

---

# Apropiación de conceptos trigonométricos por medio de la construcción de algunas funciones con Geogebra

Arbey Fernando Grisales Guerrero

Coordinador del Proyecto Juega y Construye la Matemática.  
Colegios de la Comunidad de los Hermanos Maristas de la enseñanza. Colombia  
agrisalesg@gmail.com

Jhon Faber Arredondo

Docente de Matemáticas Colegio San José.  
Comunidad Hermanos Maristas de la Enseñanza. Armenia - Quindío.  
johnjam1983@hotmail.com

Edwin Arnol Mamián Muñoz

Profesor de Matemáticas IE Marcelino Champagnat Armenia - Quindío  
edarmam@hotmail.com

**Resumen.** Por medio de una serie de experiencias sencillas y fáciles de desarrollar en la sala de sistemas, con la ayuda del software especializado Geogebra, se proporcionarán a los estudiantes elementos para que reconozcan la forma como se construyen las funciones trigonométricas, de tal manera, que logren caracterizarlas; luego con los datos obtenidos puedan ellos mismos conjeturar y comprender de una forma dinámica los procesos de construcción de conceptos trigonométricos.

**Palabras claves:** Asistentes matemáticos, Geogebra, Software libre, Tecnologías de la información y la comunicación.

## 1. Presentación

Presentamos algunas consideraciones sobre el uso pedagógico del software educativo especializado en las clases de matemáticas y se finaliza con un taller en el que se construyen algunas funciones trigonométricas utilizando el software libre Geogebra. La diferencia sustancial de la utilización de asistentes matemáticos como estrategia mediadora en la construcción de conceptos en el aula. El computador y el software correspondiente hacen posible que fórmulas, tablas de números y gráficas se enlacen rápidamente y de manera dinámica; cambiar una representación y ver los cambios en las otras, ayuda a los estudiantes a comprender las relaciones que se pueden dar entre ellas y facilita el proceso de conjeturación en los mismos.

Este taller tiene por objeto motivar dicha reflexión en los docentes asistentes al encuentro, la cual les permita incursionar en el programa Geogebra como ayuda para comprender los procesos de construcción de conceptos trigonométricos, superando los inconvenientes que comúnmente presentan herramientas tradicionales como lápiz, papel, compás, regla,...

El taller consta de dos partes específicas que darán una aproximación a los usos del programa:

Parte I: Conocimiento general del ambiente de trabajo del Geogebra y ejemplos de construcciones básicas.

Parte II: aplicaciones y solución de problemas de tipo trigonométrico.

## 2. Marco teórico

### 2.1 *Uso de Tecnologías de la información y de asistentes matemáticos en clase.*

“Hoy en día la educación se enfrenta a grandes desafíos, como consecuencia de la diversificación creciente y los continuos cambios políticos, económicos y socioculturales en donde los efectos de la globalización y el desarrollo acelerado de las Tecnologías de la información y la comunicación (TIC) han puesto a prueba a los sistemas educativos...”<sup>1</sup>. Las nuevas tecnologías han cambiado profundamente el mundo de las matemáticas y el de las ciencias, ya que no sólo han afectado las preocupaciones propias de su campo y la perspectiva como éste se ve, sino también, el modo en que las ciencias y las matemáticas se hacen”<sup>2</sup>, se enseñan, construyen, profundizan, aprenden y se transmiten como legado cultural de la humanidad.

El uso de asistentes matemáticos (programas diseñados con intencionalidad pedagógica) tales como: Derive 6.0, TI-Nspire, TI-Navigator, Cabry II Plus, Cabry 3D, Geogebra, Regla y Compás, Cinderella; son recursos tecnológicos que permiten al estudiante concentrar esfuerzos en el razonar, solucionar y formular problemas, así como en verificar teoremas y propiedades matemáticas.

De esta forma El laboratorio de matemáticas, para una comunidad educativa es un espacio que cumple con varias finalidades tanto para maestros como para alumnos; para los maestros es un espacio de estudio, búsqueda, indagación, sistematización, socialización y experimentación de trabajos de aula, tendientes a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; y para los

---

<sup>1</sup> Zilberstein Toruncha José, (2009). Revista Internacional Magisterio educación y Pedagogía No 38.

