**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Barbara Malkoč

# NEWTONOVA METODA U BANACHOVIM PROSTORIMA I OPTIMALNO UPRAVLJANJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
Izv. prof. dr. sc. Marko Vrdoljak

Zagreb, 2014

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

# Sadržaj

# Uvod

Isaac Newton je opisao metodu za numeričko rješenje nelinearne jednadžbe $F(x) = 0$ za funkciju jedne varijable. Ova metoda je poznata kao Newtonova metoda.

Ta iterativna metoda definirana je s nizom

$$x_n = x_{n-1} - (F'(x_{n-1}))^{-1} F(x_{n-1}), \qquad n \geq 1$$

gdje je $x_0$ polazna aproksimacija jednadžbe.

Cilj je pokazati kako poopćena Newtonova metoda jednostavno dovodi do teorema o implicitnoj funkciji i teorema o inverznom preslikavanju. To nas dovodi do dokaza mnogih rezultata u teoriji običnih diferencijalnih jednadžbi. Na primjer, to su teoremi koji govore o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja kao i teoremi o neprekidnosti i diferencijabilnosti u ovisnosti o početnim uvjetima ili parametrima u jednadžbi. Također se navedena metoda veže uz teoriju nužnog uvjeta ekstremalnosti.

U prvom poglavlju će se obraditi dvije skupine teorema. Naime, svaka cjelina će imati teorem koji dovodi do rezultata egzistencije i jedinstvenosti rješenja Cauchyjevog problema kao i do nužnog uvjeta ekstremalnosti u varijacijskom računu. U svakoj cjelini će biti obrađen i teorem koji nas vodi prema rezultatu ovisnosti rješenja diferencijalne jednadžbe o početnim uvjetima.

Prvo poglavlje završava s Pontrjaginovim principom maksimuma koji predstavlja poveznicu prvog i drugog poglavlja ovoga rada.

U drugom poglavlju rada se primjenjuje navedeni Pontrjaginov princip maksimuma u teoriji upravljanja.

Namjera je razjasniti osnovne pojmove iz teorije upravljanja i primijeniti ih u primjerima koji se pojavljuju u svakodnevnom životu. Odabrana su tri jednostavna primjera tako da bi mogla što bolje objasniti primjenu navedene teorije upravljanja.

Sva tri primjera koriste jednostavniju inačicu Pontrjaginova principa maksimuma koji se i najčešće koristi u praksi, Pontrjaginov princip maksimuma iz prvog poglavlja dopušta prisustvo integralnih uvjeta tipa nejednakosti i jednakosti. U inačici teorema većina tih uvjeta nestaje pa je stoga jednostavnija primjena.

# Poglavlje 1

# Newtonova metoda

## 1.1 Teoremi o inverznom preslikavanju i implicitnoj funkciji

Neka je $X$ normiran prostor, $\hat{x} \in X$ i $\delta > 0$. Označimo sa $\bar{K}_X(\hat{x}, \delta)$ zatvorenu kuglu oko točke $\hat{x}$ radijusa $\delta$.

Ako je $Y$ neki drugi normirani prostor, tada s $\mathcal{L}(X, Y)$ označavamo skup svih neprekidnih linearnih operatora s $X$ u $Y$.

Neka je operator $\Lambda$ invertibilan (regularan).

**Teorem 1.1.1.** *( teorem o inverznom preslikavanju )*
*Neka su $X$ i $Y$ Banachovi prostori i $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ surjektivan operator.*
*Tada postoji desni inverz od $\Lambda$, tj.preslikavanje $R : Y \to X$ takvo da je*

$$\Lambda(R(y)) = y \qquad i \qquad \|R(y)\|_X \leq \gamma \|y\|_Y, \qquad za\ svaki \quad y \in Y \tag{1.1}$$

*za neku konstantu $\gamma > 0$.*
*Neka je nadalje $F : \bar{K}_X(\hat{x}, \delta) \to Y$ te postoji broj $0 < \theta < 1$ tako da relacija*

$$\|F(x) – F(x') – \Lambda(x – x')\|_Y \leq \frac{\theta}{\gamma}\|x - x'\|_X \tag{1.2}$$

*vrijedi za sve $x, x' \in \bar{K}_X(\hat{x}, \delta)$.*
*Tada za svaki $y \in \bar{K}_Y(F(\hat{x}), \delta_0)$, gdje je*

$$\delta_0 = \frac{\delta(1 - \theta)}{\gamma}, \tag{1.3}$$

*niz*

$$x_n = x_{n-1} + R(y – F(x_{n-1})), \qquad n \in \mathbb{N}, \quad x_0 = \hat{x} \tag{1.4}$$

*konvergira k elementu $\varphi(y) \in \bar{K}_X(\hat{x}, \delta)$ tako da je $F(\varphi(y)) = y$.*

*Štoviše vrijedi*

$$||\varphi(y)-\hat{x}||_X \leq \frac{\gamma}{(1-\theta)}||y-F(\hat{x})||_Y. \tag{1.5}$$

