SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Majda Perišić

BESSELOVI NIZOVI I BAZNI OKVIRI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, rujan 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Baze predstavljaju jedan od osnovih pojmova u teoriji vektorskih prostora. Naime, omogućavaju nam da sve vektore prostora na jedinstven način prikažemo kao linearnu kombinaciju njenih elemenata. Ipak, ponekad nam jedinstvenost prikaza nije relevantna, već tražimo reproduktivni sistem koji zadovoljava neka dodatna svojstva. Primjerice, pri slanju podataka i procesiranju signala, mnogo nam je bitnije imati mogućnost rekonstrukcije u slučaju gubitaka koji se mogu dogoditi pri slanju. To nam može biti omogućeno linearnom zavisnošću vektora koje koristimo u prikazu podataka.

U takvim situacijama se korisnima pokazuju bazni okviri, koje ćemo u ovom radu detaljno opisati. Bazni okviri su reproduktivni sistemi općenitiji od baza te se mogu definirati na svakom Hilbertovom prostoru. Naime, kao i baze, omogućavaju prikaz svakog vektora prostora. Međutim, kako ne zahtijevamo linearnu nezavisnost elemenata, navedeni prikaz nije nužno jedinstven, a upravo ta redundancija nam povećava otpornost na gubitke.

Intuitivno, bazne okvire se može zamišljati kao baze s ”viškom” elemenata. U konačnodimenzionalnim prostorima situacija je upravo takva: bazni okviri su sustavi izvodnica te se svaki može reducirati do baze prostora. U beskonačnodimenzionalnim prostorima ideja ipak nije toliko jednostavna. Vidjet ćemo da postoje baze koje nisu bazni okviri, kao što nisu svi bazni okviri baze. U radu ćemo, među ostalim, detaljno ispitati odnos baznih okvira i baza.

Ovaj rad podijeljen je na tri idejne cjeline. U prvom poglavlju navodimo neke važne rezultate teorije normiranih prostora. S ciljem da postavimo temelje za analizu Besselovih nizova i baznih okvira opisujemo svojstva ortonormiranih baza te ograničenih linearnih operatora na normiranim prostorima, izostavljajući pritom detalje i dokaze.

U drugom poglavlju iznosimo detaljnu analizu Besselovih nizova i baznih okvira. Započinjemo osnovnim definicijama te objašnjavamo temeljne pojmove. Zatim uvodimo pojam dualnih baznih okvira te promatramo njihova svojstva, a potom opisujemo djelovanje određenih operatora na bazne okvire te navodimo nekoliko karakterizacija baznih okvira. Nakon toga, pažnju posvećujemo odnosu baznih okvira i baza. Konačno, razmatramo posebnu vrstu baznih okvira, napete bazne okvire.

Treće poglavlje se bavi analizom situacija u kojima je dovoljan konačan broj vektora kako bismo Besselov niz nadopunili do baznog okvira. Također, posebno ćemo razmotriti nadopune do Parsevalovih baznih okvira.

Ovim bih putem željela zahvaliti mentoru prof. dr. sc. Damiru Bakiću na brojnim savjetima i korisnim primjedbama koji su mi olakšali pisanje ovog rada.

Poglavlje 1

Normirani prostori i operatori na normiranim prostorima

U ovom poglavlju iznosimo kratki pregled nekih ključnih rezultata teorije normiranih prostora te pritom posebnu pažnju posvećujemo Banachovim prostorima. Također, radi potpunosti, navodimo neke specifične rezultate koji će se pokazati korisnima u razmatranju Besselovih nizova i baznih okvira.

Kako se radi o standardnim i to osnovnim rezultatima teorije normiranih prostora, dokaze izostavljamo, no moguće ih je pronaći u [2].

1.1 Osnovni pojmovi teorije normiranih prostora

$\mathbb{F}$ će biti zajednička oznaka za polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ te kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ u situacijama kada nije potrebno specificirati izbor.

Definicija 1.1.1. *Za vektorski prostor X kažemo da je normiran ako za svaki $x \in X$ postoji realan broj $\|x\|$ takav da vrijedi:*

(i) $\|x\| \geq 0$,

(ii) $\|x\| = 0$ *ako i samo ako* $x = 0$,

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{F}$,

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall y \in X$.

Uređen par $(X, \|\cdot\|)$ se naziva normiran prostor, a $\|x\|$ norma vektora x. Kada su zadovoljena svojstva (i), (iii) te (iv), tada se $\|\cdot\|$ naziva polunormom.

Definicija 1.1.2. *Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X\times X \to \mathbb{F}$ sa svojstvima:*

(i) $\langle x, x\rangle \geq 0, \forall x \in X$,

(ii) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(iii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x, y \in X$,

(iv) $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle, \forall x_1, x_2, y \in X$,

(v) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}, \forall x, y \in X$

nazivamo skalarni produkt na vektorskom prostoru X. Uređen par $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazivamo unitaran prostor.

Primjer 1.1.3. *Na prostoru $\mathbb{F}^n$ jedna norma dana je s $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$, a skalarni produkt s $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$.*

Napomena 1.1.4. *Općenito, na proizvoljnom unitarnom prostoru $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ jedna norma je dana s $\|x\| = \sqrt{\langle x, \rangle}$. Stoga je svaki unitaran vektorski prostor normiran.*

Definicija 1.1.5. *Neka su X i Y normirani prostori.*

(i) Funkcija $f\colon X \to Y$ je neprekidna u točki $x_0 \in X$ ako je

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tako da } \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon.$$

(ii) Funkcija je neprekidna na skupu $S \subseteq X$ ako je neprekidna u svakoj točki $x_0 \in S$.

(iii) Za funkciju f kažemo da je uniformno neprekidna na skupu $S \subseteq X$ ako je

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tako da } x_0, x_1 \in S, \|x_1 - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_0)\| < \epsilon.$$

Definicija 1.1.6. *Neka je X normiran vektorski prostor.*

(i) Kažemo da niz vektora (x_n) konvergira prema vektoru $x \in X$ ako je $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$, odnosno ako

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \text{ tako da } \forall n \geq N \Rightarrow \|x - x_n\| < \epsilon.$$

Pišemo $x_n \to x$ ili $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

(ii) *Niz vektora* (x_n) *je Cauchyjev ako je* $\lim_{n,m\to\infty} \|x_m - x_n\| = 0$*, odnosno ako*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \text{ tako da } \forall m, n \geq N \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \epsilon.$$

Jasno je da je u normiranim prostorima svaki konvergentan niz Cauchjev. Obrat, pak, ne vrijedi uvijek.

Definicija 1.1.7. *Kažemo da je prostor potpun ako je u njemu svaki Cauchijev niz konvergentan. Potpun normiran prostor se naziva Banachov prostor. Potpun unitaran prostor zove se Hilbertov prostor.*

Primjer 1.1.8. *Neka je* p *takav da* $1 \leq p < \infty$*, a* (c_n) *niz skalara,* $(c_n) \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$*. Prostor definiran s*

$$l^p = \left\{ (c_n) : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^p < \infty \right\}$$

je Banachov prostor s normom

$$\|(c_n)\|_{l^p} = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Ako je $p = \infty$ *prostor*

$$l^\infty = \{(c_n) : \sup\{\|c_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\}$$

je Banachov s normom

$$\|(c_n)\|_\infty = \sup\{\|c_n\| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Definicija 1.1.9. *Neka je* (x_n) *niz vektora u normiranom prostoru* X*. Kažemo da je:*

(i) *niz je ograničen odozdo ako* $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| > 0$*,*

(ii) *niz ograničen ako* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$*,*

(iii) *normiran ako* $\|x_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$*.*

Napomena 1.1.10. *Iz prethodne definicije vidimo da je* l^∞ *skup svih ograničenih nizova skalara.*

Definicija 1.1.11. *Neka je* (x_n) *niz u normiranom prostoru* X*. Red* $\sum_{n=1}^\infty x_n$ *konvergira k vektoru* $x \in X$ *ako je* $x = \lim_{n\to\infty} s_n$ *gdje je* (s_n) *niz parcijalnih suma* $s_n = \sum_{k=1}^n x_k, \forall n \in \mathbb{N}$*.*

Red $\sum_{n=1}^\infty x_n$ *konvergira apsolutno ako konvergira red nenegativnih brojeva* $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$*.*

Teorem 1.1.12. *Normiran prostor X je potpun ako i samo ako svaki apsolutno konvergentan red* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *vektora iz X konvergira i obično u X. Tada vrijedi* $\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.

Teorem 1.1.13 (Hölderova nejednakost)**.** *Neka je* $1 \leq p \leq \infty$, *a* p' *takav broj da vrijedi* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *pri čemu podrazumijevamo* $\frac{1}{0} = \infty$ *i* $\frac{1}{\infty} = 0$. *Ako je* $(a_n) \in l^p$ *i* $(b_n) \in l^{p'}$, *onda vrijedi* $(a_n b_n) \in l^1$ *te*

$$\|(a_n b_n)\|_{l^1} \leq \|(a_n)\|_{l^p} \|(b_n)\|_{l^{p'}}.$$

Za $1 < p < \infty$ *ekvivalentno je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^{p'})^{\frac{1}{p'}}.$$

Napomena 1.1.14. *Uočimo da je za* $p = 2$ *i* $p' = 2$. *Iz prethodnog teorema dobivamo da vrijedi* $\|(a_n b_n)\|_{l^1} \leq \|(a_n)\|_{l^2} \|(b_n)\|_{l^2}$. *Navedena relacija naziva se Cauchy - Schwarzova nejednakost.*

Uvedimo i neke topološke pojmove potrebne za daljnja razmatranja.

Definicija 1.1.15. *Neka je X normiran prostor.*

(i) Ako je $x \in X$ *i* $\epsilon > 0$, *skup* $K(x, \epsilon) = \{y \in X : \|x - y\| < \epsilon\}$ *naziva se otvorena kugla oko x radijusa* ϵ.

(ii) Podskup $U \subset X$ *je otvoren ako za svaki* $x \in U$ *postoji* $\epsilon > 0$ *tako da je* $K(x, \epsilon) \subset U$.

(iii) Podskup $A \subset X$ *je zatvoren ako je* $X \backslash A$ *otvoren.*

(iv) Zatvarač skupa A, u oznaci $\overline{A}$, *je najmanji zatvoreni skup takav da sadrži čitav skup A.*

(v) Kažemo da je skup $A \subset X$ *gust u X ako vrijedi* $\overline{A} = X$.

Napomena 1.1.16. *U normiranom prostoru skup je zatvoren ako i samo ako sadrži limese svih konvergentnih nizova svojih članova.*

Definicija 1.1.17. *Neka je* $A \subseteq X$, *gdje je X normiran prostor. Kažemo da je A kompaktan ako svaki niz u A ima konvergentan podniz čiji limes je u A. Kažemo da je A relativno kompaktan ako je njegov zatvarač kompaktan skup.*

Propozicija 1.1.18. *Neka je Y potprostor normiranog prostora X. Tada vrijedi:*

(i) $\overline{Y}$ *je potprostor od X,*

(ii) ako je X potpun, onda je i $\overline{Y}$ *potpun,*

(iii) *ako je Y potpun, nužno je zatvoren,*

(iv) *ako je Y konačnodimenzionalan, Y je zatvoren.*

Definicija 1.1.19. *Kažemo da je normiran prostor X separabilan ako postoji prebrojiv skup $A \subseteq X$ takav da je $\overline{A} = X$. Također, kažemo da je tada A gust u X.*

Definicija 1.1.20. *Neka je X normiran prostor. Za skup A kažemo da je fundamentalan u X ako razapinje gust potprostor prostora X, odnosno ako vrijedi $\overline{\text{span}}A = X$.*

Definicija 1.1.21. *Neka je (x_n) niz vektora u unitarnom prostoru X. Kažemo da je (x_n) maksimalan ako vrijedi $\langle x, x_n\rangle = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0$.*

Propozicija 1.1.22. *U Hilbertovom prostoru H niz (x_n) je fundamentalan ako i samo ako je maksimalan.*

Primjer 1.1.23. *l^2 je separabilan Hilbertov prostor. Naime, ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ sa e_n označimo vektor $(0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$ gdje je na n-tom mjestu 1, skup svih konačnih linearnih kombinacija vektora $e_n, n \in \mathbb{N}$ s racionalnim koeficijentima je gust u l^2. Za $x = (x_n)$ i $y = (y_n)$ takve da su $x, y \in l^2$ skalarni produkt je dan s $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}$, a norma s $\|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$.*

Definicija 1.1.24. *Neka je (x_n) niz u normiranom prostoru X takav da za svaki $x \in X$ postoji jedinstveni prikaz u obliku $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$. Tada (x_n) nazivamo topološka baza prostora X.*

Napomena 1.1.25. *Uočimo da je svaki normiran prostor s topološkom bazom je separabilan.*

1.2 Ortonormirani nizovi vektora

Definicija 1.2.1. *Neka je (x_n) niz vektora u Hilbertovom prostoru H. Kažemo da je niz (x_n)*

(i) *ortogonalan ako za sve $n, m \in \mathbb{N}$ takve da $n \neq m$ vrijedi $\langle x_n, x_m\rangle = 0$,*

(ii) *ortonormiran ako je $\langle x_n, x_m\rangle = 1$ kada $n = m$ i $\langle x_n, x_m\rangle = 0$ kada $n \neq m$. Drugim riječima, niz je ortonormiran kada je ortogonalan i normiran.*

(iii) *ortonormirana baza za prostor H ako je (x_n) ortonormiran i topološka baza prostora H.*

Primjer 1.2.2. *Niz (e_n) takav da su vektori e_n definirani s $e_n = (0, 0 \dots, 1, 0 \dots)$ (pri čemu je jedinica na n-tom mjestu), $\forall n \in \mathbb{N}$, je topološka baza prostora l^2. Očito je taj niz i ortonormiran. Ovu bazu nazivamo standardna ortonormirana baza prostora l^2.*

Propozicija 1.2.3 (Besselova nejednakost)**.** *Neka je* (e_n) *ortonormiran niz u unitarnom prostoru* X*. Tada za sve vektore* $x \in X$ *vrijedi* $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq ||x||^2$.

Teorem 1.2.4. *Neka je* (x_n) *ortonormiran niz u Hilbertovom prostoru* H.

(i) Red $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ *konvergira ako i samo ako je* $(c_n) \in l^2$.

(ii) Ako $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ *konvergira tada je* $c_n = \langle x, x_n \rangle$*. Preciznije,* $(c_n) = (\langle x, x_n \rangle)$ *je jedinstveni izbor skalara takav da je* $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$.

Neka je (x_n) neki ortonormiran skup u Hilbertovom prostoru H. Uočimo da iz prethodnog teorema ne možemo zaključiti da svaki x možemo zapisati kao $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$. Naime, ukoliko x_n ne razapinje čitav prostor H, nije moguće svaki $x \in H$ prikazati na navedeni način.

Teorem 1.2.5. *Neka je* X *separabilan unitaran prostor i* (e_n) *ortonormiran niz u* X*. Tada je ekvivalentno:*

(i) (e_n) *je ortonormirana baza za* X,

(ii) (e_n) *je fundamentalan niz za* X,

(iii) $||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2, \forall x \in X$,

(iv) $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle, \forall x, y \in X$.

Napomena 1.2.6. *Tvrdnja (iii) iz prethodnog teorema,* $||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2, \forall x \in X$*, naziva se Parsevalova jednakost ili Plancherelova formula.*

Teorem 1.2.7. *Svaki separabilan unitaran prostor ima ortonormiranu bazu.*

1.3 Ograničeni linearni operatori na normiranim prostorima

Neka su X i Y normirani prostori. Operator je funkcija $T\colon X \to Y$. Radi jednostavnosti, djelovanje operatora T na vektor $x \in X$ ćemo pisati Tx.

Definicija 1.3.1. *Neka su* X *i* Y *normirani prostori. Operator* $T\colon X \to Y$ *je:*

(i) linearan ako $T(ax + by) = aTx + bTy, \forall x, y \in X, \forall a, b \in \mathbb{F}$,

(ii) injektivan ako vrijedi $Tx = Ty \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in X$,

(iii) surjektivan ako $\forall y \in Y, \exists x \in X$ *tako da* $Tx = y$,

(iv) *bijektivan ako je injektivan i surjektivan,*

(v) *neprekidan u točki $x \in X$ ako $x_n \to x$ u X povlači $Tx_n \to Tx$ u Y,*

(vi) *ograničen ako postoji $M > 0$ takav da vrijedi $\|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in X$. Skup svih ograničenih operatora označavamo s $\mathbb{B}(X,Y)$. Ako je $X = Y$, pišemo $\mathbb{B}(X)$.*

(vii) *odozdo ograničen ako postoji $m > 0$ takav da vrijedi $\|Tx\| \geq m\|x\|, \forall x \in X$.*

(viii) *izometričan ako vrijedi $\|Tx\| = \|x\|, \forall x \in X$.*

(ix) *funkcional ako je $Y = \mathbb{F}$.*

Propozicija 1.3.2. *Neka su X i Y normirani prostori, a $T: X \to Y$ linearan operator. Tada je ekvivalentno:*

(i) *T je neprekidan u nekoj točki $x_0 \in X$,*

(ii) *T je neprekidan na X,*

(iii) *T je uniformno neprekidan na X,*

(iv) *T je ograničen.*

Napomena 1.3.3. *Za svaki linearan operator $T: X \to Y$ jezgra $\operatorname{Ker} T$ i slika $\operatorname{Im} T$ su potprostori normiranih prostora X i Y.*

Uočimo da ograničenost operatora ne znači da je njegova slika ograničen skup. Naime, definicija ustvari govori kako je takav operator ograničen na zatvorenoj jediničnoj kugli.

S druge strane, jezgra ograničenog operatora je zatvoren potprostor prostora X.

