikilla $\zeta \in E$, niin raja-arvo $f(\xi) = f((\zeta + z_0)/(1 + \bar{z}_0\zeta))$ on olemassa kaikilla $\xi \in B$. Nyt arvio

$$\left|\frac{f(\xi) - f(z_0)}{f'(z_0)(1-|z_0|^2)}\right| \leq K_\varepsilon$$

on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$|f(\xi) - f(z_0)| \leq K_\varepsilon |f'(z_0)(1-|z_0|)(1+|z_0|)|,$$

ja valitsemalla $K = 2K_\varepsilon$ saamme väitteen

$$|f(\xi) - f(z_0)| \leq K|f'(z_0)|(1-|z_0|).$$

Tässä on syytä huomata, että vakio K ei riipu funktiosta f, vaan ainoastaan luvusta $\varepsilon > 0$. Tämä johtuu siitä, että lemman 5.5 antama vakio K_ε riippui ainoastaan vakiosta ε. □

Seuraava lause osoittaa, että analyyttinen injektio ei voi laajentaa "liian" paljon sellaista yksikkökiekon reunan osajoukkoa, missä funktion derivaatalla on äärellinen nollasta poikkeava raja-arvo. Tarkemmin sanottuna osoitamme, että niiden reunan $\partial\mathbb{D}$ pisteiden joukolla, missä funktio on konforminen, kuvalla on σ-äärellinen lineaarimitta. Lisäksi joukko, missä funktio ei ole konforminen sisältää Lebesguen mitan mielessä täysimittaisen joukon, joka kuvautuu lineaarimitaltaan nollamittaiseksi. Tämä tulos on Pommerenken ja sen avulla saamme osoitettua Pommerenken yleistyksen Makarovin lauseelle.

Lause 5.8. Olkoon f yksikkökiekossa määritelty normeerattu analyyttinen injektio. Määritellään niiden pisteiden joukko A_1, missä derivaattafunktiolla f' on olemassa äärellinen säteittäinen raja-arvo, ja siten myös raja-arvo pitkin sektoria, siis

$$A_1 = \{\xi \in \partial\mathbb{D} : \text{on olemassa raja-arvo } f'(\xi) \text{ ja } f'(\xi) \neq 0, \infty\}.$$

Tällöin joukolla $f(A_1)$ on σ-äärellinen lineaarimitta ja on olemassa mitallinen joukko $A_0 \subset \partial\mathbb{D} \setminus A_1$, jolle pätee

$$|A_0| = 2\pi - |A_1|, \tag{5.5}$$

ja $f(\xi)$ on olemassa kaikilla pisteillä $\xi \in A_0$. Lisäksi pätee

$$\mathcal{H}_1(f(A_0)) = 0. \tag{5.6}$$

Todistus. Selkeyden vuoksi jaamme todistuksen neljään osaan.

i) Joukon $f(A_1)$ lineaarimitan σ-äärellisyys.

Olkoon $m \in \mathbb{N}$ ja määritellään

$$B_m = \{\xi \in A_1 \, : \, |f'(r\xi)| < m, \, 0 \leq r < 1\}.$$

Koska $\sup_{0 \leq r < 1} |f'(r\xi)|$ on rajoitettu jokaisella kiinnitetyllä pisteellä $\xi \in A_1$, niin pätee

$$A_1 \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m. \tag{5.7}$$

Lemman 5.4 nojalla pisteille $\xi_1, \xi_2 \in B_m$ pätee

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq K_m |\xi_1 - \xi_2|$$

jollakin vakiolla $K_m > 0$, eli f on Lipschitz-kuvaus, ja näin ollen Hausdorff-mittojen kuvauslauseen (ks. [Rog, Thm. 29]) nojalla joukon $f(B_m)$ yksiulotteiselle Hausdorff-mitalle pätee

$$\mathcal{H}_1(f(B_m)) < \infty.$$

Nyt kaavasta (5.7) seuraa, että joukolla $f(A_1)$ on σ-äärellinen lineaarimitta.

ii) Joukon A_0 olemassaolo.

Koska funktio f on analyyttinen, niin myös sen derivaatta f' on analyyttinen. Näin ollen Plessnerin lauseen 8.14 nojalla melkein kaikilla $\xi \in \partial\mathbb{D}$ pätee, että joko on olemassa äärellinen raja-arvo $f'(\xi)$ pitkin jokaista sektoria S_ξ, jonka kärki on pisteessä ξ, tai jokaista kompleksilukua $w \in \overline{\mathbb{C}}$ kohti on olemassa jono $\{z_n\} \subset \Delta(\xi, \pi/4)$, jolle pätee

$$f'(z_n) \to w,$$

kun $z_n \to \xi$. Tässä $\Delta(\xi, \pi/4)$ on symmetrinen Stolzin kulma (ks. määritelmä 8.9) avauksella $\pi/2$.

Pisteille $\xi \in \partial\mathbb{D} \setminus A_1$ pätee, että joko on olemassa raja-arvo $f'(\xi) = 0$ tai ei ole äärellistä raja-arvoa $f'(r\xi)$, kun $r \to 1$. Näin ollen Plessnerin lauseesta seuraa, että melkein kaikilla pisteillä $\xi \in \partial\mathbb{D} \setminus A_1$ on olemassa jono $\{z_n\} \subset \Delta(\xi, \pi/4)$, jolle pätee

$$z_n \to \xi, \quad f'(z_n) \to 0,$$

kun $n \to \infty$.

Koska funktio f on analyyttinen injektio, niin lemman 7.1 nojalla funktio $\log f'$ on Bloch-funktio, jolle pätee $\|\log f'\|_{\mathcal{B}} \leq 6$. Stolzin kulmassa $\Delta(\xi, \pi/4)$ pisteitä z_n ja $|z_n|\xi$ ydistävän kaaren pituus on pienempi kuin $|\arg z_n - \arg |z_n|\xi| \leq M(1-|z|^2)$, missä vakio M riippuu Stolzin kulman suuruudesta. Näin ollen integroimalla derivaattaa $d/d\theta \log f'$ tätä kaarta pitkin ja arvioimalla $|d/d\theta \log f'| \leq \|\log f'\|_{\mathcal{B}}/(1-|z|^2)$ saamme

$$|\log f'(|z_n|\xi) - \log f'(z_n)| \leq \frac{|\arg z_n - \arg |z_n|\xi|}{1-|z|^2} \|\log f'\|_{\mathcal{B}} \leq 6M.$$

Koska Re $(\log f'(z_n)) \to -\infty$, niin pätee Re $(\log f'(|z_n|\xi)) \to -\infty$ ja täytyy siis olla $f'(|z_n|\xi) \to 0$, kun $n \to \infty$. Näin ollen on olemassa joukko $E \subset \partial\mathbb{D} \setminus A_1$, jolle pätee

$$|E| = 2\pi - |A_1|$$

ja

$$\liminf_{r \to 1} |f'(r\xi)| = 0,$$

kun $\xi \in E$.

Olkoot $k \in \mathbb{N}$ ja $\xi \in E$. Edellisen nojalla on olemassa luvut $\rho_k(\xi)$, joille pätee

$$1 - \frac{1}{k} < \rho_k(\xi) < 1$$

ja

$$|f'(\rho_k(\xi)\xi)| < 2^{-k}$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Määritellään nyt kaaret $I_k \subset \partial\mathbb{D}$,

$$I_k(\xi) = \{e^{i\theta} : |\theta - \arg \xi| < 1 - \rho_k(\xi)\},$$

jolloin pätee

$$\xi \in I_k(\xi), \quad |I_k(\xi)| < \frac{1}{k}.$$

Olkoon $j \in \mathbb{N}$. Tällöin kaaret $I_k(\xi)$, $\xi \in E$, $k \geq j$, muodostavat joukon E Vitalin peitteen ja Vitalin peitelauseen 8.20 nojalla voidaan valita erilliset kaaret

$$J_{j,v} = I_{k_{j,v}}(\xi_{j,v}), \quad v \in \mathbb{N},$$

joille pätee

$$|E \setminus E_j| = 0,$$

kun $E_j = E \cap \bigcup_v J_{j,v}$. Kun $v \in \mathbb{N}$, niin määritellään

$$r_{j,v} = \rho_{k_{j,v}}(\xi_{j,v}), \quad z_{j,v} = r_{j,v}\xi_{j,v},$$

jolloin pätee

$$k_{j,v} \geq j, \quad 1 - \frac{1}{j} < r_{j,v} < 1, \quad \xi_{j,v} \in E_j.$$

Lemman 5.7 nojalla on olemassa joukot $B_{j,v} \subset J_{j,v}$, joille pätee

$$|B_{j,v}| > 1 - r_{j,v} = \frac{1}{2}|J_{j,v}|, \tag{5.8}$$

ja jokaisella $\xi \in B_{j,v}$ on olemassa säteittäinen raja-arvo $f(\xi)$ sekä

$$|f(\xi) - f(z_{j,v})| < K(1 - r_{j,v})|f'(z_{j,v})|. \tag{5.9}$$

Lopulta määrittelemällä

$$F_j = E_j \cap \bigcup_v B_{j,v} \tag{5.10}$$

ja

$$A_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} F_j$$

pätee, että A_0 on mitallinen ja

$$A_0 \subset E \subset \partial\mathbb{D} \setminus A_1,$$

sillä aiemmin määrittelimme $E_j \subset E$.

iii) Joukon $f(A_0)$ nollamittaisuus.

Yhtälöiden (5.9) ja (5.10) nojalla pätee

$$f(F_m) \subset \bigcup_v \{w \in \mathbb{C} : |w - f(z_{j,v})| < K(1 - r_{j,v})|f'(z_{j,v})|\}.$$

Näiden $f(z_{j,v})$-keskisten kiekkojen $B(f(z_{j,v}))$ halkaisijoiden summalle pätee

$$\begin{aligned}\sum_v \operatorname{diam}(B(f(z_{j,v}))) &\leq 2K\sum_v (1-r_{j,v})|f'(z_{j,v})| \\ &\leq 2K2^{-j}\sum_v (1-r_{j,v}).\end{aligned}$$

Koska kaaret $J_{j,v}$ ovat erillisiä ja niiden pituus on $2(1-r_{j,v})$, niin joukko $f(F_j)$ voidaan peittää kiekoilla B_j, joiden halkaisijoiden summa on

$$\sum_j \operatorname{diam}(B_j) \leq 2\pi K 2^{-j}.$$

Olkoon nyt $n \in \mathbb{N}$. Joukon A_0 määritelmän perusteella pätee $A_0 \subset F_n \cup F_{n+1} \cup \ldots$, joten edellisen nojalla joukko $f(A_0)$ voidaan peittää kiekoilla B_j joiden halkaisijoiden summalle pätee

$$\sum_{j=n}^{\infty} 2\pi K \sum_{j=n}^{\infty} 2^{-j} = 4\pi K 2^{-n}.$$

Nyt Hausdorff-mitan määritelmän 4.2 perusteella pätee $\mathcal{H}_1(f(A_0)) = 0$.

iv) Joukon A_0 mitta.