*Na kraju, ako je operator $\Lambda$ invertibilan, tada je funkcija $\varphi : \bar{K}_Y(F(\hat{x}), \delta_0) \to \bar{K}_X(\hat{x}, \delta)$, koja zadovoljava uvjet $F(\varphi(y)) = y$, jedinstvena i neprekidna .*

*Dokaz.* Egzistencija desnog inverza surjektivnog operatora $\Lambda$ slijedi iz Banachovog teorema o otvorenom preslikavanju. Zaista, ako je $K_X(0,1) = \{x \in X \,|\, ||x|| < 1\}$, tada $\Lambda(K_X(0,1))$ sadrži kuglu $\bar{K}_Y(0,r)$, $r > 0$, tj.
za svaki $y \in \bar{K}_Y(0,r)$ postoji element $x(y) \in K_X(0,1)$ tako da je $\Lambda(x(y)) = y$.
Stavimo $R(0) = 0$ i $R(y) = \left(\frac{\|\, y\,\|_Y}{r}\right) \times \left(\left(\frac{r}{\|\, y\,\|_Y}\right) y\right)$ za $y \neq 0$.
Tada je $\Lambda R(y) = y$ i $\|\, R(y)\,\|_X \leq \gamma \,\|\, y\,\|_Y$ gdje je $\gamma = \frac{1}{r}$ .

Sada dokažimo:

$$\begin{aligned} &(a) \quad x_n \in \bar{K}_X(\hat{x}, \delta) \quad za \quad svaki \quad n \geq 0 \\ &(b) \quad x_n \quad je \quad Cauchyjev \quad niz \end{aligned}$$

Tvrdnju pod (a) dokazujemo indukcijom. Očito je $\hat{x} \in \bar{K}_X(\hat{x}, \delta)$.
Neka je $x_k \in \bar{K}_X(\hat{x}, \delta)$ za $1 \leq k \leq n$. Riješimo li jednadžbu

$$\Lambda(x_{n+1} - x_n)-y + F(x_n) = 0 \tag{1.6}$$

dobijemo

$$||x_{n+1} - x_n||_X = ||R(y - F(x_n))||_X \leq \gamma||y - F(x_n)||_Y$$

gdje je jednakost dobivena iz (1.4), a nejednakost iz (1.1).

Zbog (1.6) sada je

$$\begin{aligned} \gamma||y - F(x_n)||_Y &\leq \gamma||F(x_n) - F(x_{n-1}) - \Lambda(x_n - x_{n-1})||_Y \\ &\leq \theta||x_n - x_{n-1}||_X \leq .... \leq \theta^n||x_1-\hat{x}||_X \end{aligned} \tag{1.7}$$

gdje prva nejednakost slijedi iz (1.2), a ostale analogno slijede.

Zatim, koristimo li nejednakost trokuta i formulu sume geometrijskog niza dobivamo,

$$\begin{aligned} ||x_{n+1}-\hat{x}||_X &\leq ||x_{n+1}-x_n||_X + ... + ||x_1-\hat{x}||_X \\ &\leq (\theta^n + \theta^{n-1} + ... + 1)||x_1-\hat{x}||_X \\ &\leq \frac{\gamma}{1-\theta}||y-F(\hat{x})||_Y \\ &\leq \delta, \end{aligned} \tag{1.8}$$

tj. $x_{n+1} \in \bar{K}_X(\hat{x}, \delta)$ što povlači $x_n \in \bar{K}_X(\hat{x}, \delta)$ za svaki $n \geq 0$.

Sada možemo dokazati (b) dio, tj. $\{x_n\}$ je Caucyjev niz.
Za svaki $n, m \in \mathbb{N}$ imamo

$$\|x_{n+m} - x_n\|_X \leq \|x_{n+m} - x_{n+m-1}\|_X + ... + \|x_{n+1} - x_n\|_X$$

gdje smo opet koristili nejednakost trokuta, odnosno

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\|_X &\leq (\theta^{n+m-1} + ... + \theta^n)\|x_1 - \hat{x}\|_X \\ &\leq \frac{\gamma\theta^n}{1-\theta}\|y - F(\hat{x})\|_Y \leq \delta\theta^n. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Dakle, dobili smo da je niz $\{x_n\}$ Cauchyjev niz pa je time i konvergentan u Banachovim prostorima.

Primijetimo da je $\varphi(y) = \lim_{n\to\infty} x_n$. Tada je $\varphi(y) \in \bar{K}_X(\hat{x}, \delta)$.

Iz (1.2) slijedi da je $F$ Lipschitzovo preslikavanje na $\bar{K}_X(\hat{x}, \delta)$ te je stoga $F$ neprekidan. Zbog (1.6), dobijemo da je $F(\varphi(y)) = y$ za svaki $y \in \bar{K}_Y(F(\hat{x}), \delta_0)$. Također, zbog (1.8) dobili smo ocjenu iz (1.5).

