1. ... 1959

Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

72. BAND, 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 11. SEPTEMBER 1959)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1959

Math. Z.

214

Universitäts-
Bibliothek
München

Inhalt des 72. Bandes

KASCH, F., u. B. VOLKMANN
Math. Zeitschr. 72, 367–378 (1960)

Metrische Sätze über transzendente Zahlen in *P*-adischen Körpern

Von
FRIEDRICH KASCH und BODO VOLKMANN

1. Fragestellung. Die auf MAHLER zurückgehende Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen[1]) ist von ihm [*6*] auch auf Zahlen in den P-adischen Körpern K_P übertragen worden. 1936 führte dann TURKSTRA [*8*] eine Maßtheorie in den Körpern K_P ein, die auch die Übertragung einiger damals im Reellen bzw. Komplexen bekannter metrischer Aussagen auf das P-adische gestattete. Insbesondere ergab sich als Analogon zu einem Satz von MAHLER die Aussage, daß im Sinne des Turkstraschen Maßes fast alle P-adischen Zahlen S-Zahlen sind. Dabei bewies TURKSTRA als Gegenstück zu dem Ergebnis von MAHLER, wonach fast alle reellen Zahlen ξ S-Zahlen von einem Typ[2])

$$\vartheta(\xi) \leqq 4 \tag{1}$$

sind, daß für fast alle P-adischen Zahlen die Ungleichung

$$\vartheta(\xi) \leqq 7 \tag{2}$$

erfüllt ist.

Seither ist die Abschätzung (1) mehrfach verbessert worden, und das kürzlich von uns erzielte, bisher beste Ergebnis [*3*] besagt insbesondere, daß fast alle reellen ξ den Ungleichungen

$$1 \leqq \vartheta_n(\xi) \leqq 2 - \frac{2}{n} \qquad (n = 3, 4, \ldots) \tag{3}$$

genügen. Dagegen liegen im P-adischen Fall, soweit den Verfassern bekannt, bisher noch keine Resultate vor, die über (2) hinausgehen.

In der vorliegenden Arbeit wird für eine beliebige Primzahl P folgende Verschärfung von (2) bewiesen, die ungefähr die Güte von (3) erreicht:

Satz 1. *Für fast alle Zahlen* $\xi \in K_P$ *gilt*[3])

$$\vartheta_1(\xi) = 2, \tag{4}$$

$$1 + \frac{1}{n} \leqq \vartheta_n(\xi) \leqq 2 - \frac{1}{2n} \qquad (n = 2, 3, \ldots). \tag{5}$$

[1]) Siehe z.B. SCHNEIDER [*7*].

[2]) Siehe [*3*], S. 442.

[3]) Die genauen Definitionen der hier benutzten Begriffe sind im nächsten Abschnitt enthalten.

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach n mit dem Induktionsbeginn $n=1$. Sonst folgen wir methodisch im Wesentlichen unserem Beweis von (3), dessen Grundgedanke darin besteht, Eigenschaften der Diskriminante der approximierenden Polynome für die Abschätzung des Maßes auszunutzen.

Im Fall $n=2$ hat für reelle Zahlen KUBILYUS [4] das bestmögliche Ergebnis, nämlich

$$\vartheta_2(\xi) = 1 \quad \text{für fast alle } \xi,$$

erzielt. Sein Beweis wurde von einem der Verfasser [2] durch einen einfacheren ersetzt, wobei sich zugleich das bestmögliche Ergebnis für die komplexen Zahlen mit ergab. Durch Übertragung dieser Methode erhalten wir auch im P-adischen Fall die bestmögliche Aussage:

Satz 2. *Für fast alle Zahlen $\xi \in K_P$ gilt*

$$\vartheta_2(\xi) = \tfrac{3}{2}. \tag{6}$$

2. Voraussetzungen. Es sei P eine (für das Folgende feste) Primzahl und K_P der zugehörige Henselsche Körper. Die Bewertung $|\;|_P$ von K_P läßt sich dann eindeutig auf die algebraisch abgeschlossene Hülle $\hat{K}_P$ von K_P fortsetzen und soll auch in diesem Sinne mit $|\;|_P$ bezeichnet werden. Alle im folgenden auftretenden algebraischen Zahlen sind als Elemente von $\hat{K}_P$ zu betrachten.

Wenn n und H natürliche Zahlen sind, sei $\mathfrak{Q}(n, H)$ die Menge der Polynome $q(x)$ mit ganzrationalen Koeffizienten a_i von einem Grad $\leqq n$ und einer Höhe $(=\max|a_i|) \leqq H$. Dann setzen wir für[4]) jedes $\xi \in K_P$

$$w_n(H, \xi) = \min_{\substack{q \in \mathfrak{Q}(n, H) \\ q(\xi) \neq 0}} |q(\xi)|_P,$$

ferner

$$w_n(\xi) = \overline{\lim_{H\to\infty}} \frac{\log \dfrac{1}{w_n(H,\xi)}}{\log H} \quad \text{sowie} \quad \vartheta_n(\xi) = \frac{w_n(\xi)}{n},$$

schließlich

$$\vartheta(\xi) = \sup_{n=1,2,\ldots} \vartheta_n(\xi) \quad \text{und} \quad w(\xi) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \vartheta_n(\xi).$$

Eine Zahl $\xi \in K_P$ heißt *(P-adische) S-Zahl*, wenn $0 < \vartheta(\xi) < \infty$ ist.