Osoitamme, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\left|\bigcup_{j=n}^{\infty} F_j\right| \geq 2\pi - |A_1|. \tag{5.11}$$

Tästä seuraa joukon A_0 määritelmän perusteella, että $|A_0| \geq 2\pi - |A_1|$ ja näin ollen pätee $|A_0| = 2\pi - |A_1|$.

Tehdään vastaoletus, että on olemassa $n \in \mathbb{N}$, jolle (5.11) ei päde ja määritellään

$$Y = \bigcap_{j=n}^{\infty}(E_j \setminus F_j) = \left(\bigcap_{j=n}^{\infty} E_j\right) \setminus \left(\bigcup_{j=n}^{\infty} F_j\right),$$

missä yhtälön (5.10) nojalla pätee $F_j \subset E_j$. Koska $|E_j| = |E| = 2\pi - |A_1|$, missä $E_j = E \cap \bigcup_v J_{j,v}$ ja $|E \setminus E_j| = 0$, niin pätee

$$|Y| \geq 2\pi - |A_1| - \left|\bigcup_{j=n}^{\infty} F_j\right| > 0.$$

Lebesguen tiheyspistelauseen (ks. [Rud2, 7.12]) nojalla on olemassa piste $\xi \in Y$, jolle pätee

$$\lim_{|J| \to 0} \frac{|Y \cap J|}{|J|} \to 1, \tag{5.12}$$

kun $J \subset \partial\mathbb{D}$ on kaari, joka sisältää pisteen ξ.

Olkoon nyt $j \geq n$, missä $n \in \mathbb{N}$, jolle (5.11) ei päde. Koska $\xi \in Y \subset E_j$, niin joukon E_j määritelmän perusteella $\xi \in J_{j,v}$ jollain $v = v(j)$. Koska joukoille $B_{j,v}$ pätee $B_{j,v} \subset J_{j,v}$ ja kaaret $J_{j,v}$ ovat erillisiä, niin yhtälön (5.10) nojalla

$$F_j \cap J_{j,v} = E_j \cap B_{j,v}.$$

Näin ollen joukon Y määritelmästä seuraa, että

$$Y \cap J_{j,v} \subset (E_j \setminus F_j) \cap J_{j,v} \subset J_{j,v} \setminus B_{j,v}$$

ja yhtälön (5.8) perusteella

$$\frac{|Y \cap J_j|}{|J_j|} \leq 1 - \frac{|B_j|}{|J_j|} < \frac{1}{2}.$$

Koska $\xi \in J_{j,v} = J_{j,v(j)}$ ja $|J_{j,v(j)}| \leq 2/j \to 0$, kun $j \to \infty$, niin saadaan ristiriita kaavan (5.12) kanssa. Tämä osoittaa väitteen.

□

Pommerenken yleistystä varten tarvitsemme vielä tuloksen, joka koskee Lebesguen mitaltaan nollamittaisten joukkojen kuvajoukon Hausdorff-mittaa. Tämän lauseen todistus on siirretty lukuun 8.2.

Lause 5.9. Olkoon f analyyttinen funktio yksikkökiekossa $\mathbb{D}$ ja olkoon $A \subset \partial\mathbb{D}$ mitallinen joukko, jonka jokaisessa pisteessä $\xi \in A$ funktiolla f on olemassa raja-arvo pitkin jokaista sektoria, jonka kärki on pisteessä ξ. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

1. $|A| = 0$
2. $\mathcal{H}_1(f(A)) = 0$.

Todistus. Ks. lause 8.16 □

Seuraava lause on Pommerenken yleistys Makarovin tulokselle [Mak, Thm. 3] ja saamme Makarovin alkuperäisen tuloksen lauseen seurauksena.

Lause 5.10. Olkoon f analyyttinen injektio yksikkökiekossa $\mathbb{D}$. Tällöin on olemassa mitallinen joukko $A \subset \partial\mathbb{D}$, jolle pätee

$$|A| = 2\pi \tag{5.13}$$

ja kaikilla $\xi \in A$ funktiolla f on olemassa raja-arvo pitkin jokaista sektoria, jonka kärki on pisteessä ξ ja

$$\text{joukolla } f(A) \text{ on } \sigma-\text{äärellinen lineaarimitta.} \tag{5.14}$$

Lisäksi, jos pätee

$$B \subset A \text{ ja } |B| = 0, \text{ niin myös } \mathcal{H}_1(f(B)) = 0. \tag{5.15}$$

Todistus. Olkoon joukot $A_0, A_1 \subset \partial\mathbb{D}$ kuten lauseessa 5.8. Määritellään joukko

$$A = A_0 \cup A_1.$$

Tällöin yhtälön (5.5) nojalla pätee $|A| = 2\pi$ ja joukolla

$$f(A) = f(A_0) \cup f(A_1)$$

on $\sigma-$äärellinen lineaarimitta.

Olkoon nyt $B \subset A$, jolle $|B| = 0$. Nyt yhtälön (5.6) ja lauseen 5.9 nojalla pätee

$$\mathcal{H}_1(f(B)) \leq \mathcal{H}_1(f(B \cap A_0)) + \mathcal{H}_1(f(B \cap A_1)) = 0.$$

□

Korollaari 5.11 (Makarov)**.** Olkoon h mittafunktio, jolle pätee

$$\lim_{t \to 0} \frac{h(t)}{t} = 0. \tag{5.16}$$

Tällöin on olemassa joukko $A \subset \partial\mathbb{D}$, jolle pätee

$$|A| = 2\pi$$

ja

$$\mathcal{H}_h(f(A)) = 0.$$

Todistus. Olkoon $A \subset \partial\mathbb{D}$ kuten lauseessa 5.10. Tällöin pätee $|A| = 2\pi$ ja lauseen 4.4 nojalla ehdosta (5.14) seuraa, että $\mathcal{H}_h(f(A)) = 0$. □

Mittafunktio $h(t) := t^\alpha$, $\alpha > 1$, toteuttaa ehdon (5.16), joten tämä Makarovin tulos todistaa Øksendalin konjektuurin; harmoninen mitta on singulaarinen kaikkien Hausdorff-mittojen $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha > 1$, kanssa. Tämä tarkoittaa, että yhdesti yhtenäisessä alueessa harmonisen mitan μ kantajan Hausdorff-dimensiolle pätee $\dim_{\mathcal{H}}(\text{supp}(\mu)) \leq 1$.

6 Bloch-funktioista

Osoittaaksemme harmonisen mitan absoluuttisen jatkuvuuden Hausdorff-mittojen $\mathcal{H}_h$ suhteen tarvitsemme Bloch-funktioita. Makarov osoitti arvion koskien Bloch-funktioiden kasvua ja vuonna 1986 Pommerenke tarkensi tätä arvioita hieman. Esittämämme Bloch-funktioiden teoria seuraa tätä Pommerenken julkaisua [Pom2].

Määritelmä 6.1. Olkoon $b\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio. Sanomme, että b on Bloch-funktio ja merkitsemme $b \in \mathcal{B}$, jos pätee

$$\|b\|_{\mathcal{B}} := |b(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|b'(z)| < \infty.$$

Lause 6.2. Olkoon $b \in \mathcal{B}$ funktio, jolle pätee $b(0) = 0$. Tällöin

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |b(re^{i\theta})|^{2n} d\theta \le n!\|b\|_{\mathcal{B}}^{2n}\left(\log\frac{1}{1-r^2}\right)^n, \tag{6.1}$$

kun $0 \le r < 1$ ja $n \in \mathbb{N}$.

Todistus. Määritellään funktio $\lambda\colon [0,1) \to \mathbb{R}$,

$$\lambda(r) = \log\frac{1}{1-r^2}. \tag{6.2}$$

Osoitamme induktiolla, että epäyhtälö

$$J_n(r) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |b(re^{i\theta})|^{2n} d\theta \le n!\|b\|_{\mathcal{B}}^{2n}\lambda(r)^n \tag{6.3}$$

pätee. Olkoon $n = 0$. Tällöin (6.3) pätee selvästi, sillä sekä vasen että oikea puoli antaa tulokseksi 1. Oletetaan, että (6.3) pätee tapauksessa $n-1$, eli

$$J_{n-1}(r) \le (n-1)!\|b\|_{\mathcal{B}}^{2n-2}\lambda(r)^{n-1}.$$

Hardyn identiteetin (Lause 8.8) nojalla pätee

$$\frac{d}{dr}(rJ_n'(r)) = \frac{4n^2r}{2\pi}\int_0^{2\pi} |b|^{2n-2}|b'|^2 dt$$

ja Bloch-funktioiden määritelmän 6.1 nojalla

$$|b'(re^{i\theta})| \le \frac{\|b\|_{\mathcal{B}}}{1-r^2},$$

joten induktio-oletuksen nojalla saamme

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}(rJ_n'(r)) &\leq \frac{4n^2r}{(1-r^2)^2}J_{n-1}(r)\|b\|_{\mathcal{B}}^2\\ &\leq \frac{4n\cdot n!r}{(1-r^2)^2}\lambda(r)^{n-1}\|b\|_{\mathcal{B}}^{2n}\\ &\leq n!\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\lambda(r)^n\right)\|b\|_{\mathcal{B}}^{2n},\end{aligned}$$

missä viimeinen arvio perustuu siihen, että

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\lambda(r)^n\right) &= \frac{d}{dr}\left(\frac{2nr^2}{1-r^2}\lambda(r)^{n-1}\right)\\ &= \frac{(1-r^2)\frac{d}{dr}(2nr^2\lambda(r)^{n-1})-(2nr^2\lambda(r)^{n-1})(-2r)}{(1-r^2)^2}\\ &= \frac{(1-r^2)\left(2nr^2\frac{d}{dr}\lambda(r)^{n-1}+4nr\lambda(r)^{n-1}\right)+4nr^3\lambda(r)^{n-1}}{(1-r^2)^2}\\ &\geq \frac{(1-r^2)4nr\lambda(r)^{n-1}+4nr^3\lambda(r)^{n-1}}{(1-r^2)^2}\\ &= \frac{4nr\lambda(r)^{n-1}}{(1-r^2)^2}.\end{aligned}$$

Nyt (6.3) seuraa integroimalla kahdesti, sillä $J_n(0)=\lambda(0)=0$.

□

Seuraava lause tunnetaan Makarovin lakina iteroidulle logaritmille, sillä hän todisti sen ensimmäisenä ([Mak, Thm. A]). Pommerenke tarkensi tulosta saamalla arvion oikealle puolelle parhaan tunnetun vakion 1.