Pretpostavimo da je $\Lambda$ invertibilan operator. Neka je $R = \Lambda^{-1}$ i $\gamma = \|\Lambda^{-1}\|$.
Također, elementi niza iz (1.4) su neprekidno ovisni o $y$.
Pošto je nejednakost u (1.9) uniformna po $y$, također je i $\varphi$ neprekidna.

Za kraj pokažimo jedinstvenost. Neka je $\psi : \bar{K}_Y(F(\hat{x}), \delta_0) \to \bar{K}_X(\hat{x}, \delta)$ i $F(\psi(y)) = y$.
Tada je

$$\begin{aligned} \|\varphi(y) - \psi(y)\|_X &= \|\Lambda^{-1}(\Lambda(\varphi(y) - \psi(y)))\|_X \leq \|\Lambda^{-1}\| \, \|\Lambda(\varphi(y) - \psi(y))\|_Y \\ &= \|\Lambda^{-1}\| \, \|F(\varphi(y))F(\psi(y)) - \Lambda(\varphi(y) - \psi(y))\|_Y \\ &\leq \theta\|\varphi(y) - \psi(y)\|_X, \end{aligned}$$

gdje smo zadnju nejednakost dobili iz (1.2). Dobili smo da je $\varphi(y) = \psi(y)$ čime je dokazana jedinstvenost. □

**Teorem 1.1.2.** *(Baireov teorem o kategorizaciji)*
*Neka je X neprazan Banachov prostor te neka su $A_n$ zatvoreni skupovi takvi da je*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

*Tada barem jedan skup $A_n$ sadrži neprazan otvoren podskup.*

**Lema 1.1.3.** *Neka su X i Y Banachovi prostori, C zatvoren koveksan konus u X, $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ i $\Lambda(C) = Y$.*

*Tada postoji desni inverz od $\Lambda$, tj. preslikavanje $R : Y \to C$ takvo da je*

$$\Lambda(R(y)) = y \quad i \quad \|R(y)\|_X \leq \gamma \|y\|_Y$$

*za neku konstantu $\gamma > 0$ i za svaki $y \in Y$.*

*Dokaz.* Prema Teoremu 1.1.2, konstruiramo "gotovo" desni inverz od $\Lambda$. Zbog $\Lambda(C) = Y$, slijedi da je $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda(C \bigcap \bar{K}_X(0, n))$.

Prema Teoremu 1.1.2, tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, $\bar{y} \in Y$ i $r > 0$ tako da je

$$\bar{K}_Y(\bar{y}, r) \subset \overline{\Lambda(C \bigcap \bar{K}_X(0, n_0))}.$$

Ako je $y \in \bar{K}_Y(\bar{y}, r)$, tada postoji $x(y) \in (C \bigcap \bar{K}_X(0, n_0))$ tako da je

$$\|y - \Lambda x(y)\|_Y \leq \frac{r}{2}. \tag{1.10}$$

Sada, pretpostavimo da su $y \in Y$, $y \neq 0$ i $\bar{x} \in C$ tako da je $\Lambda \bar{x} = -\bar{y}$. Stavimo

$$R_1(y) = \frac{\|y\|_Y}{r} \left( x\left( \bar{y} + \frac{r}{\|y\|_Y} \right) + \bar{x} \right) \tag{1.11}$$

i $R_1(0) = 0$. Vrijedi da je $R_1(y) \in C$ za svaki $y \in Y$.

Neka je $y \neq 0$. Tada imamo

$$\begin{aligned} \|y - \Lambda(R_1(y))\|_Y &= \left\| y - \frac{\|y\|}{r} \Lambda x\left( \bar{y} + \frac{r}{\|y\|} y \right) + \frac{\|y\|}{r} \bar{y} \right\|_Y \\ &= \frac{\|y\|}{r} \left\| \bar{y} + \frac{r}{\|y\|} y - \Lambda x\left( \bar{y} + \frac{r}{\|y\|} y \right) \right\|_Y \\ &\leq \frac{\|y\|}{r} \frac{r}{2} = \frac{\|y\|}{2}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Nadalje,

$$\|R_1(y)\|_X \leq \frac{\|y\|}{r} (n_0 + \|\bar{x}\|) = \gamma_1 \|y\|. \tag{1.13}$$

Da bismo konstruirali desni inverz od $\Lambda$, koristimo Newtonovu metodu. Neka je $y \in Y$. Promatrajmo niz

$$x_n = x_{n-1} + R_1(y - \Lambda x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_0 = 0. \tag{1.14}$$

Pokažimo sada da je niz $\{x_n\}$ Cauchyjev niz.

$$\begin{aligned} \|y - \Lambda x_n\|_Y &= \|y - \Lambda x_{n-1} - \Lambda(R_1(y - \Lambda x_{n-1}))\|_Y \\ &\leq \frac{1}{2} \|y - \Lambda x_{n-1}\|_Y \leq \ldots \leq \frac{1}{2^n} \|y\| \end{aligned} \tag{1.15}$$

gdje slijedi

$$\|x_{n+1} - x_n\|_X = \|R_1(y - \Lambda x_n)\|_X \leq \gamma_1 \|y - \Lambda x_n\|_Y \leq \frac{\gamma_1 \|y\|}{2^n}. \tag{1.16}$$

Nadalje, vrijedi da za svaki $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \|x_{n+m} - x_{n+m-1}\| + ... + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq \left(\frac{1}{2^{n+m-1}} + ... + \frac{1}{2^n}\right)\gamma_1 \|y\| \\ &\leq \frac{\gamma_1 \|y\|}{2^{n-1}}, \end{aligned} \tag{1.17}$$

tj. $\{x_n\}$ je Caucyjev niz.