Das Turkstrasche Maß wird in Anlehnung an die von FELLER und TORNIER [1] für den Baireschen Nullraum entwickelte Maßtheorie folgendermaßen eingeführt[5]): Man definiert als *P-adisches Intervall n-ter Stufe* (bei ganzrationalem n) die Menge aller Zahlen $\xi \in K_P$, in deren P-adischer Entwicklung

$$\xi = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu P^\nu \qquad (0 \leqq a_\nu < P;\ a_\nu \text{ ganzrational};\ a_\nu = 0 \quad \text{für} \quad \nu < \nu_0(\xi))$$

alle Koeffizienten a_ν mit $\nu < n$ denen einer vorgegebenen Zahl gleich sind. Es zeigt sich, daß jedes P-adische Intervall sowohl offen als auch abgeschlossen ist, und ferner läßt sich beweisen, daß jede offene Menge $O \subseteq K_P$ als Ver-

---

[4]) Vgl. [7] sowie [3].

[5]) Siehe [8], Kap. V.

einigung von P-adischen Intervallen darstellbar ist. Als *beschränkt* wird eine Menge $M \subseteqq K_P$ bezeichnet, wenn es eine ganzrationale Zahl t so gibt, daß $M \subseteqq K_P^t$ (= Menge der $\xi \in K_P$ mit $|\xi|_P \leqq P^t$) gilt.

Der Aufbau der Maßtheorie wird dann in mehreren Schritten vollzogen:

1. Für jedes P-adische Intervall E von n-ter Stufe setzt man

$$T(E) = \sup_{\alpha, \beta \in E} |\alpha - \beta|_P = P^{-n}.$$

2. Für jede beschränkte, offen-abgeschlossene Menge $A \subseteqq K_P$ wird, wenn $A = \bigcup_i E^i$ eine Zerlegung in paarweise fremde P-adische Intervalle ist,

$$T(A) = \sum_i T(E^i)$$

gesetzt und gezeigt, daß die linke Seite nicht von der speziellen Wahl der Zerlegung abhängt.

3. Für jede beschränkte, offene Menge $O \subseteqq K_P$ wird eine Zerlegung $O = \bigcup_i E^i$ in *maximale P-adische Intervalle* (d.h. solche, die in keinem ganz zu O gehörenden P-adischen Intervall echt enthalten sind) eingeführt, die Eindeutigkeit dieser Zerlegung bewiesen und

$$T(O) = \sum_i T(E^i)$$

gesetzt. Daraus erhält man Analoga zu den bekannten Sätzen der Inhaltstheorie für lineare, offene Mengen.

4. Für jede beliebige, beschränkte Menge $M \subseteqq K_P$ wird das äußere Turkstrasche Maß

$$\overline{T}(M) = \inf T(O)$$

eingeführt, wobei O alle offenen, beschränkten Mengen mit $M \subseteqq O$ durchläuft. Es folgt insbesondere, daß für beschränkte, offene Mengen O stets $\overline{T}(O) = T(O)$ ist. Sodann lassen sich in bekannter Weise das zugehörige innere Maß und der Begriff der Meßbarkeit definieren.

5. Für jede beliebige Menge $M \subseteqq K_P$ wird $M \cap K_P^t = M^t$ und

$$\overline{T}(M) = \lim_{t \to +\infty} \overline{T}(M^t)$$

gesetzt. Damit wird auch für nichtbeschränkte Mengen M der Begriff der Meßbarkeit und des Maßes $T(M)$ erklärt, sofern dieses existiert. Man kann dann u. a. nachweisen, daß das Turkstrasche Maß $T(M)$ monoton und σ-additiv ist.

3. Hilfssätze. Zu den Beweisen benötigen wir die folgenden Hilfssätze[6]):

Hilfssatz 1. *Es seien*

$$L_i(x_0, \ldots, x_n) = L_i(\mathfrak{x}) = \sum_{j=0}^{n} \gamma_{ij} x_j \qquad (i = 0, \ldots, n)$$

[6]) Dabei sind $C_1, C_2, \ldots$ positive, reelle Zahlen, die von n und P, nicht aber von H abhängen dürfen. Alle im folgenden auftretenden Polynome haben ganzrationale Koeffizienten.

$n+1$ Linearformen mit reellen Koeffizienten und einer nichtverschwindenden Determinante d; ferner sei

$$L(\mathfrak{x}) = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j x_j$$

eine Linearform mit P-adisch ganzen Koeffizienten. Sind dann $\beta, \beta_0, \ldots, \beta_n$ positive reelle Zahlen mit $0<\beta<1$ und $\beta\beta_0 \ldots \beta_n \geqq |d|\, P$, so gibt es einen Gitterpunkt $\mathfrak{x}$ mit $|L(\mathfrak{x})|_P<\beta$ und

$$|L_i(\mathfrak{x})| \leqq \beta_i \qquad (i=0, \ldots, n).$$

Beweis. Folgt aus [*5*], Satz 1.