<sup>2</sup> Ministerio de Educación Nacional. Proyecto de innovaciones Tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas y ciencias

alumnos es un espacio básicamente de búsqueda, indagación y experimentación de las posibilidades que ofrecen las nuevas tecnologías y que les permita potenciar su propio aprendizaje.

Para que las experiencias relativas al uso de la tecnología y de asistentes matemáticos en el aula de clase tengan un verdadero y positivo impacto en el aprendizaje, se debe tener en cuenta que el éxito depende no solo de la tecnología, sino del uso pedagógico que se le dé; se requiere de un entorno, en el colegio, en el cual las condiciones físicas, humanas, financieras y políticas internas favorezcan el desempeño de docente y del alumno en ambientes virtuales, nuestros estudiantes hoy en día son innatos virtuales, los adultos son emigrantes virtuales. Las prácticas educativas tradicionales no son ya garantía suficiente, para que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para desenvolverse en la sociedad de la Información con medianas posibilidades de éxito. El mundo moderno requiere que los futuros trabajadores (dependientes o no), sean capaces de aplicar estrategias para resolver problemas y utilizar herramientas apropiadas para aprender permanentemente y trabajar integradamente en equipo. La comunicación eficiente y la información adecuada juegan roles importantes en la adquisición de estas habilidades. Las escuelas modernas deben hoy incorporar estrategias metodológicas y tecnologías apropiadas que preparen a los estudiantes hoy, para el mundo del mañana.

Por las anteriores razones en las aulas de clase se deben usar pedagógicamente los asistentes matemáticos y las herramientas computacionales. El concepto de herramienta computacional, hace referencia al conjunto integrado por: computadores, calculadoras científicas y programas dinámicos dotados de una determinada intencionalidad. La intencionalidad está dada por ser programas que permiten realizar construcciones dinámicas, reforzar la comprensión de determinados temas, permitir la simulación. Todo acto cognitivo está mediado por un instrumento físico o simbólico y esta mediación impone al sujeto una cierta forma de relación cognitiva con el objeto de conocimiento. Según Moreno, Waldegg, (2001). “La teoría cognitiva reconoce la mediación instrumental simbólica o física en el aprendizaje. Dichas herramientas computacionales diseñadas para el desarrollo de una Geometría dinámica (Cabry 3D, Cabry II Plus, Regla y Compás, TI-Nspire), para el análisis gráfico de funciones (Derive, TI-Nspire, Winplot, Geogebra) y para el cálculo simbólico (TI-Nspire, Derive), permiten:

- La construcción, exploración, manipulación directa y dinámica de objetos en pantalla, que conducen en un nivel bajo, a la elaboración de conjeturas, en un nivel medio a la argumentación y un nivel superior al desarrollo de demostraciones.
- Utilizar diferentes representaciones matemáticas (numéricas, geométricas, tabulares, simbólicas y gráficas), de tal forma, que faciliten entender que un concepto, propiedad o situación problema se puede abordar desde distintos ámbitos.
- La representación gráfica en dos y tres dimensiones, dando la posibilidad de realizar transformaciones y de asociar figuras con objetos físicos, para pasar luego a un nivel de conceptualización, más elevado.
- Problematizar lo visual, de tal forma que surja la necesidad de examinar, conjeturar, predecir y verificar, es decir, dar al estudiante la posibilidad de pensar y de preguntar sobre el ¿por qué? de determinados hechos, llevándolo a explorar otras situaciones. Aquí el docente puede formular preguntas de entrada, de proceso y de salida, enfocadas a precisar lo que el estudiante debe saber sobre procesos y conceptos matemáticos.

- La correlación de lo geométrico, espacial, lo simbólico, lo numérico, lo aleatorio y lo variacional.
- La ampliación del rango de formulación y resolución de problemas.
- La simulación de microentornos de trabajo, en los que se pueden diseñar actividades significativas contextualizando un problema. El aprendizaje significativo se logra a través de la solución de situaciones problema, en las que el estudiante aprende cuando domina diferentes sistemas de representación y los usa para el desarrollo de diferentes actividades dentro y fuera de la matemática.

