Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

78. BAND, 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 9. JANUAR 1962)

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1962

Inhalt des 78. Bandes

KASCH, F., u. B. VOLKMANN
Math. Zeitschr. 78, 171–174 (1962)

Metrische Sätze über transzendente Zahlen in P-adischen Körpern. II.

Von

FRIEDRICH KASCH und BODO VOLKMANN

Seit dem Erscheinen unserer ersten Arbeit [*4*] mit gleichem Titel, an die wir im folgenden anknüpfen, hat Herr H. DAVENPORT [*3*] eine Abschätzung über kubische Formen erhalten, die im reellen Fall zu einem Beweis der Mahlerschen Vermutung für $n=3$ geführt hat (s. [*6*]). Es soll nun gezeigt werden, daß auch im P-adischen die analoge Vermutung, wie wir sie in [*4*], Gl. (24) aufgestellt haben, für $n=3$ richtig ist, daß also folgender Satz gilt:

SATZ. *Für fast alle Zahlen* $\xi \in K_P$ *ist* $\vartheta_3(\xi)=\frac{4}{3}$.

BEWEIS. Jedem Polynom $p(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ mit ganzrationalen Koeffizienten ordnen wir die binäre Form $p(x,y)=a_0x^3+a_1x^2y+a_2xy^2+a_3y^3$ zu; ferner bezeichnen wir mit $h(d)$ die Anzahl der Äquivalenzklassen[1]) solcher irreduziblen Formen, deren Diskriminante $D(p)=d$ ist. Bezeichnet man die zu p äquivalente reduzierte[1]) Form jeweils mit p^* und mit $N(p^*,H)$ die Anzahl aller Formen p mit Höhen $\|p\|\leqq H$, die zu einer gegebenen reduzierten Form p^* äquivalent sind, so besagen ältere Ergebnisse von DAVENPORT ([*1*], [*2*]), daß[2])

$$\sum_{0<|d|\leqq H}^{d} h(d) \ll H \tag{1}$$

gilt. Weiterhin wird in seiner neuen Arbeit ([*3*], Ungl. (5)) bewiesen, daß für alle reduzierten Formen p^* die Ungleichung

$$N(p^*,H) \ll H\,|D(p^*)|^{-\frac{1}{4}} \tag{2}$$

erfüllt ist.

Wir zeigen zunächst mit Hilfe von (1) und (2), daß die Summe

$$\Sigma(H)=\sum_{\|p\|\leqq H}^{p} |D(p)|_P^{-\frac{1}{2}},$$

erstreckt über alle irreduziblen kubischen Polynome, die ja bei der Abschätzung des Turkstraschen Maßes $T(S_3(\sigma))$ die entscheidende Rolle spielt, der Ungleichung

$$\Sigma(H) \ll H^4 \tag{3}$$

genügt.

---

[1]) Definitionen dieser Begriffe findet man z.B. in [*1*] und [*2*].

[2]) Das Symbol $\ll$ bedeutet durchweg, daß jeweils der Quotient beider Größen unterhalb einer von den auftretenden Höhen unabhängigen, positiven Schranke C liegt. Unter den Summenzeichen bedeutet also z.B. $0<d\ll H^4$, daß d die Zahlen $1, 2, \ldots, CH^4$ durchläuft.

Da im kubischen Fall aus $\|p\| \leqq H$ stets $|D(p)| \ll H^4$ folgt und immer $D(p^*) = D(p)$ ist, erhält man auf Grund von (2)

$$\Sigma(H) \ll \sum_{0<|D(p^*)|\ll H^4}^{p^*} N(p^*, H)\, |D(p^*)|_P \ll H \sum_{0<d\ll H^4}^{d} h(d)\, d^{-\frac{1}{4}}\, |d|_P^{-\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Nach (1) ist jedoch, wie man durch partielle Summation bestätigt, für jedes natürliche x

$$\begin{aligned}\sum_{d\leqq x}^{d} h(d)\, d^{-\frac{1}{4}} &\ll \sum_{d=1}^{x} \Big(\sum_{y=1}^{d} h(y)\Big) \big(d^{-\frac{1}{4}} - (d+1)^{-\frac{1}{4}}\big) \\ &\ll \sum_{d=1}^{x} d \cdot d^{-\frac{5}{4}} \ll x^{\frac{3}{4}},\end{aligned}$$