Hilfssatz 2. *Zu jeder Linearform $L(\mathfrak{x})=\gamma_0 x_0+\cdots+\gamma_n x_n$ mit P-adisch ganzen Koeffizienten gibt es für jedes hinreichend große $t>1$ wenigstens einen Gitterpunkt $\mathfrak{x} \neq (0, \ldots, 0)$ mit $\max(|x_0|, \ldots, |x_n|)=H$, derart, daß $H \leqq t^{1/n}$ und $|L(\mathfrak{x})|_P < \frac{P}{t^{1+1/n}}$ ist.*

Beweis[7]. In dem Ungleichungssystem

$$\begin{array}{lllll} |\gamma_0 x_0 + & \gamma_1 x_1 + & \cdots + & \gamma_n x_n|_P & < \frac{P}{t^{1+1/n}} \\ |x_0| & & & & \leqq t^{1/n} \\ & |x_1| & & & \leqq t^{1/n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & |x_n| & \leqq t^{1/n} \end{array}$$

ist die Determinante der letzten $n+1$ Ungleichungen offenbar gleich 1. Daher sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 mit $\beta=\frac{P}{t^{1+1/n}}$ und $\beta_0=\beta_1=\cdots=t^{-1/n}$ erfüllt, und somit folgt die Behauptung.

Hilfssatz 3. *Für jede transzendente, insbesondere also für jede S-Zahl $\xi \in K_P$ ist*

$$\vartheta_n(\xi) \geqq 1+\frac{1}{n} \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Beweis[8]. Für jede P-adisch ganze Zahl ξ und jedes hinreichend große t ergibt sich durch Anwendung von Hilfssatz 2 mit $\gamma_i=\xi^i$ und $x_i=a_i$ $(i=0, \ldots, n)$ die Existenz eines Polynoms $q(x) \in \mathfrak{Q}(n, [t^{1/n}])$ mit $|q(\xi)|_P \leqq P t^{-(1+1/n)}$. Folglich ist

$$w_n(H, \xi) < \frac{C_1}{H^{n+1}} \qquad (H=1, 2, \ldots),$$

woraus die Behauptung leicht zu folgern ist.

Hilfssatz 4. *Sei $q(x)=a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\cdots+a_n$ ein Polynom mit den Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Dann gilt, wenn die Indizes $i_1, \ldots, i_k$ voneinander verschieden sind, die Ungleichung*

$$|a_0 \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k}|_P \leqq 1.$$

[7]) Siehe [*8*], Kap. V, Satz 2*.

[8]) Vgl. [*8*], S. 67–68.

Beweis. Nach dem Beweis von [7], Hilfssatz 17 ist jedes Produkt der Form $a_0\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_k}$ ganzalgebraisch, und daraus folgt die Behauptung.

Hilfssatz 5. *Sei $q(x)$ ein Polynom vom Grade $n\geqq 2$ mit lauter verschiedenen Nullstellen $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Dann gilt, wenn $D(q)$ die Diskriminante bezeichnet,*

$$|q'(\alpha_m)|_P \geqq \sqrt{|D(q)|_P} \qquad (m=1,\ldots,n).$$

Beweis. Nach [3], Gl. (4) ist

$$|q'(\alpha_m)|_P = \frac{\sqrt{|D(q)|_P}}{\left|a_0^{n-2}\prod\limits_{i,j\neq m;\, i<j}(\alpha_i-\alpha_j)\right|_P}.$$

Bei der Ausmultiplikation des Produktes im Nenner entsteht eine Summe von Produkten mit je $\binom{n-1}{2}$ Faktoren aus der Menge der $n-1$ Wurzeln α_i mit $i\neq m$. Da in diesen Produkten jedes α_i höchstens in der $(n-2)$-ten Potenz vorkommt, läßt sich jedes von ihnen in Faktoren der Form $a_0\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_k}$ zerlegen. Somit hat nach Hilfssatz 4 jeder Summand des Nenners einen P-adischen Wert $\leqq 1$, so daß

$$\left|a_0^{n-2}\prod_{i,j\neq m;\, i<j}(\alpha_i-\alpha_j)\right|_P \leqq 1$$

und damit die Behauptung folgt.

Hilfssatz 6. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 5 gilt, wenn ξ eine beliebige, von $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ verschiedene Zahl aus K_P mit*

$$|\xi-\alpha_m|_P = \min_{i=1,\ldots,n}|\xi-\alpha_i|_P$$

ist,

$$|\xi-\alpha_m|_P \leqq \frac{|q(\xi)|_P}{\sqrt{|D(q)|_P}}.$$

Beweis. Für jedes $i\neq m$ ist

$$|\alpha_m-\alpha_i|_P = |(\alpha_m-\xi)+(\xi-\alpha_i)|_P \leqq |\alpha_i-\xi|_P,$$

und somit wird

$$|q'(\alpha_m)|_P = |a_0|_P\prod_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n}|\alpha_m-\alpha_i|_P \leqq |a_0|_P\prod_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n}|\alpha_i-\xi|_P.$$

Folglich ergibt sich nach Hilfssatz 5

$$\sqrt{|D(q)|_P} \leqq |a_0|_P\prod_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n}|\alpha_i-\xi|_P$$

und damit

$$|\xi-\alpha_m|_P \leqq \frac{|a_0|_P}{\sqrt{|D(q)|_P}}\prod_{i=1}^{n}|\xi-\alpha_i|_P = \frac{|q(\xi)|_P}{\sqrt{|D(q)|_P}}.$$

Hilfssatz 7. *Seien $q_0(x), q_1(x),\ldots,q_r(x)$ Polynome mit*

$$q_0(x)=\prod_{i=1}^{r}q_i(x), \qquad \text{Grad } q_0=n \textit{ und } \text{Höhe } q_i=H_i \qquad (i=0,\ldots,n).$$

Dann gilt $H_0\geqq(4n)^{-n}\prod\limits_{i=1}^{r}H_i$.

Beweis. Siehe [7], Hilfssatz 16.