## 2.2 *Principios de las herramientas computacionales.*

Algunos de los principios de las herramientas computacionales son: a) Dudar de lo que se ve, es decir, no tomar por verdadero relaciones percibidas de una imagen estática construida en la pantalla del computador o dibujada sobre una hoja de papel; b) Ver más de lo que se ve, es decir, estudiar una figura y tratar de descubrir en ella relaciones que no están presentes a simple vista.

Teniendo en cuenta los avances de la tecnología y su influencia en la educación, los profesores de matemáticas, de informática y lo estudiantes, deben asumir el reto de incorporar en el desarrollo de las clases, el uso de las calculadoras científicas, del computador y de programas especializados para tal fin, como los mencionados anteriormente, no se puede limitar el trabajo en el aula clase solamente al uso del cuaderno, del tablero y del lápiz, en una época altamente tecnificada, porque se estaría en desventaja con otras comunidades académicas. Lo anterior implica incorporar a los maestros en un plan de formación permanente que posibilite es uso de este tipo de estrategias al interior de las aulas de clase, con miras a mejorar el desempeño de los estudiantes.

## 2.3 *Asistentes matemáticos.*

Los asistentes matemáticos, son programas para computador diseñados con intencionalidad pedagógica, dicha intencionalidad se asume en el sentido en que permiten el trabajo con: el cálculo numérico y simbólico, la dinamización de la geometría, la gestión de datos, el análisis gráfico de funciones. Algunas ventajas pedagógicas son:

- Ayudan al estudiante a progresar hacia niveles superiores de pensamiento formal.
- Mejoran la fluidez representacional (visualización de múltiples representaciones).
- Mejoran la actitud de los estudiantes hacia al aprendizaje de la matemática, dándoles seguridad.
- Favorecen la interiorización de conceptos y de procedimientos matemáticos.
- Favorecen la indagación y el desarrollo de la capacidad de razonamiento.

- Permiten la autorregulación, el trabajo colaborativo y autónomo del estudiante.
- Integran lo procedimental con lo conceptual.
- La interactividad que posibilita una retroalimentación inmediata.
- Permiten explorar y experimentar con ideas matemáticas, tales como: patrones de variabilidad y regularidad, propiedades numéricas, geométricas y algebraicas, en el trabajo con funciones
- Desarrollan habilidades tales como: estimación, cálculo, graficación, análisis de datos y de funciones.
- Facilitan enfocar el proceso de resolución de un problema al análisis y a la conjeturación, en vez de concentrarse en los cálculos minuciosos asociados al problema.
- Fortalecen la capacidad de abstracción, teniendo acceso a ideas matemáticas y experiencias que van más allá de los cálculos normales realizados con papel y lápiz.
- Permiten verificar resultados para comprobar la validez de los procesos.
- Permiten solucionar situaciones problema por diferentes métodos, comprobando así, que la mayoría de ellas posee más de un procedimiento acertado para llegar a la respuesta correcta.
- Permiten poner en práctica el método natural de aprendizaje “Ensayo-error-nuevo ensayo-aprendizaje”
- Permiten modificar las condiciones iniciales de un problema, para predecir resultados, formulándose y respondiéndose preguntas tales como ¿qué pasará si...?

**2.3.1 Referentes teóricos de los asistentes matemáticos.** La utilización de asistentes matemáticos busca que las actividades desarrolladas en el aula de clase fomenten el trabajo en equipo, permitan la socialización de aprendizajes y de experiencias; buscando con ello construir una comunidad de indagación, en la que la discusión tenga como base: la inferencia, la conjeturación, la solución de situaciones problema y la modelación matemática, para que los procesos cognitivos y metacognitivos se integren con lo disciplinar y todo en conjunto apunte al desarrollo de habilidades de pensamiento.

El desarrollo de actividades en el aula de clase, utilizando asistentes se sustenta en un constructivismo moderado y en estrategias metodológicas que faciliten la construcción del conocimiento, como es el caso del trabajo colaborativo, la mediación y el contrato didáctico.