Prema pretpostavci, X je Banachov prostor, pa niz $\{x_n\}$ konvergira.
Stavimo $R(y) = \lim_{n\to\infty} x_n$. Zbog konveksnosti konusa $C$, slijedi iz (1.14) da $\{x_n\} \subset C$, a pošto je konus zatvoren, slijedi da je $R(y) \in C$. Pustimo li limes u (1.15) slijedi da je $\Lambda(R(y)) = y$.

Nadalje,

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x_{n-1}\| + ... + \|x_1\| \leq \left(\frac{1}{2^{n-1}} + .. + 1\right)\gamma_1 \|y\| \leq 2\gamma_1 \|y\|.$$

Na limesu dobijemo

$$\|R(y)\|_X \leq \gamma \|y\|_Y$$

gdje je $\gamma = 2\gamma_1$. □

**Teorem 1.1.4.** *(teorem o implicitnoj funkciji)*

*Neka su $X$ i $Y$ Banachovi prostori, $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ te neka je $C$ zatvoren konveksan konus u $X$ i $\Lambda(C) = Y$. Neka je $R_1 : Y \to C$ desni inverz od $\Lambda$ prema Lemi 1.1.3.*

*Neka su $\hat{x} \in X$, $\delta > 0$, $\Sigma$ neprazan skup, $F : \Sigma \times (\bar{K}_X(\hat{x}, \delta) \bigcap (\hat{x} + C)) \to Y$ te neka postoji broj $0 < \theta < 1$ tako da je*

$$\|F(\sigma, x) - F(\sigma, x') - \Lambda(x - x')\|_Y \leq \frac{\theta}{\gamma_1} \|x - x'\|_X \tag{1.18}$$

*za sve $\sigma \in \Sigma$ i sve $x, x' \in (\bar{K}_X(\hat{x}, \delta) \bigcap (\hat{x} + C))$.*

*Tada za svaki $\sigma \in \Sigma$ i $y \in \bar{K}_Y(F(\sigma, \hat{x}), \delta_0)$ gdje je*

$$\delta_0 = \frac{\delta(1 - \theta)}{\gamma_1} \tag{1.19}$$

*niz*

$$x_n = x_{n-1} + R_1(y - F(\sigma, x_{n-1})), \qquad n \in \mathbb{N}, \quad x_0 = \hat{x}, \tag{1.20}$$

*konvergira k elementu* $\varphi(\sigma, y) \in (\bar{K}_X(\hat{x}, \delta) \bigcap (\hat{x} + C))$ *tako da je* $F(\sigma, \varphi(\sigma, y)) = y$.

*Štoviše,*

$$\|\varphi(\sigma, y) - \hat{x}\|_X \leq \frac{\gamma_1}{1-\theta}\|y - F(\sigma, \hat{x})\|_Y. \tag{1.21}$$

*Dokaz.* Dokaz je zapravo analogon dokaza iz prethodnog teorema, ali raspisat ćemo ga u cijelosti.

Neka $K(0,1) = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ sadrži kuglu $\bar{K}_Y(0, r)$, $r > 0$, tj. za svaki $y \in \bar{K}_Y(0, r)$ postoji element $x(y) \in K_X(0, 1)$ t.d. je $\Lambda(x(y)) = y$.

Stavimo $R_1(0) = 0$ i $R_1(y) = \left(\frac{\|y\|}{r}\right) \times \left(\frac{r}{\|y\|}\right) y$, $y \neq 0$. Tada je $\Lambda R_1(y) = y$ i $\|R_1(y)\| \leq \gamma_1\|y\|$, za $\gamma_1 = \frac{1}{r}$.

Trebamo dokazati

$$\begin{aligned} &(a) \qquad x_n \in (\bar{K}(\hat{x}, \delta) \cap (\hat{x} + C)), \quad \forall n \geq 0 \\ &(b) \qquad \{x_n\} \quad je \quad Cauchyjev \quad niz. \end{aligned}$$

(a) Očito je $\hat{x} \in \bar{K}(\hat{x}, \delta)$ i $\hat{x} \in (\hat{x} + C)$ pa je i element iz njihovog presjeka. Vrijedi da je $x_n \in C$, za svaki n jer je konus $C$ konveksan pa je $x_n \in \hat{x} + C$, za svaki n.