Lause 6.3. Olkoon $b\in\mathcal{B}$. Tällöin melkein kaikilla $\theta\in[0,2\pi]$ pätee

$$\limsup_{r\to 1}\frac{|b(re^{i\theta})|}{\sqrt{\log\frac{1}{1-r}\log\log\log\frac{1}{1-r}}}\leq\|b\|_{\mathcal{B}}. \tag{6.4}$$

Todistus. Voidaan olettaa, että $\|b\|_{\mathcal{B}}=1$, muussa tapauksessa skaalataan tekijällä $1/\|b\|_{\mathcal{B}}$. Määritellään funktio

$$b^*(r,\theta)=\sup_{0\leq\rho\leq r}|b(\rho e^{i\theta})|,$$

missä $0\leq\theta\leq 2\pi$ ja $0\leq r<1$, ja olkoon $\lambda(r)$ kuten yhtälössä (6.2).

Yhtälöstä (6.3) nähdään, että pätee $|b(re^{i\theta})|^n \in L^2$. Näin ollen soveltamalla Hardyn-Littlewoodin maksimaaliteoreemaa ([Mat, Thm.2.19]) ja lausetta 6.2 funktioon $|b(re^{i\theta})|^n$ saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (b^*(r,\theta)^n)^2 d\theta &\leq K_1 \int_0^{2\pi} (|b(re^{i\theta})|^n)^2 d\theta \\ &\leq K_1 2\pi n! \|b\|_{\mathcal{B}}^{2n} \lambda(r)^n \\ &= K_2 n! \lambda(r)^n, \end{aligned} \tag{6.5}$$

missä vakio K_1, ja siten myöskään vakio K_2, ei riipu luvusta n.

Määritellään funktio

$$\psi_n(r) := -n\frac{d}{dr}(\log\lambda(r))^{-1/n} = \frac{2r}{1-r^2}\lambda(r)^{-1}(\log\lambda(r))^{-1-1/n}.$$

Arvion (6.5) ja Fubinin lauseen ([Rud2, Thm.8.8]) nojalla saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_{49/50}^1 b^*(r,\theta)^{2n}\frac{\psi_n(r)}{\lambda(r)^n} dr d\theta &= \int_{49/50}^1 \int_0^{2\pi} b^*(r,\theta)^{2n}\frac{\psi_n(r)}{\lambda(r)^n} d\theta dr \\ &\leq K_2 n! \int_{49/50}^1 \psi_n(r) dr \leq K_3 n! n,\end{aligned}$$

sillä

$$\int_{49/50}^1 \psi_n(r) dr = \Big/_{49/50}^1 \frac{-n}{(\log\log\frac{1}{1-r^2})^{1/n}} = \frac{n}{(\log\log\frac{1}{1-(49/50)^2})^{1/n}} \leq n.$$

Näin ollen Chebysevin epäyhtälön nojalla on olemassa joukot $A_n \subset \partial\mathbb{D}$, joiden komplementeille A_n^c pätee

$$\begin{aligned}|A_n^c| &= \left|\left\{e^{i\theta} : \int_{49/50}^1 b^*(r,\theta)^{2n}\frac{\psi_n(r)}{\lambda(r)^n} dr > K_3 n! n^3\right\}\right| \\ &\leq \frac{K_3 n! n}{K_3 n! n^3} = \frac{1}{n^2},\end{aligned}$$

joten joukoille $A_n \subset \partial\mathbb{D}$ pätee

$$|A_n| > 2\pi - \frac{1}{n^2}, \tag{6.6}$$

ja kun $e^{i\theta} \in A_n$, niin

$$\int_{49/50}^1 b^*(r,\theta)^{2n}\frac{\psi_n(r)}{\lambda(r)^n} dr \leq K_3 n! n^3.$$

Koska pätee

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\frac{1}{\lambda(r)^n(\log\lambda(r))^{1+1/n}} &= \frac{-2r\lambda(r)^{-n-1}(\log\lambda(r))^{-2-1/n}(n^2\log\lambda(r)+n+1)}{n(1-r^2)}\\
&= \frac{\psi_n(r)}{\lambda(r)^n}\cdot\frac{n^2\log\lambda(r)+n+1}{n\log\lambda(r)}\\
&= \frac{\psi_n(r)}{\lambda(r)^n}\cdot\left(n+\frac{1}{\log\lambda(r)}+\frac{1}{n\log\lambda(r)}\right)\\
&\leq 3n\frac{\psi_n(r)}{\lambda(r)^n}
\end{aligned}$$

ja $b^*(r,\theta)$ on muuttujan r suhteen kasvava funktio, niin kaikilla $e^{i\theta}\in A_n$ ja $49/50<r<1$ pätee

$$\begin{aligned}
\frac{b^*(r,\theta)^{2n}}{\lambda(r)^n(\log\lambda(r))^{1+1/n}} &\leq 3K_3b^*(r,\theta)^{2n}n\int_r^1\frac{\psi_n(\rho)}{\lambda(\rho)^n}d\rho\\
&\leq 3K_3n\int_r^1 b^*(\rho,\theta)^{2n}\frac{\psi_n(\rho)}{\lambda(\rho)^n}d\rho\\
&\leq 3K_3n!n^4\\
&= K_4n!n^4.
\end{aligned}$$

Stirlingin kaavan nojalla pätee $n!\sim\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n}$, joten saamme arvion

$$|b(re^{i\theta})|^{2n}\leq b^*(r,\theta)^{2n}\leq K_5n^{n+5}e^{-n}\lambda(r)^n(\log\lambda(r))^{1+1/n}. \tag{6.7}$$

Olkoon

$$A=\bigcup_{k=1}^\infty\bigcap_{n=k}^\infty A_n.$$

Arvion (6.6) perusteella pätee $|A|=2\pi$. Olkoon $e^{i\theta}\in A$. Tällöin $e^{i\theta}\in A_n$, kun $n\geq k$ jollakin $k\in\mathbb{N}$. Jos $r<1$ on riittävän lähellä lukua 1, niin $\log\log\lambda(r)\geq k$. Olkoon

$$n=\log\log\lambda(r)\geq k.$$

Tällöin yhtälöstä (6.7) saadaan

$$\begin{aligned}
|b(re^{i\theta})|^{2n} &\leq K_5n^{n+5}e^{-n}\lambda(r)^n(\log\lambda(r))^{1+1/n}\\
&= K_5n^{n+5}e^{-n}\lambda(r)^ne^{(1+1/n)(\log\log\lambda(r))}\\
&\leq K_5n^{n+5}e^{-n}\lambda(r)^ne^{(1+1/n)(n+1)}
\end{aligned}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned}
\limsup_{r\to 1}\frac{|b(re^{i\theta})|^2}{\lambda(r)n} &= \limsup_{r\to 1}\frac{\sqrt[n]{|b(re^{i\theta})|^{2n}}}{\lambda(r)n} \\
&\le \limsup_{r\to 1}\frac{\sqrt[n]{K_4 n^{n+5}e^{-n}\lambda(r)^n e^{(1+1/n)(n+1)}}}{\lambda(r)n} \\
&= e^{-1}\cdot e \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Tämä osoittaa väitteen, sillä

$$\frac{|b(re^{i\theta})|}{\sqrt{\log\frac{1}{1-r}\log\log\log\frac{1}{1-r}}} \le \frac{|b(re^{i\theta})|}{\sqrt{\lambda(r)n}},$$

kun $0 < r < 1$.

$\square$

7 Harmonisen mitan ja Hausdorff-mitan absoluuttinen jatkuvuus

Makarov osoitti myös tärkeän tuloksen ([Mak, Thm. 1]) koskien harmonisen mitan absoluuttista jatkuvuutta. Tästä tuloksesta seuraa arvio myös harmonisen mitan kantajan Hausdorff-dimension alarajalle ja yhdessä korollaarin 5.11 kanssa saadaan, että harmonisen mitan kantajan Hausdorff-dimensio on tasan yksi. Vuonna 1988 Rohde esitti hieman yksinkertaisemman todistuksen Makarovin tulokselle ja seuraamme tätä Rohden julkaisua [Roh].

Teemme tätä lukua varten seuraavan kiinnityksen: Olkoon $f\colon \mathbb{D} \to \Omega$ analyyttinen injektio, jolle pätee $f'(0) = 1$ ja $f(\mathbb{D}) = \Omega$. Lisäksi joukolle $F \subset \partial\mathbb{D}$ määrittelemme $f^{-1}(F) = \{\xi \in \mathbb{D} : \text{on olemassa } f(\xi) \in F\}$. Aiemmin olemme osoittaneet, että melkein kaikilla $\xi \in \partial\mathbb{D}$ on olemassa raja-arvo $f(\xi)$, kun pistettä ξ lähestytään pitkin sektoria, joten joukko $f^{-1}(F)$ on hyvin määritelty.

Lemma 7.1. Funktio $b(z) := \log f'(z)$ on Bloch-funktio, jolle pätee $\|b\|_{\mathcal{B}} \leq 6$.

Todistus. Kiinnitetään piste $z_0 \in \mathbb{D}$ ja määritellään funktio $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = \frac{f(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}) - f(z_0)}{f'(z_0)(1-|z_0|^2)}.$$

Lemman 5.6 nojalla g on normeerattu analyyttinen injektio, joten sillä on sarjaesitys (ks. [Con2, 7.2])

$$g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

ja Bieberbachin tuloksen (ks. lause 8.4) nojalla pätee $|a_2| \leq 2$. Suoraan laskemalla saadaan

$$\begin{aligned} 4 \quad &\geq \quad 2|a_2| = |g''(0)| = \left| \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}(1-|z_0|^2) - 2\bar{z}_0 \right| \\ &\geq \quad \left| \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}(1-|z_0|^2) \right| - 2|\bar{z}_0|, \end{aligned}$$

ja koska $|\bar{z}_0| \leq 1$, niin pätee

$$\left| \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} \right| (1-|z_0|^2) = |b(0)| + |b'(z_0)|(1-|z_0|^2) \leq 6.$$

Koska $z_0 \in \mathbb{D}$ oli mielivaltainen piste, niin pätee $\|b\|_{\mathcal{B}} \leq 6$. $\square$

Lemma 7.2. Merkitään

$$\varphi(t) = \sqrt{\log \tfrac{1}{t} \log\log\log \tfrac{1}{t}}.$$

Tällöin kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ ja $E \subset \partial\mathbb{D}$, joille pätee

$$|E| > 2\pi - \varepsilon, \tag{7.1}$$

ja

$$|f(\xi) - f(r\xi)| \le K_2(1-r)e^{K_1\varphi(1-r)} \tag{7.2}$$

sekä

$$|f'(r\xi)| \ge K_3 e^{-K_1\varphi(1-r)}, \tag{7.3}$$

kun $r > 1-\delta$ ja $\xi \in E$. Vakiot K_j, $j = 1, 2, 3$ eivät riipu funktiosta f.