Un estudiante que aprende matemática con una propuesta constructivista, construye los conceptos en la interacción que tiene con los objetos matemáticos y con los otros sujetos. Son las situaciones problema las que producen el desequilibrio en las estructuras mentales del alumno quien en su proceso de acomodación construye los conceptos.

Conviene recordar que la orientación y mediación del profesor durante el trabajo que desarrollan los estudiantes, facilita los procesos de construcción de conocimiento, inclusive interviniendo cuando los alumnos no han desarrollado la actividad necesaria, para comprender un concepto básico.

Según González Dávila, Alejandra <http://kim.ece.buap.mx/prof/dmocencahua/dip> (consulta realizada el 13 de abril de 2008). Cuando el maestro motiva, orienta, invita constantemente a los alumnos a que den sus opiniones y construyan poco a poco juicios e hipótesis; aunque estén equivocados, está dirigiendo su labor docente no solamente hacia el mejoramiento del proceso analítico, sino hacia un aprendizaje colectivo en el que los alumnos se sentirán capaces de pensar, de ser responsables de su aprendizaje y de compartir sus ideas de una manera más fluida. Desde esta perspectiva, cualquier estrategia docente será valiosa si motiva el análisis de los alumnos sobre el tipo de operaciones mentales que realizan en distintos momentos de las clases. Lo más importante es que los estudiantes se den cuenta de cómo y bajo qué circunstancias aprenden algo y por eso es conveniente que los docentes utilicen el lenguaje para verbalizar los procesos que conforman los esquemas de pensamiento. Socializando aprendizajes y dificultades, es decir, realizando una puesta en común.

En el aprendizaje colaborativo el centro del proceso académico no es el profesor, ni tampoco los estudiantes como estamentos aislados, sino que es el grupo (estudiantes y profesor). La aplicación de esta estrategia implica un cambio de actitud de los integrantes del curso y del profesor, donde cada miembro del grupo es responsable tanto de su aprendizaje, como del aprendizaje de los demás, de tal forma que todos se responsabilicen de la búsqueda de ambientes, en los cuales se propicie el desarrollo de habilidades individuales y grupales a partir de la discusión y acuerdos entre los integrantes del grupo al momento de explorar nuevos conceptos. De esta forma el aprendizaje colaborativo es una metodología que motiva la colaboración entre las personas que intervienen en el acto educativo, para conocer, compartir, y ampliar la información que cada uno tiene sobre un tópico o tema a desarrollar. Esto se logra con la socialización de información, saberes y aprendizajes, a través de la discusión en espacios reales o a través de plataformas virtuales.

Algunas características básicas del trabajo colaborativo cuando se trabaja con herramientas computacionales son:

- Favorecer la formación integral.
- Crear ambientes de trabajo abiertos, libres, que estimulan la creatividad.
- Motivar a responder por los compromisos personales.
- Fomentar un aprendizaje no lineal y facilitar el aprendizaje trans e interdisciplinario por medio de procesos formales e informales.
- Enriquecer el avance académico y actitudinal del grupo, por medio de los aportes individuales y la experiencia personal de cada quien.
- Buscar que las normas concertadas no limiten, ni encasillen, sino que generen creatividad y compromiso.
- Integrar el desarrollo personal con el desarrollo del grupo.
- Generar compromisos comunes, respetando la individualidad.
- Disminuir los sentimientos de aislamiento y favorecer los sentimientos de autosuficiencia y autorregulación.
- Propiciar el alcance de los propósitos del grupo, a partir de la participación, del compromiso individual y de la responsabilidad compartida
- Permitir la creación y el fortalecimiento de pequeñas comunidades de indagación.

Para que el estudiante pueda desarrollar un aprendizaje en equipo colaborativo, es necesario que realice primero un aprendizaje individual mediante lecturas, búsqueda adicional de información, análisis y valoración de la misma. A partir de ahí realice la discusión, contextualice, valide la información en su grupo de trabajo y asuma que con los temas que son de interés para todos, se razona, se reflexiona, se examina y se sacan conclusiones, para de esta forma fijar el aprendizaje en consonancia con los propósitos del curso, y los suyos. Este proceso de aprendizaje se fundamenta, en el conocimiento, participación y contribución, oportunas, acordes con las reglas concertadas y aceptadas por todos los integrantes del grupo.