Neka je $x_k \in \bar{K}(\hat{x}, \delta)$, $1 \leq k \leq n$. Izračunamo

$$\Lambda(x_n - x_{n-1}) - y + F(\sigma, x_{n-1}) = 0. \tag{1.22}$$

Dobijemo

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|R_1(y - F(\sigma, x_n))\| \leq \gamma_1\|y - F(\sigma, x_n)\|.$$

Zbog (1.22) je sada

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &\leq \gamma_1\|F(\sigma, x_n) - F(\sigma, x_{n-1}) - \Lambda(x_n - x_{n-1})\| \\ &\leq \theta\|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq \theta^n\|x_1 - \hat{x}\|. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Koristimo li nejednakost trokuta i formulu sume geometrijskog reda, dobijemo

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - \hat{x}\| &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + ... + \|x_1 - \hat{x}\| \\ &\leq (\theta^n + \theta^{n-1} + ... + 1)\|x_1 - \hat{x}\| \\ &\leq \frac{\gamma_1}{1-\theta}\|y - F(\sigma, \hat{x})\| \\ &\leq \delta, \end{aligned} \tag{1.24}$$

tj. $x_{n+1} \in \bar{K}(\hat{x}, \delta)$ što povlači $x_n \in \bar{K}(\hat{x}, \delta)$, za svaki n.
Dakle, $x_n \in (\bar{K}(\hat{x}, \delta) \bigcap (\hat{x} + C))$, za svaki $n$.

(b) Tvrdimo da je $\{x_n\}$ Cauchyjev niz. Za svaki $n, m \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \|x_{n+m} - x_{n+m-1}\| + ... + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq (\theta^{n+m-1} + ... + \theta^n)\|x_1 - \hat{x}\| \\ &\leq \frac{\gamma_1 \theta^n}{1-\theta}\|y - F(\sigma, \hat{x})\| \\ &\leq \delta\theta^n. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Dobili smo da je $\{x_n\}$ Cauchyjev niz i konvergentan u Banachovom prostoru X.

Neka je $\varphi(\sigma, y) = \lim_{n\to\infty} x_n$. Tada je $\varphi(\sigma, y) \in (\bar{K}(\hat{x}, \delta) \bigcap (\hat{x} + C))$.

Zatim, $F$ je Lipschitzova po drugoj varijabli (1.18), tj. na $(\bar{K}(\hat{x}, \delta) \cap (\hat{x} + C))$ pa je $F$ neprekidna. Zbog (1.22) dobijemo da je $F(\sigma, \varphi(\sigma, y)) = y,\ y \in \bar{K}(F(\sigma, \hat{x}), \delta_0)$.

Pretpostavimo da je $\Lambda$ invertibilan operator. Neka je $R_1 = \Lambda^{-1}$ i $\gamma_1 = \|\Lambda^{-1}\|$. Elementi niza iz (1.20) neprekidno ovise o y. Pošto je nejednakost u (1.25) uniformna po y, tada je i $\varphi$ neprekidna.

Preostalo nam je pokazati još samo jedinstvenost od $\varphi$. Neka je $\psi : \bar{K}(F(\sigma, \hat{x}), \delta_0) \to (\bar{K}(\hat{x}, \delta) \bigcap (\hat{x} + C))$ i $F(\sigma, \psi(\sigma, y)) = y$.
Tada je

$$\begin{aligned} \|\varphi(\sigma, y) - \psi(\sigma, y)\| &\leq \|\Lambda^{-1}(\Lambda(\varphi(\sigma, y) - (\psi(\sigma, y))))\| \\ &\leq \|\Lambda^{-1}\|\, \|\Lambda(\varphi(\sigma, y) - \psi(\sigma, y))\| \\ &\leq \|\Lambda^{-1}\|\, \|F(\varphi(\sigma, y))F(\psi(\sigma, y)) - \Lambda(\varphi(\sigma, y) - \psi(\sigma, y))\| \\ &\leq \theta\|\varphi(\sigma, y) - \psi(\sigma, y)\|, \end{aligned}$$

tj. $\varphi(\sigma, y) = \psi(\sigma, y)$. □

Teorem 1.1.1 ima vrlo važnih primjena. U ovom radu istaknut ćemo teorem o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja Cauchyjevog problema za sustav običnih diferencijalnih jednadžbi. Točnije mislimo na lokalno rješenje u nelinearnom slučaju, odnosno na globalno rješenje u linearnom slučaju. Teorem (1.1.4) za posljedicu ima teorem o neprekinutoj ovisnosti i diferencijabilnosti rješenja s obzirom na početne uvjete.

Vektore iz $\mathbb{R}^n$ zapisujemo kao stupce $x = (x_1, ..., x_n)^T$ gdje T označuje transponiranje, te s $| x |= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ označavamo euklidsku normu vektora .