Hilfssatz 8. *Für jedes Polynom $q(x)$ vom Grad n gilt wenigstens eine der folgenden Aussagen*[9]:

1. q ist Produkt von n linearen Polynomen,

2. q ist Produkt von zwei Polynomen mindestens zweiten Grades,

3. q hat lauter verschiedene Nullstellen.

Beweis. Im Ring der Polynome mit ganzrationalen Koeffizienten sei

$$q = q_1^{e_1} \cdots q_r^{e_r}$$

die eindeutige Zerlegung von q in Primelementpotenzen; ferner sei Grad $q_i = n_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Wird nun angenommen, es gelte weder 1. noch 3., so gibt es wenigstens ein n_i, etwa n_1, mit $1 < n_i < n$. Dann kann auch nicht $n_1 = n - 1$ sein, weil daraus 3. bzw. 1. folgen würde. Somit gilt $1 < n_1 < n - 1$, woraus unmittelbar folgt, daß

$$q = q_1 (q_1^{e_1 - 1} q_2^{e_2} \cdots q_r^{e_r})$$

eine Zerlegung mit der Eigenschaft 2. ist.

Hilfssatz 9. *Bei vorgegebenen ganzrationalen Zahlen $H > 1$ und x mit $H^2 \neq x$ hat die Gleichung*

$$H^2 - 4 a_0 a_1 = x$$

höchstens $C_2 H^{C_3/\log\log H}$ Lösungen in ganzen Zahlen a_0, a_1 mit $|a_0| \leqq H$, $|a_1| \leqq H$.

Beweis[10]. Ist $d(M)$ die Anzahl der positiven Teiler von M, so beträgt die Lösungsanzahl höchstens

$$2d(H^2 - x) \leqq C_2 H^{C_3/\log\log H}.$$

Hilfssatz 10. *Bei vorgegebenen ganzrationalen Zahlen $H > 1$ und x hat die Gleichung*

$$a_1 - 4Ha = x$$

höchstens $C_2 r(x, 4H) H^{C_3/\log\log H}$ Lösungen in ganzen Zahlen a_1, a mit $|a_1| \leqq H$, $|a| \leqq H$, wobei $r(u, v)$ der größte gemeinsame quadratische Teiler von u und v ist.

Beweis. Siehe [2], Seite 267.

Hilfssatz 11. *Sind N und M natürliche Zahlen, so gilt*

$$\sum_{x=1}^{M} r(x, N) \leqq M \log N.$$

Beweis. Sei d^2/N; dann gilt $r(x, N) = d$ genau für die x von der Form $x = d^2 x_1$ mit $r(x_1, N) = 1$. Es gibt also höchstens M/d^2 Zahlen x mit dieser Eigenschaft, und daher wird

$$\sum_{x=1}^{M} r(x, N) \leqq \sum_{d^2/N} \frac{M}{d^2} d \leqq M \sum_{d/N} \frac{1}{d} \leqq C_4 M \log N.$$

4. Beweis von Satz 1. Im Hinblick auf Hilfssatz 3 ist nur noch

$$\vartheta_1(\xi) \leqq 2 \quad \text{und} \quad \vartheta_n(\xi) \leqq 2 - \frac{1}{2n} \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{7}$$

---

[9]) Dabei ist an die oben getroffene Vereinbarung zu erinnern, wonach nur Polynome über dem Ring der ganzrationalen Zahlen betrachtet werden.

[10]) Vgl. [2], S. 266.

für fast alle $\xi \in K_p$ zu beweisen. Da die Menge der algebraischen Zahlen aus K_P das Maß 0 besitzt, können wir uns dabei auf die Menge K der transzendenten P-adischen Zahlen beschränken.

Sei $S_n(\sigma)$ die Menge der $\xi \in K$ mit $\vartheta_n(\xi) > \sigma$. Dann gibt es, wie man der Definition leicht entnimmt, zu jeder Zahl $\xi \in S_n(\sigma)$ unendlich viele H, zu denen Polynome $q(x) \in \mathfrak{Q}(n, H)$, $q(x) \notin \mathfrak{Q}(n, H-1)$ mit

$$(8) \qquad |q(\xi)|_P < H^{-n\sigma}$$

existieren; die Menge aller $\xi \in K$, für die dies zutrifft, bildet also eine Obermenge $S_n^*(\sigma)$ von $S_n(\sigma)$. Ist nun für alle $\sigma > \sigma_0$ die Gleichung $T(S_n^*(\sigma)) = 0$ bewiesen, so folgt auch $T(S_n^*(\sigma_0)) = T(S_n(\sigma_0)) = 0$; denn $S_n^*(\sigma_0)$ ist als Vereinigung der abzählbar vielen Mengen $S_n^*\left(\sigma_0 + \frac{1}{j}\right)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ darstellbar. Wir werden diese Überlegung im Fall $n = 1$ mit $\sigma_0 = 2$ und im Fall $n \geqq 2$ mit $\sigma_0 = 2 - \frac{1}{2n}$ anwenden, so daß dann (7) folgt.