Definicija 1.3.4. *Za $T \in \mathbb{B}(X,Y)$ definiramo $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$. Broj $\|T\|$ zovemo norma operatora T.*

Napomena 1.3.5. *Pokaže se da preslikavanje definirano u 1.3.4 zadovoljava uvjete definicije 1.1.1 što opravdava naziv norma operatora.*

Propozicija 1.3.6. *Neka su X i Y normirani prostori. Ako je operator $T \in \mathbb{B}(X,Y)$ odozdo ograničen i ako je X Banachov prostor, onda je slika operatora T zatvoren potprostor prostora Y.*

Propozicija 1.3.7. *Neka je X normiran prostor i $T \in \mathbb{B}(X)$. Ekvivalentno je:*

(i) *T je odozdo ograničen operator,*

(ii) *T je injektivan i $T^{-1}: \operatorname{Im} T \to X$ je ograničen operator,*

(iii) ne postoji niz jediničnih vektora (x_n) *u* X *takav da je* $\lim_{n\to\infty} Tx_n = 0$.

Definicija 1.3.8. *Kažemo da su normirani prostori* X *i* Y *izomorfni ako postoji bijektivan linearan operator* $T\colon X \to Y$ *takav da su* T *i* T^{-1} *ograničeni.*

Ako je T *i izometrija, kažemo da su prostori izometrično izomorfni.*

Napomena 1.3.9. *Primijetimo da za izometričan operator* T *vrijedi* $\|T\| = 1$. *Također, izometričan operator je nužno injekcija.*

Napomena 1.3.10. *Prisjetimo se tvrdnje da svaki separabilan unitaran prostor ima ortonormiranu bazu. Ako je* X *unitaran, separabilan i beskonačnodimenzionalan, onda je izometrički izomorfan s nekim gustim potprostorom od* l^2. *Posebno, svaki separabilan, beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor je izometrički izomorfan s* l^2.

Dualni prostor i slaba konvergencija

Definicija 1.3.11. *Neka je* X *normiran prostor. Prostor svih ograničenih linearnih funkcionala sa prostora* X *naziva se dualni prostor i označava s* X'.

Teorem 1.3.12. *Dualni prostor* X' *normiranog prostora* $X \neq \{0\}$ *je netrivijalan i Banachov.*

Neka je M proizvoljan pravi potprostor normiranog prostora X. Ako je f ograničen linearan funkcional na M, moguće ga je proširiti do ograničenog linearnog funkcionala na čitavom prostoru X. Štoviše, pri navedenom proširenju norma operatora ostaje ista. Taj važan rezultat teorije normiranih prostora je dan sljedećim teoremom.

Teorem 1.3.13 (Hahn - Banachov teorem za normirane prostore)**.** *Neka je* M *pravi potprostor normiranog prostora* X. *Za svaki ograničen linearan funkcional* $f_0 \in M'$ *postoji ograničen linearan funkcional* $f \in X'$ *takav da je* $f\big|_M = f_0$ *i vrijedi* $\|f\| = \|f_0\|$.

Promatrajmo nizove vektora na koje djeluju ograničeni linearni funkcionali.

Definicija 1.3.14. *Kažemo da niz vektora* (x_n) *u normiranom prostoru* X *slabo konvergira k vektoru* $x \in X$ *ako za svaki* $f \in X'$ *vrijedi da* $f(x_n)$ *konvergira prema* $f(x)$.

Prisjetimo se definicije konvergencije vektora 1.1.6. Kako svaki niz vektora koji konvergira po normi nužno konvergira slabo, konvergenciju iz definicije 1.1.6 nazivamo jaka konvergencija. Slaba konvergencija, jasno, ne povlači jaku.

Napomena 1.3.15. *U Hilbertovim prostorima, svaki ograničen niz ima slabo konvergentan podniz.*

Osim uniformne konvergencije, možemo definirati još dvije konvergencije ograničenih operatora.

Definicija 1.3.16. *Neka je X Banachov, a Y normiran prostor. Niz $(T_n) \in \mathbb{B}(X, Y)$ konvergira*

(i) jako ako $\forall x \in X$ vrijedi $\|T_n x - Tx\| \to 0$ kada $n \to \infty$,

(ii) slabo ako $\forall f \in X', \forall x \in X$ vrijedi $|f(T_n x) - f(Tx)| \to 0$ kad $n \to \infty$.

Napomena 1.3.17. *Ako je X Banachov, a Y normiran prostor te $(T_n) \in \mathbb{B}(X, Y)$ niz operatora takav da za svaki $x \in X$ postoji $\lim_{n\to\infty} T_n x$. Tada je operator definiran s $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ ograničen.*

Napomena 1.3.18. *Kao i u slučaju jake konvergencije, svaki slabo konvergentan niz vektora (x_n) u normiranom prostoru je ograničen. Također, svaki (jako ili slabo) konvergentan niz operatora je ograničen.*

Inverz ograničenog operatora

Neka su X i Y normirani prostori te neka je $T : X \to Y$ linearan, bijektivan i ograničen operator. Očito inverzni operator T^{-1} postoji te je linearan i bijektivan. Međutim, inverzni operator općenito nije ograničen.

Teorem 1.3.19 (Teorem o inverznom preslikavanju)**.** *Ako su X i Y Banachovi prostori, a $T \in \mathbb{B}(X, Y)$ bijekcija, onda je i T^{-1} ograničen operator.*

Definicija 1.3.20. *Ograničen operator je regularan ako je bijektivan te ako je njegov inverz ograničen.*

Navedeni teorem je posljedica teorema o otvorenom preslikavanju koji je, pak, ekvivalentan teoremu o zatvorenom grafu. Navodimo ova dva bitna rezultata.

Teorem 1.3.21 (Teorem o otvorenom preslikavanju)**.** *Ako su X i Y Banachovi prostori, a $T \in \mathbb{B}(X, Y)$ surjekcija, onda je T otvoreno preslikavanje, odnosno za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ je slika $T(U) \subseteq Y$ također otvoren skup.*

Teorem 1.3.22 (Teorem o zatvorenom grafu)**.** *Neka su X i Y Banachovi prostori i $T : X \to Y$ linearan operator sa zatvorenim grafom. Tada je T ograničen.*

U situacijama kada operator nije bijektivan, odnosno invertibilan u strogom smislu poželjno je pronaći generalizaciju inverznog operatora.

Neka su H i K Hilbertovi prostori. Promatrajmo ograničen linearan operator $T : H \to K$ takav da je njegova slika zatvorena. Uočimo da je tada i operator T_0 definiran sa $T_0 = T\big|_{(\operatorname{Ker} T)^\perp} : (\operatorname{Ker} T)^\perp \to \operatorname{Im} T$ linearan i ograničen. T_0 je i bijektivan. Injektivnost dobivamo iz činjenice da je $\operatorname{Ker} T \cap (\operatorname{Ker} T)^{\perp} = \{0\}$, a kako bismo dokazali surjektivnost pretpostavimo da je $y \in \operatorname{Im} T$, odnosno da postoji $x \in H$ takav da je $Tx = y$. Sada po Rieszovom teoremu o projekciji 1.3.35, vektor x možemo prikazati kao $x = x_1 + x_2$ gdje je $x_1 \in \operatorname{Ker} T$, a $x_2 \in (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ pa dobivamo $T_0 x_2 = T x_2 = T(x_1 + T x_2) = Tx = y$. Drugim riječima $\operatorname{Im} T_0 = \operatorname{Im} T$ pa je T_0 surjekcija. Uočimo da je $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ zatvoren potprostor potpunog prostora H. Po pretpostavci je i $\operatorname{Im} T$ zatvoren potprostor pa su, po 1.1.18, $\operatorname{Im} T$ i $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ Hilbertovi prostori. Sada je, po teoremu o inverznom preslikavanju, operator $T_0^{-1} \colon \operatorname{Im} T \to (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ ograničen. Definirajmo operator

$$T^{\dagger} y = \begin{cases} T_0^{-1} y & \text{ako } y \in \operatorname{Im} T, \\ 0, & \text{inače} \end{cases}, \forall y \in K.$$

Navedeni operator je očito ograničen te vrijedi $TT^{\dagger} y = y, \forall y \in \operatorname{Im} T$. Ovako definiran operator $T^{\dagger}$ je svojevrsan desni inverz operatora T.

Definicija 1.3.23. *Neka su H i K Hilbertovi prostori te neka je operator $T \in \mathbb{B}(H, K)$ takav da je $\operatorname{Im} T$ zatvorena. Operator $T^{\dagger}$ iz prethodnog razmatranja nazivamo generalizirani inverz (pseudoinverz) operatora T.*

Teorem 1.3.24. *Generalizirani inverz (pseudoinverz) ograničenog operatora T sa zatvorenom slikom je jedinstveni operator za koji vrijedi $\operatorname{Ker} T^{\dagger} = (\operatorname{Im} T)^{\perp}$, $\operatorname{Im} T^{\dagger} = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ i $TT^{\dagger} x = x, x \in \operatorname{Im} T$.*

Adjungirani operator

Teorem 1.3.25. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i $T \in \mathbb{B}(H, K)$. Tada postoji jedinstven operator $T^* \in \mathbb{B}(K, H)$ takav da je $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle, \forall x \in H, \forall y \in K$. Vrijedi $(T^*)^* = T$, $\|T^*\| = \|T\|$ i $\|T^* T\| = \|T\|^2$. Ako su T_1 i T_2 ograničeni operatori s H na K, za sve $a, b \in \mathbb{F}$ vrijedi $(aT_1 + bT_2)^* = \overline{a} T_1^* + \overline{b} T_2^*$. Operator T^* nazivamo hermitski adjungiran operator operatora T.*

Definicija 1.3.26. *Neka je X unitaran prostor i $T \in \mathbb{B}(X)$ takav da postoji $T^* \in \mathbb{B}(X)$. Kažemo da je operator T:*

(i) hermitski ako vrijedi $T = T^*$,

(ii) normalan ako vrijedi $TT^* = T^* T$,

(iii) unitaran ako vrijedi $TT^* = T^* T = I$.

Propozicija 1.3.27. *Neka je $T \in \mathbb{B}(H, K)$ gdje su H i K Hilbertovi prostori. Tada je $\operatorname{Ker} T = \overline{\operatorname{Im} T^*}^{\perp}$, $\operatorname{Ker} T^* = \overline{\operatorname{Im} T}^{\perp}$, $\operatorname{Ker} T^{*\perp} = \overline{\operatorname{Im} T}$ i $\operatorname{Ker} T^{\perp} = \overline{\operatorname{Im} T^*}$.*

Lema 1.3.28. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i $T \in \mathbb{B}(H, K)$. Operator T ima zatvorenu sliku ako i samo ako T^* ima zatvorenu sliku. Također, T je surjekcija ako i samo ako je T^* ograničen odozdo.*

Definicija 1.3.29. *Neka je H Hilbertov prostor. Operator $T \in \mathbb{B}(H)$ je pozitivno semidefinitan, u oznaci $T \geq 0$, ako je hermitski te ako vrijedi $\langle Tx, x\rangle \geq 0, \forall x \in H$.*

Teorem 1.3.30. *Neka je H Hilbertov prostor i $T \in \mathbb{B}(H)$ pozitivno semidefinitan. Tada postoji jedinstven operator $V \in \mathbb{B}(H)$ takav da je $V \geq 0$ i $V^2 = T$. Operator V nazivamo pozitivnim drugim korijenom operatora T i pišemo $V = \sqrt{T}$.*

Ortogonalna projekcija

Definicija 1.3.31. *Neka je $M \subseteq X$ pri čemu je X unitaran prostor. S $M^\perp = \{x \in X : \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in M\}$ je definiran ortogonalni komplement skupa M.*

Napomena 1.3.32. *Ako je X unitaran prostor, a $M \subseteq X$, onda je $M^\perp$ zatvoren potprostor prostora X.*

Definicija 1.3.33. *Neka je M potprostor unitarnog prostora X. Operator $P : X \to X$ takav da vrijedi $Px = 0$ za $x \in M^\perp$, a $Px = x$ za $x \in M$, zove se ortogonalna projekcija.*

Napomena 1.3.34. *Ortogonalna projekcija P je ograničen linearan operator takav da vrijedi $P^2 = P$ i, kada $M \neq \{0\}$, $\|P\| = 1$. Kada je $M = \{0\}$, onda očito vrijedi $P = 0$.*

Teorem 1.3.35 (Rieszov teorem o projekciji)**.** *Neka je H Hilbertov prostor te neka je $M \leq H$ zatvoren potprostor. Svaki $x \in X$ ima jedinstven prikaz oblika $x = a + b$ gdje je $a \in M$, a $b \in M^\perp$.*

Napomena 1.3.36. *Neka je H Hilbertov prostor. Općenito, suma dva zatvorena potprostora M i L prostora H nije nužno zatvoren prostor. Ako vrijedi $M \perp L$, onda je $M + L$ zatvoren potprostor. Jednako tako, ako je M konačnodimenzionalan, prostor $M + L$ je zatvoren.*

Navedimo nekoliko korisnih rezultata vezanih uz generalizirani inverz $T^\dagger$ ograničenog operatora T takvog da je $\operatorname{Im} T$ zatvoren skup.

Lema 1.3.37. *Neka su H i K Hilbertovi prostori, a $T : H \to K$ ograničen operator zatvorene slike.*

(i) Ortogonalna projekcija prostora K na $\operatorname{Im} T$ dana je s $TT^\dagger$.

(ii) Ortogonalna projekcija prostora H na $\operatorname{Im} T^\dagger$ dana je s $T^\dagger T$.

(iii) *Vrijedi* $(T^*)^\dagger = (T^\dagger)^*$.

(iv) *Na* $\operatorname{Im} T$, *operator* $T^\dagger$ *dan je s* $T^\dagger = T^*(TT^*)^{-1}$.

Spektar ograničenog operatora

Definicija 1.3.38. *Neka je H Hilbertov prostor i $T \in \mathbb{B}(H)$.*

(i) *Spektralni radijus operatora T je broj* $\nu(T) = \inf\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) *Broj $\lambda \in \mathbb{C}$ je regularna točka od T ako je $\lambda I - T$ regularan operator u $\mathbb{B}(H)$.*

(iii) *Rezolventni skup, u oznaci $\rho(H)$, je skup svih regularnih točaka operatora.*

(iv) *Spektar operatora T je skup $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(H)$.*

Napomena 1.3.39. *Vrijedi $\nu(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ što opravdava naziv spektralni radijus.*

Definicija 1.3.40. *Neka je $T \in \mathbb{B}(X)$ i X Banachov prostor.*

(i) *Točkovni spektar operatora T je skup*

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \textit{ nije injekcija }\}.$$

(ii) *Rezidualni spektar operatora T je skup*

$$\sigma_r(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \textit{ je injekcija, ali } \overline{\operatorname{Im}(\lambda I - T)} \neq X\right\}.$$

(iii) *Kontinuirani spektar operatora T je skup*

$$\sigma_c(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \textit{ je injekcija, } \overline{\operatorname{Im}(\lambda I - T)} = X, \textit{ ali } \operatorname{Im}(\lambda I - T) \neq X\right\}.$$

Napomena 1.3.41. *Elemente točkovnog spektra operatora nazivamo svojstvenim vrijednostima.*

Primjer 1.3.42. *Neka je (e_n) ortonormirana baza Hilbertovog prostora H. Formulom $S(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_{n+1}, \forall x \in H$, definiramo operator jednostranog pomaka $S \in \mathbb{B}(l^2)$. Operator S je linearan i izometričan. Vrijedi $\sigma_p(S) = \emptyset$, $\sigma_r(S) = K(0,1)$, $\sigma_c(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ te $\sigma(S) = \overline{K(0,1)}$.*

Kompaktni operatori i operatori konačnog ranga

Definicija 1.3.43. *Neka je $T\colon X \to Y$ linearan operator, a X i Y normirani prostori. Kažemo da je T kompaktan ako zatvorenu jediničnu kuglu preslikava u relativno kompaktan skup u Y. Skup kompaktnih operatora s X u Y označavamo s $\mathbb{K}(X, Y)$.*

Svaki kompaktni operator je ograničen. Drugim riječima, vrijedi $\mathbb{K}(X, Y) \subseteq \mathbb{B}(X, Y)$. Štoviše, kompaktni operatori čine potprostor prostora ograničenih operatora.

Propozicija 1.3.44. *Neka su X i Y normirani prostori te neka je $T\colon X \to Y$ kompaktan operator. Tada za svaki niz (x_n) takav da slabo konvergira u $x \in X$ nioz (Tx_n) jako konvergira u $Tx \in Y$.*

Napomena 1.3.45. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori. Svaki zatvoren potprostor $M \in Y$ u slici kompaktnog operatora $T \in \mathbb{K}(X, Y)$ je konačnodimenzionalan.*

Definicija 1.3.46. *Neka su X i Y normirani prostori. Za ograničen operator $T \in \mathbb{B}(X, Y)$ takav da je $\dim \operatorname{Im} T < \infty$ kažemo da je operator konačnog ranga. Skup svih operatora konačnog ranga označavamo s $\mathbb{F}(X, Y)$.*

Napomena 1.3.47. *Vrijedi $\mathbb{F}(X, Y) \subseteq \mathbb{K}(X, Y)$.*

Propozicija 1.3.48. *Neka je H Hilbertov prostor. Tada je $T \in \mathbb{K}(H)$ ako i samo ako $T^* \in \mathbb{K}(H)$. Također, $T \in \mathbb{F}(H)$ ako i samo ako $T^* \in \mathbb{F}(H)$.*

1.4 Konvergencija redova i sumabilnost

Definicija 1.4.1. *Kažemo da je uređen par $(A, \leq)$ usmjeren skup ako je A neprazan skup, a $\leq$ binarna relacija definirana na A takva da vrijedi:*

(i) $\alpha \leq \alpha, \forall \alpha \in A$,

(ii) $\alpha \leq \beta$ *i* $\beta \leq \gamma$ *povlače* $\alpha \leq \gamma$,

(iii) $\forall \alpha, \beta \in A, \exists \gamma \in A$ *takav da* $\alpha \leq \gamma$ *i* $\beta \leq \gamma$.