Neka je $(t, x) \mapsto f(t, x)$ realna funkcija n+1 varijable, gdje je $t \in \mathbb{R}$ i $x \in \mathbb{R}^n$. Pretpostavimo da je $f$ neprekidna u okolini točke $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Promatrajmo Cauchyjev problem

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad x(\tau) = \xi. \tag{1.26}$$

Ovdje, kao (lokalno) rješenje mislimo na neprekinuto diferencijabilnu vektorsku funkciju $\hat{x}$ definiranu na intervalu $[\tau{-}\alpha, \tau+\alpha]$ tako da je $\dot{\hat{x}}(t) = f(t, \hat{x}(t))$ za svaki $t \in [\tau{-}\alpha, \tau + \alpha]$ i $\hat{x}(\tau) = \xi$ .

Primjetimo da skup svih neprekinutih funkcija u $\mathbb{R}^n$ na segmentu $\Delta$ označujemo s $C(\Delta; \mathbb{R}^n)$. Taj skup je Banachov prostor s normom $\|x\|_{C(\Delta;\mathbb{R}^n)} = \max_{t\in\Delta} |x(t)|$, gdje je $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))^T$.

**Teorem 1.1.5.** *a) (teorem o lokalnoj egzistenciji i jedinstvenosti rješenja)*

*Neka su $\tau \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $a > 0$, $b > 0$ te neka je $D = [\tau{-}a, \tau + a] \times \bar{K}_{\mathbb{R}^n}(\xi, b)$.*

*Pretpostavimo da je $f : D \to \mathbb{R}^n$ neprekidna funkcija na $D$ te Lipschitzova po $x$ na $D$, tj. postoji konstanta $L > 0$ takva da nejednakost*

$$|f(t, x_1){-}f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \tag{1.27}$$

*vrijedi za sve $(t, x_i) \in D, i = 1, 2$.*

*Tada postoji broj $0 < \alpha \leq a$ takav da Cauchyjev problem (1.26) ima jedinstveno rješenje $\hat{x}$ na segmentu $\Delta = [\tau{-}\alpha, \tau + \alpha]$ . Štoviše, vrijedi*

$$\max_{t\in\Delta} |\hat{x}(t){-}\xi| \leq 2 \max_{\eta\in\bar{K}_{\mathbb{R}^n}(\xi,b)} \left| \int_\tau^t f(s, \eta)\, \mathrm{d}s \right| .$$

*b) (teorem o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja za linearne sustave)*

*Pretpostavimo da je u jednadžbi (1.26) funkcija f jednaka $f(t, x) = A(t)x + b(t)$, gdje su $A : [t_0, t_1] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ i $b : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ neprekidne. Tada za svaki $\tau \in [t_0, t_1]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ postoji jedinstveno rješenje problema (1.26) na $[t_0, t_1]$.*

*Dokaz.* Neka je $\alpha = \min (a, \dfrac{1}{2L}, \dfrac{b}{2M})$, gdje je $M = \max_{t\in[\tau-\alpha,\tau+\alpha]} |f(t, \xi)|$.

Iskoristimo Teorem 1.1.1 o inverznom preslikavanju: stavimo $X = Y = C(\Delta; \mathbb{R}^n)$, gdje je $\Delta = [\tau{-}\alpha, \tau + \alpha]$. Nadalje, neka je $\Lambda$ identiteta, $R = \Lambda^{-1}$, $\gamma = \|\Lambda^{-1}\| = 1$, $\hat{x} = \xi, \delta = b, \theta = \dfrac{1}{2}$.

Također $F : \bar{K}_X(\xi, b) \to Y$ je definirana formulom

$$F(x)(t) = x(t){-}\xi - \int_\tau^t f(s, x(s))\mathrm{d}s, \qquad t \in \Delta. \tag{1.28}$$

Za svaki $x_1, x_2 \in \bar{K}_X(\xi, b)$ i $t \in \Delta$ imamo

$$\begin{aligned} |F(x_1)(t) - F(x_2)(t){-}(x_1(t){-}x_2(t))| &= \left| \int_\tau^t f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\mathrm{d}s \right| \\ &\leq |t - \tau|\, L \,\|x_1(t){-}x_2(t)\|_{C(\Delta;\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \frac{1}{2}\|x_1{-}x_2\|_{C(\Delta;\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \tag{1.29}$$

gdje je jednakost iz (1.28), prva nejednakost iz (1.27) te vrijedi (1.2).

Zatim,

$$|F(\xi)(t)| = \int_\tau^t f(s,\xi)\mathrm{d}s \le |t-\tau|M \le \frac{b}{2} \tag{1.30}$$

te sada (1.3) vrijedi za $y = 0$.

Tada, prema Teoremu 1.1.1, postoji jedinstvena funkcija $\hat{g} \in \bar{K}_X(\xi, b)$ tako da je

$$\hat{g}(t) – \xi - \int_\tau^t f(s,\hat{x}(s))\mathrm{d}s = 0, \qquad \forall t \in \Delta. \tag{1.31}$$

To znači da je $\hat{g}$ jedinstveno rješenje Cauchyjevog problema (1.26) na segmentu $\Delta$. Zadnja tvrdnja slijedi direktno iz ocjene (1.5).

