

Tabletas Algebraicas como medio para la enseñanza de la factorización y la identificación de factores reducibles e irreducibles en algunos polinomios

Viviana Paola Salazar Fino
dma.vsalazar@pedagogica.edu.co

Kevin Ulises Parra Rojas
dma.kparra@pedagogica.edu.co

Estudiantes Universidad Pedagógica Nacional

Resumen. Se presenta una síntesis de una experiencia de aula llevada a cabo en el Colegio Alfonso López Pumarejo IED, en el marco de la semana de práctica de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, para la cual se utilizó como herramienta, un material nominado *Tabletas Algebraicas*, con el objetivo de introducir a los estudiantes en el proceso de factorización de algunos polinomios a través de la relación entre el lenguaje geométrico y el algebraico, estudiando el significado geométrico de algunos productos notables en relación con la noción de área de figuras geométricas como cuadrados y rectángulos.

Palabras claves:

Materiales manipulativos, Sistema de representación Algebraico, Polinomios, geometría, educación secundaria.

1. Contextualización

Esta experiencia surgió de un trabajo propuesto en el espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra, de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, durante el primer semestre de 2011, orientado por Lyda Mora, para el cual se debía planear y llevar a cabo una actividad referida a algún tema relacionado con la aritmética o el álgebra, utilizando un material manipulativo. El material elegido por los autores de este escrito fueron fichas rectangulares de colores, nominado por los mismos como *Tabletas Algebraicas* (este material fue conocido en la clase Materiales Didácticos Para la Enseñanza de las Matemáticas, espacio académico electivo, mediante el estudio del taller propuesto por Montoya, E. y Montoya, J. (1999) de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín en el marco del proyecto Matemáticas y Física Básicas en Antioquia).

Como parte del compromiso adquirido en el espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra, se desarrolló la actividad utilizando las *Tabletas Algebraicas* en un par de sesiones de clase de matemáticas en el grado octavo del Colegio I.E.D Alfonso López Pumarejo, con estudiantes entre 12 y 16 años, partiendo de la idea de relacionar el álgebra y la geometría y al mismo tiempo, promover el aprendizaje de

conceptos algebraicos como la factorización de algunos polinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, con a , b y c números naturales mediante el uso del material.

El taller fue planteado para trabajar en grupos de 3 estudiantes y cada equipo avanzó a su propio ritmo, lo que implicó que los maestros en formación debieran ocuparse de grupos específicos.

2. Referentes teórico-prácticos básicos

Sobre el uso de materiales y sus relaciones con los conceptos. Una de las características de las matemáticas es su abstracción, de aquí la importancia de que los profesores ofrezcan al estudiante la oportunidad de acceder a ella mediante la indagación, antes de la simbolización y; materialización de la abstracción.

El proceso de simbolización es el camino que se sigue para incorporar el uso de símbolos, por ejemplo los símbolos algebraicos; a las situaciones que resultan necesarias: escritura de fórmulas e interpretación de expresiones (Grupo Azarquiel, 1993). Cuando se utilizan símbolos algebraicos se da un significado a los mismos interpretándolos sin equivocaciones, y se aceptan expresiones simbólicas que facilitan los cálculos.

Desde finales de los años 50 se buscó que el aprendizaje de las matemáticas tuviera sentido para los estudiantes y que el aprendizaje fuera significativo. Por esto, investigadores y diseñadores del currículo de matemáticas estuvieron de acuerdo con que se fomentara en el estudiante una comprensión intuitiva de las diferentes estructuras matemáticas, a través de materiales de enseñanza orientados hacia la estructura (Resnick, 1990). El estudiante comienza la apropiación de conceptos con el juego libre, en donde se manipulan materiales y se reconocen (peso, tamaño, color, textura) y además se realizan diversas construcciones imaginativas. Luego de esto se introduce el concepto que se está aprendiendo, después se ayuda a que los estudiantes descubran métodos para hablar de sus conocimientos, para que se puedan abstraer los descubrimientos y se puedan asociar a conceptos matemáticos (Resnick, 1990).