Definicija 1.4.2. *Neka je $(A, \leq)$ usmjeren skup i X normiran prostor. Preslikavanje $x\colon A \to X$ zove se hiperniz u X i označava $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$. Kažemo da hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ u X konvergira ako postoji $x \in X$ takav da*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha_0 \in A \text{ tako da } \alpha_0 \leq \alpha \Rightarrow \|x - x_\alpha\| < \epsilon.$$

Pišemo $\lim_{\alpha \in A} x_\alpha = x$.

Hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ *je Cauchyjev ako vrijedi*

$$\forall\epsilon > 0, \exists\alpha_0 \in A \text{ tako da } \alpha_0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \Rightarrow \|x_{\alpha_2} - x_{\alpha_1}\| < \epsilon.$$

Napomena 1.4.3. *U normiranim prosotrima, svaki konvergentan hiperniz je Cauchyjev. U Banachovim prostorima vrijedi i obratno, svaki Cauchyjev hiperniz je konvergentan.*

Definicija 1.4.4. *Neka je* X *normiran prostor,* J *proizvoljan indeksni skup, a* x *funkcija s* J *na* X*. S* $\mathcal{F}$ *označimo familiju svih konačnih podskupova od* J*. Ako za* $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ *vrijedi* $F_1 \subseteq F_2$ *pisat ćemo* $F_1 \leq F_2$ *pa je, dakle,* $(\mathcal{F}, \leq)$ *je usmjeren skup. Familija* $\{x(j) \colon j \in J\}$ *je sumabilna i njezina suma je vektor* $x_0 \in X$ *ako je* x_0 *limes hiperniza* $(s_F)_{F\in\mathcal{F}}$*, gdje je* $s_F = \sum_{j\in\mathcal{F}} x_j$*. Pišemo* $x_0 = \sum_{j\in J} x(j)$*.*

Propozicija 1.4.5. *Neka je* X *Banachov prostor i* $x\colon J \to X$*. Ako je familija* $\{\|x_j\| \colon j \in J\}$ *sumabilna, sumabilna je i familija* $\{x_j \colon j \in J\}$ *u* X *te vrijedi* $\|\sum_{j\in J} x_j\| \leq \sum_{j\in J} \|x_j\|$*.*

Definicija 1.4.6. *Neka je* X *Banachov prostor, a* (x_n) *niz u* X*. Kažemo da red* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konvergira bezuvjetno u* X *ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(x_n)$ *konvergira u* X *za svaku permutaciju* σ *skupa* $\mathbb{N}$*.*

Teorem 1.4.7. *U Banachovom prostoru red koji konvergira apsolutno, konvergira i bezuvjetno.*

Teorem 1.4.8. *Neka je* X *Banachov prostor i* (x_n) *niz u* X*. Familija* $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ *sumabilna ako i samo ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konvergira bezuvjetno.*

Poglavlje 2

Besselovi nizovi i bazni okviri

Osnovno svojstvo topološke baze (x_n) Hilbertovog i, općenitije, Banachovog prostora H jest da za svaki $x \in H$ postoje jedinstveni koeficijenti c_n takvi da vrijedi

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n.$$

Ukoliko pak (x_n) označava bazni okvir, za svaki $x \in H$ također postoji navedeni zapis, no odgovarajući koeficijenti c_n pri tom nisu nužno jedinstveni. Bazni okviri, dakle, predstavljaju reprodukcijske sisteme općenitije od baza. U ovom poglavlju izložit ćemo njihova osnovna svojstva.

S H ćemo označavati separabilan Hilbertov prostor.

2.1 Osnove

Definicija 2.1.1. *Niz (x_n) u H naziva se bazni okvir (eng. frame) prostora H ako postoje konstante $A, B > 0$ takve da vrijedi*

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \forall x \in H. \tag{2.1}$$

Uočimo da konstante iz dane definicije nisu jedinstvene. Optimalne konstante A i B sa navedenim svojstvom nazivamo granice baznog okvira.

Napomena 2.1.2. *Neka je (x_n) bazni okvir u H. Iz 2.1 slijedi da red $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2$ apsolutno konvergira. U Banachovim prostorima svaki apsolutno konvergentan red konvergira i bezuvjetno. Drugim riječima, svaka permutacija baznog okvira opet je bazni okvir.*

Definicija 2.1.3. *Kažemo da je bazni okvir napet ako su granice baznog okvira A i B jednake. Posebno, ako A = B = 1, bazni okvir nazivamo Parsevalovim.*

Bazni okvir je egzaktan ukoliko niz dobiven uklanjanjem bilo kojeg njegovog elementa više nije bazni okvir za H.

Napetost i egzaktnost baznih okvira nisu međusobno uvjetovana svojstva. Pogledajmo sljedeće primjere.

Primjer 2.1.4. *Neka je H separabilan Hilbertov prostor, a (e_n) ortonormirana baza za H.*

- *Po 1.2.5 svaka ortonormirana baza je Parsevalov bazni okvir. Također, svaka ONB je i egzaktan bazni okvir. Naime, za proizvoljan m imamo $\sum_{n\neq m} |\langle e_m, e_n\rangle|^2 = 0$ pa $(e_n)_{n\neq m}$ ne može biti bazni okvir;*
- $(e_1, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \dots)$ *je Parsevalov, neegzaktni bazni okvir;*
- $(e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, \dots)$ *je napet ($A = B = 2$), neegzaktan bazni okvir za H;*
- $(2e_1, e_2, e_3, \dots)$ *je egzaktan bazni okvir koji nije napet* $(A = 1, B = 2)$

Propozicija 2.1.5. *Ako je (x_n) bazni okvir u H tada je fundamentalan niz u H.*

Dokaz. Neka $x \in H$ takav da $\langle x, x_n\rangle = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi $A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 = 0$. Dakle, niz (x_n) je maksimalan pa, po 1.1.22, i fundamentalan. □

Napomena 2.1.6. *Obrat prethodne propozicije ne vrijedi. Primjerice, $(e_1, \frac{e_2}{2}, \frac{e_3}{3}, \dots)$ je ortogonalan i fundamentalan niz, ali nije bazni okvir. Naime, lako se vidi da ne postoji donja granica baznog okvira u 2.1. S druge strane, navedeni niz jest baza. Dakle, postoje baze koje nisu bazni okviri. Jasno, nisu ni svi bazni okviri baze.*

Primjer 2.1.7. *Neka je $I \subset \mathbb{N}$ pravi podskup i (e_n) ONB za H. Po prethodnoj propoziciji, $(e_k)_{k\in I}$ ne može biti bazni okvir za H, no očito je bazni okvir za $\overline{span}(e_k)_{k\in I}$.*

Ranije smo uočili da u svakom separabilnom Hilbertovom prostoru H postoji bazni okvir, budući da H ima ortonormiranu bazu. Iz prethodne propozicije je jasno da skup svih konačnih linearnih kombinacija elemenata baznog okvira (x_n) s racionalnim koeficijentima čini gust skup u H. Stoga je naše razmatranje nužno ograničeno na separabilne Hilbertove prostore.

Napomena 2.1.8. *Budući da razapinje gust podskup beskonačnodimenzionalnog prostora, svaki bazni okvir beskonačnodimenzionalnog prostora mora imati beskonačno mnogo elemenata. Drugim riječima, konačan niz vektora $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ može biti bazni okvir samo za konačnodimenzionalni vektorski prostor. Bazni okviri za konačnodimenzionalne prostore su, ustvari, sustavi izvodnica. Naime, po prethodnoj propoziciji, svaki bazni okvir*

$(x_1, x_2, \dots, x_m)$ je maksimalan niz pa vrijedi $(span\{x_1, x_2, \dots, x_m\})^\perp = 0$. Vrijedi i obrat, svaki sustav izvodnica u konačnodimenzionalnom prostoru je bazni okvir za taj prostor. Kako bismo to dokazali, označimo s $\mathbb{F}^n$ dani prostor, s $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ sustav izvodnica za $\mathbb{F}^n$, a s $U\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ operator definiran formulom $Ux = (\langle x, x_1\rangle, \langle x, x_2\rangle, \dots, \langle x, x_n\rangle)$. Neka je $Ux = 0$. Tada je $\langle x, x_i\rangle = 0, \forall i = 1, 2, \dots, m$. Uređena m-torka $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ je sustav izvodnica pa mora biti $x = 0$. Dakle, U je injekcija pa je operator $U_0\colon \mathbb{F}^n \to \operatorname{Im} U$ bijekcija i postoji ograničeni inverz $V\colon \operatorname{Im} U \to \mathbb{F}^n$. Neka je $M > 0$ takav da vrijedi $\|VU_0x\|^2 \leq M\|U_0x\|^2, \forall x \in \mathbb{F}^n$. Sada imamo $\frac{1}{M}\|x\|^2 \leq \|U_0x\|^2 = \sum_{i=1}^m |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq \sum_{i=1}^m \|x\|^2\|x_n\|^2, \forall x \in \mathbb{F}^n$. Ako označimo $A = \frac{1}{M}$ i $B = \sum_{i=1}^m \|x_i\|^2$, dobivamo tvrdnju.

Definicija 2.1.9. *Kažemo da je niz (x_n) u H Besselov ako vrijedi $\sum_{n=1}^\infty |\langle x, x_n\rangle|^2 < \infty, \forall x \in H$.*

Uočimo, svaki bazni okvir je Besselov niz, dok obratna tvrdnja ne vrijedi.

Neka je (x_n) proizvoljan niz u H. Za $x \in H$ definiramo linearno preslikavanje $Ux = (\langle x, x_1\rangle, \langle x, x_2\rangle, \langle x, x_3\rangle, \dots)$. Općenito, niz Ux ne mora pripadati prostoru l^2, no ukoliko je polazni niz Besselov tada je linearno preslikavanje U s H u l^2 nužno neprekidno pa, po 1.3.2, i ograničeno. Taj rezultat formiramo u sljedeću propoziciju.

Propozicija 2.1.10. *Ako je (x_n) Besselov niz, operator U je neprekidno preslikavanje s H u l^2. Drugim riječima, postoji konstanta $B > 0$ za $\sum_{n=1}^\infty |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \forall x \in H$ te vrijedi $\|U\| < \sqrt{B}$.*

Dokaz. Po teoremu o zatvorenom grafu 1.3.22 dovoljno je pokazati da operator U ima zatvoren graf. Neka je $(y, (c_n)) = \lim_{i\to\infty}(y_i, Uy_i)$ te fiksirajmo indeks m. Vrijedi $|c_m - \langle y_i, x_m\rangle| \leq (\sum_{n=1}^\infty |c_n - \langle y_i, x_n\rangle|^2)^{\frac{1}{2}} = \|(c_n) - Uy_i\|$. Kada $i \to \infty$ vidimo da $\|(c_n) - Uy_i\| \to \infty$, odakle dobivamo $c_m = \lim_{i\to\infty}\langle y_i, x_m\rangle = \langle y, x_m\rangle$. Budući da je m bio proizvoljan, vrijedi $(c_n) = Uy$. Za $x \in H$ je $\|Ux\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2$ pa vidimo da vrijedi $\|U\| \leq B^{\frac{1}{2}}$. □

Napomena 2.1.11. *Konstantu B iz prethodne propozicije nazivamo ograda Besselovog niza (x_n), a operator*

$$U\colon H \to l^2, Ux = (\langle x, x_n\rangle)$$

operator analize niza (x_n).

Sljedeća propozicija daje nam dovoljne uvjete da niz bude Besselov.

Propozicija 2.1.12. *Ako je (x_n) niz u H takav da je red $\sum_{n=1}^\infty c_n x_n$ dobro definiran za svaki $(c_n) \in l^2$, onda je (x_n) Besselov niz.*

Dokaz. Neka je $T : l^2 \to H$ definiran s $T(c_n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$. Uočimo da je T dobro definirano linearno preslikavanje. Za svaki $i \in \mathbb{N}$ definirajmo operatore $T_i \in \mathbb{B}(l^2, H)$ formulom $T_i(c_n) = \sum_{k=1}^{i} c_k x_k$. Vrijedi $\lim_{i\to\infty} T_i(c_n) = T(c_n), \forall (c_n) \in l^2$. Sada je po 1.3.17 T ograničen pa postoji ograničeni operator T^* takav da $\|T^*\| = \|T\|$.

Neka je $\sqrt{B} > 0$ takav da $\|T\| = \sqrt{B}$, odnosno $\|T^*\| = \sqrt{B}$. Vrijedi $\langle T^*x, e_i\rangle = \langle x, Te_i\rangle = \langle x, x_i\rangle, \forall x \in H, \forall i \in \mathbb{N}$, odakle dobivamo $T^*x = (\langle x, x_i\rangle) \in l^2$. Dakle, imamo $\|T^*x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, x_i\rangle|^2 < \infty$ te pa je (x_i) Besselov niz, a kako je $\|T^*x\|^2 \leq B\|x\|^2$, ograda niza (x_i) je B. □

Vrijedi i obrat prethodne propozicije.

Propozicija 2.1.13. *Neka je (x_n) Besselov niz s ogradom B, a U pridruženi operator analize. Tada za svaki niz $(c_n) \in l^2$ red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira bezuvjetno. Operator $U^* : l^2 \to H$ dan je formulom $U^*(c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$. Operator U^* nazivamo operator sinteze niza (x_n).*

Dokaz. Kako bismo pokazali bezuvjetnu konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ prvo uočimo da je, zbog 1.4.3 i 1.4.8, dovoljno pokazati da je hiperniz $\sum_{n\in F} c_n x_n$ konvergentan, odnosno Cauchyjev, pri čemu smo s F označili proizvoljan konačan podskup skupa $\mathbb{N}$. Koristeći Cauchy- Schwarzovu nejednakost u prostoru $\mathbb{C}^{|F|}$ dobivamo:

$$\|\sum_{n\in F} c_n x_n\|^2 = \sup_{\|y\|=1} |\langle \sum_{n\in F} c_n x_n, y\rangle|^2 = \sup_{\|y\|=1} |\sum_{n\in F} c_n \langle x_n, y\rangle|^2 \leq$$

$$\sup_{\|y\|=1} \{(\sum_{n\in F} |c_n|^2)(\sum_{n\in F} |\langle x_n, y\rangle|^2)\} \leq \sup_{\|y\|=1} \{B\|y\|^2 \sum_{n\in F} |c_n|^2\} = B \sum_{n\in F} |c_n|^2.$$

Budući da je apsolutno konvergentan, $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ je i bezuvjetno konvergentan, a time je i familija $\{x_n : n \in F\}$ sumabilna. Sada zbog 1.4.3 i dokazane nejednakosti $\| \sum_{n\in F} c_n x_n\|^2 \leq B \sum_{n\in F} |c_n|^2$ slijedi tvrdnja.

$U^* : l^2 \to H$ je dobro definirano i neprekidno preslikavanje. Potrebno je samo provjeriti danu formulu. Za $x \in H$ i $(c_n) \in l^2$ računamo

$$\langle x, U^*(c_n)\rangle = \langle Ux, (c_n)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle \overline{c_n} = \langle x, \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\rangle.$$

Dakle, vrijedi $U^*(c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$. □

Napomena 2.1.14. *Iz prethodne propozicije dobivamo da vrijedi $U^* e_n = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, gdje (e_n) označava standardnu ortonormiranu bazu za l^2, (x_n) Besselov niz, a U operator analize niza (x_n) .*

Teorem 2.1.15. *Ako je (x_n) bazni okvir za H, pridruženi operator analize U je ograničen odozdo (pa time i injekcija), a U^* je surjekcija. Obratno, ako je $T \in \mathbb{B}(l^2, H)$ surjekcija i (e_n) standardna ortonormirana baza za l^2, tada je niz dobiven djelovanjem operatora T na (e_n), $Te_n = x_n, n \in \mathbb{N}$, bazni okvir za H te se njegov operator analize podudara s T^*.*

Dokaz. Neka je (x_n) bazni okvir. Ograničenost odozdo operatora U slijedi direktno iz 2.1, dok surjektivnost operatora U^* dobivamo iz 1.3.28.

Pretpostavimo sada da je $T \in \mathbb{B}(l^2, H)$, $Te_n = x_n, n \in \mathbb{N}$, surjekcija. Tada je, po 1.3.25, T^* ograničen te znamo $T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T^*x, e_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Te_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle e_n$. Po 1.3.28 T^* je i odozdo ograničen. Dakle, postoje konstante $A, B > 0$ takve da $A\|x\|^2 \leq \|T^*x\|^2 \leq B\|x\|^2, \forall x \in H$. Time smo dokazali da je (x_n) bazni okvir za H. Kako vrijedi $T^*x = (\langle x, x_n\rangle) \in l^2$, T^* je operator analize za (x_n). □

Označimo s (e_n) standardnu ortonormiranu bazu za l^2, s (f_n) ortonormiranu bazu za separabilan Hilbertov prostor K, a s $T \in \mathbb{B}(K, H)$ surjektivan operator. Neka je (x_n) takav da $x_n = Tf_n, n \in \mathbb{N}$. Prema 1.3.10 postoji $V \in \mathbb{B}(l^2, K)$ unitarni operator takav da je $Ve_n = f_n, n \in \mathbb{N}$. Uočimo da vrijedi $x_n = TVe_n, \forall n \in \mathbb{N}$, te da je TV surjekcija. Po prethodnom teoremu, slijedi da (x_n) mora biti bazni okvir za prostor H. No vrijedi i obrat te tvrdnje. Naime, ako je (x_n) bazni okvir, a U^* pridruženi operator sinteze, prema teoremu 2.1.15, U^* je surjekcija. Nadalje, po napomeni 2.1.14 vrijedi $U^*e_n = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Ova razmatranja formiramo u sljedeći korolar.