Um für jedes $\varepsilon > 0$ die Gleichung $T(S_1^*(2+\varepsilon)) = 0$ zu beweisen, bemerken wir, daß in diesem Fall für jede Lösung von (8) wegen[11])

$$|q(\xi)|_P = |a_0 \xi + a_1|_P = |a_0|_P \cdot \left|\xi + \frac{a_1}{a_0}\right|_P < H^{-2-\varepsilon}$$

offenbar

$$\left|\xi + \frac{a_1}{a_0}\right|_P < \frac{1}{|a_0|_P H^{2+\varepsilon}} = \frac{P^{\varkappa}}{H^{2+\varepsilon}}$$

gilt, wenn $|a_0|_P = P^{-\varkappa}$ ist. Wir überdecken nun jede rationale Zahl $-\frac{a_1}{a_0}$ durch das P-adische Intervall $\mathfrak{i}(a_0, a_1)$ der Zahlen $\xi \in K_P$ mit $\left|\xi + \frac{a_1}{a_0}\right|_P < \frac{H^{-2-\varepsilon}}{|a_0|_P}$. Dann ist offenbar die Menge $S_1^*(2+\varepsilon)$ für jedes H_0 in der Vereinigung

$$\bigcup_{H=H_0}^{\infty} \bigcup_{\max(|a_0|, |a_1|) = H} \mathfrak{i}(a_0, a_1)$$

enthalten. Für das Turkstrasche Maß verwenden wir die Zerlegung

$$T_H = T\Big(\bigcup_{\max(|a_0|, |a_1|) = H} \mathfrak{i}(a_0, a_1)\Big) \leqq T\Big(\bigcup_{|a_0| \leqq H = |a_1|} \mathfrak{i}(a_0, a_1)\Big) + T\Big(\bigcup_{|a_1| < H = |a_0|} \mathfrak{i}(a_0, a_1)\Big),$$

und die beiden letzten Summanden nennen wir T_H' bzw. T_H''.

Zur Abschätzung von T_H' ist zu berücksichtigen, daß bei den auftretenden Intervallen stets $0 \leqq \varkappa \leqq k = \left[\frac{\log H}{\log P}\right]$ ist und jedes solche $\varkappa$ höchstens $2HP^{-\varkappa}$ mal vorkommt. Daher wird

$$T_H' \leqq \sum_{\varkappa=0}^{k} \frac{2H}{P^{\varkappa}} \cdot \frac{P^{\varkappa}}{H^{2+\varepsilon}} = 2(k+1)\frac{1}{H^{1+\varepsilon}} < \frac{C_5}{H^{1+\varepsilon/2}}.$$

Für T_H'' erhält man entsprechend die Ungleichung

$$T_H'' < \frac{C_6 H}{|H|_P H^{2+\varepsilon}} = \frac{C_6}{|H|_P H^{1+\varepsilon}},$$

[11]) Da keine konstanten Polynome als Lösungen auftreten können, haben alle zu betrachtenden $q(x)$ den genauen Grad 1.

und somit ergibt sich

$$T\left(S_1^*(2+\varepsilon)\right) \leqq \lim_{H_0\to\infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} (T_H' + T_H'') \leqq \lim_{H_0\to\infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} \frac{C_5}{H^{1+\varepsilon/2}} + \lim_{H_0\to\infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} \frac{C_6}{|H|_P\, H^{1+\varepsilon}}.$$

Da der erste Grenzwert verschwindet, bleibt nur der zweite zu betrachten. Es ist[12])

$$\sum_{H=1}^{\infty} \frac{1}{|H|_P\, H^{1+\varepsilon}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\substack{H=1 \\ P^l \| H}}^{\infty} \frac{P^l}{H^{1+\varepsilon}} < \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P^l}{(m\, P^l)^{1+\varepsilon}} = \frac{P^\varepsilon}{P^\varepsilon - 1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{1+\varepsilon}} < \infty,$$

woraus

$$\lim_{H_0\to\infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} T_H'' = 0$$

folgt, und daher gilt $T\left(S_1^*(2+\varepsilon)\right) = 0$.

Es sei nun bereits für $m = 1, 2, \ldots, n-1$ die Gleichung $T\left(S_m^*(\sigma_0)\right) = 0$ mit

$$\sigma_0 = \sigma_0(m) = \begin{cases} 2 & \text{für } m = 1, \\ 2 - \dfrac{1}{2m} & \text{für } m = 2, \ldots, n-1 \end{cases} \tag{9}$$

bewiesen. Dann ist zu zeigen, daß für jedes $\varepsilon > 0$, wenn $\sigma = 2 - \frac{1}{2n} + \varepsilon$ gesetzt wird, $T\left(S_n^*(\sigma)\right) = 0$ gilt. Dazu stellen wir die Menge $S = S_n^*(\sigma)$ als Vereinigung von vier Teilmengen S^0, S^1, S^2, S^3 dar, die folgendermaßen definiert sind: Es sei $S^0(\sigma)$ die Menge der $\xi \in K$, für die (8) unendlich viele Lösungen $q(x)$ mit Grad $q(x) < n$ besitzt; ferner seien $S^1(\sigma)$, $S^2(\sigma)$ und $S^3(\sigma)$ die Menge der $\xi \in K$, für die (8) unendlich viele Lösungen $q(x)$ besitzt, die vom Grad n sind und außerdem im Sinne von Hilfssatz 8 die Aussagen 1., 2. bzw. 3. erfüllen. Dann gilt sicher $S = S^0 \cup S^1 \cup S^2 \cup S^3$. Wir setzen nun $V = \bigcup_{m=1}^{n-1} S_m^*\left(\sigma_0(m)\right)$ und zeigen zunächst

$$T(S^0 \cup S^1 \cup S^2) \leqq T(V), \tag{10}$$

woraus $T(S^0 \cup S^1 \cup S^2) = 0$ folgt, da nach Induktionsvoraussetzung $T(V) = 0$ ist.