wobei wir auf den zweiten Faktor den Mittelwertsatz der Differentialrechnung angewendet haben. Setzt man dies (mit $x = CH^4$) in (4) ein, so ergibt sich — wiederum durch partielle Summation —

$$\left\{\begin{aligned}\Sigma(H) &\ll H \sum_{0<d\ll H^4}^{d} d^{\frac{3}{4}} \big(|d|_P^{-\frac{1}{2}} - |d+1|_P^{-\frac{1}{2}}\big) \\ &\ll H \sum_{0<d\ll H^4}^{d} \big(d^{\frac{3}{4}} - (d-1)^{\frac{3}{4}}\big) |d|_P^{-\frac{1}{2}} \ll H \sum_{0<d\ll H^4}^{d} d^{-\frac{1}{4}} |d|_P^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Durchläuft nun d_k jeweils die natürlichen Zahlen mit $|d_k|_P = P^{-k}$ $(k = 0, 1, \ldots)$, so gilt

$$\sum_{0<d_k\ll H^4}^{d_k} d_k^{-\frac{1}{4}} |d_k|_P^{-\frac{1}{2}} \leqq P^{\frac{k}{2}} \sum_{0<d_k\ll H^4}^{d_k} d_k^{-\frac{1}{4}} \ll P^{\frac{k}{4}} \sum_{i=1}^{[H^4 P^{-k}]} i^{-\frac{1}{4}} \ll P^{\frac{k}{4}} H^3 P^{-\frac{3k}{4}} = H^3 P^{-\frac{k}{2}}.$$

Zusammen mit (5) ergibt dies

$$\Sigma(H) \ll H \sum_{0<d\ll H^4}^{d} d^{-\frac{1}{4}} |d|_P^{-\frac{1}{2}} \ll H^4 \sum_{k=0}^{\infty} P^{-\frac{k}{2}} \ll H^4,$$

womit (3) bewiesen ist.

In der Schreibweise von [*4*] ist für jedes $\sigma > \frac{4}{3}$ die Menge $S_3(\sigma)$ in der Form $S_3(\sigma) = S^0 \cup S^1 \cup S^3$ zu zerlegen, wobei sich wie dort beim Beweis von Satz 2 zeigen läßt, daß S^0 und S^1 das Maß Null haben. Bei der Berechnung von $T\big(S_3(\sigma)\big)$ kann man sich also auf die Teilmenge S^3 beschränken, d.h. bei der Approximation der Elemente $\xi \in K_P$ brauchen nur kubische Polynome mit lauter verschiedenen Nullstellen betrachtet zu werden, die sich über dem Ring der ganzrationalen Zahlen nicht in ein Produkt von drei Linearfaktoren zerlegen lassen. Jedes solche Polynom p ist entweder a) irreduzibel oder b) von der Form $p = ql$ mit quadratischem, irreduziblem q und linearem l.

Es soll nun gezeigt werden, daß, nachdem die Mengen S^0 und S^1 bereits als vom Maß Null erkannt sind, nur der Fall a) zugelassen zu werden braucht. Wir können uns bei der Abschätzung des Turkstraschen Maßes $T\big(S_3(\sigma)\big)$ für ein $\sigma > \frac{4}{3}$ von vorneherein auf P-adische Zahlen ξ mit $\vartheta_1(\xi) = 2$ und $\vartheta_2(\xi) = \frac{3}{2}$

beschränken, da alle übrigen nach [4], Sätze 1 und 2 eine Menge vom Maß Null bilden. Für jedes solche $\xi \in S_3(\sigma)$ gibt es, wie man der Definition von $\vartheta_3(\xi)$ leicht entnimmt, bei gegebenem $\varepsilon > 0$ unendlichviele kubische Polynome p mit