Korolar 2.1.16. *Niz (x_n) u H je bazni okvir za H ako i samo ako postoje separabilan Hilbertov prostor K i surjektivan operator $T \in \mathbb{B}(K, H)$ takvi da $Tf_n = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, gdje je (f_n) ortonormirana baza u K.*

Direktno iz prethodnog teorema dobivamo sljedeći rezultat.

Korolar 2.1.17. *Neka su H i K Hilbertovi prostori, (x_n) bazni okvir na H, a T surjektivan, ograničen operator s H u H_1. Tada je niz (y_n) takav da vrijedi $y_n = Tx_n, \forall n \in \mathbb{N}$ bazni okvir za H_1.*

Prethodni korolari daju nam osnovno svojstvo baznih okvira, svojstvo rekonstrukcije. Naime, svaki bazni okvir možemo dobiti djelovanjem nekog surjektivnog, ograničenog operatora na ortonormiranu bazu. Dakle, ukoliko imamo bazni okvir na H (x_n), možemo pronaći Hilbertov prostor H_1 te surjektivan $T \in \mathbb{B}(H_1, H)$ takav da $Tf_n = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, gdje je (f_n) ortonormirana baza prostora H_1. Tada za $x \in H$ te $y \in H_1$ takav da $Ty = x$ vrijedi $x = Ty = T(\sum_{n=1}^{\infty} \langle y, f_n\rangle f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, f_n\rangle Tf_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, f_n\rangle x_n$. Dobivamo $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x)x_n$ pri čemu je $\lambda_n(x) = \langle y, f_n\rangle, \forall n \in \mathbb{N}$ i $(\lambda_n(x)) \in l^2$. Koeficijente $\lambda_n(x)$ nazivamo rekonstrukcijski koeficijenti. Svaki $x \in H$ možemo, dakle, prikazati kao beskonačnu linearnu kombinaciju elemenata baznog okvira. Stoga je prirodno pitati se kakav je odnos baza i baznih okvira.

Primijetimo da operator T iz prethodnih korolara općenito nije injekcija, pa, za razliku od baza, rekonstrukcijski koeficijenti baznih okvira nisu jedinstveno određeni vektorom x.

Definicija 2.1.18. *Operator baznog okvira (x_n) je preslikavanje $F\colon H \to H$ definirano s $Fx = U^*Ux = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle x_n, \forall x \in H$.*

Teorem 2.1.19. *Neka je (x_n) bazni okvir za H s granicama $A, B > 0$ te operatorom $F = U^*U$. Tada vrijedi:*

(i) F je pozitivno semidefinitan regularan operator. Vrijedi $AI \leq F \leq BI$,

(ii) $(F^{-1}x_n)$ je bazni okvir s granicama A^{-1} i B^{-1}. Operator baznog okvira $(F^{-1}x_n)$ je F^{-1}.

Napomena 2.1.20. *Pozitivno semidefinitan i regularan operator kraće nazivamo pozitivnim operatorom.*

Dokaz. (i) Neka je (x_n) bazni okvir i $F = U^*U$ operator danog baznog okvira. Pokazali smo da vrijedi $\|U\| \leq B^{\frac{1}{2}}$. Uz $\|U\| = \|U^*\|$ dobivamo $\|F\| \leq \|U\|\|U^*\| \leq B$ pa je F ograničen operator.

Uočimo da vrijedi $\langle AIx, x\rangle = A\|x\|^2$ te $\langle BIx, x\rangle = B\|x\|^2$. Iz $\langle Fx, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2$ i 2.1 slijedi

$$\langle AIx, x\rangle \leq \langle Fx, x\rangle \leq \langle BIx, x\rangle. \tag{2.2}$$

Time dobivamo $AI \leq F \leq BI$ te $\langle Fx, x\rangle \geq 0, \forall x \in H$. Kako je F očito hermitski, F je pozitivno semidefinitan.

Također, iz $A\|x\|^2 = \langle AIx, x\rangle$, $\langle Fx, x\rangle \leq \|Fx\|\|x\|$ te 2.2 slijedi $A\|x\| \leq \|Fx\|, \forall x \in H$ pa je F ograničen odozdo, a tada i injektivan. Preostaje pokazati surjektivnost operatora F. Znamo da je U^* surjekcija. Prema 1.3.28, $\operatorname{Im} U$ je zatvoren potprostor prostora l^2 pa vrijedi $l^2 = \operatorname{Im} U \oplus \operatorname{Ker} U^*$. Dakle, $\operatorname{Im} U^* = U^*(\operatorname{Im} U \oplus \operatorname{Ker} U^*) = U^*(\operatorname{Im} U) = \operatorname{Im} U^*U = \operatorname{Im} F$, a kako je U^* surjekcija, i F je surjekcija.

(ii) Neka je (x_n) bazni okvir u H. F^{-1} je hermitski, bijektivan i ograničen operator. Prema korolaru 2.1.17, niz $(F^{-1}x_n)$ je bazni okvir. Pokažimo da je odgovarajući operator baznog okvira operator F^{-1}. Za proizvoljan $y \in H$ postoji jedinstveni $x \in H$ takav da $F^{-1}y = x$. Po definiciji operatora F imamo

$$y = Fx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle F^{-1}y, x_n\rangle x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, F^{-1}x_n\rangle x_n. \tag{2.3}$$

Ako sada na dobivenu jednakost djelujemo operatorom F^{-1} dobivamo

$$F^{-1}y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, F^{-1}x_n\rangle F^{-1}x_n, \tag{2.4}$$

čime je tvrdnja dokazana.

U (i) smo pokazali da vrijedi $AI \leq F \leq BI$. Sada je potrebno pokazati da je $B^{-1}I \leq F^{-1} \leq A^{-1}I$. Vrijedi $0 \leq A\|F^{-1}x\|^2 = \langle AF^{-1}x, F^{-1}x\rangle \leq \langle F(F^{-1}x), F^{-1}x\rangle = \langle x, F^{-1}x\rangle \leq \|x\|\|F^{-1}x\|$, odnosno $\|F^{-1}x\| \leq A^{-1}\|x\|$. Kako je $\|F^{-1}\|$ najmanji broj s navedenim svojstvom, mora biti $\|F^{-1}\| \leq A^{-1}$. Također, imamo $\langle F^{-1}x, x\rangle \leq \|F^{-1}x\|\|x\| \leq A^{-1}\|x\|^2 = \langle AIx, x\rangle$. Drugim riječima, $F^{-1} \leq A^{-1}I$.

S druge strane, koristeći generaliziranu Cauchy - Schwarzovu nejednakost, dobivamo $\|x\|^4 = \langle x, x\rangle^2 = \langle F^{-1}(Fx), x\rangle \leq \langle F^{-1}Fx, Fx\rangle\langle F^{-1}x, x\rangle = \langle x, Fx\rangle\langle F^{-1}x, x\rangle \leq B\|x\|^2\langle F^{-1}x, x\rangle$ pa je $\langle B^{-1}Ix, x\rangle = B^{-1}\|x\|^2 \leq \langle F^{-1}x, x\rangle$.

Sada po 2.4

$$B^{-1}\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, F^{-1}x_n\rangle|^2 \leq A^{-1}\|x\|^2.$$

□

Napomena 2.1.21. *Optimalnost granica A^{-1} i B^{-1} baznog okvira $(F^{-1}x_n)$ jednostavno slijedi iz pretpostavke da su A i B optimalne granice za bazni okvir (x_n). Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $C < \frac{1}{A}$ takav da je C gornja granica za bazni okvir $(F^{-1}x_n)$. Međutim, po dokazanom, $F^{-1} \leq CI$ povlači $C^{-1}I \leq (F^{-1})^{-1} = F$, što znači $C^{-1}\|x\|^2 = \langle C^{-1}Ix, x\rangle \leq \langle Fx, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2$, no to je kontradikcija s pretpostavkom.*

Napomena 2.1.22. *Uočimo da vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, F^{-1}x_n\rangle x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle F^{-1}x_n, \forall x \in H$ Prva nejednakost pokazana je u 2.3, dok drugu dobivamo jednostavnim računom $x = F^{-1}(Fx) = F^{-1}(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle F^{-1}x_n$.*

Definicija 2.1.23. *Neka je (x_n) bazni okvir za H. Svaki niz (z_n) takav da*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, z_n\rangle x_n, \forall x \in H,$$

naziva se dual baznog okvira (x_n).

Napomena 2.1.24. *Dual baznog okvira nije jedinstven. Uzmimo, na primjer, ortonormiranu bazu (e_n) prostora H te napeti bazni okvir $(e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, \dots)$. Vrijedi da je $A = B = 2$ te $F = 2I$. Po prethodnom teoremu, niz $(F^{-1}e_n) = \frac{1}{2}I(e_n)$ čini jedan njegov dual. Tako dobivamo $(\frac{1}{2}e_1, \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{2}e_3, \dots)$. No lako se provjeri da je i, primjerice, $(e_1, 0, e_2, 0, e_3, 0, \dots)$ dual baznog okvira (x_n).*

Uočimo da dual baznog okvira ne mora nužno i sam biti bazni okvir. Ipak, u prethodnom teoremu pokazali smo da niz dobiven djelovanjem inverza opratora baznog okvira F^{-1} na bazni okvir (x_n) jest bazni okvir. U teorijskim razmatranjima, $(F^{-1}x_n)$ igra ključnu ulogu pri računanju rekonstrukcijskih koeficijenata.

Definicija 2.1.25. *Ako je (x_n) bazni okvir na H, te F pridruženi operator baznog okvira, tada bazni okvir $(F^{-1}x_n)$ nazivamo kanonski dualni bazni okvir za (x_n).*

2.2 Dualni bazni okviri

Sljedeći teorem pokazuje da među svim rekonstrukcijskim nizovima (c_n) vektora $x \in H$ najmanju l^2-normu ima upravo kanonski dualni bazni okvir.

Teorem 2.2.1. *Neka je (x_n) bazni okvir za H s operatorom baznog okvira F te neka $x \in H$. Ako $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ za neki niz skalara (c_n), onda je $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, F^{-1}x_n\rangle|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, F^{-1}x_n\rangle - c_n|^2$.*

Dokaz. Po 2.3 vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ gdje je $(a_n) = (\langle x, F^{-1}x_n\rangle) \in l^2$. Neka je (c_n) proizvoljan niz skalara takav da $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$. Kako je $(a_n) \in l^2$, jasno je da u slučaju kada $(c_n) \notin l^2$ tvrdnja trivijalno slijedi. Neka je $(c_n) \in l^2$. Vrijedi

$$\langle x, F^{-1}x\rangle = \langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, F^{-1}x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle F^{-1}x_n, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{a_n} = \langle (a_n), (a_n)\rangle.$$

S druge strane, imamo

$$\langle x, F^{-1}x\rangle = \langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n, F^{-1}x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle F^{-1}x_n, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \overline{a_n} = \langle (c_n), (a_n)\rangle.$$

Sada je $\langle (a_n - c_n), (a_n)\rangle = \langle (a_n), (a_n)\rangle - \langle (c_n), (a_n)\rangle = 0$ pa vidimo $(c_n - a_n) \perp a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ u l^2. Stoga zaključujemo $\|(c_n)\|^2 = \|(c_n - a_n) + (a_n)\|^2 = \|(c_n - a_n)\|^2 + \|(a_n)\|^2$. □

Ponekad, pak, pri izboru niza (c_n) takvog da $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n, \forall x \in H$ (gdje je (x_n) bazni okvir) minimalnost l^2 norme nije od iznimne važnosti, već je bitniji neki drugi kriterij. Stoga je potrebno pronaći alternativne izbore rekonstrukcijskih koeficijenata. Cilj je pronaći karakterizaciju svih dualnih baznih okvira (g_n) pridruženih baznom okviru (x_n). Drugim riječima, za dani bazni okvir (x_n) želimo opisati sve bazne okvire (g_n) takve da vrijedi

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, g_n\rangle x_n, \forall x \in H. \tag{2.5}$$

Operatore analize pridružene Besselovim nizovima (x_n) i (g_n) označavat ćemo s U i V, respektivno. Uočimo da je $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, g_n\rangle x_n = U^*((\langle x, g_n\rangle)) = U^*Vx$ pa 2.5 možemo pisati $U^*V = I$.

Lema 2.2.2. *Neka je (x_n) Besselov niz s ogradom $B_x > 0$ te (g_n) Besselov s ogradom $B_g > 0$. Tada je ekvivalentno:*

(i) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, g_n \rangle x_n, \forall x \in H$

(ii) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle g_n, \forall x \in H$

(iii) $\langle x, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \langle g_n, g \rangle, \forall x, g \in H$

Ako su zadovoljeni uvjeti (*i*) – (*iii*)*,* (x_n) *i* (g_n) *su međusobno dualni bazni okviri za prostor* H*.*

Dokaz. Već smo naglasili kako (i) možemo pisati kao $U^*V = I$. Hermitskim adjungiranjem dobijemo $V^*U = I$, čime je dokazano (i) $\iff$ (ii).

Koristeći neprekidnost skalarnog množenja lako dobivamo da (*ii*) povlači (*iii*), a kako bismo dokazali obratan smjer, fiksirajmo $x \in H$ te primijetimo da je $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle g_n$ dobro definiran element prostora H. Sada, po pretpostavci (*iii*), $\langle x - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle g_n, g \rangle = 0, \forall g \in H$ pa mora vrijediti (*ii*).

U slučaju da su zadovoljeni navedeni uvjeti, možemo pisati

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \langle g_n, x \rangle, \forall x \in H.$$

Po Cauchy -Schwartzovoj nejednakosti 1.1.14, imamo

$$\|x\|^4 = |\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \langle g_n, x \rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle g_n, x \rangle|^2.$$

Uvažavajući da je (g_n) Besselov niz s granicom B_g te dijeleći s $B_g\|x\|^2$ dobivamo $\frac{1}{B_g}\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$ pa je (x_n) bazni okvir. Tvrdnju za (g_n) dobivamo analogno. □

Napomena 2.2.3. *Neka je* (x_n) *bazni okvir za* H*, a* (g_n) *njegov dual. Uočimo da smo prethodnom lemom pokazali da, ako je* (g_n) *Besselov niz, onda je* (g_n) *bazni okvir. Drugim riječima,* (g_n) *je dualni bazni okvir baznog okvira* (x_n)*. Štoviše, pokazali smo da je tada i* (x_n) *je dualni bazni okvir od* (g_n)*.*

Napomena 2.2.4. *Neka je* (x_n) *bazni okvir za* H*, a* (g_n) *njegov kanonski dualni bazni okvir. U napomeni 2.1.22 pokazali smo da za svaki* $x \in H$ *vrijedi* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, g_n \rangle x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle g_n$*, što je u skladu s upravo dokazanom lemom. Iz leme, također, slijedi i da je* (x_n) *dualni bazni okvir za* (g_n)*. Štoviše,* (x_n) *je kanonski dualni bazni okvir za* (g_n)*. Ta tvrdnja slijedi primjenom sljedeće propozicije.*

Propozicija 2.2.5. *Neka je* U *pridruženi operator analize,* F *odgovarajući operator baznog okvira* (x_n)*, a* (g_n) *neki njegov dual. Ako postoji ograničen, ne nužno regularan operator* $V \in \mathbb{B}(H)$ *takav da je* $g_n = Vx_n \forall n \in \mathbb{N}$*, onda je* $V = F^{-1}$*.*

Dokaz. Neka je $g_n = Vx_n, \forall n \in \mathbb{N}$, gdje je V ograničan, ne nužno invertibilan operator. Znamo da vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, F^{-1}x_n \rangle x_n, \forall x \in H$. Posebno, za FV^*x dobivamo

$$FV^*x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle FV^*x, F^{-1}x_n \rangle x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, VFF^{-1}x_n \rangle x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Vx_n \rangle x_n.$$

V je dual baznog okvira (x_n) pa, po definiciji, vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Vx_n \rangle x_n, \forall x \in H$. Dakle, $FV^* = I$, odnosno $V^* = F^{-1}$, pa hermitskim adjungiranjem slijedi tvrdnja. □

Dakle, za proizvoljni bazni okvir (x_n), kanonski dualni bazni okvir je jedini dual baznog okvira (x_n) nastao djelovanjem ograničenog operatora na početni bazni okvir (x_n). Ranije smo uočili da se kanonski dualni bazni okvir izdvaja od ostalih duala činjenicom da ima minimalnu l^2 normu. Upravo dokazano svojstvo je još jedno koje ga razlikuje od ostalih duala.

Jasno je da, ako je F operator baznog okvira (x_n), a $g_n = F^{-1}x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ njegov kanonski dualni bazni operator, onda je i (x_n) kanonski dualni bazni okvir za (g_n). Naime, kako vrijedi $x_n = Fg_n, \forall n \in \mathbb{N}$, a F je ograničen, po prethodnoj propoziciji slijedi tvrdnja. Time smo pokazali sljedeći rezultat.

Korolar 2.2.6. *Neka je (x_n) bazni okvir na H, a (g_n) njegov kanonski dualni bazni okvir. Tada je (x_n) kanonski dualni bazni okvir za (g_n).*

Napomena 2.2.7. *Ako za operatore A i B vrijedi $AB = I$ kažemo da je A lijevi inverz operatora B.*

Lema 2.2.8. *Neka je (x_n) bazni okvir u H, U odgovarajući operator analize, a (e_n) standardna ortonormirana baza za l^2. Dualni bazni okviri za (x_n) su oblika $g_n = Te_n, \forall n \in \mathbb{N}$ pri čemu je $T\colon l^2 \to H$ ograničen lijevi inverz operatora U.*

Dokaz. Neka je T lijevi inverz operatora U. Drugim riječima $TU = I$ pa je T nužno surjekcija. Po korolaru 2.1.17, znamo da je $(g_n) = (Te_n)$ bazni okvir. Uočimo da možemo pisati $Ux = (\langle x, x_n \rangle) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle e_n$. Zato za svaki $x \in H$ vrijedi $x = TUx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle g_n$ pa je (g_n) dualni bazni okvir baznog okvira (x_n).