Todistus. Lemman 7.1 nojalla funktio $b(z) := \log f'(z)$ on Bloch-funktio, jolle pätee $\|b\|_B \le 6$, joten lauseen 6.3 nojalla melkein kaikilla $\xi \in \partial\mathbb{D}$ pätee

$$\limsup_{r\to 1} \frac{|\log f'(r\xi)|}{\varphi(1-r)} = \limsup_{r\to 1} \frac{|b(r\xi)|}{\varphi(1-r)} \le \|b\|_{\mathcal{B}} \le 6.$$

Näin ollen kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$, jolle pätee

$$\frac{|\log f'(r\xi)|}{\varphi(1-r)} \le 6 + \varepsilon,$$

kun $r > 1-\delta$. Edelleen

$$|\log f'(r\xi)| \le (6+\varepsilon)\varphi(1-r),$$

ja koska $\log|z| \le |\log z|$, niin on olemassa vakiot K_1 ja K_3, joille pätee

$$|f'(r\xi)| \le e^{K_1\varphi(1-r)}$$

ja

$$|f'(r\xi)| \ge K_3 e^{-K_1\varphi(1-r)},$$

kun $r > 1-\delta$. Integroimalla funktiota $|f'|$ saadaan arvio

$$\begin{aligned}
|f(\xi) - f(r\xi)| &= \left| \int_r^1 f'(x\xi)dx \right| \\
&\le \int_r^1 |f'(x\xi)|dx \\
&\le \int_r^1 e^{K_1\phi(1-x)}dx \\
&\le K_2(1-r)e^{K_1\phi(1-r)}.
\end{aligned}$$

Viimeisen epäyhtälön perustelemiseksi merkitään $r_n = r2^{-n}$. Vakiot eivät vaikuta integraalin suppenemiseen, joten tämän ja muuttujanvaihdon perusteella on yhtäpitävää osoittaa, että pätee

$$\int_0^r e^{\phi(x)} dx \leq K' r e^{\phi(r)}.$$

Derivoimalla ja käyttämällä väliarvolausetta nähdään, että

$$\lim_{n\to\infty} \phi(r_{n+1}) - \phi(r_n) = 0.$$

Näin ollen, kun n on riittävän suuri, pätee

$$\phi(r_n) \leq \frac{n}{4} + \phi(r)$$

ja saamme halutun arvion integraalille, sillä

$$\begin{aligned}
\int_0^r e^{\phi(x)} dx &\leq \sum_{n=1}^{\infty} r 2^{-n} e^{\phi(r_n)} \\
&\leq r \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n/2} e^{\phi(r_n) - n/4} \\
&\leq r \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n/2} e^{\phi(r)} \\
&= K' r e^{\phi(r)}.
\end{aligned}$$

□

Seuraavaa lemmaa ja lausetta varten määrittelemme ε-neliöt ja luvun $p(\varepsilon, B)$.

Määritelmä 7.3. ε-neliö on puoliavoin neliö, jonka sivujen pituus on ε ja kulmien koordinaatit ovat luvun ε kokonaislukumonikertoja.

Määritelmä 7.4. Olkoot $B \subset \mathbb{C}$ rajoitettu alue, $\varepsilon > 0$ ja

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{n} Q_j,$$

missä Q_j ovat täsmälleen ne ε-neliöt, joille pätee $B \cap Q_j \neq \emptyset$. Tällöin määritellään luku $p(\varepsilon, B) = n$.

Määritelmä 7.5. Olkoon $E \subset \mathbb{D}$. Määrittelemme tällöin joukon rE,

$$rE = \{z \in \mathbb{D} : z/r \in E,\, 0 < r \leq 1\}.$$

Lemma 7.6. Olkoot $\varepsilon > 0$ ja B ε-säteinen kiekko, jolle pätee $B \cap \Omega \neq \emptyset$. Olkoon lisäksi $E \subset \partial\mathbb{D}$ joukko, jolle kaikilla $\xi \in E$ sekä joillakin $r < 1$ ja $0 < \alpha < 1$ pätee

$$|f(\xi) - f(r\xi)| \leq \varepsilon \tag{7.4}$$

ja

$$(1 - r)|f'(r\xi)| \geq \alpha\varepsilon. \tag{7.5}$$

Määritellään $A \subset \Omega$

$$A = f(r[f^{-1}(B) \cap E]).$$

Tällöin kaikilla $0 < t < 1$ pätee

$$p(t\alpha\varepsilon, A) \leq K_1(t\alpha)^{-2}. \tag{7.6}$$

Lisäksi on olemassa vakio t_0, jolle pätee

$$\operatorname{diam}(f^{-1}(Q) \cap rE) \leq 1 - r \tag{7.7}$$

kaikilla $(t\alpha\varepsilon)$-neliöillä Q, kun $t < t_0$.

Todistus. Olkoot $Q_1, \ldots, Q_n$ ne $(t\alpha\varepsilon)$-neliöt, joille $Q_j \cap A \neq \emptyset$ ja $V := Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$ on joukon A peite. Tällöin määritelmän nojalla $n = p(t\alpha\varepsilon, A)$ ja selvästi joukon V pinta-alalle pätee

$$\text{area } V = n \cdot \text{area } Q_j = n \cdot (t\alpha\varepsilon)^2,$$

sillä neliöt Q_j ovat erillisiä. Jos piste $w \in Q_j$ jollakin j, niin tällöin neliöiden Q_j määritelmän nojalla on olemassa piste $w' \in A$, jolle pätee

$$|w - w'| \leq \sqrt{2}t\alpha\varepsilon.$$

Olkoon piste $\xi \in E$,

$$\xi = (1/r)f^{-1}(w').$$

Tällöin $f(\xi) \in B$ ja oletuksen (7.4) nojalla pätee

$$|w' - f(\xi)| = |f(r\xi) - f(\xi)| \leq \varepsilon.$$

Näin ollen

$$V \subset \{v \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(v, B) < 3\varepsilon\},$$

sillä piste w oli mielivaltainen ja $|w - w'| < 2\varepsilon$. Koska

$$\text{area}\,\{v \in \mathbb{C} : \text{dist}(v, B) < 3\varepsilon\} = \pi(4\varepsilon)^2,$$

niin joukon V pinta-alalle saadaan arvio

$$\text{area}\, V = p(t\alpha\varepsilon, A) \cdot (t\alpha\varepsilon)^2 \leq \pi(4\varepsilon)^2 \leq (8\varepsilon)^2,$$

joten on olemassa vakio $K_1 > 0$, jolle pätee

$$p(t\alpha\varepsilon, A) \leq K_1(t\alpha)^{-2},$$

kun $0 < t < 1$.

Olkoon Q mikä tahansa $(t\alpha\varepsilon)$-neliö ja olkoot $z_1, z_2 \in f^{-1}(Q) \cap rE$ sekä $w_1 = f(z_1)$ ja $w_2 = f(z_2)$. Määritellään Möbius-kuvaus $T \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$,

$$T(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z},$$

ja funktio $g \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = f \circ T^{-1}(z).$$

Laskemalla saadaan

$$g'(z) = \frac{z}{dz} f(T^{-1}(z)) = f'\left(\frac{z + z_1}{1 + z\bar{z}_1}\right) \cdot \frac{1 - |z_1|^2}{(1 + z\bar{z}_1)^2},$$

joten pätee

$$g'(0) = f'(z_1)(1 - |z_1|^2).$$

Koska oletuksen (7.5) nojalla

$$(1 - r)|f'(r\xi)| \geq \alpha\varepsilon$$

kaikilla $\xi \in E$, niin

$$|g'(0)| \geq \alpha\varepsilon. \tag{7.8}$$

Oletetaan, että pätee $|z_1 - z_2| > 1 - r$. Tällöin

$$|T(z_2)| = \left|\frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right| \geq \frac{1 - r}{|1 - \bar{z}_1 z_2|} \geq \frac{1 - r}{1 + |\bar{z}_1 z_2|} \geq \frac{1 - r}{2},$$

joten $T(z_2) \neq 0$. Nyt Koeben distortioteoreeman ja yhtälön (7.8) nojalla pisteiden w_1 ja w_2 etäisyydelle saadaan

$$\begin{aligned}
|w_1 - w_2| &= |g(T(z_1)) - g(T(z_2))| \\
&= |g(T(z_2)) - g(0)| \\
&\geq \frac{|T(z_2)|}{(1 + |T(z_2)|)^2} |g'(0)| \\
&\geq \frac{(1 - r)/2}{4} |g'(0)| \\
&\geq \frac{1 - r}{8} \alpha\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tämä on ristiriita sen kanssa, että $w_1, w_2 \in Q$, jos valitaan $t_0 < (1-r)/8$, joten (7.7) pätee. Yllä voitiin soveltaa distortioteoreemaa, sillä kuvaus

$$z \mapsto \frac{g(z)-g(0)}{g'(0)}$$

on normeerattu analyyttinen injektio, jolle pätee arvio

$$\left|\frac{g(T(z_2))-g(0)}{g'(0)}\right| \geq \frac{|T(z_2)|}{(1+|T(z_2)|)^2}.$$

□

Seuraava lause on Makarovin tulos ([Mak, Thm. 1]) harmonisen mitan absoluuttisesta jatkuvuudesta Hausdorff-mitan suhteen. Joitain arvioita tästä oli olemassa jo aiemmin, mutta Makarovin tulos ratkaisi lopullisesti kysymyksen onko $\mu \ll \mathcal{H}_\alpha$ kaikilla $\alpha < 1$.

Lause 7.7 (Makarov)**.** Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ yhdesti yhtenäinen alue. Tällöin on olemassa sellainen vakio $K > 0$, että harmoninen mitta μ on alueessa Ω absoluuttisesti jatkuva Hausdorff-mitan $\mathcal{H}_{h_K}$ suhteen, missä

$$h_K(t) = te^{K\sqrt{\log\frac{1}{t}\log\log\log\frac{1}{t}}}. \tag{7.9}$$

Todistus. Olkoon $F \subset \partial\Omega$ joukko, jolle $\mathcal{H}_{h_K}(F) = 0$. Oletetaan, että $\mu(F) > 0$. Tällöin lemman 7.2 nojalla on olemassa joukko $E \subset \partial\mathbb{D}$, jonka Lebesguen mitalle pätee

$$|E \cap f^{-1}(F)| > 0, \tag{7.10}$$

ja positiiviset vakiot K_1, K_2, K_3, joille yhtälöt (7.2) sekä (7.3) ovat voimassa kaikilla $\xi \in E$. Olkoot B_j ε_j-säteisiä kiekkoja, joilla kokoelma $\{B_j\}$ on joukon F peite. Kiinnitetään indeksi j ja määritellään säde r, jolle pätee

$$K_2(1-r)e^{K_1\varphi(1-r)} = \varepsilon_j$$

ja luku α, jolle pätee

$$\alpha = \frac{K_3}{K_2}e^{-2K_1\varphi(1-r)}.$$

Näillä valinnoilla epäyhtälöt (7.4) ja (7.5) ovat voimassa, joten voimme soveltaa lemmaa 7.6.