Bruner (1964, citado por Resnick, 1990) elabora una teoría evolutiva de desarrollo conceptual que toma en cuenta tres tipos de representación: Enactiva, Icónica y Simbólica. La representación Enactiva *“es un modo de representar eventos pasados mediante una respuesta motriz adecuada, se cree que de esta manera es como los niños pequeños logran*

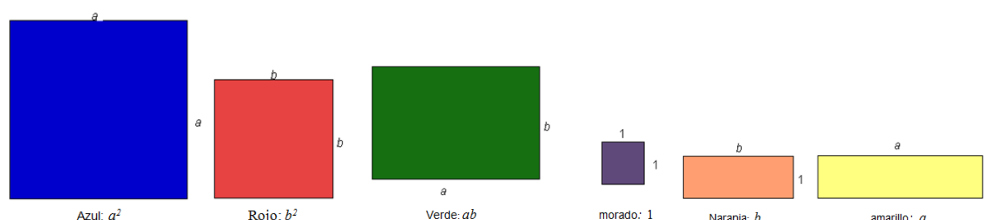
recordar las cosas” (Resnick, 1990, p. 139). No solamente los niños pequeños logran recordar acciones de esta forma sino también los adultos. La representación icónica, separa lo concreto de lo físico para entrar en el campo de imágenes mentales. “*Según Bruner es lo que sucede cuando el niño <<se imagina>> una operación o una manipulación, como forma de recordar el acto sino también de recrearlo mentalmente cuando sea preciso*” (Resnick, 1990, p. 139), estas imágenes mentales no incluyen todos los detalles exactos del suceso, sino algunos pormenores con características importantes. Esto supone la superación del uso del material cuando por ejemplo, se representa mentalmente un gráfico que externamente se manifiesta mediante un dibujo de un rectángulo compuesto de diferentes rectángulos.

La representación simbólica, es la tercera manera de capturar las experiencias de la memoria según Bruner (1915, citado por Resnick, 1990), se facilita gracias a la aparición de la competencia lingüística. “En esta etapa estrictamente se manejan símbolos, sin apelar a imágenes ni a objetos” (Covas y Bressan, 2009, p.1). Esta etapa implica tomar distancia de las representaciones físicas para pasar al dominio de la abstracción materializada en símbolos; en el caso de la actividad propuesta, se espera que los estudiantes, sin utilizar la Tabletas Algebraicas, factoricen ciertos polinomios.

La actividad que se realizó está fundamentada además de lo propuesto por Bruner, en lo sugerido por Dienes (1970, citado por Resnick, 1990), quien cree que los niños son constructivistas por naturaleza, más que analíticos, las personas van formando ideas de la realidad partiendo de enseñanzas que se adquieren por medio de prácticas vividas con diferentes objetos del mundo. Debido a que la mayoría de objetos matemáticos no son evidentes en los contextos habituales de los niños, Dienes propuso usar manipulativos que materializaran estructuras, a partir de experiencias físicas (Resnick, 1990).

En los años 60 y 70 Dienes, basado en la teoría de Bruner, crea materiales, uno de ellos son los conocidos como *bloques multibase (BAM)*, o, *Bloques de Dienes* que está constituido por cubos de lado 1, regletas de forma 1 por x (x toma un valor conocido) y placas cuadradas y cubos de lado x , si x se interpreta como una variable, permitiendo la materialización de expresiones cuadráticas, y la representación del proceso de factorización de las mismas y viceversa (Covas y Bressan, 2009). Esta idea es la que fundamenta la construcción del material Tabletas Algebraicas.

Las Tabletas Algebraicas son fichas rectangulares conformadas por seis modelos básicos, un cuadrado de lado a , otro de lado b , un rectángulo de lados a y b , otro de lados 1 y a , un tercer rectángulo de lados 1 y b y finalmente un cuadrado de lado 1, como puede verse enseguida:



Un referente histórico. Los babilonios (600 a.C. -300 d.C.) trabajaron esencialmente en sistemas de ecuaciones de primer y segundo grado, esto se evidencia en las tabillas babilónicas en donde se encontraron tablas de raíces cuadradas, además de enunciados y soluciones a problemas algebraicos relacionados principalmente con ecuaciones cuadráticas. “Los pitagóricos crearon un método conocido como *Álgebra Geométrica*, como vía alternativa para la extensión del dominio numérico de los racionales” (Covas y Bressan, 2009, p. 5), ya que se creía que había más segmentos que números. La resolución de ecuaciones cuadráticas era vista como problema de juntar áreas debido a que la multiplicación era considerada como área de rectángulos de lados a y b .

Desde el siglo XIX Euclides fue llamado “algebrista geométrico”, pero él nunca utilizó letras para referirse a sus representaciones que es una condición necesaria para que algunos consideren esto como álgebra, Euclides tampoco utilizó áreas o longitudes sino que utilizaba líneas (Grattan-Guinness, 2004).

Diofanto de Alejandría (200-284) contribuyó a modificar la concepción de álgebra conocida entonces como retórica, a un álgebra sincopada, utilizando palabras y símbolos, que se aproximaban a los emblemas algebraicos actuales.