Obratno, neka je (g_n) dualni bazni okvir baznog okvira (x_n). Po prethodnoj lemi, operator sinteze V^* baznog okvira (g_n) zadovoljava uvjet $V^*U = I$, a očito vrijedi $g_n = V^*e_n, \forall n \in \mathbb{N}$. □

Lema 2.2.9. *Neka je (x_n) bazni okvir, U pridruženi operator analize, a F operator baznog okvira. Ograničeni lijevi inverzi operatora U su operatori oblika $F^{-1}U^* + W(I - UF^{-1}U^*)$ gdje je $W\colon l^2 \to H$ ograničen linearan operator.*

Dokaz. Uvažavajući definiciju operatora F lako provjerimo da su operatori danog oblika uistinu lijevi inverzi operatora U. Naime, $F^{-1}U^* + W(I - UF^{-1}U^*)U = U^{-1}(U^*)^{-1}U^*U + WU - WUU^{-1}(U^*)^{-1}U^*U = I$. Obratno, neka je dan operator T takav da je T lijevi inverz operatora U. Ako odaberemo $W = T$, dobivamo $F^{-1}U^* + T(I - UF^{-1}U^*) = F^{-1}U^* + T - F^{-1}U^* = T$ □

Sada možemo formulirati karakterizaciju svih dualnih baznih okvira nekog zadanog baznog okvira (x_n) za H.

Teorem 2.2.10. *Neka je (x_n) bazni okvir za H. Dualni bazni okviri baznog okvira (x_n) su oblika*

$$g_n = F^{-1}x_n + h_n - \sum_{i=1}^{\infty} \langle F^{-1}x_n, x_i \rangle h_i, \forall n \in \mathbb{N}$$

pri čemu je (h_n) Besselov niz u H.

Dokaz. Kombiniranjem prethodne dvije leme dobivamo da duali danog baznog okvira (x_n) imaju oblik

$$(g_n) = (F^{-1}U^*e_n + W(I - UF^{-1}U^*)e_n) \tag{2.6}$$

pri čemu je (e_n) standardna ortonormirana baza za l^2, a $W\colon l^2 \to H$ ograničen operator. Uočimo, W je ograničen operator ako i samo ako je $W(c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_j h_j$ gdje je (h_j) Besselov niz. U jednom smjeru tvrdnja je iskazana propozicijom 2.1.12, a obratno propozicijom 2.1.13 Dakle, imamo

$$(g_n) = (F^{-1}x_n + We_n - WUF^{-1}U^*e_n) = (F^{-1}x_n + h_n - \sum_{i=1}^{\infty} \langle F^{-1}x_n, x_i \rangle h_i$$

□

2.3 Bazni okviri i operatori

Vidjeli smo da je za bazni okvir (x_n) s $(F^{-1}x_n)$ definiran jedan bazni okvir. Također, znamo da se svaki bazni okvir može dobiti djelovanjem surjektivnog ograničenog operatora na ortonormiranu bazu. Postoji, dakle, više operatora čijim djelovanjem na bazni okvir dobivamo novi bazni okvir. U ovom odjeljku iznosimo nekoliko rezultata koji govore o takvim operatorima. S T označavamo ograničen operator zatvorene slike, a s $T^\dagger$ generalizirani inverz operatora T.

Propozicija 2.3.1. *Neka je (x_n) bazni okvir za H s granicama $A, B > 0$ i $T\colon H \to H$ ograničen operator sa zatvorenom slikom. Ako vrijedi $g_n = Tx_n, \forall n \in \mathbb{N}$, tada je (g_n) bazni* *okvir za* $\overline{span}(Tx_n)$ *te vrijedi*

$$A\|T^\dagger\|^{-2}\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, g_n\rangle|^2 \leq B\|T\|^2\|x\|^2, \forall x \in \overline{span}(Tx_n)$$

.

Dokaz. Neka je $x \in H$ i (x_n) bazni okvir za H. Označimo $g_n = Tx_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Sada vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, g_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, Tx_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle T^*x, x_n\rangle|^2 \leq B\|T^*x\|^2 \leq B\|x\|^2\|T\|^2$$

iz čega je jasno da je (g_n) Besselov niz s granicom $B\|T\|^2$.

Pokažimo sada da vrijedi ograničenost odozdo. Neka je $g \in span(g_n)$. Tada postoji $x \in span(x_n)$ takav da $g = Tx$. Po definiciji generaliziranog inverza, $TT^\dagger = I$ na $\operatorname{Im} T$ pa $g = Tx = (TT^\dagger)Tx$. Vrijedi i $TT^\dagger = 0$ na $(\operatorname{Im} T)^\perp$. Drugim riječima, $TT^\dagger$ je ortogonalna projekcija na $(\operatorname{Im} T)^\perp$ te, stoga, i hermitski operator. Dobivamo $g = (TT^\dagger)^*Tx = (T^\dagger)^*T^*Tx$, odakle slijedi

$$\|g\|^2 \leq \|(T^\dagger)^*\|^2\|T^*Tx\|^2 \leq \frac{\|(T^\dagger)^*\|^2}{A} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle T^*Tx, x_n\rangle|^2 = \frac{\|(T^\dagger)^*\|^2}{A} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle g, Tx_n\rangle|^2.$$

Drugim riječima, za svaki $g \in span(g_n)$ zadovoljen uvjet ograničenosti odozdo te tražena granica iznosi $A\|T^\dagger\|^{-2}$. Dakle, (g_n) je bazni okvir na $span(g_n)$.

Kako bismo dokazali da tvrdnja vrijedi na $\overline{span}(g_n)$, označimo s U operator analize niza (g_n). Po pokazanom je $A\|T^\dagger\|^{-2} \leq \|Ux\|, \forall x \in span(g_n)$. Nadalje, kako je (g_n) je Besselov na $\overline{span}(g_n)$, operator analize U je ograničen, odnosno neprekidan, pa možemo zaključiti $A\|T^\dagger\|^{-2} \leq \|Ux\|, \forall x \in \overline{span}(g_n)$.

□

Napomena 2.3.2. *Uočimo da korolar 2.1.17 jednostavno slijedi iz prethodne propozicije. Također, ako su A i B granice baznog okvira* (x_n)*, a T ograničen, surjektivan operator, granice baznog okvira* (Tx_n) *su dane s* $A\|T^\dagger\|^{-2}$ *i* $B\|T\|^2$.

Propozicija 2.3.3. *Neka je F operator baznog okvira* (x_n)*. Označimo pozitivni korijen operatora* F^{-1} *s* $F^{-\frac{1}{2}}$*. Tada je* $(F^{-\frac{1}{2}}x_n)$ *Parsevalov bazni okvir za H te vrijedi* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, F^{-\frac{1}{2}}x_n\rangle x_n, \forall x \in H$.

Dokaz. F^{-1} je pozitivno semidefinitan, ograničen operator na Hilbertovom prostoru pa postoji jedinstven, pozitivno semidefinitan, ograničen drugi korijen, označen s $F^{-\frac{1}{2}}$. Kako je F^{-1} regularan, i $F^{-\frac{1}{2}}$ je regularan.

Neka je $x \in H$ proizvoljan. Kako je $F^{-\frac{1}{2}}$ bijekcija, postoji jedinstveni $y \in H$ takav da $x = F^{-\frac{1}{2}}y$. Po 2.3 znamo da je $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, F^{-1}x_n\rangle x_n$. Vrijedi

$$x = F^{-\frac{1}{2}}y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, F^{-1}x_n\rangle F^{-\frac{1}{2}}x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle F^{-\frac{1}{2}}y, F^{-\frac{1}{2}}x_n\rangle F^{-\frac{1}{2}}x_n, \forall x \in H.$$

Sada je $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle\langle x_n, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2$, odnosno, $(F^{-\frac{1}{2}}x_n)$ je Parsevalov.

□

Napomena 2.3.4. *Istaknimo da je u dokazu prethodne propozicije dokazano da je niz (x_n) Parsevalov bazni okvir za H ako za svaki $x \in H$ vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle x_n$.*

Istaknimo sada nekoliko rezultata vezanih uz ortogonalne projekcije.

Propozicija 2.3.5. *Neka je (x_n) niz u H, a s P označimo ortogonalnu projekciju prostora H na zatvoreni potprostor M. Tada vrijedi*

(i) Ako je (x_n) bazni okvir za H s granicama A i B, onda je (Px_n) bazni okvir za M s granicama A i B.

(ii) Neka je (x_n) bazni okvir za M te F operator baznog okvira (x_n). Tada je ortogonalna projekcija s H na M dana s

$$Px = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, F^{-1}x_n\rangle x_n, \forall x \in H. \tag{2.7}$$

Dokaz.

1. Neka je P ortogonalna projekcija s H na M. Posebno, P je hermitski operator. Neka je $x \in M$. Očito je onda $x \in H$, a jer je (x_n) bazni okvir za H, vrijedi 2.1. Kako je $x = Px$ te P hermitski operator možemo pisati

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, Px_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \forall x \in M$$

što pokazuje da je (Px_n) bazni okvir za M.

2. Neka je operator P definiran kao u 2.7. Dovoljno je provjeriti da $Px = x, \forall x \in M$, a $Px = 0, \forall x \in M^{\perp}$.

Neka je $x \in M$. $(F^{-1}x_n)$ je kanonski dualni bazni okvir za M pa svaki $x \in M$ postoji zapis oblika $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, F^{-1}x_n\rangle x_n$. Drugim riječima $Px = x, \forall x \in M$.

Neka je sada $x \in M^{\perp}$. Po definiciji operatora P je $Px = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, F^{-1}x_n\rangle x_n$. F^{-1} je bijekcija sa M u M. Stoga je $F^{-1}x_n \in M$ pa za svaki $x \in M^{\perp}$ vrijedi $\langle x, F^{-1}x_n\rangle = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

□

Napomena 2.3.6. *Neka je M zatvoreni potprostor prostora H, a (e_n) ortonormirana baza za H. Posebno, (e_n) je Parsevalov bazni okvir za H. Ako je P ortogonalni projektor s H na M, po prethodnoj propoziciji, (Pe_n) je Parsevalov bazni okvir za M. U potpoglavlju Napeti bazni okviri pokazat ćemo da se svaki Parsevalov bazni okvir za Hilbertov prostor M može dobiti ortogonalnom projekcijom ortonormirane baze prostora H na prostor M pri čemu je M zatvoreni potprostor prostora H.*

Propozicija 2.3.7. *Neka je (x_n) bazni okvir za H, U pridruženi operator analize i Q ortogonalna projekcija niza $(c_n) \in l^2$ na sliku operatora U. Tada je*

$$Q(c_n) = (\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n F^{-1} x_n, x_i \rangle). \tag{2.8}$$

Dokaz. Po lemi 1.3.28 slika operatora U je zatvoren potprostor od l^2. Neka je operator Q definiran s 2.8 i neka $(c_n) \in \operatorname{Im} U$. Tada postoji $x \in H$ takav da $(\langle x, x_n \rangle) = (c_n)$. Provjerimo da je $Q(c_n) = (c_n)$.

Vrijedi $Q(c_n) = (\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n F^{-1} x_n, x_i \rangle) = (\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle F^{-1} x_n, x_i \rangle)$. Po napomeni 2.1.22 sada imamo $Q(c_n) = (\langle x, x_i \rangle) = (c_n)$.

Neka je sada $(c_n) \in (\operatorname{Im} U)^{\perp} = \operatorname{Ker} U^*$. Po definiciji operatora Q dobivamo $Q(c_n) = (\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n F^{-1} x_n, x_i \rangle) = (\sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle F^{-1} x_n, x_i \rangle) = (\sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle x_n, F^{-1} x_i \rangle) = (\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n, F^{-1} x_i \rangle) = (\langle U^*(c_n), F^{-1} x_i \rangle) = 0$.

□

2.4 Karakterizacije Besselovih nizova i baznih okvira

Dokazali smo da je niz (x_n) u Hilbertovom prostoru Besselov ako i samo ako je za svaki $(c_n) \in l^2$ red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ dobro definiran. Vidjeli smo, također, da se svaki bazni okviri može dobiti djelovanjem surjektivnih ograničenih operatora na ortonormiranu bazu. Sada, radi potpunosti, navedimo još nekoliko karakterizacija Besselovih nizova i baznih okvira koje se koriste pri teorijskim razmatranjima.

Definicija 2.4.1. *Neka je (x_n) Besselov niz, a U pridruženi operator analize te neka je (e_n) standardna ortonormirana baza za l^2. Tada beskonačnu matricu $[UU^*]$ operatora UU^* u bazi (e_n), $[UU^*]_{(n,m)} = \langle x_m, x_n \rangle$, nazivamo Grammova matrica niza (x_n).*

Teorem 2.4.2. *Neka je (x_n) niz u H. Ekvivalentno je:*

(i) (x_n) *je Besselov niz s ogradom B,*

(ii) Grammova matrica $G(x_n)$ definira ograničen operator na l^2 te vrijedi $\|G\| \leq B$.

Dokaz. Propozicijom 2.1.10 pokazali smo da je za Besselov niz (x_n) operator analize U je neprekidno preslikavanje s H u l^2 te vrijedi $\|U\| < B^{\frac{1}{2}}$. Sada iz jednakosti $\|U\| = \|U^*\|$ dobivamo $\|UU^*\| \leq \|U\|\|U^*\| \leq B$.

Obratno, pretpostavimo da Grammova matrica $G(x_n)$ definira ograničen operator na l^2 takav da $\|G\| \leq B$. Za svaki niz $(c_n) \in l^2$ je

$$\|G(c_n)\|^2 = \|UU^* c_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x_k \rangle c_n|^2 \leq B^2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2. \tag{2.9}$$

Pokažimo da je red $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ konvergentan. Dovoljno je pokazati da je Cauchyjev. Za proizvoljne $n, m \in \mathbb{N}$ takve da $n > m$, koristeći Cauchy- Schwarzovu nejednakost, dobivamo

$$\|\sum_{k=1}^{n} c_k x_k - \sum_{k=1}^{m} c_k x_k\|^4 = \|\sum_{k=m+1}^{n} c_k x_k\|^4 = |\langle \sum_{k=m+1}^{n} c_k x_k, \sum_{i=m+1}^{n} c_i x_i \rangle|^2 =$$

$$|\sum_{i=m+1}^{n} \overline{c_i} \sum_{k=m+1}^{n} c_k \langle x_k, x_i \rangle|^2 \leq (\sum_{i=m+1}^{n} |c_i|^2)(\sum_{i=m+1}^{n} |\sum_{k=m+1}^{n} c_k \langle x_k, x_i \rangle|^2).$$

Primjenom 2.9 na niz $\sum_{i=m+1}^{n} c_i e_i$ dobivamo

$$\sum_{i=m+1}^{n} |\sum_{k=m+1}^{n} c_k \langle x_k, x_i \rangle|^2 \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} |\sum_{k=m+1}^{n} c_k \langle x_k, x_i \rangle|^2 \leq B^2 \sum_{i=m+1}^{n} |c_i|^2.$$

Sada imamo

$$\|\sum_{k=1}^{n} c_k x_k - \sum_{k=1}^{m} c_k x_k\|^4 \leq B^2 (\sum_{i=m+1}^{n} |c_i|^2)^2.$$

Dakle, red $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ je konvergentan te vrijedi $\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k\| \leq \sqrt{B}(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2)^{\frac{1}{2}}$. Stoga je operator T takav da je $T(c_k) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k, \forall (c_k) \in l^2$, dobro definiran, linearan i ograničen operator i vrijedi $\|T\| \leq \sqrt{B}$. Pokazali smo propozicijom 2.1.12 da je sada (x_n) Besselov niz te, kako je $\|T^*\| \leq \sqrt{B}$, imamo $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 = \|T^* x_n\| \leq B\|x\|^2$ pa je B ograda Besselovog niza (x_n). □

Po teoremu 2.1.15, niz (x_n) je bazni okvir za H ako i samo ako je operator sinteze U^* ograničen, surjektivan operator. Međutim, navedena karakterizacija nikako ne koristi informaciju o granicama baznog okvira. Stoga je korisno navesti sljedeću lemu.

Lema 2.4.3. *Niz (x_n) u H je bazni okvir s granicama A i B ako i samo ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

1. *(x_n) je maksimalan niz u H*

2. *Operator sinteze T je dobro definiran na l^2 te vrijedi*

$$A\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 \le ||T(c_n)||^2 \le B\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2, \forall (c_n) \in (\mathrm{Ker}\, T)^{\perp}.$$

Dokaz. Pokazali smo već da za Besselov niz (x_n), operator sinteze U^* je dobro definirano preslikavanje te vrijedi $||U^*|| \le \sqrt{B}$. Ako je (x_n) bazni okvir s donjom granicom A, onda je $\sqrt{A} \le ||U^*||$. Naime, pokazali smo 2.2, odnosno $A \le ||F||$, pa iz $||F|| \le ||U||||U^*|| = ||U^*||^2$ slijedi tvrdnja $A\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 \le ||U^*(c_n)||^2 \le B\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2, \forall (c_n) \in (\mathrm{Ker}\, U^*)^{\perp}$. Također, znamo da je svaki bazni okvir fundamentalan, pa i maksimalan niz.

Pretpostavimo sada da je (x_n) maksimalan niz u H te da je operator T dobro definiran na l^2 i vrijedi $A\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 \le ||T(c_n)||^2 \le B\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2, \forall (c_n) \in (\mathrm{Ker}\, T)^{\perp}$.