Sada izvedimo drugu tvrdnju teorema. Označimo s $c = (t_1 - t_0) \underset{t\in[t_0,t_1]}{max} \|A(t)\|$ i neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{c^m}{m!} \le \frac{1}{2}$.
Neka je $F : C([t_0,t_1];\mathbb{R}^n) \to C([t_0,t_1];\mathbb{R}^n)$, $F(x) = x - G^m(x)$ gdje je $G$ definiran s

$$G(x)(t) = \xi + \int_\tau^t (A(s)x(s) + b(s))\mathrm{d}s$$

za svaki $t \in [t_0,t_1]$ i $G^m = G \circ ... \circ G$ (m puta).

Za svaki par $x_1, x_2 \in C(\Delta;\mathbb{R}^n)$ i svaki $t \in [t_0,t_1]$, iz neposrednog računanja dobijemo

$$\begin{aligned}
&|F(x_1)(t) - F(x_2)(t) – (x_1(t) – x_2(t))|\\
&\le |G^m(x_1)(t) - G^m(x_2)(t)|\\
&\le |\int_\tau^t \|A(s_1)\| \int_\tau^{s_1} \|A(s_2)\| \int_\tau^{s_2} ... \int_\tau^{s_{m-1}} \|A(s_m)\| |x_1(s_m) - x_2(s_m)| ds_m ds_{m-1} ... ds_2 ds_1|\\
&\le c^m \|x_1 - x_2\|_{C([t_0,t_1];\mathbb{R}^n)} \left| \int_\tau^t ds_1 \int_\tau^{s_1} ds_2 \int_\tau^{s_2} ... \int_\tau^{s_{m-2}} ds_{m-1} \int_\tau^{s_{m-1}} ds_m \right|\\
&= c^m \|x_1 - x_2\|_{C([t_0,t_1];\mathbb{R}^n)} \frac{|t-\tau|^m}{m!} \le c^m \|x_1 - x_2\|_{C([t_0,t_1];\mathbb{R}^n)} \frac{(t-t_0)^m}{m!}\\
&= \frac{c^m}{m!} \|x_1 – x_2\|_{C([t_0,t_1];\mathbb{R}^n)}\\
&\le \frac{1}{2} \|x_1 – x_2\|_{C([t_0,t_1];\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Neka je sada $x_0$ proizvoljna funkcija u $C([t_0,t_1];\mathbb{R}^n)$ i $\delta \ge \|F(x_0)\|_{C([t_0,t_1];\mathbb{R}^n)}$.
Prethodna nejednakost vrijedi za bilo koju funkciju $x_i \in \bar{K}_X(x_0,\delta)$, $i = 1, 2$.
Također je $\|F(x_0)\|_{C([t_0,t_1];\mathbb{R}^n)} \le \frac{\delta}{2}$.

Tada, koristeći Teorem 1.1.1, stavimo $X = Y = C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ , $\Lambda$ je identiteta, $R = \Lambda^{-1}$, $\gamma = \|\Lambda^{-1}\| = 1$ i $\theta = \frac{1}{2}$. Tada postoji jedinstvena funkcija $\hat{x} \in \bar{K}_X(x_0, \delta)$ takva da je $F(\hat{x}) = 0$. Sve dok je $\delta$ proizvoljno velik, slijedi da je $\hat{x}$ jedinstvena funkcija na $C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ tako da zadovoljava uvjet $F(\hat{x}) = \hat{x} - G^m(\hat{x}) = 0$. Dakle, $G(\hat{x}) = \hat{x}$ iz čega slijedi da je $\hat{x}$ rješenje problema (1.26). Također je dobiveno rješenje jedinstveno. □

Neka je $(t, x, \eta) \mapsto f(t, x, \eta)$ funkcija s $n + 1 + k$ varijabli ($t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^k$) s vrijednostima u $\mathbb{R}^n$ koja je neprekidna na nekom otvorenom skupu u $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.
Promatrajmo sada familiju Cauchyjevih problema

$$\dot{x} = f(t, x, \eta), \qquad x(\tau) = \xi, \tag{1.32}$$

za koju je rješenje definirano isto kao u problemu (1.26) te je označeno kao $x(\cdot; \tau, \xi, \eta)$.

**Teorem 1.1.6.** *(o ovisnosti rješenja o početnim uvjetima)*

*Neka je $G$ otvoren podskup u $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ i $W$ otvoren podskup u $\mathbb{R}^k$. Pretpostavimo da je funkcija $f : G \times W \to \mathbb{R}^n$ s varijablama $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^k$ te su njezine parcijalne derivacije $f_x$ neprekidne na $G \times W$.*