Para Al-Khuwarizmi (790-850) el álgebra era una herramienta para resolver problemas que se presentaban con regularidad en ese tiempo; en su libro, Al-Khuwarizmi demostró la manera de resolver seis tipos de ecuaciones, por métodos tanto algebraicos como geométricos.

Todo este legado que han dejado personajes tan importantes, se espera poner en juego con el uso del material Tabletas Algebraicas, la relación álgebra-geometría, las representaciones verbales, gráficas, mixtas y netamente simbólicas.

3. Descripción general de la experiencia de aula

Esta experiencia se desarrolló en Colegio Alfonso López Pumarejo IED, en el grado 801, con la colaboración de la profesora Nubia Beltrán; se utilizaron dos sesiones de clase, cada una de duración 50 minutos.

Al inicio de la primera sesión se hizo una introducción al taller por parte de un maestro en formación en la cual se presentaba el material, y sus principales características como las siguientes: forma de las fichas (rectángulos no cuadrados y cuadrados), longitudes de los lados y área de las piezas, mediante tarjetas elaboradas en papel iris ubicadas en el tablero durante las dos sesiones, que se correspondían con las fichas que ellos tenían en cuanto a colores; se presentó también el contenido de un taller construido por los maestros en formación y piloteado en la Semana del Educador Matemático (evento organizado por el Departamento de Matemáticas de la UPN) y revisado por la profesora del curso, se dieron las instrucciones para su desarrollo (forma de consignación, metodología, etc.). Se formaron grupos de tres estudiantes para manipular el material y desarrollar el taller entregado, ya que al ser pocos estudiantes, podían participar y dar sus puntos de vista acerca de las actividades propuestas. Durante la primera sesión los estudiantes trabajaron la *unión de fichas* (sólo es posible ubicar fichas consecutivas cuando los lados compartidos son de la misma longitud), y la *sobreposición de fichas* (una ficha se puede colocar sobre otra siempre y cuando compartan, al menos, la longitud de uno de sus lados), además de *áreas de rectángulos* formados con el material.

La segunda sesión comenzó con una puesta en común acerca de lo desarrollado en la clase anterior, se recordó la unión y la *sobreposición de fichas*, *las longitudes de los lados de los rectángulos*, y el área de los mismos, después de esto los alumnos continuaron con la resolución del taller, expresando de nuevo sus dudas e ideas a los maestros en formación. En el transcurso de la segunda sesión los estudiantes asociaron los factores reducibles con aquellas expresiones en las cuales “*se repite un término*”, buscaron representaciones equivalentes y no equivalentes, y clasificaron las mismas (como reducibles o irreducibles) gracias a estas mismas representaciones. Al finalizar la clase tres estudiantes quisieron determinar, en el tablero, la irreductibilidad de tres monomios, sin la ayuda del material.

Los estudiantes que tienen un enfoque analítico miraban las representaciones equivalentes y las definían según las longitudes de los lados de las diferentes representaciones, resolviendo las tareas propuestas por analogía, observando el ejemplo del taller, algunos de manera autónoma y otros, con el acompañamiento de los maestros en formación: “*dos representaciones son equivalentes cuando los lados son iguales*”. En contraste, los estudiantes que manejan un enfoque más orientado a lo visual, dan su definición dependiendo totalmente del material, es decir, presentan sus definiciones en términos de fichas y representaciones: “*dos representaciones son equivalentes cuando las líneas rectas encajan perfectamente y uno de sus lados es del mismo tamaño que el de la otra figura*” o “*son equivalentes cuando los lados son iguales y colocándolos [las fichas] en cualquier lado da igual la longitud*”.

La temática tratada con la actividad fue la siguiente: Construcción de expresiones algebraicas equivalentes y factorización de polinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ (MEN, 2006) con a , b y c números naturales. El objetivo propuesto era: Expresar los polinomios dados como producto de polinomios irreducibles mediante su materialización con las **tabletas algebraicas** con el fin de establecer relaciones entre representaciones algebraicas y geométricas, objetivo que, según los autores de este documento, fue alcanzado, ya que la mayoría de estudiantes realizaron la últimas actividades propuestas en el taller, que permitían comprobar el cumplimiento del objetivo. En la experiencia de aula se evidenciaron competencias matemáticas como: *Comunicación*, cuando se utilizaba el lenguaje para dar a entender el taller, y para expresar las dudas de los estudiantes frente al mismo. *Representación*, se evidenciaba cuando los estudiantes representaban áreas por medio de construcciones con fichas y cuando las expresaban en forma de polinomios. *Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones*, se comprobaba cuando los estudiantes interpretaban el lenguaje formal de las matemáticas, cuando escribían el área del rectángulo resultante.