Pokažimo da je T surjekcija. Kako je (x_n) maksimalan, on je i fundamentalan, odnosno vrijedi $\overline{span}(x_n) = H$. Uočimo da, zbog $Te_n = x_n$, vrijedi $span(x_n) \subseteq \mathrm{Im}\, T$ pa je dovoljno pokazati da je slika operatora T zatvorena. Naime, tada će vrijediti $\overline{span}(x_n) = H \subseteq \mathrm{Im}\, T$. Neka je (y_n) niz u $\mathrm{Im}\, T$. Tada postoji niz $(f_n) \in \mathrm{Ker}\, T^{\perp}$ takav da $Tf_n = y_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Neka je $y \in H$ takav da $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Tada je zbog $A\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|^2 \le ||T(f_n)||^2 = |y_n|^2$ i niz (f_n) konvergentan te vrijedi $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ za neki $f \in H$. Kako je operator T po pretpostavci ograničen na $\mathrm{Ker}\, T^{\perp}$, pa i neprekidan, dobivamo $Tf = y$. Vrijedi $f \in \mathrm{Im}\, T$ pa je slika operatora T zatvorena i $\mathrm{Im}\, T = H$. Označimo s $T^{\dagger}$ pseudoinverz operatora T. Operator $T^{\dagger}T$ je ortogonalna projekcija na $(\mathrm{Ker}\, T)^{\dagger}$, a $TT^{\dagger}$ na $\mathrm{Im}\, T = H$. Po pretpostavci, za svaki $(c_n) \in l^2$ vrijedi $A||T^{\dagger}T(c_n)||^2 \le ||TT^{\dagger}T(c_n)||^2 = ||T(c_n)||^2$, odakle dobivamo $||T^{\dagger}||^2 \le \frac{1}{A}$. No tada i $||(T^*)^{\dagger}||^2 \le \frac{1}{A}$. Kako je $(T^*)^{\dagger}U$ ortogonalna projekcija na $\mathrm{Im}\,(T^*)^{\dagger} = (\mathrm{Ker}\, T^{\dagger})^{\perp} = \mathrm{Im}\, T = H$, za svaki $x \in H$ vrijedi $||x||^2 = ||(T^*)^{\dagger}T^*x||^2 \le \frac{1}{A}||T^*x||^2 = \frac{1}{A}\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, x_n\rangle|^2$. Dakle, (x_n) je bazni okvir i A je odgovarajuća donja granica. □

2.5 Bazni okviri i baze

Prisjetimo li se primjera 2.1.4 jasno je da nije svaki bazni okvir baza danog prostora H. S druge strane, u napomeni 2.1.6 istaknuli smo primjer niza koji očito jest baza, ali nije bazni okvir za prostor H. Ne postoji, naime, pozitivna konstanta A takva da vrijedi prva nejednakost u definicionom uvjetu 2.1. Dakle, niti su sve baze bazni okviri, niti vrijedi obrat. Uočili smo, ipak, da ortonormiranost baze (e_n) Hilbertovog prostora povlači da je (e_n) egzaktan, Parsevalov bazni okvir. Logično je razmotriti vrijedi li obrat navedene tvrdnje te, generalno, pod kojim je uvjetima (topološka) baza bazni okvir i obratno.

Na početku, uočimo da je svaka baza, kao i svaki bazni okvir, fundamentalni niz za prostor H. Pokazali smo da je u konačnodimenzionalnim prostorima svaki fundamentalni niz ujedno i bazni okvir za H. Dakle, u konačnodimenzionalnim prostorima, svaka baza je bazni okvir za H. Štoviše, svaka baza konačnodimenzionalnog prostora je egzaktan bazni okvir. U beskonačnodimenzionalnim prostorima, pak, postoje fundamentalni nizovi koji nisu bazni okviri za H. Jedan takav smo vidjeli u napomeni 2.1.6. Navedimo sada još jedan primjer.

Primjer 2.5.1. *Neka je (e_n) ortonormirana baza prostora H. Definirajmo $x_n = e_n + e_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Niz (x_n) je fundamentalan, Besselov niz, no nije bazni okvir za H.*

Naime, za $x \in H$ je $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n + e_{n+1}\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle + \langle x, e_{n+1}\rangle|^2 \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_{n+1}\rangle|^2 \leq 4\|x\|^2$ pa je niz (x_n) Besselov.

Pretpostavimo sada da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\langle x, e_n + e_{n+1}\rangle = 0$. Drugim riječima, $\langle x, e_n\rangle = -\langle x, e_{n+1}\rangle, \forall n \in \mathbb{N}$ pa $|\langle x, e_n\rangle|$ mora biti konstanta. Niz (x_n) je Besselov pa vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 < \infty$, odakle dobivamo $\langle x, e_n\rangle = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Kako vrijedi $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$, vidimo da je $x = 0$. Dakle, (x_n) je maksimalan i, po 1.1.22, fundamentalan niz.

Kako bismo dokazali da dani niz nije bazni okvir koristimo karakterizaciju baznih okvira danu korolarom 2.1.16, odnosno činjenicu da su svi bazni okviri nastali kao slika ortonormiranih baza pri surjektivnim, ograničenim preslikavanjima.

Označimo sa S operator jednostranog pomaka na H s obzirom na (e_n), a s I identitetu na H. Možemo pisati $x_n = (S+I)e_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Budući da $e_1 \notin \mathrm{Im}(S+I)$, operator $(S+I)$ nije surjektivan. Kada bi (x_n) bio bazni okvir za H postojao bi surjektivan, ograničen operator T takav da je $Te_n = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, odnosno $Te_n = (S+I)e_n, \forall n \in \mathbb{N}$. No tada bi vrijedilo $T = S + I$ pa bi $(S+I)$ bio surjekcija. Dakle, (x_n) ne može biti bazni okvir.

Propozicija 2.5.2. *Neka je F operator baznog okvira (x_n) na H, a granice baznog okvira A i B. Tada vrijedi:*

(i) *Za svaki $m \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{n\neq m} |\langle x_m, F^{-1}x_n\rangle|^2 = \frac{1 - |\langle x_m, F^{-1}x_m\rangle|^2 - |1 - \langle x_m, F^{-1}x_m\rangle|^2}{2}$$

.

(ii) *Ako je za neki $m \in \mathbb{N}$, $\langle x_m, F^{-1}x_m\rangle = 1$, onda je $\langle x_m, F^{-1}x_n\rangle = 0, \forall n \neq m$.*

(iii) *Uklanjanje bilo kojeg elementa baznog okvira (x_n) daje ili bazni okvir ili niz koji nije fundamentalan.*

Preciznije,

Ako $\langle x_m, F^{-1}x_m\rangle \neq 1$, onda je $(x_n)_{n\neq m}$ bazni okvir,

Ako $\langle x_m, F^{-1}x_m\rangle \neq 0$, onda $(x_n)_{n\neq m}$ nije fundamentalan niz.

Dokaz. Fiksirajmo $m \in \mathbb{N}$ te označimo $a_n = \langle x_m, F^{-1}x_n\rangle$.

(i) Za svaki $x \in H$ vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, F^{-1}x_n\rangle x_n$. Posebno, za x_m imamo $x_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. No, ako s δ_{mn} označimo Kroneckerovu funkciju

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{ako } n = m, \\ 0, & \text{ako } n \neq m. \end{cases}$$

možemo pisati $x = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{mn} x_n$. Teorem 2.2.1 pokazuje da je $1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\delta_{mn}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - \delta_{mn}|^2 = |a_m|^2 + |a_m - 1|^2 + 2\sum_{n\neq m} |a_n|^2$ odakle je jasno da tvrdnja vrijedi.

(ii) Uvrstimo li $\langle x_m, F^{-1}x_m\rangle = 1$ u tvrdnju (i), dobivamo $\sum_{n\neq m} |\langle x_m, F^{-1}x_n\rangle|^2 = 0$ pa je jasno da slijedi tvrdnja.

(iii) Neka je $\langle x_m, F^{-1}x_m\rangle = 1$. Posebno, $F^{-1}x_m \neq 0$. Po tvrdnji (i) za svaki $n \neq m$ je $\langle x_n, F^{-1}x_m\rangle = 0$. Kada bi niz $(x_n)_{n\neq m}$ bio maksimalan, moralo bi vrijediti $F^{-1}x_m = 0$ što je kontradikcija. Dakle, niz $(x_n)_{n\neq m}$ nije maksimalan pa, zbog 1.1.22, ni fundamentalan.

Pretpostavimo sada $\langle x_m, F^{-1}x_m\rangle \neq 1$. Dijeljenjem jednadžbe $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ s $a_m = \langle x_m, F^{-1}x_m\rangle \neq 1$, dobivamo $x_m = \frac{1}{1-a_m}\sum_{n\neq m} a_n x_n$. Označimo s $C = \frac{1}{|1-a_m|^2}\sum_{n\neq m} a_n$. Za svaki $x \in H$ vrijedi

$$|\langle x, x_m\rangle|^2 = |\frac{1}{1-a_m}\sum_{n\neq m} \overline{a_n}\langle x, x_n\rangle|^2 \leq C\sum_{n\neq m} |\langle x, x_n\rangle|^2.$$

Stoga je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 = |\langle x, x_m\rangle|^2 + \sum_{n\neq m} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq (1 + C)\sum_{n\neq m} |\langle x, x_n\rangle|^2.$$

Sada, uvažavajući da je (x_n) bazni okvir s granicama A i B, imamo

$$\frac{A}{1+C}\|x\|^2 \leq \frac{1}{1+C}\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq \sum_{n\neq m} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2.$$

□

Korolar 2.5.3. *Neka je (x_n) bazni okvir za H. Tada je ekvivalentno:*

(i) (x_n) je egzaktan,

(ii) (x_n) i $(F^{-1}x_n)$ su biortogonalni,

(iii) $\langle x_n, F^{-1}x_n\rangle = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (iii) Po definiciji egzaktnog baznog okvira, $(x_n)_{n\neq m}$ nije bazni okvir ni za koji $m \in \mathbb{N}$. Tvrdnja sada slijedi primjenom prethodne propozicije.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Ako $\langle x_n, F^{-1}x_n\rangle = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, znamo da $(x_n)_{n\neq m}$ nije fundamentalan niz pa ne može biti ni bazni okvir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Tvrdnja slijedi direktno iz definicije biortogonalnosti.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Kako $\langle x_m, F^{-1}x_m\rangle = 1$ povlači $\langle x_m, F^{-1}x_n\rangle = 0, \forall n \neq m$, tvrdnja slijedi direktno.

□

Propozicija 2.5.4. *Svaki egzaktni bazni okvir (x_n) je baza za H.*

Dokaz. Označimo s F operator baznog okvira (x_n). Svaki $x \in H$ možemo zapisati kao $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, F^{-1}x_n\rangle x_n$. Kako bismo dokazali da je (x_n) baza, dovoljno je pokazati da je navedeni zapis jedinstven. Pretpostavimo da postoji drugačiji zapis, $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, za neke koeficijente a_n. Sada imamo $\langle x, F^{-1}x_n\rangle = \langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, F^{-1}x_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\langle x_n, F^{-1}x_n\rangle = a_n$, jer je $\langle x_n, F^{-1}x_n\rangle = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

□

Napomena 2.5.5. *Neka je (x_n) bazni okvir za H, a A i B njegove granice. Tada vrijedi $\sup \|x_n\|^2 \leq B$. Naime, za fiksni $m \in \mathbb{N}$ vrijedi $\|x_m\|^4 = |\langle x_m, x_m\rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_m, x_n\rangle|^2 \leq B\|x_m\|^2$.*

Neka je (x_n) egzaktni bazni okvir te fiksirajmo $m \in \mathbb{N}$. Bazni okviri (x_n) i $(F^{-1}x_n)$ su biortogonalni pa vrijedi $A\|F^{-1}x_m\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle F^{-1}x_m, x_n\rangle|^2 = |\langle F^{-1}x_m, x_n\rangle|^2 \leq \|F^{-1}x_m\|^2\|x_m\|^2$. Kako je (x_n) po pretpostavci egzaktan, mora biti $x_m \neq 0$, a onda i $F^{-1}x_m \neq 0$. Dijeljenjem prethodnog izraza s $\|F^{-1}x_m\|^2$ dobivamo da su elementi egzaktnog baznog okvira po normi ograničeni i odozdo. Preciznije, ako je (x_n) egzaktan bazni okvir za H, za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $A \leq \inf \|x_n\|^2$.

Propozicija 2.5.6. *Neka je niz (x_n) napetni bazni okvir za H i neka je A granica baznog okvira (x_n). Sljedeća svojstva ekvivalentna:*

(i) *(x_n) je egzaktan bazni okvir,*

(ii) *(x_n) je ortogonalan niz,*

(iii) *$\|x_n\|^2 = A$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka je (x_n) napet bazni okvir čiji su elementi ortogonalni te $m \in \mathbb{N}$ fiksan. Iz $\|x_m\|^4 = |\langle x_m, x_m\rangle|^2 + \sum_{n\neq m} |\langle x_m, x_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_m, x_n\rangle|^2 = A\|x_m\|^2$ lako vidimo $\|x_m\|^2 = A, \forall m \in \mathbb{N}$.

Obratno, neka vrijedi $\|x_n\|^2 = A, \forall n \in \mathbb{N}$. Zbog $\|x_m\|^4 + \sum_{n\neq m} |\langle x_m, x_n\rangle|^2 = |\langle x_m, x_m\rangle|^2 + \sum_{n\neq m} |\langle x_m, x_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_m, x_n\rangle|^2 = A\|x_m\|^2 = \|x\|^4$ mora biti $\sum_{n\neq m} |\langle x_m, x_n\rangle|^2 = 0$. Time je dokazano (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

(i) $\Rightarrow$ (iii) dobivamo direktno iz prethodne napomene. Kako bismo dokazali obrat, pretpostavimo da je (x_n) napeti bazni okvir te da vrijedi $\|x_n\|^2 = A, \forall n \in \mathbb{N}$. Tada (x_n) mora biti i ortogonalan niz. Pokazali smo da je za svaki $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle F^{-1}x_n, \forall x \in H$. Posebno, za proizvoljni $m \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_m = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_m, x_n\rangle F^{-1}x_n = \langle x_m, x_m\rangle F^{-1}x_m = \|x_m\|^2 F^{-1}x_m$. Stoga je $F^{-1}x_m = \frac{1}{A}x_m$. Sada dobivamo $\langle F^{-1}x_m, x_m\rangle = \frac{1}{A}\langle x_m, x_m\rangle = 1$ pa tvrdnja slijedi po korolaru 2.5.3. □

Korolar 2.5.7. *Svaki egzaktni, Parsevalov bazni okvir je ortonormirana baza za H.*

2.6 Napeti bazni okviri

Napeti bazni okviri imaju mnoga korisna svojstva te su operacije nad njima jednostavnije nego nad općenitim baznim okvirima. Primjerice, dual baznog okvira (x_n) s granicom A je također napet bazni okvir oblika $\frac{1}{A}(x_n)$. Navedena značajka omogućava nam da kontroliramo svojstva dualnih baznih okvira, što se pokazuje ključnim kada želimo pronaći bazni okvir s unaprijed zadanim svojstvima.

U ovom odjeljku navodimo neke osnovne rezultate o napetim baznim okvirima s posebnim naglaskom na Parsevalove bazne okvire.

Napomena 2.6.1. *Neka je F operator napetog baznog okvira (x_n). Tada je, po teoremu 2.1.19, $F = AI$, $F^{-1} = A^{-1}I$ te za svaki $x \in H$ vrijedi*

$$x = F^{-1}Fx = F^{-1}(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle x_n) = A^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle x_n,$$

pri čemu je A granica baznog okvira (x_n).

Lema 2.6.2. *Neka je (x_n) bazni okvir za H. Tada je ekvivalentno:*

(i) (x_n) *je napeti bazni okvir,*

(ii) (x_n) *ima dualni bazni okvir* (g_n) *takav da vrijedi* $g_n = Cx_n, \forall n \in \mathbb{N}$, *gdje je* $C > 0$ *konstanta.*

Dokaz. (i) Neka je (x_n) napeti bazni okvir za H. Tada $\forall x \in H$ vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 = A\|x\|^2$ pri čemu $A > 0$. Neka je s (g_n) označen kanonski dualni bazni okvir za (x_n). Dakle, $g_n = F^{-1}x_n = A^{-1}x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) Neka je sada (g_n) dualni bazni okvir za (x_n) takav da $g_n = Cx_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, g_n \rangle x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Cx_n \rangle x_n = \overline{C} \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$. Sada slijedi

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \overline{C} \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \langle x_n, x \rangle = \overline{C} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2. \tag{2.10}$$

Kako je $C > 0$, odnosno $\overline{C} > 0$, dijeljenjem 2.10 s $\overline{C}$ slijedi tvrdnja.

□

Poseban slučaj napetih baznih okvira su Parsevalovi bazni okviri, odnosno oni bazni okviri za koje je definicioni uvjet ispunjen uz granice $A = B = 1$. Ako je (x_n) Parsevalov bazni okvir za H, pridruženi operator analize U je izometrija, operator baznog okvira $F = U^*U = I$ te stoga vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$. Ovim razmatranjima te napomenom 2.1.22 u potpunosti je dokazana sljedeća tvrdnja.

Propozicija 2.6.3. *Niz (x_n) je Parsevalov bazni okvir za H ako i samo ako za svaki $x \in H$ vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$.*

Još jedna karakterizacija Parsevalovih baznih okvira dana je sljedećom propozicijom.