Määritellään joukko A_j,

$$A_j = f(r[f^{-1}(B_j) \cap E]),$$

ja olkoon $A_j \subset \bigcup_{k=1}^{n} Q_k$, missä Q_k ovat $(t_0\alpha\varepsilon_j)$-neliöitä ja $n = p(t_0\alpha\varepsilon_j, A_j)$. Koska lemman 7.6 nojalla pätee

$$\operatorname{diam}(f^{-1}(Q_k) \cap rE) \leq 1 - r,$$

niin on olemassa vakio $K_4 > 0$, jolle pätee

$$\left|\frac{1}{r} f^{-1}(A_j)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{r} f^{-1}(Q_k) \cap E\right| \leq K_4 \cdot n \cdot (1 - r).$$

Toisaalta lemman 7.6 nojalla on olemassa vakio $K_5 > 0$, jolle pätee

$$n = p(t_0\alpha\varepsilon_j, A_j) \leq K_5(t_0\alpha)^{-2},$$

joten tämän ja luvun α määritelmän nojalla saadaan

$$\left|\frac{1}{r} f^{-1}(A_j)\right| \leq K_4 K_5 (t_0\alpha)^{-2}(1 - r) = K_6(1 - r)e^{4K_1\varphi(1-r)}.$$

Olkoon nyt $K = 4K_1$. Säteen r määritelmästä nähdään, että jos ε_j on pieni, eli $1 - r$ riittävän pieni, niin pätee

$$1 - r < \varepsilon_j < \sqrt{1 - r},$$

sillä $(1 - r)/\varepsilon_j \to 0$, kun $1 - r \to 0$ ja $\varepsilon_j/\sqrt{1 - r} \to 0$, kun $1 - r \to 0$. Sama arvio pätee myös luvulle $2\varepsilon_j$, ja koska määritelmän nojalla

$$f^{-1}(A_j) = r[f^{-1}(B_j) \cap E],$$

niin saamme

$$\begin{aligned} |f^{-1}(B_j) \cap E| &\leq 2K_7(1 - r)e^{4K_1\varphi(1-r)} \\ &\leq K_7(2\varepsilon_j)e^{K\varphi(2\varepsilon_j)} \\ &= K_7 h_K(\operatorname{diam} B_j). \end{aligned}$$

Tässä $2\varepsilon_j$ voitiin sijoittaa myös funktion φ argumentiksi sillä

$$\begin{aligned} K_7(2\varepsilon_j)e^{K\varphi(2\varepsilon_j)} &= K_7 2(K_2(1 - r)e^{K_1\varphi(1-r)})e^{K\varphi(2\varepsilon_j)} \\ &\geq K_7 2(K_2(1 - r)e^{K_1\varphi(1-r)})e^{K\varphi(\sqrt{1-r})} \\ &\geq K_7 2(K_2(1 - r)e^{K\varphi(1-r)}), \end{aligned}$$

kun $1 - r$ riittävän pieni.

Olemme siis näyttäneet, että mielivaltaisella indeksillä j joukon $f^{-1}(B_j) \cap E$ mitalle pätee

$$|f^{-1}(B_j) \cap E| \leq K_7 h_K(\operatorname{diam} B_j).$$

Tämän nojalla pätee

$$\begin{aligned} |f^{-1}(F) \cap E| &\leq \left| f^{-1}\left(\bigcup_j B_j \right) \cap E \right| \\ &\leq \sum_j |f^{-1}(B_j) \cap E| \\ &\leq K_7 \sum_j h_K(\operatorname{diam} B_j). \end{aligned}$$

Oletuksen nojalla $\mathcal{H}_{h_K}(F) = 0$, mikä tarkoittaa, että

$$\lim_{\delta \to 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} h_K(r_i) \ : \ F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(z_i, r_i),\ 0 < r_i \leq \delta \right\} = 0.$$

Näin ollen arvion viimeinen summa saadaan mielivaltaisen pieneksi. Tämä on ristiriita, joten täytyy olla $\mu(F) = 0$, ja siten harmoninen mitta on absoluuttisesti jatkuva Hausdorff-mitan $\mathcal{H}_{h_K}$ suhteen.

$\square$

Olemme nyt saaneet osoitettua, että yhdesti yhtenäisissä tasoalueissa harmoniselle mitalle μ pätee

$$\mu \ll \mathcal{H}_{h_K},$$

missä $h_K(t) = te^{K\sqrt{\log \frac{1}{t} \log\log\log \frac{1}{t}}}$. Toisaalta kaikilla $\alpha \in (0,1)$ pätee

$$\mathcal{H}_{h_K} \ll \mathcal{H}_\alpha,$$

joten jos joukon $E \subset \mathbb{C}$ Hausdorff-dimensio on $\dim_{\mathcal{H}}(E) < 1$, niin on olemassa $\alpha \in (0,1)$, jolla pätee $\mathcal{H}_\alpha(E) = 0$ ja näin ollen myös joukon E harmoninen mitta on $\mu(E) = 0$. Siis harmonisen mitan kantajan Hausdorff-dimensio on vähintään 1 ja siten korollaarin 5.11 nojalla tasan 1.

8 Appendix

Tähän lukuun on koottu sellaisia tuloksia, joita tarvitsemme muualla tässä työssä, mutta joiden esittäminen itsenäisesti on järkevämpää. Aloitamme esittämällä Koeben distortioteoreemaan liittyviä analyyttisten funktioiden perustuloksia, jotka muodostavat oman kokonaisuutensa. Lisäksi esitämme Plessnerin lauseen todistuksen sekä lopulta Vitalin peitelauseen.

8.1 Analyyttisten funktioiden perustuloksia

Analyyttisten funktioiden joukossa erikoistapauksen muodostavat yksikkökiekossa analyyttiset injektiot. Suomenkielisessä termistössä näille ei ole vakiintunutta nimitystä. Sen sijaan englanninkielisissä lähteissä käytetään useimmiten nimitystä *univalent functions*, mutta myös termi *schlicht* voi esiintyä joissain lähteissä. Useimmiten näiden funktioiden luokkaa merkitään kirjaimella $\mathcal{S}$.

Tämän kappaleen tulokset seuraavat lähteitä [Con2], [Pom3] ja [Rud2].

Määritelmä 8.1. Yksikkökiekossa analyyttinen injektio $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ on normeerattu, jos sille pätee $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$.

Huomautus. Normeeratut analyyttiset injektiot antavat tietoa kaikista analyyttisistä injektioista, sillä jos $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ on mikä tahansa analyyttinen injektio, niin funktio

$$f(z) = \frac{g(z) - g(0)}{g'(0)}$$

on normeerattu analyyttinen injektio.

Määritelmä 8.2. Funktioita

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

kutsutaan Koebe-funktioiksi ja yleisemmin funktio

$$f_\theta(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{i(n-1)\theta}z^n, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

on Koebe-funktion kierto tai kierretty Koebe-funktio.

Lause 8.3 (Pinta-ala lause)**.** Olkoon $f\colon \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{C}}$ analyyttinen injektio, jolla on sarjaesitys

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Tällöin pätee

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \leq 1.$$

Todistus. Ks. [Rud2, Thm. 14.13]. □

Syy edellisen lauseen nimelle selviää lauseen todistuksesta, sillä se antaa pinta-alan joukolle $f(\mathbb{D})$. Esimerkiksi lähteessä [Pom3, Thm. 1.3.] kyseinen lause on esitetty muodossa

$$\text{area } f(\mathbb{D}) = \pi \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2\right),$$

mistä tämän lauseen väite seuraa.

Lause 8.4 (Bieberbach)**.** Olkoon f yksikkökiekossa määritelty normeerattu analyyttinen injektio, jolla on sarjaesitys,

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

Tällöin pätee $|a_2| \leq 2$.

Todistus. Ks. [Rud2, Thm. 14.14 (a)] □

Lause 8.5 (Koeben 1/4-teoreema)**.** Olkoon f yksikkökiekossa määritelty normeerattu analyyttinen injektio. Tällöin pätee

$$\operatorname{dist}(0, \partial f(\mathbb{D})) \geq \frac{1}{4}.$$

Todistus. Ks. [Rud2, Thm. 14.14 (b)] □

Sekä Bieberbachin että Koeben 1/4-lauseessa vakiot ovat parhaat mahdolliset.

Lemma 8.6. Olkoon f yksikkökiekossa määritelty normeerattu analyyttinen injektio. Tällöin pätee

$$\left| z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}.$$

Todistus. Olkoon $z_0 \in \mathbb{D}$ ja määritellään funktio

$$f_{z_0}(z) := \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z_0}z}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}.$$

Tällöin f_{z_0} on yksikkökiekossa analyyttinen injektio ja sillä on sarjaesitys $f_{z_0}(z) = z + a_2z^2 + \ldots$. Laskemalla saadaan, että

$$f''_{z_0}(0) = (1-|z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - 2\bar{z_0}.$$

Toisaalta $a_2 = f''_{z_0}(0)/2$ ja lauseen 8.4 nojalla $|a_2| \leq 2$, joten pätee

$$\left|(1-|z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - 2\bar{z_0}\right| \leq 4,$$

ja edelleen

$$\left|\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2\bar{z_0}}{1-|z_0|^2}\right| \leq \frac{4}{1-|z_0|^2}.$$

Nyt kertomalla ylläoleva epäyhtälö puolittain termillä $|z_0|$ ja sijoittamalla $z_0 = z$ saamme halutun epäyhtälön

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}.$$

□

Edellisten tulosten avulla voimme nyt todistaa Koeben distortioteoreeman, joka antaa sekä ala- että ylärajan analyyttisille injektioille ja niiden derivaatalle.