Ist $\xi \in S^0$, so gibt es offenbar ein $m < n$ derart, daß unendlich viele Lösungen von (8) existieren, die den Grad m haben. Wegen

$$n\left(2 - \frac{1}{2n} + \varepsilon\right) > m\, \sigma_0(m) \qquad (m = 1, \ldots, n-1) \tag{11}$$

folgt dann $\xi \in S_m^*\left(\sigma_0(m)\right)$, also auch $\xi \in V$ und damit $S^0 \subseteqq V$.

Ist $\xi \in S^1$, so gibt es unendlich viele Lösungen der Form $q = q_1 \ldots q_n$ mit linearen Polynomen q_i von (8). Bezeichnet man deren Höhen mit H_i und nimmt man $\xi \notin S_1^*(2)$ an, so besitzt die Ungleichung

$$|q_i(\xi)|_P < H_i^{-2}$$

nur endlich viele Lösungen in linearen Polynomen $q_i(x)$, für die wegen $\xi \in K$ stets $|q_i(\xi)|_P > 0$ gilt. Es gibt also eine Konstante $\gamma = \gamma(\xi) > 0$ mit

$$|q_i(\xi)|_P > \gamma\, H_i^{-2}$$

---

[12]) $P^l \| H$ bedeutet, daß P^l, nicht aber P^{l+1} Teiler von H ist.

für alle linearen Polynome der Höhe H_i. Damit folgt unter Berücksichtigung von Hilfssatz 7

$$|q(\xi)|_P > \gamma^n \prod_{i=1}^{n} H_i^{-2} > C_7(\xi)\, H^{-2}.$$

Wegen (11) steht dies im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß (8) unendlich viele Lösungen $q(x)$ der angegebenen Art hat. Folglich muß $S^1 \subseteqq V \cup S_1^*(2)$ gelten, also auch $T(S^1) \leqq T(V)$.

Ist $\xi \in S^2$, so gibt es für wenigstens ein m unendlich viele Lösungen $q = q_1 q_2$ von (8) mit Grad $q = n$ und $1 < \text{Grad}\, q_1 = m < n$. Nimmt man $\xi \notin S_m^*(\sigma_0(m)) \cup S_{n-m}^*(\sigma_0(n-m))$ an, so folgt analog zur vorhergehenden Überlegung

$$|q(\xi)|_P > \gamma_1 \gamma_2 H_1^{-m\sigma_0(m)} H_2^{-(n-m)\sigma_0(n-m)} > C_8\, H^{-\mu\,\sigma_0(\mu)}$$

mit $\mu = \min\big(m\sigma_0(m),\ (n-m)\,\sigma_0(n-m)\big)$. Wegen

$$n\left(2 - \frac{1}{2n} + \varepsilon\right) > \mu\,\sigma_0(\mu)$$

steht dies im Widerspruch zur Voraussetzung, daß (8) unendlich viele derartige Lösungen $q(x)$ besitzt. Folglich muß auch $T(S^2) \leqq T(V)$ gelten.

Ist $\xi \in S^3$, so gibt es unendlich viele Polynome $q(x)$ vom Grad n mit lauter verschiedenen Nullstellen, die (8) genügen. Wir ordnen jeder Nullstelle α_i eines solchen Polynoms das P-adische Intervall $\mathrm{i}(\alpha_i)$ der Zahlen $\xi \in K_P$ mit

$$|\xi - \alpha_i|_P < \frac{1}{H^{n\sigma}\sqrt{|D(q)|_P}}$$

zu, wobei die linke Seite im Sinne der Bewertung in $\hat{K}_P$ zu verstehen ist. Dann gilt offenbar für alle diese Polynome in der Bezeichnungsweise von Hilfssatz 6 mit $\sigma = 2 - \frac{1}{2n} + \varepsilon$ die Ungleichung

$$|\xi - \alpha_m|_P \leqq \frac{|q(\xi)|_P}{\sqrt{|D(q)|_P}} < \frac{H^{-n\sigma}}{\sqrt{|D(q)|_P}},$$

d.h., es ist $\xi \in \mathrm{i}(\alpha_m)$. Folglich wird für jedes H_0 die Menge S^3 durch die Gesamtheit dieser Intervalle mit $H \geqq H_0$ überdeckt, und somit gilt für das Turkstrasche Maß

$$\overline{T}(S^3) \leqq \lim_{H_0 \to \infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} \sum{}' \frac{H^{-n\sigma}}{\sqrt{|D(q)|_P}}, \tag{12}$$

wobei in der inneren Summe $q(x)$ alle Polynome vom Grad n, der Höhe H und mit der (durch den Strich am Summenzeichen ausgedrückten) Nebenbedingung $D(q) \neq 0$ durchläuft.

Zur Abschätzung von

$$\Sigma = \sum{}' \frac{1}{\sqrt{|D(q)|_P}} \tag{13}$$

berücksichtigen wir, daß die Anzahl der Summanden $\leqq C_9 H^n$ ist, da jeweils einer der Koeffizienten, etwa a_i, den Betrag H hat. Wenn dann alle übrigen Koeffizienten bis auf einen, etwa a_j $(j \neq i)$, festgehalten werden, ist $D(q)$ ein Polynom $V(a_j)$ von einem Grad $g' \geqq 1$, so daß die Funktion $|V(a_j)|$ jeden

Wert höchstens $2g' = g$ mal annehmen kann. Die Summe Σ ist also (bei festem j und i) in eine Anzahl $\leqq C_{10} H^{n-1}$ von Summanden der Form

$$\Sigma^* = \sum_{\substack{t=-H \\ V(t)\neq 0}}^{H} \frac{1}{\sqrt{|V(t)|_P}} \tag{14}$$

zerlegbar. Es soll gezeigt werden, daß für jede dieser Summen eine Ungleichung der Form

$$\Sigma^* < C_{11} H^{n-1/2} \tag{15}$$

gilt und somit

$$\Sigma < C_{12} H^{2n-3/2} \tag{16}$$

ist.