Napomena 2.6.4. *Ako je U ograničen operator na Hilbertovom prostoru H, a U^* izometrija, kažemo da je operator U ko-izometrija. Vrijedi da je U ko-izometrija ako i samo ako je U surjektivna parcijalna izometrija.*

Propozicija 2.6.5. *Označimo s (e_n) standardnu ortonormiranu bazu za l^2. Niz (x_n) je Parsevalov bazni okvir za H ako i samo ako postoji ko-izometrija $T \in \mathbb{B}(l^2, H)$ takva da vrijedi $Te_n = x_n \forall n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. U jednom smjeru jednostavno dobivamo tvrdnju. Naime, Parsevalov bazni okvir po definiciji zadovoljava $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2, \forall x \in H$, što znači da je U izometrija i U^* ko-izometrija. Kako znamo da vrijedi $U^*e_n = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, tvrdnja slijedi.

Pretpostavimo da je $T \in \mathbb{B}(l^2, H)$ ko-izometrija takva da vrijedi $Te_n = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Tada je T^* izometrija pa imamo $\|T^*x\|^2 = \|x\|^2, \forall x \in H$. Vrijedi $\|T^*x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle T^*x, e_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, T^*e_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2, \forall x \in H$. □

Napomena 2.6.6. *Za sve vektore Parsevalovog baznog okvira (x_n) vrijedi $\|x_n\| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Također, ako za neki x_m vrijedi $\|x_m\| = 1$, onda je $x_m \perp x_n, \forall n \neq m$. Posebno, tada slijedi da, ako svi vektori Parsevalovog baznog okvira (x_n) normirani, onda je (x_n) ortonormirana baza.*

Naime, znamo za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\sup \|x_n\|^2 \leq B$ gdje je B granica baznog okvira. Kada je bazni okvir Parsevalov, po definiciji je $B = 1$.

Neka je sada $\|x_m\| = 1$ *za neki* $m \in \mathbb{N}$. *Iz* $1 = \|x_m\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_m, x_n\rangle|^2 = |\langle x_m, x_m\rangle|^2 + \sum_{n\neq m} |\langle x_m, x_n\rangle|^2 = 1 + \sum_{n\neq m} |\langle x_m, x_n\rangle|^2$ *jasno je da mora vrijediti* $\sum_{n\neq m} |\langle x_m, x_n\rangle|^2 = 0$, *odakle slijedi* $\langle x_n, x_m\rangle = 0, \forall n \neq m$.

Ranije smo naglasili da se svaki Parsevalov bazni okvir može dobiti kao ortogonalna projekcija ortonormirane baze na zatvoren potprostor. Dokažimo sada tu tvrdnju.

Propozicija 2.6.7. *Ako je* (x_n) *Parsevalov bazni okvir za* H, *postoji* H_0 *Hilbertov prostor takav da je* H *zatvoren potprostor prostora* H_0. *Neka je* (f_n) *ortonormirana baza za* H_0, *a* P *ortogonalni projektor s* H_0 *na* H. *Tada djelovanjem ortogonalnog projektora* P *na* (f_n) *dobivamo* (x_n), *odnosno* $Pf_n = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

U dokazu navedene propozicije koristit ćemo sljedeću lemu. Lema daje karakterizaciju sličnih baznih okvira, odnosno takvih da postoji bijektivan operator $T \in \mathbb{B}(H, K)$ za koji vrijedi $Tx_n = y_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Lema 2.6.8. *Neka je* (x_n) *bazni okvir za* H, U *pridruženi operator analize, a* (y_n) *bazni okvir za* K *s pridruženim operatorom analize* V.

(i) (x_n) *i* (y_n) *su slični ako i samo ako je* $\operatorname{Im} U = \operatorname{Im} V$.

(ii) Ako su (x_n) *i* (y_n) *Parsevalovi bazni okviri onda su slični ako i samo ako je operator* T, $Tx_n = y_n, \forall n \in \mathbb{N}$ *unitaran.*

Dokaz. (i) Neka je T bijektivan, ograničen operator takav da $Tx_n = y_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Tada je i T^* ograničen i bijektivan. Neka je $y \in K$, a (e_n) standardna ortonormirana baza za l^2. Tada je $Vy = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, y_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, Tx_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T^*y, x_n\rangle e_n = U(T^*y)$.

Neka je sada $\operatorname{Im} U = \operatorname{Im} V = M$. Uočimo, M je zatvoren potprostor prostora l^2, a U^* i V^* su bijektivni operatori s M na H, odnosno K. Stoga je operator T definiran s $T := V^*|_M(U^*|_M)^{-1}$ je ograničen i regularan operator s H na K. Vrijedi $x_n = U^*e_n = U^*Pe_n, \forall n \in \mathbb{N}$ i $y_n = V^*e_n = V^*Pe_n, \forall n \in \mathbb{N}$, gdje je P ortogonalna projekcija s l^2 na M. Sada je $Tx_n = (V^*|_M(U^*|_M)^{-1})U^*Pe_n = V^*|_M Pe_n = V^*e_n = y_n$.

(ii) Neka su (x_n) i (y_n) Parsevalovi bazni okviri, a s $Tx_n = y_n, \forall n \in \mathbb{N}$ definiran invertibilan operator. Za svaki $y \in K$ je $\|T^*y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle T^*y, x_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, Tx_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, y_n\rangle|^2 = \|y\|^2$. T^* je, dakle, izometrija pa vrijedi $T^*T = I$, iz čega slijedi $T^* = T^{-1}$.

Kako je svaki unitaran operator bijektivan, obrat trivijalno slijedi.

□

Sada smo spremni dokazati prethodnu propoziciju.

Dokaz. Neka je (e_n) standardna ortogonalna baza za l^2, (x_n) Parsevalov bazni okvir za H, a U pridruženi operator analize. Kako je (x_n) bazni okvir, U ima zatvorenu sliku. Drugim riječima, $M = \operatorname{Im} U$ je zatvoren potprostor l^2. Neka je Q ortogonalni projektor na M. Definirajmo H_0 kao $H_0 = H \oplus M^\perp$ te s P označimo ortogonalni projektor s H_0 na H. Sada je za f_n takav da $f_n = (x_n, (I - Q)e_n), \forall n \in \mathbb{N}$ očito $Pf_n = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Potrebno je dokazati da je (f_n) ortonormirana baza za H_0.

(Qe_n) je, po prethodnoj napomeni, Parsevalov bazni okvir za M, a pridruženi operator analize označimo s V. Tada je $\operatorname{Im} V = M$. Naime, kako je svaki ortogonalni projektor hermitski operator, za svaki $y \in M$ vrijedi $Vy = (\langle y, Qe_n\rangle) = \sum_{n=1}^\infty \langle y, Qe_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^\infty \langle Qy, e_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^\infty \langle y, e_n\rangle e_n$.

Prema prethodnoj lemi, (Qe_n) i (x_n) su slični bazni okviri, a, kako su i Parsevalovi, postoji unitarni operator $T\colon M \to H$ takav da $T(Qe_n) = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Označimo s $I_{M^\perp}$ identitetu na $M^\perp$. Sada je operator W definiran s $W := T \oplus I_{M^\perp}$ unitaran operator s l^2 na H_0 te vrijedi $W(e_n) = (T \oplus I_{M^\perp})(Qe_n + (I - Q)e_n) = (x_n, (I - Q)e_n) = f_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Dakle, W je unitaran operator koji standardnu ortonormiranu bazu prevodi u (f_n). Prema napomeni 2.3.6, i (f_n) je Parsevalov bazni okvir. Kako vrijedi $\|f_n\|^2 = \langle f_n, f_n\rangle = \langle We_n, We_n\rangle = \langle e_n, e_n\rangle = \|e_n\|^2 = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, po napomeni 2.6.6, (f_n) je ortonormirana baza. □

Napomena 2.6.9. *Neka je (x_n) bazni okvir za H, a F operator baznog okvira (x_n). Tada je, po propoziciji 2.3.3, $(F^{-\frac{1}{2}}x_n)$ Parsevalov bazni okvir za H. Drugačije rečeno, svaki bazni okvir je sličan nekom Parsevalovom baznom okviru za H.*

Poglavlje 3

Nadopuna Besselovog niza do baznog okvira

Neka je (x_n) proizvoljan niz u Hilbertovom prostoru H. Logično je pitati se možemo li dodavanjem vektora proširiti (x_n) do baznog okvira za H. Ukoliko početni niz (x_n) nije Besselov, očito je da navedena nadopuna ne postoji. Naime, nije moguće dodavanjem vektora postići desnu nejednakost u definicionom uvjetu 2.1. Ako je pak (x_n) Besselov niz, u [3] je pokazano da je uvijek moguće nadopuniti ga do baznog okvira. Trivijalno, možemo ga nadopuniti beskonačnim nizom vektora (f_n) takvim da je (f_n) bazni okvir.

Pažnju ćemo posvetiti situacijama u kojima je dovoljan konačan broj vektora kako bismo Besselov niz nadopunili do baznog okvira. Posebno, razmotrit ćemo koji su uvjeti na početni niz nužni i dovoljni da bi bila moguća nadopuna do Parsevalovog baznog okvira.

Radi jasnoće izlaganja, beskonačan niz vektora u ovom poglavlju označavat ćemo s $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, a niz od k elemenata s $(f_n)_{n=1}^{k}$.

3.1 Konačna nadopuna Besselovog niza do baznog okvira

Na početku razmatrimo koji uvjeti nužno vrijede u situacijama kada je moguće nadopuniti Besselov niz do baznog okvira te je za takvu nadopunu dovoljan konačan broj vektora.

Neka je $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Besselov niz u prostoru H te pretpostavimo da postoji konačan niz vektora $(f_n)_{n=1}^{k}$ takav da je $(f_n)_{n=1}^{k} \cup (x_n)_{n=1}^{\infty}$ bazni okvir za prostor H.

Operator analize baznog okvira $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ označimo s U, a baznog okvira $(f_n)_{n=1}^{k} \cup (x_n)_{n=1}^{\infty}$ s U_1. Znamo da za svaki bazni okvir postoji barem jedan dualni bazni okvir pa označimo neki dualni bazni okvir niza $(f_n)_{n=1}^{k} \cup (x_n)_{n=1}^{\infty}$ sa $(g_1, g_2, \dots, g_k, y_1, y_2, \dots)$ ili, kraće zapisano, $(g_n)_{n=1}^{k} \cup (y_n)_{n=1}^{\infty}$, a njemu pridruženi operator analize sa V_1. Kako je $(g_n)_{n=1}^{k} \cup (y_n)_{n=1}^{\infty}$ bazni okvir, posebno je i Besselov niz. Jasno, i $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ je Besselov niz. Njegov operator analize označimo s V. Također, i niz dobiven djelovanjem k-te potencije operatora jednostranog pomaka na $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, $S^k(y_n)_{n=1}^{\infty} = (0, \dots, 0, y_1, y_2, \dots)$ je Besselov, a njegov operator analize označimo s V_0. Po propoziciji 2.1.10, operatori analize Besselovih nizova V_1 i V_0 su ograničeni pa je i operator Q definiran s $Q = V_1 - V_0$ ograničen. Nadalje, očito vrijedi $\dim(\operatorname{Im} Q) < \infty$. Dakle, operator Q je konačnog ranga, a samim time, prema 1.3.47, i kompaktan operator.

Nizovi $(f_n)_{n=1}^{k} \cup (x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(g_n)_{n=1}^{k} \cup (y_n)_{n=1}^{\infty}$ su međusobno dualni bazni okviri pa znamo da je $V_1^* U_1 = I$. Uočimo da vrijedi $V_0^* U_1 x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle y_n = V^* U x, \forall x \in H$.

Sada imamo $V^* U = V_0^* U_1 = (V_1 - Q)^* U_1 = V_1^* U_1 - Q^* U_1 = I - Q^* U_1$, odakle slijedi $I - V^* U = Q^* U_1$. Kako je Q konačnog ranga, i operator Q^*, odnosno $I - V^* U$ ima konačni rang.

Time smo pokazali nužne uvjete da bi proizvoljni Besselov niz bilo moguće nadopuniti do baznog okvira dodavanjem konačnog broja vektora. Formulirajmo taj rezultat u sljedeću propoziciju.

Propozicija 3.1.1. *Neka je $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Besselov niz u Hilbertovom prostoru H za kojeg postoji konačan niz vektora $(f_n)_{n=1}^{k}$ takav da je prošireni niz $(f_n)_{n=1}^{k} \cup (x_n)_{n=1}^{\infty}$ bazni okvir za H. Označimo s U operator analize niza $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Tada postoji Besselov niz $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ takav da za njemu pridruženi operator analize V operator $I - V^* U$ ima konačan rang.*

Sada nam je cilj utvrditi pod kojim je uvjetima Besselov niz $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ moguće nadopuniti konačnim nizom $(f_n)_{n=1}^{k}$ tako da je nastali niz $(f_n)_{n=1}^{k} \cup (x_n)_{n=1}^{\infty}$ bazni okvir. Pokazat ćemo da vrijedi obrat prethodne propozicije. Štoviše, označimo li, kao ranije, s U i V operatore analize nizova $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, dovoljno je zahtijevati kompaktnost operatora $I - V^* U$. Taj rezultat iskazan je narednim teoremom.

Teorem 3.1.2. *Neka je $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Besselov niz s ogradom B i operatorom analize U, a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ Besselov niz s ogradom D i operatorom analize V. Ako je $I - V^* U$ kompaktan operator, onda postoje $(f_n)_{n=1}^{k}$ i $(g_n)_{n=1}^{l}$ konačni nizovi takvi da su $(f_n)_{n=1}^{k} \cup (x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(g_n)_{n=1}^{l} \cup (y_n)_{n=1}^{\infty}$ bazni okviri prostora H sa gornjim granicama B i D, respektivno.*

Napomena 3.1.3. *Ako je $(f_1, f_2, \dots, f_k)$ konačan niz vektora u H prešutno ćemo podrazumijevati da njegov operator analize također poprima vrijednosti u l^2. Drugačije rečeno, svaki konačan niz vektora ćemo proširiti do beskonačnog niza dodajući mu nul-niz.*

Navedimo najprije dvije leme koje ćemo koristiti u dokazu navedenog teorema.

Lema 3.1.4. *Neka je T ograničen operator na Hilbertovom prostoru H takav da $I - T$ kompaktan operator. Tada je T ograničen odozdo na* $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$.

Dokaz. Pretpostavimo da operator T nije ograničen odozdo na $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$. Prema 1.3.7, tada postoji niz jediničnih vektora $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ iz $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ takav da je $\lim_{n \to \infty} T x_n = 0$. Niz $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je ograničen pa, po 1.3.15, ima slabo konvergentan podniz $(x_{p_n})_{n=1}^{\infty}$.

Po pretpostavci operator $I-T$ je kompaktan. Po 1.3.44 znamo da kompaktni operatori slabo konvergentne nizove prevode u jako konvergentne nizove pa je niz $(I-T)x_{p_n}$ jako konvergentan te postoji vektor x iz H takav da vrijedi $\lim_{n\to\infty}(I-T)x_{p_n} = x$.

Označimo $I-T = C$. Sada $I = T + C$ povlači $\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \lim_{n\to\infty}(T+C)x_{p_n} = \lim_{n\to\infty} Tx_{p_n} + \lim_{n\to\infty} Cx_{p_n} = 0 + x = x$. Iz $\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = x$ te neprekidnosti operatora T dobivamo $\lim_{n\to\infty} Tx_{p_n} = Tx$. Drugim riječima, $Tx = 0$ pa je $x \in \operatorname{Ker} T$. Međutim, kako je $(x_{p_n})_{n=1}^{\infty}$ niz jediničnih vektora u $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$, i x mora biti jedinični vektor te, jer je $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ po 1.3.32 zatvoren, x mora biti u $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ čime dolazimo do kontradikcije s podatkom $x \in \operatorname{Ker} T$. Dakle, dani operator T mora biti ograničen odozdo na $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$. □

Lema 3.1.5. *Neka su U i V ograničeni operatori s Hilbertovog prostora H na Hilbertov prostor K takvi da je $I - V^*U$ kompaktan. Tada je* $\operatorname{Im} U$ *zatvoren potprostor prostora K, potprostor* $\operatorname{Ker} U$ *je konačnodimenzionalan te vrijedi $U^{\dagger}U = I - P$ gdje je P ortogonalna projekcija na* $\operatorname{Ker} U$*, a $U^{\dagger}$ pseudoinverz operatora U.*

Dokaz. Po pretpostavci, operatori U i V su ograničeni, pa su i V^* i V^*U ograničeni. Sada, po 1.3.3, dobivamo da su $\operatorname{Ker} U$ i $\operatorname{Ker} V^*U$ zatvoreni potprostori prostora H. Primijetimo da je $\operatorname{Ker} V^*U$ sadržan u slici kompaktnog operatora $C = I - V^*U$. Naime, ako je $x \in \operatorname{Ker} V^*U$, onda očito vrijedi $Cx = x$. Sada, prema 1.3.45, $\operatorname{Ker} V^*U$ mora biti konačnodimenzionalan, a zbog $\operatorname{Ker} U \subseteq \operatorname{Ker} V^*U$, dobivamo da je i $\operatorname{Ker} U$ konačnodimenzionalan.

Po prethodnoj lemi, V^*U je ograničen odozdo na $(\operatorname{Ker} V^*U)^{\perp}$. Dakle, postoji $M > 0$ takav da $M\|x\| \leq \|V^*Ux\| \leq \|V^*\|\|Ux\|$. Drugim riječima, i U ograničen odozdo na $(\operatorname{Ker} V^*U)^{\perp}$ pa je, zbog 1.3.6, $U(\operatorname{Ker} V^*U)^{\perp}$ zatvoren potprostor.

Dakle, $U(\operatorname{Ker} V^*U)$ je konačnodimenzionalan, zatvoren potprostor. Pokazali smo i da je $U(\operatorname{Ker} V^*U)^{\perp}$ zatvoren pa je konačno, prema 1.3.36, $\operatorname{Im} U = U(\operatorname{Ker} V^*U)^{\perp} + U(\operatorname{Ker} V^*U)$ zatvoren potprostor prostora K. Posljednja tvrdnja slijedi direktno iz 1.3.37. □

Sada možemo dokazati prethodni teorem.