Lause 8.7 (Koebe)**.** Olkoon f yksikkökiekossa määritelty normeerattu analyyttinen injektio ja olkoon $z \in \mathbb{D}$. Tällöin pätee

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \tag{8.1}$$

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \tag{8.2}$$

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{8.3}$$

Todistus. Funktion f derivaatta f' ei häviä yksikkökiekossa $\mathbb{D}$, joten funktiolla $\log f'(z)$ on analyyttinen haara ja koska f on normeerattu analyyttinen injektio, niin pätee $\log f'(0) = 0$. Ketjusäännön ja lemman 8.6 nojalla saamme

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial r}\log[(1-r^2)f'(re^{i\theta})]\right| &= \left|-\frac{2r}{1-r^2} + e^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right| \\ &\leq \frac{4}{1-r^2}.\end{aligned}$$

Koska f on normeerattu, niin $f'(0) = 1$ ja valitsemalla $\theta = \arg z$ saamme arvion

$$\begin{aligned}|\log[(1-|z|^2)f'(z)]| &\leq \int_0^{|z|}\left|\frac{\partial}{\partial r}\log[(1-r^2)f'(re^{i\theta})]\right| dr \\ &\leq \int_0^{|z|}\frac{4}{1-r^2}\, dr \\ &= 2\log\frac{1+|z|}{1-|z|}.\end{aligned}$$

Koska pätee $\mathrm{Re}\,(\log z) = \log|z|$, niin ottamalla reaaliosa ensimmäisestä lausekkeesta saamme

$$-2\log\frac{1+|z|}{1-|z|} \leq \log[(1-|z|^2)|f'(z)|] \leq 2\log\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Korottamalla epäyhtälö puolittain eksponenttiin ja sieventämällä saamme epäyhtälön (8.1)

Koska pätee $f(0) = 0$, niin käyttämällä epäyhtälön (8.1) oikeanpuoleista arviota saamme suoraan integroimalla epäyhtälön (8.2) ylärajan:

$$\begin{aligned}|f(z)| &\leq \int_0^{|z|}|f'(re^{i\theta})|\, dr \\ &\leq \int_0^{|z|}\frac{1+r}{(1-r)^3}\, dr \\ &= \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.\end{aligned}$$

Epäyhtälön (8.2) vasenta puolta varten huomataan, että $t/(1+t)^2 \leq 1/4$ kaikilla $t \in [0,1]$, joten voidaan olettaa, että $|f(z)| \leq 1/4$. Olkoon nyt $z \in \mathbb{D}$ piste, jolle pätee $|f(z)| < 1/4$. Koska f on injektio ja Koeben 1/4-teoreeman nojalla $\{w : |w| < 1/4\} \subset f(\mathbb{D})$, niin on olemassa polku $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{D}$, jonka kuva $f \circ \gamma$ on jana $[0, f(z)]$, eli $f(\gamma(t)) = tf(z)$. Näin ollen

$$|f(z)| = \left| \int_\gamma f'(w)\, dw \right| = \left| \int_0^1 f'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt \right|.$$

Toisaalta $f'(\gamma(t))\gamma'(t) = d/dt\, f(\gamma(t)) = d/dt\, tf(z) = f(z)$, joten pätee

$$|f(z)| = \int_\gamma |f'(w)||dw|.$$

Jos $0 \le s < t \le 1$, niin kolmioepäyhtälön nojalla pätee $|\gamma(t) - \gamma(s)| \ge ||\gamma(t)| - |\gamma(s)||$, ja siten käyttämällä lisäksi epäyhtälön (8.1) alarajaa saadaan

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \int_\gamma |f'(w)||dw| \\ &\ge \int_0^{|z|} \frac{1 - |w|}{(1 + |w|)^3}\, d|w| \\ &= \frac{|z|}{(1 + |z|)^2}. \end{aligned}$$

Epäyhtälön (8.3) todistamiseksi tutkitaan funktiota

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1-\bar{z_0}z}\right) - f(z_0)}{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}.$$

Koska pätee $f(0) = 0$, niin pisteessä $z = -z_0$ saadaan

$$g(-z_0) = \frac{-f(z_0)}{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}$$

ja näin ollen

$$\left| z_0 \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \right| = \frac{1}{1 - |z_0|^2} \left| \frac{z_0}{g(-z_0)} \right|.$$

Lisäksi funktio g on normeerattu analyyttinen injektio, joten voimme soveltaa ylläolevaan epäyhtälöä (8.2). Tällöin saamme

$$\begin{aligned} \left| z_0 \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \right| &= \frac{1}{1 - |z_0|^2} \left| \frac{z_0}{g(-z_0)} \right| \\ &\le \frac{1}{1 - |z_0|^2} \left| \frac{z_0}{\frac{|-z_0|}{(1+|-z_0|)^2}} \right| \\ &= \frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|}, \end{aligned}$$

mikä on epäyhtälön (8.3) oikea puoli. Vastaavasti arvioimalla saamme vasemmaksi puoleksi

$$\begin{aligned}\left|z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right| &= \frac{1}{1-|z_0|^2}\left|\frac{z_0}{g(-z_0)}\right| \\ &\geq \frac{1}{1-|z_0|^2}\left|\frac{z_0}{\frac{|-z_0|}{(1-|-z_0|)^2}}\right| \\ &= \frac{1-|z_0|}{1+|z_0|}.\end{aligned}$$

□

Seuraavaksi osoitamme Hardyn identiteetin analyyttisille funktioille. Edellisissä lauseissa vaadimme, että funktio f on analyyttinen injektio, mutta tämä identiteetti ei vaadi niin vahvoja oletuksia, vaan pelkkä analyyttisyys riittää.

Lause 8.8 (Hardyn identiteetti)**.** Olkoon f yksikkökiekossa $\mathbb{D}$ määritelty analyyttinen funktio ja määritellään

$$J_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^{2n} d\theta, \quad z = re^{i\theta},\ 0 \leq r < 1.$$

Jos $f(z) \neq 0$, kun $|z| = r$, niin tällöin pätee

$$r\frac{d}{dr}[rJ_n'(r)] = \frac{r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^{2n-2}|f'(z)|^2 d\theta, \quad z = re^{i\theta}.$$

Todistus. Koska pätee

$$\begin{aligned}r\frac{\partial}{\partial r}|f(z)| &= r\frac{\partial}{\partial r}e^{\log|f(z)|} \\ &= r\frac{\partial}{\partial r}[\text{Re } \log f(z)]\cdot|f(z)| \\ &= r\text{Re}\left[e^{i\theta}\frac{f'(z)}{f(z)}\right]\cdot|f(z)| \\ &= |f(z)|\text{Re } z\frac{f'(z)}{f(z)},\end{aligned}$$

niin

$$\begin{aligned}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2|f(z)|^{2n} &= 4n^2|f(z)|^{2n}\left(\frac{1}{2}\text{Re } z^2\frac{f'(z)^2}{f(z)^2} + \frac{1}{2}\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|^2\right) \\ &+ 2n|f(z)|^{2n}\text{Re }\left(z^2\frac{f''(z)f(z)-f'(z)^2}{f(z)^2} + z\frac{f'(z)}{f(z)}\right).\end{aligned}$$

Vastaavasti laskemalla saadaan, että pätee

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}|f(z)| &= \frac{\partial}{\partial\theta}e^{\log|f(z)|}\\ &= \frac{\partial}{\partial\theta}[\mathrm{Re}\ \log f(z)]\cdot|fz|\\ &= \mathrm{Re}\ ire^{i\theta}\frac{f'(z)}{f(z)}\cdot|f(z)|\\ &= -|f(z)|\mathrm{Im}\ z\frac{f'(z)}{f(z)},\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2|f(z)|^{2n} &= 4n^2|f(z)|^{2n}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Re}\ z^2\frac{f'(z)^2}{f(z)^2}-\frac{1}{2}\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|^2\right)\\ &+ 2n|f(z)|^{2n}\mathrm{Re}\ \left(z^2\frac{f''(z)f(z)-f'(z)^2}{f(z)^2}+z\frac{f'(z)}{f(z)}\right).\end{aligned}$$

Nyt yhdistämällä ylläolevat saamme, että pätee

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2|f(z)|^{2n}-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2|f(z)|^{2n}=4n^2|f(z)|^{2n}\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|^2$$

ja tästä integroimalla puolittain saamme, että

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2|f(z)|^{2n}-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2|f(z)|^{2n}\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}4n^2|f(z)|^{2n}\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|^2d\theta.$$

Tämä on Hardyn identiteetti

$$r\frac{d}{dr}[rJ_n'(r)]=\frac{4n^2r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z)|^{2n-2}|f'(z)|^2d\theta,$$

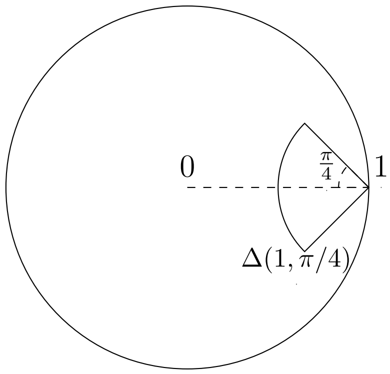
kun sovellamme funktion $J_n(r)$ määritelmää ja huomaamme, että periodisuuden nojalla toisen termin integraali on nolla. □

8.2 Plessnerin lause

Määritelmä 8.9. Symmetrinen Stolzin kulma pisteessä $\xi\in\partial\mathbb{D}$ on

$$\Delta(\xi,\delta)=\left\{z\in\mathbb{D}\,:\,|1-\bar{\xi}z|<\frac{1}{2},|\arg(1-\bar{\xi}z)|<\frac{\pi}{2}-\delta\right\},\qquad(8.4)$$

missä $\delta\in(0,\pi/2)$.



Kuva 6: Pisteessä $\xi = 1$ määritelty symmetrinen Stolzin kulma $\Delta(1, \pi/4)$ avauksella $\pi/2$.

Määritelmä 8.10. Olkoon f yksikkökiekossa määritelty meromorfinen funktio. Piste $\xi \in \partial\mathbb{D}$ on *Plessnerin piste*, jos joukko

$$\{f(z)\,:\, z \in \Delta(\xi, \delta),\, r < |z| < 1\}$$

on tiheä laajennetussa kompleksitasossa $\overline{\mathbb{C}}$ jokaisella Stolzin kulmalla $\Delta(\xi, \delta)$ ja kaikilla $r < 1$.

Karkeasti ottaen Plessnerin piste on vastakohta Fatoun pisteelle, jossa funktiolla f on olemassa raja-arvo pitkin jokaista Stolzin kulmaa.

Todistaaksemme Plessnerin lauseen, joka antaa tietoa meromorfisten funktioiden käyttäytymisestä yksikkökiekon reunalla, tarvitsemme joitakin tuloksia Hardyn H^p-avaruuksista, erityisesti H^1-avaruudesta. Emme kuitenkaan todista kaikkea ja tarkemmin H^p-avaruuksista voi lukea lähteistä [Pom3] ja [Rud2]. Selkeyden vuoksi annamme kuitenkin H^p-avaruuden määritelmän: H^p-avaruuden funktiot ovat yksikkökiekossa analyyttisiä funktioita, joille pätee

$$\sup_{0 \le r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p} < \infty.$$

Määritelmä muistuttaa siis läheisesti L^p-funktioiden määritelmää.