Dentro de los estándares curriculares colombianos (2006) se evidenciaron con la actividad realizada los siguientes: Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas. (Pensamiento espacial y sistemas geométricos); Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos. (Pensamiento métrico y sistemas de medidas).

Según los NCTM (2003) los estándares que se relacionan con la actividad son: Comprender patrones, relaciones y funciones; Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos.

La concepción curricular de álgebra comprobada durante el desarrollo de la actividad fue: álgebra como reordenamiento y manipulación de variables, debido a que los estudiantes fueron capaces de expresar simbólicamente el área de los rectángulos resultantes, además de alcanzar destrezas con el manejo del material, y con la manipulación de expresiones simbólicas, con el fin de conseguir expresiones equivalentes entre las mismas.

4. Logros y dificultades.

Logros. Los logros evidenciados en la experiencia de aula fueron los siguientes: Reconocimiento de material *tabletas algebraicas* para el aprendizaje del álgebra (en el caso de los estudiantes), y para la enseñanza de ésta (en el caso de maestros en formación). Identificación de las relaciones entre sistemas de representación (enactivo, gráfico y simbólico), que genera interés y motivación en los estudiantes. Materialización de un tema de álgebra, relacionando el álgebra y la geometría (ésta última como herramienta de modelación). Se logró brindar otra perspectiva del estudio del álgebra a alumnos con dificultades para encontrar sentido a las matemáticas con los recursos simbólico-deductivos de esta rama de la matemática.

Dificultades. Existen errores por parte de los estudiantes al traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico, a pesar que se conocen y (aparentemente) se comprenden ambos, por una parte hay errores en la estructura e interpretación de las expresiones algebraicas, además a los alumnos se les dificulta la escritura y la sintaxis adecuadas. Las nociones que los estudiantes tienen de geometría son muy vagas, era muy frecuente que confundieran longitud del lado de un rectángulo y área del mismo, incluso se daban casos en que los estudiantes buscaban la longitud de todos los lados del rectángulo, esto no con el propósito de verificar que los lados paralelos entre sí tuvieran la misma longitud, sino para encontrarlos todos, ya que no conocían que al ser un cuadrado o rectángulo, los lados paralelos entre sí deben tener siempre la misma longitud.

En la experiencia se evidenció que los estudiantes confunden diferentes nociones geométricas: área y perímetro, longitud y área.

Reflexión final

Como futuros maestros se considera importante reconocer las fortalezas y dificultades de trabajar en el aula con materiales manipulativos, los logros que se alcanzan, los tipos de representaciones que se potencia, también se tiene la oportunidad de experimentar las situaciones reales que un maestro debe afrontar con un grupo: dar respuesta a preguntas que requieren una explicación más rigurosa, o preguntas fuera del contexto, o aparentemente triviales pero esenciales para ellos que conllevan también a la autoevaluación de los maestros en formación en cuanto a sus conocimientos matemáticos y didácticos. El acompañamiento del profesor es indispensable porque son frecuentes los errores de interpretación de longitudes y de áreas, además, para cumplir el objetivo de la actividad con el material (factorización de algunos polinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, a , b y c números naturales) es fundamental que la aprehensión del concepto de factor irreducible.

Sin duda alguna gracias a la implementación del taller se puede corroborar muchas ideas expuestas acerca del trabajo con materiales didácticos y se crea la consciencia de que éste es el comienzo de muchas otras experiencias con materiales didácticos en la labor como futuros docentes.

Referentes Bibliográficos.

Alfonso, F., Babero, C., Fuentes, I., Azcarate., Dozagarat, J., Gutiérrez, S. et al. (1993) *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Grupo Azarquiel. Madrid: Editorial síntesis.

Covas, M. y Bressan, A. (2009) *La enseñanza del álgebra y los modelos de área*. Argentina: Fundación GEB.

Grattan-Guinness, I. (1994). The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage [Versión electrónica]. *Historia Mathematica*, 31(2), 163-185.

Meavilla, V. (2007). *Estudio sobre el comportamiento visual en álgebra de los alumnos del segmento educativo 14-16*. España: Editorial CEP.

MEN. (2006). Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. En MEN (Ed.), *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá.

Montoya, E. y Montoya, J. (1999) *Áreas mágicas* (Proyecto matemáticas y física básicas en Antioquia). Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

NCTM. (2003). *Principios y Estándares para la educación Matemática* (M. Fernández, Trad.). Sevilla: SAEM Thales.

Resnick, L. y Ford, W. (1990) *La enseñanza de la matemática y sus fundamentos psicológicos*. México: Paidós.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Síntesis.

Volver al índice
Experiencias de Aula