(6) $$|p(\xi)|_P < \frac{1}{\|p\|^{3\sigma-\varepsilon}},$$

während für alle quadratischen Polynome q mit $\|q\| > H_2(\xi)$

(7) $$|q(\xi)|_P > \frac{1}{\|q\|^{3+\varepsilon}}$$

und für alle linearen Polynome l mit $\|l\| > H_1(\xi)$

(8) $$|l(\xi)|_P > \frac{1}{\|l\|^{2+\varepsilon}}$$

ist. Gäbe es nun unter den unendlichvielen p mit (6) nur endlichviele irreduzible, so gäbe es unendlichviele, die sich in der Form $p = ql$ darstellen ließen, also bei diesen Darstellungen auch unendlichviele q mit (7) und unendlichviele l mit (8). Für jedes solche Tripel von Polynomen p, q, l gilt jedoch nach einem bekannten Satz die Ungleichung

$$\|l\| \cdot \|q\| \ll \|p\|,$$

also auch

$$\|l\|^{2+\varepsilon} \|q\|^{3+\varepsilon} \ll \|p\|^{3+\varepsilon},$$

wie eine leichte Rechnung zeigt[3]). Daher folgt aus (7) und (8) die Beziehung

$$|p(\xi)|_P = |q(\xi)|_P \, |l(\xi)|_P > \frac{1}{\|q\|^{3+\varepsilon}\|l\|^{2+\varepsilon}} \gg \frac{1}{\|p\|^{3+\varepsilon}}.$$

Danach wäre (unter den gemachten Annahmen) $\vartheta_3(\xi) \leqq 1$, während trivialerweise (s. [4], Hilfssatz 3) $\vartheta_3(\xi) \geqq \frac{4}{3}$ sein muß. Also gilt, wie oben behauptet, wenn das Symbol ~ die Beschränkung auf irreduzible kubische Polynome ausdrückt, $T(\tilde{S}_3(\sigma)) = T(S_3(\sigma))$, und daher folgt nach [4], Ungl. (12) sowie der obigen Ungl. (3) die Beziehung

$$\begin{aligned}
\overline{T}(S_3(\sigma)) &\leqq \varliminf_{H_0\to\infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} H^{-3\sigma}\big(\Sigma(H) - \Sigma(H-1)\big)\\
&\ll \varliminf_{H_0\to\infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} \big(H^{-3\sigma} - (H+1)^{-3\sigma}\big)\,\Sigma(H)\\
&\ll \varliminf_{H_0\to\infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} H^{-3\sigma-1} H^4 = 0,
\end{aligned}$$

also $T(S_3(\sigma)) = 0$ für alle $\sigma > \frac{4}{3}$. Daraus folgt nach der üblichen, auch in [4] angewandten Schlußweise die Behauptung.

---

[3]) Man setze $\|l\| = \|p\|^{\lambda}$, $\|q\| = \|p\|^{\mu}$ und berechne das Maximum von $\lambda(2+\varepsilon) + \mu(3+\varepsilon)$ unter den Nebenbedingungen $0 \leqq \lambda$, $0 \leqq \mu$, $\lambda + \mu \leqq 1$.

Die Verfasser möchten bei dieser Gelegenheit die historische Bemerkung nachholen, daß vor dem Beweis der Ungleichung

$$\vartheta_n(\xi) \leqq 2 - \frac{1}{2n} \qquad (n \geqq 3) \text{ für fast alle } \xi \in K_P$$

in [4] die beste bekannte Schranke dieser Art nicht mehr, wie dort angegeben, $\vartheta(\xi) \leqq 7$, sondern eine auf LOCK [5], Satz 14 zurückgehende Abschätzung war, die in unserer Schreibweise die Gestalt

$$\vartheta_n(\xi) \leqq 3 + \frac{1}{n} \qquad (n \geqq 1) \text{ für fast alle } \xi \in K_P$$

annimmt.

Literatur

[1] DAVENPORT, H.: On the class-number of binary cubic forms I. J. London Math. Soc. **26**, 183—192 (1951).
[2] — On the class-number of binary cubic forms II. J. London Math. Soc. **26**, 192—198 (1951).
[3] — A note on binary cubic forms. Mathematika **8**, 58—62 (1961).
[4] KASCH, F., u. B. VOLKMANN: Metrische Sätze über transzendente Zahlen in P-adischen Körpern. Math. Z. **72**, 367—378 (1960).
[5] LOCK, D. J.: Metrisch-diophantische onderzoekingen in $K(P)$ en $K^{(n)}(P)$. Vrije Universiteit te Amsterdam, Diss. 1947.
[6] VOLKMANN, B.: The real cubic case of Mahler's conjecture. Mathematika **8**, 55—57 (1961).

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Mathematisches Institut der Universität Mainz

(Eingegangen am 2. Mai 1961)