Dokaz. Prethodna lema nam daje $\operatorname{Ker} U < \infty$ pa postoji konačan niz vektora $f_1, f_2, \ldots f_k$ takvih da čine bazni okvir za $\operatorname{Ker} U$ s gornjom granicom B. Označimo s F operator analize, a s $(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ neki dual niza $(f_n)_{n=1}^{k}$. Operator analize pridružen nizu $(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ označimo s G. Pretpostavljamo da su $(f_n)_{n=1}^{k}$ i $(z_n)_{n=1}^{k}$ elementi jezgre operatora U. Uočimo da tada za $x \in \operatorname{Ker} U$ vrijedi $G^*F = I$ pa je $G^*Fx = x$, dok za $x \in (\operatorname{Ker} U)^{\perp}$ vrijedi $\langle x, f_n\rangle = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, pa dobivamo $G^*Fx = \sum_{n=1}^{k}\langle x, f_n\rangle z_n = 0$. Drugačije rečeno, $G^*F = P$ pri čemu je P ortogonalni projektor na $\operatorname{Ker} U$. Sada po prethodnoj lemi vrijedi $U^{\dagger}U = I - G^*F$.

Primijetimo, također, da se svi elementi $\operatorname{Im} F$ i $\operatorname{Im} G$ mogu prikazati kao linearna kombinacija vektora $e_1, e_2, \ldots, e_k$ gdje je $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ standardna ortonormirana baza za l^2.

Označimo s U_1 operator analize niza $(f_n)_{n=1}^k \cup (x_n)_{n=1}^\infty$. Neka je S operator jednostranog pomaka, a W operator definiran s $W = G + S^k(U^\dagger)^*$. Kako očito vrijedi $U_1 = F + S^kU$, $F^*S^k = 0$, $G^*S^k = 0$ te $(S^*)^kS^k = I$, dobivamo da je $W^*U_1 = (G^* + U^\dagger)(S^*)^k(F + S^kU) = G^*F + U^\dagger U = P + (I - P) = I$. Sada je $\|x\| = \|W^*Ux\| \leq \|W^*\|\|Ux\|$ pa je U_1 je ograničen odozdo i zadovoljena je donja nejednakost u 2.1.

Kako bismo dokazali tvrdnju za gornju granicu baznog okvira, uočimo da za $x \in \operatorname{Ker} U$ je $\sum_{n=1}^\infty |\langle x, x_n\rangle|^2 = \|Ux\|^2 = 0$ i da vrijedi $\sum_{n=1}^k |\langle x, f_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2$. Ako je pak $x \in (\operatorname{Ker} U)^\perp$ imamo $\sum_{n=1}^k |\langle x, f_n\rangle|^2 = 0$.

Po Rieszovom teoremo o projekciji 1.3.35, proizvoljni $x \in H$ možemo zapisati kao $x = a + b$ pri čemu je $a \in \operatorname{Ker} U$, a $b \in (\operatorname{Ker} U)^\perp$. Sada je

$$\sum_{n=1}^k |\langle x, f_n\rangle|^2 + \sum_{n=1}^\infty |\langle x, x_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^k |\langle a, f_n\rangle|^2 + \|U(a + b)\|^2$$

$$\leq B\|a\|^2 + \|Ub\|^2 \leq B(\|a\|^2 + \|b\|^2) = B\|x\|^2.$$

Time je dokazana tvrdnja za $(x_n)_{n=1}^\infty$. Kako je očito i $I - U^*V$ kompaktan operator, tvrdnju za $(y_n)_{n=1}^\infty$ dokazujemo analogno.

□

Napomena 3.1.6. *Iz navedenog dokaza se vidi da tražena nadopuna nije jedinstvena čak ni kada zahtijevamo da gornja granica B ostane nepromijenjena. Mogli smo, naime, uzeti bilo koji niz koji razapinje jezgru operatora U. Jasno je da je najmanji mogući broj vektora potreban za navedenu nadopunu jednak dimenziji jezgre* Ker U. *U tom smislu, ako je $k =$* $\dim(\operatorname{Ker} U)$ *i ako s $(w_1, w_2, \dots w_k)$ označimo ortonormiranu bazu* Ker U*, jedan minimalan niz vektora dan je s $(\sqrt{B}w_1, \sqrt{B}w_2, \dots, \sqrt{B}w_k)$.*

Definicija 3.1.7. *Deficit niza $(x_n)_{n=1}^\infty$ u H je najmanji broj $d((x_n)_{n=1}^\infty)$ takav da postoji podskup G u H kardinalnosti $d((x_n)_{n=1}^\infty)$ takav da vrijedi $\overline{span}((x_n)_{n=1}^\infty \cup G) = H$.*

Napomena 3.1.8. *Neka je $(x_n)_{n=1}^\infty$ Besselov niz u H, a U pridruženi operator analize. Da bismo $(x_n)_{n=1}^\infty$ mogli s konačno mnogo vektora nadopuniti do baznog okvira, vidjeli smo da nužno mora biti* $\dim \operatorname{Ker} U < \infty$. *Također, iz definicije 3.1.7 slijedi da je tada $d((x_n)_{n=1}^\infty) < \infty$.*

Uočimo da je iz

$$(\overline{span}(x_n)_{n=1}^\infty)^\perp = (\overline{\operatorname{Im} U^*})^\perp = \operatorname{Ker} U$$

jasno da vrijedi $d((x_n)_{n=1}^\infty) =$ $\dim(\operatorname{Ker} U)$. *Ipak, uvjet $d((x_n)_{n=1}^\infty) < \infty$ nije dovoljan da bi tražena nadopuna postojala.*

Primjer 3.1.9. *Neka je $(e_n)_{n=1}^\infty$ standardna ortonormirana baza za l^2. Niz definiran s $(e_1, e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_4, \dots)$ je Besselov, a njegov operator analize je $U = S + I$ gdje* *je I operator identitete, a S operator jednostranog pomaka. Neka je $x \in \operatorname{Ker} U$. Tada za taj x vrijedi $Sx = -xI$. Međutim, po 1.3.42 operator S nema svojstvenih vrijednosti pa mora biti $x = 0$. Drugim riječima, $\dim(\operatorname{Ker} U) = 0$. Sada dobivamo da je i deficit danog niza također 0. Ipak, kako znamo po 1.3.42 da $\operatorname{Im}(S+I)$ nije zatvoren potprostor u l^2, iz propozicije 3.1.1 i leme 3.1.5 slijedi da ne postoji konačan niz vektora kojim bismo početni niz nadopunili do baznog okvira.*

Definicija 3.1.10. *Besselovi nizovi $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ s operatorima analize U i V, respektivno, su međusobno esencijalno dualni ako je operator $I - V^*U$ kompaktan.*

Objedinimo prethodne rezulate u sljedeći teorem.

Teorem 3.1.11. *Neka je $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Besselov niz. Postoji konačan niz vektora takav da čini nadopunu niza $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ do baznog okvira ako i samo ako postoji Besselov niz $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ esencijalno dualan nizu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

3.2 Konačna nadopuna Besselovih nizova do Parsevalovih baznih okvira

Vidjeli smo nužne i dovoljne uvjete da bi niz imao konačnu nadopunu do baznog okvira. Sada zahtjevamo više, da dobiveni bazni okvir bude Parsevalov. Kao i u prethodnom potpoglavlju, prvo ispitajmo koji su nužni uvjeti da bi navedena nadopuna postojala.

Neka je, dakle, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Besselov niz u H takav da za njega navedena nadopuna postoji, odnosno postoji niz $(f_n)_{n=1}^{k}$ takav da je $(f_n)_{n=1}^{k} \cup (x_n)_{n=1}^{\infty}$ Parsevalov bazni okvir u H.

Označimo s B optimalnu granicu Besselovog niza $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Kako vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{k} |\langle x, f_n\rangle|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 = \|x\|^2, \forall x \in H$, mora biti $B \leq 1$.

Štoviše, sljedećim teoremom ćemo pokazati da nužno mora biti $B = 1$.

Teorem 3.2.1. *Neka je $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Besselov niz u H s optimalnom granicom B i operatorom analize U. Tada je ekvivalentno:*

(i) Postoji konačan niz vektora $(f_n)_{n=1}^{k}$ u H takav da je $(f_n)_{n=1}^{k} \cup (x_n)_{n=1}^{\infty}$ Parsevalov bazni okvir za H.

(ii) $B = 1$ i slika operatora $I - U^*U$ je konačnodimenzionalna.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii)

Neka je U pridruženi operator analize niza $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, a F operator analize niza $(f_n)_{n=1}^{k}$. S U_1 označimo operator analize niza $(f_n)_{n=1}^{k} \cup (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Kao ranije, znamo da za U_1 vrijedi $U_1 = F + S^k U$. Po pretpostavci je $(f_n)_{n=1}^{k} \cup (x_n)_{n=1}^{\infty}$ Parsevalov bazni okvir za H pa dobivamo $U_1^* U_1 = I$.

Dakle, vrijedi $I = U_1^* U_1 = (F - S^k U)^*(F - S^k U) = F^* F + F^* S^k U + U^*(S^k)^* F + U^* U$. Označimo s $K = F^* F + F^* S^k U + U^*(S^k)^* F$. Kako je $(f_n)_{n=1}^k$ konačan niz, operatori F i F^* su konačnog ranga pa je stoga i K konačnog ranga te vrijedi $I - U^* U = K$. Posebno, kako ima konačnodimenzionalnu sliku, operator $I - U^* U$ nije invertibilan. Dakle, po 1.3.40 1 je u spektru operatora $U^* U$, odakle dobivamo da nužno vrijedi $B = 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Neka je $B = 1$. Sada je pozitivni korijen operatora $I - U^* U$, u oznaci $(I - U^* U)^{\frac{1}{2}}$,dobro definiran. Operator $(I - U^* U)^{\frac{1}{2}}$ je pozitivan i vrijedi $\operatorname{Ker}(I - U^* U)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{Ker}(I - U^* U)$. Također, kako je slika $\operatorname{Im}(I - U^* U)$ po pretpostavci konačnodimenzionalna, ona je i zatvorena pa možemo pisati $\operatorname{Im} I - U^* U = \operatorname{Im}(I - U^* U)^{\frac{1}{2}}$.

Označimo s k dimenziju slike operatora $I - U^* U$, a s M_k potprostor prostora l^2 definiran kao $M_k = span(e_n)_{n=1}^k$. Neka je $R \in \mathbb{B}(H, l^2)$ proizvoljna parcijalna izometrija s početnim potprostorom $\operatorname{Im}(I - U^* U)$, a završnim potprostorom M_k. Uočimo da vrijedi $\operatorname{Im} R \perp \operatorname{Im}(S^k U)$.

Dokažimo da je U_1 definiran sa $U_1 = R(I - U^* U)^{\frac{1}{2}} + S^k U$ izometrija. Za $x \in H$ vrijedi

$$||U_1 x||^2 = ||R(I - U^* U)^{\frac{1}{2}} x + S^k U x|| = ||R(I - U^* U)^{\frac{1}{2}} x||^2 + ||S^k U x||^2 =$$

$$||(I - U^* U)^{\frac{1}{2}} x||^2 + ||U x||^2 = \langle (I - U^* U x, x\rangle + \langle U^* U x, x\rangle = ||x||^2.$$

Kako je U_1 izometrija pa i injekcija, U^* je surjekcija i $||U|| = ||U^*|| = 1$. Dakle, $(U_1^* e_n)_{n=1}^\infty$ je Parsevalov bazni okvir za H. Primijetimo da je $U_1^* = (I - U^* U)^{\frac{1}{2}} R^* + U^*(S^*)^k$. Stoga za svaki $j \in \mathbb{N}$ dobivamo $U_1^* e_{k+j} = U^* e_j = x_j$. Dakle, početni Besselov niz $(x_n)_{n=1}^\infty$ možemo do Parsevalovog baznog okvira proširiti vektorima $f_j = (I - U^* U)^{\frac{1}{2}} R^* e_j$ gdje je $j \in \{1, 2, 3, \ldots, k\}$. $\square$

Napomena 3.2.2. *Neka je* $\dim(\operatorname{Im}(I - U^* U)) = k \leq l$ *, a* R' *parcijalna izometrija s* $\operatorname{Im}(I - U^* U)$ *na neki podprostor* K *takav da* $K \subseteq M_l$*. Tada možemo u prethodnom teoremu zamijeniti operator* U_1 *s* U_1' *definiranim kao* $U_1' = R'(I - U^* U)^{\frac{1}{2}} + S^l U$*. Time dobivamo da početni Besselov niz možemo do Parsevalovog baznog okvira nadopuniti s* l *elemenata.*

Stoga, minimalan broj vektora koji trebamo dodati početnom Besselovom nizu kako bismo dobili Parsevalov bazni okvir je dan s $k = \dim(\operatorname{Im}(I - U^* U))$.

Korolar 3.2.3. *Neka je* $(x_n)_{n=1}^\infty$ *Besselov niz s granicom manjom ili jednakom* B*, a* U *pridruženi operator analize takav da vrijedi* $\dim(\operatorname{Im}(I - U^* U)) = k$*. Neka je* $(w_1, w_2, \ldots, w_k)$ *ortonormirana baza za* $\operatorname{Im}(I - U^* U)$ *te neka su s* $f_j = (I - U^* U)^{\frac{1}{2}} w_j, \forall j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ *definirani vektori u* H*. Tada je* $(f_n)_{n=1}^k \cup (x_n)_{n=1}^\infty$ *Parsevalov bazni okvir za* H*.*

Prirodno je pitati se je li dovoljno, kao u teoremu 3.1.2, zahtijevati kompaktnost operatora $(I - U^* U)$. Međutim, odgovor je negativan. Naime, iako tada postoji ograničeni operator V takav da je $I - V^* U$ konačnog ranga, ne možemo zaključiti da je takav i $I - U^* U$.

Pogledajmo, primjerice, niz $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definiran s $x_n = \sqrt{\frac{n}{(n+1}}e_n, n \in \mathbb{N}$, gdje je $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ortonormirana baza za l^2. Ovako definirani niz je bazni okvir te vrijedi $B = 1$. Za odgovarajući operator analize U vrijedi $(I - U^*U)x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\langle x, e_n\rangle e_n, \forall x \in l^2$ pa je, stoga, $I - U^*U$ kompaktan operator. Ipak, kako je rang ovog operatora beskonačan, po teoremu 3.2.1, slijedi da se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ne može nadopuniti s konačno mnogo vektora do Parsevalovog baznog okvira.

Bibliografija

[1] Damir Bakić i Tomislav Berić, *Finite extensions of Bessel sequences*, arXiv preprint arXiv:1308.5709 (2013).

[2] Damir Bakić, *Normirani prostori*, 2014.

[3] Radu Balan, Peter G Casazza, Christopher Heil i Zeph Landau, *Deficits and excesses of frames*, Advances in Computational Mathematics **18** (2003), br. 2-4, 93–116.

[4] Peter G Casazza i Nicole Leonhard, *Classes of finite equal norm Parseval frames*, Contemporary Mathematics **451** (2008), 11–32.

[5] Ole Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Springer, 2002.

[6] Christopher Heil, *A basis theory primer*, Citeseer, 1998.

Sažetak

Ovaj rad sastoji se od tri cjeline. Prva cjelina obuhvaća definicije i važne rezultate teorije normiranih prostora potrebne za opis Besselovih nizova i baznih okvira, što čini centralni dio ovog rada.

U drugom poglavlju detaljno opisujemo Besselove nizove i bazne okvire iznoseći njihova svojstva i karakterizacije. Objašnjavamo pojam duala i dualnog baznog okvira te proučavamo osnovne rezultate vezane uz njih. Posebno izdvajamo usporedbu baza i baznih okvira te ističemo ekvivalenciju egzaktnih Parsevalovih baznih okvira i ortonormiranih baza Hilbertovog prostora. Naposlijetku stavljamo naglasak na napete bazne okvire, ističući Parsevalove bazne okvire.

Posebno je zanimljivo promotriti kada Besselov niz možemo s konačno mnogo elemenata nadopuniti do baznog okvira. U trećem poglavlju posvećujemo se razmatranju takvih situacija te iznosimo teoreme koji nam daju nužne i dovoljne uvjete da bi navedena nadopuna postojala. Također, navodimo i odgovarajući rezultat za nadopunu do Parsevalovog baznog okvira.

Summary

This thesis consists of three parts. The first part contains definitions and important results of the theory of normed vector spaces which will be used to describe Bessel sequences and frames.

In the second, central part of the thesis, we present properties and characterizations of Bessel sequences and frames. We describe duals and dual frames and show main results concerning them. Furthermore, we make a comparison of frames and bases and state the equivalence of exact, Parsel frames and orthonormal bases. Finally, we study tight frames and highlight Parsel frames.

In chapter three we state necessary and sufficient condition under which a Bessel sequence can be extended to a frame by adding a finite sequence of vectors. In the same spirit, we provide necessary and sufficient condition for the existence of a finite extension of a Bessel sequence to a Parsel frame.

Životopis

Rođena sam 1. srpnja 1991. godine u Splitu gdje sam 1997. godine upisala Osnovnu školu Pojišan. Potom sam 2005. godine upisala IV. gimnaziju Marko Marulić. Srednju školu završila sam 2009. godine, te iste godine upisala preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija 2012. godine, na istom sam fakultetu upisala diplomski studij Primijenjene matematike.

2013. godine počinjem držati radionice mladim nadarenim informatičarima u sklopu Zagrebačkog računalnog saveza. Učenike osnovnih škola podučavam programskim jezicima Logo, C i C++, dok srednjoškolcima predajem matematiku. Sudjelujem kao voditelj na informatičkim ljetnim kampovima na Silbi.