En el aprendizaje colaborativo tanto el profesor, como los alumnos, entienden la importancia del liderazgo, del trabajo a tiempo, así como la comprensión de factores que afectan el funcionamiento y normal trabajo del grupo; entre ellos, la superación de los malos entendidos, el estrés y la confusión o ansiedad inherentes al ser humano.

Aprendizaje autónomo no significa aprendizaje por sí sólo, sin la intervención de otros. La autonomía está ligada a la capacidad de tomar decisiones conscientes y fundamentadas en el proceso de formarse aprendiendo. El aprendizaje autónomo es bueno cuando se asocia con las dimensiones de solidaridad y colaboración, como valores de alta significación e importancia social.

Un aspecto importante a considerar en el proceso de construcción de conceptos por parte de los estudiantes es la mediación del docente, de los acudientes o padres de familia y de los compañeros de grupo.

La mediación debe ser el punto de partida, para posibilitar la formación y crecimiento de estudiantes, reflexivos e interesados por aprender; conscientes de la necesidad que existe, de construir comunidades en las que se privilegie el bien común, por encima de particularidades; capaces de indagar, explorar y de hacer las cosas por su propia cuenta, con un alto nivel de desempeño declarativo y procedimental, que esté acompañado de una actitud convivencial positiva y que dé cuenta al menos de los cuatro tipos de aprendizajes señalados por la UNESCO: aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a convivir, aprender a ser.

Una concepción importante en este momento, es la de considerar al educador como mediador y al educando como mediado. La mediación ha sido una actividad constante en la Pedagogía que hoy recobra importancia, porque se convierte en una alternativa pedagógica, para una comunidad de estudiantes que viven en una cultura emergente y que muchos adultos desconocen.

Ahora bien, dentro de una actividad pedagógica, planeada y realizada por el maestro de matemática, el estudiante generalmente tiene como tarea, resolver una situación problema propuesta por el docente, pero su desarrollo se lleva a cabo dando solución a los interrogantes planteados en ella, teniendo en cuenta la información proporcionada y los criterios formulados para su solución, que son constantes en la forma que tiene el maestro de orientar la clase.

La mediación está íntimamente relacionada con el contrato didáctico; contrato concertado y celebrado entre el docente y el alumno; presente en todos los procesos de enseñanza-aprendizaje, que hace referencia al conjunto de normas y acuerdos implícitos y explícitos, que orientan y determinan los comportamientos y relaciones entre los sujetos que intervienen en él; de tal forma

que garantice una escuela que propenda, entre otras cosas por el desarrollo del pensamiento de sus alumnos, la construcción de conceptos y el fomento de una sana convivencia social. El contrato académico permite modificar la praxis entre el que enseña (el maestro) y el que aprende (el alumno), de forma que los acuerdos implícitos sean sustituidas por los acuerdos explícitos y la autoridad del docente por la autonomía y participación del alumno, permitiendo de esta forma la democratización de los procesos de aprehensión de los conceptos. El contrato didáctico se da cuando en forma concertada profesor y estudiante trazan un plan de trabajo y llegan a acuerdos que fortalecen el aprendizaje colaborativo, de tal forma que haya consentimiento mutuo, buena aceptación de las partes, negociación de responsabilidades y compromiso recíproco entre docente y estudiante. El contrato didáctico implícito y explícito, debe surgir de la necesidad e interés que tienen los estudiantes de aprender, construir y descubrir conceptos y de la obligación profesional y moral del maestro, de orientarlos; por lo tanto se caracteriza por:

- Una buena relación de empatía entre el docente y el estudiante, donde lo cognitivo y lo socio-afectivo, convergen en un mismo fin.
- Acuerdos concertados y negociados, que posibiliten el alcance de propósitos comunes.
- Compromisos recíprocos de cumplimiento del contrato en su forma implícita y explícita.
- La mediación del maestro y la actitud positiva del alumno, que en definitiva, es quien realiza la actividad mental de aprender.
- La diversidad de contenidos y de procesos desarrollados, que conlleven a la formación de personas competentes en matemática.
- La autonomía para elegir qué aprender y cómo aprender, asumiendo que todos los seres humanos tenemos diferentes formas de descubrir, aprender y comprender conceptos de las distintas áreas y disciplinas del conocimiento, así como diferente forma de interpretar el mundo; por lo tanto una particular manera de desarrollar habilidades de pensamiento.
- La relevancia, buscando que las actividades sean significativas para los estudiantes, de tal forma que reconcilien necesidades e intereses de los mismos. Una situación significativa es una situación real o imaginada, que crea un contexto en el cual los alumnos dan significado y sentido a la acción. Significado, en tanto que les es interpretable desde las posibilidades de su pensamiento y, sentido, en tanto que le fijan un fin y la orientan para conseguirlo. Las situaciones significativas desencadenan las condiciones para que los alumnos asuman como propias, tanto las metas que se fijan, como las acciones que se consideran necesarias para conseguirlas. A la vez que encuentran condiciones favorecedoras para construir problemas, formular preguntas plenas de significado y para orientarse en la búsqueda de soluciones. A la par con el desarrollo de las situaciones significativas también se enriquecen las interacciones sociales (profesor-alumno y alumno-alumno).
- El desarrollo de procesos de metacognición; entendidos éstos, como la capacidad de autorregular el aprendizaje; de saber cómo es que se aprende; de conocer cómo es que se conoce; de tener claro cómo es que se transfiere y se utiliza el conocimiento, en la solución de situaciones problema.

### 3. Metodología del taller

El taller se desarrollará en la sala de computación, con la participación de la cantidad de personas que dicha sala pueda albergar como equipos disponibles. Este se desarrollará en dos fases:

En la primera: formación teórico/práctica sobre el manejo del programa Geogebra, en el cual se hará un planteamiento de taller práctico en el que se tratará de que los participantes tengan un conocimiento básico del manejo del software a partir de explicaciones y ejemplos de ejercicios prácticos a realizar con la ayuda del ponente. Para ello se utilizará una guía que será desarrollada por cada participante en el espacio de tiempo establecido, siempre orientada y asesorada mediante la proyección de la misma.

En la segunda parte: la realización de una tarea individual consistente en la construcción o solución de un problema de tipo trigonométrico en el que cada participante puede elegir la forma de presentarlo, compartiendo al final su trabajo, reflexiones y conclusiones para que todo el grupo se retroalimente y pueda generar nuevas expectativas u otros puntos de vista.

Así, el trabajo a realizar será altamente beneficioso: aparte de desarrollar habilidades en el uso del programa Geogebra como herramienta de trabajo, se fortalecerán los conocimientos de aplicabilidad a otros campos del saber matemático. Además, mejorar las expectativas para su futuro trabajo académico en el aula de clases para el desarrollo de conceptos matemáticos.

### Referencias bibliográficas

- Grisales, Arbey. Orozco, José Luis. (en prensa). Guía del Docente. Proyecto Juega y Construye la Matemática. Bogotá: Colegios Maristas. Provincia Norandina – Colombia.
- Castiblanco Paiba, Ana Celia. (2002). Pensamiento variacional y tecnología computacional. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de educación Nacional de Colombia. (1998). Serie Documentos. Lineamientos curriculares de Matemáticas y tecnología. Autores varios.
- Ministerio de educación Nacional de Colombia. (1999). Serie Documentos. Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales, autores varios.
- Zilberstein Toruncha José, (2009). Revista Internacional Magisterio educación y Pedagogía No 38.

## Fuentes de internet:

- <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/54/Articulo02.pdf>
- <http://www.aq.upm.es/Departamentos/Matematicas/exposicion/TallerConstruccionesClasicasCabri/index.html>
- <http://www.terra.es/personal/joseantm/Archiv%20pdf/97salamtriang.PDF>
- <http://www.geogebra.com>
- <http://kim.ece.buap.mx/prof/dmocencahua/dip>

**Volver al índice  
Talleres**