Lemma 8.11. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ alue, jolle pätee, että $\partial\Omega$ on suoristuva Jordan-käyrä ja olkoon $f\colon \mathbb{D} \to \Omega$ analyyttinen injektio, $f(\mathbb{D}) = \Omega$. Tällöin pätee $f' \in H^1$ ja

$$l(\partial\Omega) = \int_0^{2\pi} |f'(e^{i\theta})| \, d\theta.$$

Todistus. Ks. [Pom3, Lem. 10.7] $\square$

Myöhemmin tarkoitamme angulaarisella derivaatalla $f'(\xi)$ raja-arvoa $\lim_{z\to\xi} f'(z)$, kun pistettä ξ lähestytään pitkin mitä tahansa Stolzin kulmaa. Jos tätä raja-arvoa ei ole olemassa, niin tällöin funktiolla ei ole angulaarista derivaattaa. Vastaavasti angulaarisella raja-arvolla $f(\xi)$ tarkoitetaan funktion raja-arvoa pitkin mitä tahansa Stolzin kulmaa.

Lause 8.12. Olkoon f yksikkökiekossa $\mathbb{D}$ määritelty analyyttinen injektio. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

1. $f' \in H^1$
2. $\mathcal{H}_1(\partial f(\mathbb{D})) < \infty$.

Lisäksi, jos pätee $f' \in H^1$, niin melkein kaikilla $\theta \in [0, 2\pi]$ angulaariselle derivaatalle $f'(e^{i\theta})$ pätee

$$\frac{d}{d\theta} f(e^{i\theta}) = ie^{i\theta} f'(e^{i\theta}) \neq 0.$$

Todistus. Ks. [Pom3, Thm. 10.11] □

Lause 8.13. Olkoon $f\colon \mathbb{D} \to \Omega$ konforminen ja $f(\mathbb{D}) = \Omega$. Oletetaan, että pätee $f' \in H^1$ ja olkoon $A \subset \partial\mathbb{D}$ mitallinen joukko. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

1. $|A| = 0$
2. $\mathcal{H}_1(f(A)) = 0$.

Todistus. Ks. [Pom3, Thm. 10.12] □

Seuraava Plessnerin lause on vuodelta 1927 ja sen nojalla meromorfiset funktiot käyttäytyvät joko hyvin tai todella huonosti melkein kaikkialla yksikkökiekon reunalla, kun reunaa lähestytään mitä tahansa sektoria pitkin.

Lause 8.14 (Plessner)**.** Olkoon f yksikkökiekossa määritelty meromorfinen funktio. Tällöin funktiolla f on äärellinen raja-arvo pitkin sektoria melkein kaikissa pisteissä $\xi \in \partial\mathbb{D}$, jotka eivät ole Plessnerin pisteitä.

Todistus. Tutkitaan kaikkia avoimia kiekkoja

$$\{w \in \mathbb{C} \,:\, |w - c| < \delta\}, \tag{8.5}$$

missä $\operatorname{Re} c, \operatorname{Im} c$ ja δ ovat rationaalilukuja, sekä rationaalilukuja α ja r, joille pätee $0 < \alpha < \pi/6$ sekä $1/2 < r < 1$. Olkoon nyt

$$(D_n, \alpha_n, r_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

tällaisten kiekkojen ja rationaalilukujen numerointi. Määritellään joukko E_n seuraavasti: joukossa E_n on kaikki ne pisteet $\xi \in \partial\mathbb{D}$, missä funktiolla f ei ole olemassa äärellistä angulaarista raja-arvoa, ja pisteet joille pätee

$$\{f(z) \,:\, |\arg(1-\bar{\xi}z)| < \alpha_n,\, r_n \leq |z| < 1\} \cap D_n = \emptyset \tag{8.6}$$

Tällöin $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ on joukko, missä on kaikki ne pisteet, jotka eivät ole Plessnerin pisteitä ja missä funktiolla f ei ole äärellistä angulaarista raja-arvoa. Näin ollen riittää näyttää, että $|E_n| = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Väite riittää osoittaa mielivaltaiselle $n \in \mathbb{N}$, joten merkintöjä selkeyttääksemme jätämme indeksin n kirjoittamatta ja merkitsemme $E := E_n$. Olkoon

$$H = \{|z| < r\} \cup \bigcup_{\xi \in E} \{\arg(1-\bar{\xi}z) < \alpha,\, r \leq |z| < 1\}. \tag{8.7}$$

Tällöin H on tähtimäinen alue. Olkoon $m \in \mathbb{N}$. Jos ξ_j (j=1,...,m) on piste, missä jana $[0, e^{2\pi ij/m}]$ leikkaa reunan ∂H, niin kiekot

$$\left\{|z-\xi_j| < \sin\frac{2\pi}{m}/\sin\alpha\right\}$$

peittävät reunan ∂H. Tästä seuraa, että

$$\mathcal{H}_1(\partial H) \leq 2\pi/\sin\alpha < \infty, \tag{8.8}$$

sillä $m \sin\frac{2\pi}{m} \to 2\pi$, kun $m \to \infty$.

Olkoon nyt funktio $\phi\colon \mathbb{D} \to H$ analyyttinen injektio, jolle pätee $\phi(0) = 0$. Jos pisteet $z_1, \ldots, z_k$ ovat funktion $f(z) - c$, mahdollisia nollakohtia alueessa $|z| \leq r_n$, niin tällöin funktio

$$h(z) := \frac{(z-z_1)\ldots(z-z_k)}{f(z)-c} \tag{8.9}$$

on rajoitettu alueessa $|z| \leq r$ ja h ei ole identtisesti 0. Nyt kaavoista (8.5), (8.6) ja (8.7) seuraa, että alueessa $H \setminus \{|z| < r\}$ pätee

$$|h(z)| < \frac{2^k}{\delta},$$

joten funktio h on rajoitettu alueessa H. Näin ollen funktio $h(\phi(z))$ on rajoitettu ja analyyttinen yksikkökiekossa $\mathbb{D}$, joten sillä on olemassa nollasta eroava angulaarinen raja-arvo melkein kaikilla $\xi \in \partial\mathbb{D}$ (ks. [Rud2, Thm. 17.11 ja Thm. 17.18]).

Koska $\mathcal{H}_1(\partial H) < \infty$, niin lauseen 8.12 nojalla pätee $\phi' \in H^1$ ja näin ollen funktiolla ϕ on olemassa nollasta eroava angulaarinen derivaatta melkein kaikkialla, joten se on konforminen melkein kaikkialla joukossa $\partial\mathbb{D}$ ja siten konforminen melkein kaikilla $z \in \phi^{-1}(H)$.

Olkoon ξ piste, missä ϕ on konforminen ja funktiolla $h(\phi(z))$ on olemassa angulaarinen raja-arvo. Tällöin funktiolla h on angulaarinen raja-arvo pisteessä $\phi(\xi)$. Nyt joukon E määritelmän ja yhtälön (8.9) nojalla funktiolla h ei ole nollasta eroavaa angulaarista raja-arvoa joukossa E. Tästä seuraa, että melkein kaikilla $z \in \phi^{-1}(E)$ funktiolla $h(\phi(z))$ ei ole nollasta eroavaa angulaarista raja-arvoa. Toisaalta kuitenkin tiedetään, että funktiolla $h(\phi(z))$ on nollasta eroava angulaarinen raja-arvo melkein kaikkialla, joten täytyy olla $|\phi^{-1}(E)| = 0$. Lauseen 8.13 nojalla tästä seuraa, että $\mathcal{H}_1(E) = 0$ ja edelleen $|E| = 0$. Tämä todistaa Plessnerin lauseen.

$\square$

Seuraava lause antaa tärkeän tuloksen koskien analyyttisten injektioiden jatkamista lähtö- ja maalijoukon reunalle. Yleisesti analyyttistä injektiotakaan ei voida jatkaa jatkuvaksi funktioksi reunalle, mutta Jordan-alueiden tapauksessa pätee jopa vahvempi tulos. Emme kuitenkaan todista tätä, sillä se vaatisi paljon työtä, joka ei ole tämän työn kannalta oleellista.

Lause 8.15. Olkoot $\Omega \subset \mathbb{C}$ ja $\Omega' \subset \mathbb{C}$ Jordan-alueita ja olkoon $f : \Omega \to \Omega'$ analyyttinen injektio, jolle $f(\Omega) = \Omega'$. Tällöin funktio f voidaan laajentaa homeomorfismiksi $f : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$.

Todistus. Ks. [Pom3, Thm. 9.10] $\square$

Todistamme vielä lauseen, joka antaa yhteyden yksikkökiekon reunan osajoukon Lebesguen mitalle ja sen kuvajoukon Hausdorff-mitalle tapauksessa, jossa analyyttisen funktion derivaatalla on olemassa raja-arvo kaikissa tämän osajoukon pisteissä.

Lause 8.16. Olkoon f analyyttinen funktio yksikkökiekossa $\mathbb{D}$ ja olkoon $A \subset \partial\mathbb{D}$ mitallinen joukko, jonka jokaisessa pisteessä $\xi \in A$ funktiolla f' on olemassa raja-arvo pitkin jokaista sektoria, jonka kärki on pisteessä ξ. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

1. $|A| = 0$
2. $\mathcal{H}_1(f(A)) = 0$.

Todistus. Todistus perustuu vastaavanlaiseen konstruktioon kuin Plessnerin lauseen todistus. Olkoon $\xi \in A$ ja olkoon joukko

$$T(\xi) = \left\{ z \,:\, \frac{1}{2} \le |z| < 1,\ |\arg(1 - \bar{\xi}z) < \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Koska funktiolla f on äärellinen angulaarinen derivaatta, $|f'(z)|$ on rajoitettu joukossa $T(\xi)$ kaikilla $\xi \in A$.

Oletetaan, että pätee $|A| > 0$. Tällöin on olemassa osajoukko $B \subset A$, jolle pätee $|B| > 0$, ja vakio M, jolle pätee

$$|f'(z)| < M, \tag{8.10}$$

kun $z \in T(\xi)$, $\xi \in B$. Kuten yhtälössä (8.7), huomataan, että Jordan-alueelle

$$H = \left\{|z| < \frac{1}{2}\right\} \cup \bigcup_{\xi \in B} T(\xi) \tag{8.11}$$

pätee $\mathcal{H}_1(\partial H) < \infty$. Koska $\mathcal{H}_1(\cdot)$ on ulkomitta, niin olettamalla $\mathcal{H}_1(f(A)) > 0$ oletuksen $|A| > 0$ sijaan, voidaan löytää osajoukko $B \subset A$, jolle pätee samat ominaisuudet ja $\mathcal{H}_1(f(B)) > 0$.

Olkoon $\phi\colon \mathbb{D} \to H$ analyyttinen injektio, jolle pätee $\phi(\mathbb{D}) = H$. Nyt molemmissa ylläolevissa tapauksissa ϕ voidaan lauseen 8.15 nojalla laajentaa homeomorfismiksi sulkeumien $\overline{\mathbb{D}}$ ja $\overline{H}$ välille. Lisäksi lauseen 8.12 nojalla $\phi' \in H^1$, sillä $\mathcal{H}_1(\partial H) < \infty$.