Die Werte $|V(t)|$ sind ganze Zahlen x mit $1 \leqq x \leqq C_{13} H^{2n-2}$, da $D(q)$ ein homogenes Polynom vom Grad $2n-2$ in den Variablen $a_0, \ldots, a_n$ ist. Daher gilt, wenn die natürliche Zahl k durch die Ungleichung

$$P^k \leqq C_{13} H^{2n-2} < P^{k+1} \tag{17}$$

definiert wird, stets $|x|_P = P^{-\varkappa}$ mit $0 \leqq \varkappa \leqq k$, und zwar wird jedes solche $\varkappa$ für höchstens $A_\varkappa = C_{13} H^{2n-2}/P^\varkappa$ Werte x angenommen, da dann $P^\varkappa / x$ sein muß. Jede dieser Zahlen x, die auftritt, liefert zur Summe Σ^* den Beitrag $P^{\varkappa/2}$, und so ergibt sich durch Betrachtung des ungünstigsten Falles, wo die Zahlen x mit den größtmöglichen Werten von $P^{\varkappa/2}$ — und jeder von ihnen g mal — angenommen werden, die Abschätzung

$$\Sigma^* < g(A_k P^{k/2} + A_{k-1} P^{(k-1)/2} + \cdots + A_{k-u} P^{(k-u)/2}),$$

wenn u eine natürliche Zahl mit

$$A_k + A_{k-1} + \cdots + A_{k-u} \geqq 2H + 1 \tag{18}$$

ist. Daraus folgt weiter

$$\begin{aligned}\Sigma^* &< g\, C_{13} H^{2n-2} (P^{-k/2} + P^{-(k-1)/2} + \cdots + P^{-(k-u)/2}) \\ &= g\, C_{13} \frac{H^{2n-2}}{P^{k/2}} \cdot \frac{P^{u/2}-1}{P^{1/2}-1} < g\, C_{13}^{1/2} H^{n-1} P^{1/2} \cdot \frac{P^{u/2}-1}{P^{1/2}-1},\end{aligned}$$

letzteres wegen (17). Folglich ist

$$\Sigma^* < C_{14} H^{n-1} P^{u/2}. \tag{19}$$

Ferner gilt auf Grund von (18)

$$2H + 1 \leqq C_{13} H^{2n-2} (P^{-k} + P^{-k+1} + \cdots + P^{-u}) = C_{13} \frac{H^{2n-2}}{P^k} \cdot \frac{P^{u+1}-1}{P-1},$$

also, wieder nach (17),

$$P^{u+1} > C_{15} \frac{P^k H}{H^{2n-2}} > C_{15} C_{13} \frac{H}{P},$$

d.h. $P^u > C_{16} H$, und somit kann man $P^u = C_{17} H$ setzen, wenn $C_{17} > C_{16}$ geeignet gewählt wird. Damit ergibt sich aus (19) die Ungleichung (15), so daß (16) bewiesen ist.

Setzt man (16) in (12) ein, so erhält man

$$\overline{T}(S^3) \leqq C_{12} \lim_{H_0 \to \infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} H^{(2-\sigma)n-3/2},$$

und da in dieser Reihe wegen $\sigma = 2 - \frac{1}{2n} + \varepsilon$ der Exponent < -1 ist, tritt Konvergenz ein, so daß $\overline{T}(S^3) = T(S^3) = 0$ folgt. Damit ist alles bewiesen.

5. Beweis von Satz 2. Analog zum vorangehenden Beweis haben wir jetzt für $\sigma = \frac{3}{2} + \varepsilon$ mit beliebigem $\varepsilon > 0$ die Gleichung $T(S_2(\sigma)) = 0$ nachzuweisen. Die Darstellung von $S = S_2^*(\sigma)$ als Vereinigung von Mengen S^j vereinfacht sich jetzt zu $S = S^0 \cup S^1 \cup S^3$, wobei diese Mengen mit dem jetzigen Wert von σ in (8) definiert sind. Wegen $2\left(\frac{3}{2} + \varepsilon\right) > 2$ ergibt sich dann wie im Beweis von Satz 1 die Gleichung

$$T(S^0 \cap S^1) = 0.$$

Um die noch fehlende Aussage

$$T(S^3) = 0 \tag{20}$$

zu beweisen, können wir zunächst dem Beweisgang von Satz 1 bis zum Auftreten der Summe Σ in (13) folgen. Da jetzt für jedes Polynom $q(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$ offenbar $D(q) = a_1^2 - 4a_0 a_2$ ist und mindestens einer der drei Koeffizienten den Betrag H haben muß, gilt die Ungleichung

$$\Sigma \leqq 2 \sum_{a_0, a_2 = -H}^{H}{}' |H^2 - 4a_0 a_2|_P^{-1/2} + 4 \sum_{a_1, a = -H}^{H}{}' |a_1^2 - 4Ha|_P^{-1/2}. \tag{21}$$