Merkitään nyt $B^* = \phi^{-1}(B)$. Tällöin lauseen 8.13 nojalla se, että $|B^*| = 0$ on yhtäpitävää sen kanssa, että $\mathcal{H}_1(B) = |B| = 0$.

Yhtälöiden (8.10) ja (8.11) nojalla funktiolle $g(s) := f(\phi(s))$ pätee

$$|g'(s)| = |f'(\phi(s))||\phi'(s)| \leq M'|\phi'(s)|,$$

missä $|s| < 1$. Näin ollen pätee $g' \in H^1$ ja jälleen lauseen 8.13 nojalla se, että $\mathcal{H}_1(g(B^*)) = 0$ on yhtäpitävää sen kanssa, että $|B^*| = 0$.

Olkoot $\xi \in B$ ja $R = [0, \xi]$. Tällöin $\phi^{-1}(R)$ on polku, jonka päätepiste on $\xi^* := \phi^{-1}(\xi) \in B^*$. Näin ollen pätee $g(s) = f(\phi(s)) \to f(\xi)$, kun $s \to \xi^*$ joukossa $\phi^{-1}(R)$. Koska funktio g on jatkuva joukossa $\overline{\mathbb{D}}$, niin $g(\xi^*) = f(\xi)$ ja näin ollen pätee $g(B^*) = f(B)$.

Näin ollen ylläolevan tarkastelun nojalla ehto $|B| = 0$ on yhtäpitävää ehdon $\mathcal{H}_1(f(B)) = 0$ kanssa. Tästä seuraa lauseen väite, sillä konstruktion nojalla ehto $|A| > 0$ on yhtäpitävää ehdon $|B| > 0$ ja vastaavasti se, että $\mathcal{H}_1(f(A)) > 0$ on yhtäpitävää sen kanssa, että $\mathcal{H}_1(f(B)) > 0$.

□

8.3 Vitalin peitelause

Seuraavaksi osoitamme Vitalin peitelauseen avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Seuraamme todistuksessa lähteitä [Mat] ja [EG].

Määritelmä 8.17. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja olkoon $\mathcal{F}$ kokoelma avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettuja kuulia, jolle pätee

$$A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B.$$

Sanomme, että $\mathcal{F}$ on joukon A Vitalin peite, jos kaikilla $x \in A$ pätee

$$\inf\{\operatorname{diam} B \,:\, x \in B,\, B \in \mathcal{F}\} = 0.$$

Seuraavissa peitelauseissa käytämme merkintää $5B$, millä tarkoitamme

$$5B = B(x, 5r), \quad \text{kun } B = B(x, r).$$

Lause 8.18. Olkoon $\mathcal{F}$ mikä tahansa kokoelma avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettuja kuulia, joille pätee

$$D := \sup\{\operatorname{diam} B \,:\, b \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Tällöin on olemassa numeroituva kokoelma $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, missä kuulat $B \in \mathcal{G}$ ovat erillisiä, eli $B_i \cap B_j = \emptyset$, kun $i \neq j$, ja pätee

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} 5B.$$

Todistus. Olkoon $j \in \mathbb{N}$ ja määritellään kokoelmat

$$\mathcal{F}_j = \{B \in \mathcal{F} \,:\, \frac{D}{2^j} < \operatorname{diam} B \leq \frac{D}{2^{j-1}}\}.$$

Määritellään sitten kokoelmat $\mathcal{G}_j \subset \mathcal{F}_j$ seuraavasti:

(a) Olkoon $\mathcal{G}_1$ mikä tahansa maksimaalinen kokoelma erillisiä kuulia kokoelmassa $\mathcal{F}_1$

(b) Oletetaan, että kokoelmat $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_{k-1}$ on valittu. Olkoon $\mathcal{G}_k$ nyt mikä tahansa maksimaalinen kokoelma kuulia $B \in \mathcal{F}_k$ joille pätee

$$B \cap B' = \emptyset \text{ kaikilla } B' \in \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathcal{G}_j.$$

Nyt kokoelmalle

$$G := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{G}_j$$

pätee $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ ja kokoelman $\mathcal{G}$ kuulat ovat erillisiä.

Osoitetaan seuraavaksi, että jokaista kuulaa $B \in \mathcal{F}$ kohti on olemassa kuula $B' \in \mathcal{G}$, jolle pätee $B \cap B' \neq \emptyset$ ja $B \subset 5B$.

Olkoon $B \in \mathcal{F}$. Tällöin on olemassa indeksi $j \in \mathbb{N}$, jolle pätee $B \in \mathcal{F}_j$. Nyt kokoelman $\mathcal{G}_j$ maksimaalisuuden nojalla on olemassa kuula $B' \in \cup_{k=1}^{j} \mathcal{G}_k$, jolle pätee $B \cap B' \neq \emptyset$. Toisaalta pätee

$$\operatorname{diam} B' \geq \frac{D}{2^j} \quad \text{ja} \quad \operatorname{diam} B \leq \frac{D}{2^{j-1}},$$

joten $\operatorname{diam} B \leq 2 \operatorname{diam} B'$ ja näin ollen $B \subset 5B'$. $\square$

Korollaari 8.19. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja olkoon $\mathcal{F}$ joukon A Vitalin peite, jolle pätee

$$\sup\{\operatorname{diam} B \,:\, B \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Tällöin on olemassa numeroituva kokoelma $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ erillisiä kuulia, jonka jokaiselle äärelliselle osakokoelmalle $\{B_1, \ldots, B_m\} \subset \mathcal{F}$ pätee

$$A \setminus \bigcup_{k=1}^{m} B_k \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G} \setminus \{B_1, \ldots, B_m\}} 5B.$$

Todistus. Olkoon $\mathcal{G}$ kuten lauseen 8.18 todistuksessa. Valitaan nyt äärellinen kokoelma $\{B_1, \ldots, B_m\} \subset \mathcal{F}$. Jos pätee

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{m} B_k,$$

niin väite on selvä.

Olkoon nyt $x \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{m} B_k$. Koska kokoelman $\mathcal{F}$ kuulat ovat suljettuja ja $\mathcal{F}$ sisältää mielivaltaisen pieniä kuulia, niin on olemassa kuula $B \in \mathcal{F}$, jolle pätee $x \in B$ ja $B \cap B_k = \emptyset$ kaikilla $k \in \{1, \ldots, m\}$. Tällöin lauseen 8.18 todistuksen loppuosan nojalla on olemassa kuula $B' \in \mathcal{G}$, jolle pätee $B \cap B' \neq \emptyset$ ja $B \subset 5B'$. $\square$

Lause 8.20 (Vitalin peitelause)**.** Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja olkoon $\mathcal{F}$ joukon A Vitalin peite. Tällöin on olemassa numeroituva kokoelma $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ erillisiä kuulia B, joille pätee

$$\left| A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B \right| = 0.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että A on rajoitettu ja kiinnitetään $\lambda \in (1 - 1/5^n, 1)$. Koska $\mathcal{F}$ on joukon A Vitalin peite, niin lauseen 8.18 nojalla on olemassa numeroituva kokoelma $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{F}$ erillisiä kuulia B, jolle pätee $B \subset A$ ja

$$A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} 5B.$$

Näin ollen pätee

$$\begin{aligned} |A| &\leq \sum_{B \in \mathcal{G}_1} |5B| \\ &= 5^n \sum_{B \in \mathcal{G}_1} |B| \\ &= 5^n \left| \bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} B \right|, \end{aligned}$$

mistä saadaan

$$\left| \bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} B \right| \geq \frac{1}{5^n} |A|$$

ja edelleen

$$\left| A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} B \right| \leq \left(1 - \frac{1}{5^n} \right) |A|.$$

Koska kokoelma $\mathcal{G}_1$ on numeroituva, niin on olemassa M_1, jolle pätee

$$\left| A \setminus \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i \right| \leq \lambda |A|.$$

Olkoon nyt $A_2 := A \setminus \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i$. Ylläolevaan tapaan voidaan valita äärellinen määrä erillisiä kuulia $B_i \subset A_2$, joille pätee

$$\begin{aligned} \left| A \setminus \bigcup_{i=1}^{M_2} B_i \right| &= \left| A_2 \setminus \bigcup_{i=M_1+1}^{M_2} B_i \right| \\ &\leq \lambda |A_2| \\ &\leq \lambda^2 |A|. \end{aligned}$$

Jatkamalla ylläolevaa prosessia saadaan numeroituva kokoelma erillisiä kuulia, joille pätee

$$\left| A \setminus \bigcup_{i=1} M_k B_i \right| \leq \lambda^k |A|, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Koska $\lambda^k \to 0$, kun $k \to \infty$, niin väite pätee tapauksessa $|A| < \infty$.
Jos $|A| = \infty$, niin sovelletaan ylläolevaa päättelyä joukkoihin

$$A_m := \{x \in A : m < |x| < m+1, m = 0, 1, \ldots\}.$$

Tämä osoittaa väitteen. $\square$

Viitteet

[Ahl] Ahlfors, L. V. *Complex Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill, 1979.

[Con1] Conway, J. B. *Functions of One Complex Variable*, Second Edition, Springer-Verlag, 1978.

[Con2] Conway, J. B. *Functions of One Complex Variable II*, Springer-Verlag, 1995.

[EG] Evans, L, Gariepy, R. *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, 1992.

[Gar] Garnett, J. *Analytic capacity and measure*, Lecture Notes in Mathematics 297, Springer-Verlag, 1972.

[Hei] Heinonen, J. *Harmoninen mitta ja Makarovin lause*, Arkhimedes, 40. vsk (1988), 75-88.

[Hel] Helms, L. L. *Introduction to Potential Theory*, Wiley-Interscience, 1969.

[Mak] Makarov, N.G. *On the Distortion of Boundary Sets Under Conformal Mappings*, Proc. London Math. Society (3), 51 (1985), 369-384.

[Mat] Mattila, P. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*, Cambridge University Press, 1995.

[Pom1] Pommerenke, Ch. *On Conformal Mapping and Linear measure*, J. d'Analyse Math. 46 (1986), 231-238.

[Pom2] Pommerenke, Ch. *The Growth of the Derivative of a Univalent Function*, The Bieberbach Conjucture. Proceedings of the Symposium on the Ocassion of the Proof. Math. Surveys and Monographs 21 (1986), 143-152.

[Pom3] Pommerenke, Ch. *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[Rog] Rogers, C. A. *Hausdorff Measures*, Cambridge University Press, 1970.

[Roh] Rohde, S. *On an Estimate of Makarov in Conformal Mapping*, Complex Variables Vol. 10 (1988), 381-386.

[Rud1] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill, 1976.

[Rud2] Rudin, W. *Real and Complex Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill, 1987.

[Sak1] Saksman, E. *Complex Analysis II*, Lecture notes, Helsingin yliopisto, 2012.

[Sak2] Saksman, E. *Function Theory III*, Lecture notes, Helsingin yliopisto, 2010.