Wir bezeichnen die beiden Summen auf der rechten Seite mit Σ_1 bzw. Σ_2. Zu ihrer Abschätzung berücksichtigen wir, daß die Werte von $D(q)$ ganze Zahlen x mit $1 \leqq |x| \leqq 5H^2$ sind und Gleichungen der Form $|x|_P = P^{-\varkappa}$ mit $0 \leqq \varkappa \leqq k$ genügen, wenn k wie in (17) (mit $C_{13} = 5$) definiert wird. Jedes solche $\varkappa$ wird somit höchstens $10H^2/P^\varkappa$ Werte von x angenommen, und ferner gibt Hilfssatz 9 eine obere Schranke für die Vielfachheit an, mit der eine Zahl x in der Summe Σ_1 auftreten kann. Somit erhält man

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &\leqq 4H + \sum_{\substack{a_0, a_2 = -H \\ 4a_0 a_2 \neq 0}}^{H}{}' |H^2 - 4a_0 a_2|_P^{-1/2} \leqq 4H + C_2 H^{C_3/\log\log H}\, 10 H^2 \sum_{\varkappa=0}^{k} P^{-\varkappa/2} \\ &\leqq C_{18} H^{2 + C_{11}/\log\log H}.\end{aligned}$$

Ähnlich folgt auf Grund der Hilfssätze 10 und 11

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &\leqq C_2 H^{C_3/\log\log H} \sum_{\varkappa=0}^{k} \sum_{x_1=1}^{[5H^2P^{-\varkappa}]} r(x_1 P^\varkappa, 4H)\, P^{\varkappa/2} \\ &\leqq C_2 H^{C_3/\log\log H} \sum_{\varkappa=0}^{k} \sum_{x_1=1}^{[5H^2P^{-\varkappa}]} r(x_1, 4H)\, P^\varkappa \leqq C_2 H^{C_3/\log\log H} (k+1)\, 5H^2 \log(4H) \\ &< C_{19} H^{2 + C_{20}/\log\log H}.\end{aligned}$$

Setzt man dies in (12) ein, so ergibt sich

$$\overline{T}(S^3) \geqq C_{21} \varliminf_{H_0 \to \infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} H^{-2\sigma + 2 + C_{22}/\log\log H},$$

woraus die zu beweisende Gl. (20) folgt.

6. Schlußbemerkung. Im Reellen bzw. im Komplexen kann man bekanntlich die Mahlersche Vermutung so aussprechen[13]), daß für fast alle ξ die Gleichungen

$$\vartheta_n(\xi) = 1 \quad \text{bzw.} \quad \vartheta_n(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

gelten. Ersteres hat sowohl die Aussage

$$\vartheta(\xi) = \sup_{n=1,2,\ldots} \vartheta_n(\xi) = 1 \qquad \text{für fast alle reellen } \xi \tag{22}$$

als auch

$$w(\xi) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \vartheta_n(\xi) = 1 \qquad \text{für fast alle reellen } \xi \tag{23}$$

zur Folge. Analog dazu wird man im P-adischen Fall vermuten dürfen, daß fast alle $\xi \in K_p$ den Gleichungen

$$\vartheta_n(\xi) = 1 + \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{24}$$

genügen, woraus einerseits

$$\vartheta(\xi) = 2 \qquad \text{für fast alle } \xi \in K_P \tag{25}$$

und andererseits

$$w(\xi) = 1 \qquad \text{für fast alle } \xi \in K_P \tag{26}$$

folgt. Für $n = 1$ und $n = 2$ ist (24) durch Satz 1 bzw. Satz 2 bewiesen, während für $n \geqq 3$ die entsprechende Frage noch offensteht. Die Richtigkeit der Aussage (25) dagegen ergibt sich als unmittelbare Folge von Satz 1. Jeder weitere Fortschritt in Richtung auf (26) bzw. (24) dürfte — wie im gewöhnlichen Fall — von neuen Einsichten in die Werteverteilung der Diskriminanten $D(q)$ abhängig sein.

Literatur

[*1*] FELLER, W., u. E. TORNIER: Maß- und Integrationstheorie des Baireschen Nullraumes. Math. Ann. **107**, 165—187 (1932). — [*2*] KASCH, F.: Über eine metrische Eigenschaft der S-Zahlen. Math. Z. **70**, 263—270 (1958). — [*3*] KASCH, F., u. B. VOLKMANN: Zur Mahlerschen Vermutung über S-Zahlen. Math. Ann. **136**, 442—453 (1958). — [*4*] KUBILYUS, J. F.: Über eine Anwendung der Winogradowschen Methode auf die Lösung eines Problems aus der metrischen Zahlentheorie. [Russ.] Dokl. Akad. Nauk SSSR, N.S. **67**, 783—786 (1949). — [*5*] MAHLER, K.: Über Diophantische Approximationen im Gebiete der P-adischen Zahlen. Jahresber. DMV **44**, 250—255 (1934). — [*6*] MAHLER, K.: Über eine Klasseneinteilung der P-adischen Zahlen. Mathematica (Zutphen) **3**, 177—185 (1934/35). — [*7*] SCHNEIDER, TH.: Einführung in die transzendenten Zahlen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1957. — [*8*] TURKSTRA, H.: Metrische bijdragen tot de theorie der Diophantische approximaties in het lichaam der P-adische getallen. Diss. Freie Univ. Amsterdam 1936, 146 S.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität
Mainz, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 29. April 1959)

[13]) Vgl. [*3*], § 1.