*Nadalje, vrijedi da je $\hat{x}$ rješenje problema (1.32) za $\eta = \hat{\eta} \in W$ na segmentu $\Delta = [t_0, t_1]$ te je $\Gamma(\hat{x}) = \{(t, \hat{x}(t)) \mid t \in \Delta\} \subset G$. Tada postoji okolina $G_1 \subset G$ skupa $\Gamma(\hat{x})$ i okolina $\hat{W} \subset W$ točke $\hat{\eta}$ takva da za svaki $(\tau, \xi, \eta) \in \hat{G} \times \hat{W}$, gdje je $\hat{G} = \{(\tau, \xi) \in G_1 | \tau \in \Delta\}$, problem (1.32) ima jedinstveno rješenje $x(\cdot; \tau, \xi, \eta)$ na segmentu $\Delta$.*

*Dodatno, za svaki $\eta \in \hat{W}$, preslikavanje $(\tau, \xi) \mapsto x(\cdot; \tau, \xi, \eta)$ iz $\hat{G}$ u $C(\Delta; \mathbb{R}^n)$ je neprekidno diferencijabilno i njezine parcijalne derivacije*

$$\frac{\partial x}{\partial \tau}(\cdot; \tau, \xi, \eta) = z = z(\cdot; \tau, \xi, \eta)$$

*i*

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(\cdot; \tau, \xi, \eta) = \zeta = \zeta(\cdot; \tau, \xi, \eta)$$

*na $\Delta$ zadovoljavaju diferencijalne jednadžbe*

$$\dot{z} = f_x(t, x(t; \tau, \xi, \eta), \eta)z, \qquad z(\tau) = -f(\tau, \xi, \eta) \tag{1.33}$$

*i*

$$\dot{\zeta} = f_x(t, x(t; \tau, \xi, \alpha), \alpha)\zeta, \qquad \zeta(\tau) = E, \tag{1.34}$$

*gdje je $E$ jedinična matrica.*

*Ako postoji parcijalna derivacija $f_\eta$ i neprekidna je na $G \times W$, tada je preslikavanje $\eta \mapsto x(\cdot; \tau, \xi, \eta)$ u $\hat{W} \in C(\Delta; \mathbb{R}^n)$ neprekidno diferencijabilno za svaki $(\tau, \xi) \in \hat{G}$.*
*Njezine derivacije*

$$\frac{\partial x}{\partial \eta}(\cdot; \tau, \xi, \eta) = y = y(\cdot; \tau, \xi, \eta)$$

*na* $\Delta$ *zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu*

$$\dot{y} = f_x(t, x(t; \tau, \xi, \eta), \eta)y + f_\eta(t, x(t; \tau, \xi, \eta), \eta), \qquad y(\tau) = 0. \tag{1.35}$$

*Dokaz.* Lako ćemo dokazati da je $\{(t, x) \;:\; |x - \hat{x}(t)| \leq \hat{\delta}, t \in \Delta\} \subset G$ za neki $\hat{\delta} > 0$.

Definirajmo preslikavanje $\mathcal{F} : \Delta \times \mathbb{R}^n \times W \times \bar{K}_{C(\Delta;\mathbb{R}^n)}(\hat{x}, \hat{\delta}) \to C(\Delta; \mathbb{R}^n)$ s formulom

$$\mathcal{F}(\tau, \xi, \eta, x)(t) = x(t) - \xi - \int_\tau^t f(s, x(s), \eta)\mathrm{d}s.$$

Neka je $\hat{\tau} \in \Delta$, $\xi = \hat{x}(\hat{\tau})$ i $\eta = \hat{\eta}$. To slijedi iz pretpostavke teorema da je preslikavanje $x \mapsto \mathcal{F}(\hat{\tau}, \hat{x}(\hat{\tau}), \hat{\eta}, \hat{x})$ neprekidno diferencijabilno u okolini od $\hat{x}$ i

$$\mathcal{F}_x(\hat{\tau}, \hat{x}(\hat{\tau}), \hat{\eta}, \hat{x})[h(t)] = h(t) - \int_{\hat{\tau}}^t f_x(s, \hat{x}(s), \hat{\eta})h(s)ds.$$

Sada slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$ postoje okoline $V(\varepsilon)$ i $U(\varepsilon)$ točaka $(\hat{\tau}, \hat{x}(\hat{\tau}), \hat{\eta})$ i $\hat{x}$ takve da

$$\|\mathcal{F}(\tau, \xi, \eta, x_1) - \mathcal{F}(\tau, \xi, \eta, x_2) - \Lambda(x_1 - x_2)\| \leq \varepsilon\|x_1 - x_2\|. \tag{1.36}$$

Pretpostavimo da vrijedi da je

$$\Lambda = \mathcal{F}_x(\hat{\tau}, \hat{x}(\hat{\tau}), \hat{\eta}, \hat{x})$$

za svaki $(\tau, \xi, \eta) \in V(\varepsilon)$ i $x_i \in U(\varepsilon)$, i = 1,2.

Dokažimo da je operator $\Lambda$ invertibilan. Neka je $y \in C(\Delta; \mathbb{R}^n)$. Prema Teoremu 1.1.5 jednadžba $\dot{z} = f_x(t, \hat{x}(t), \hat{\eta})z + f_x(t, \hat{x}(t), \hat{\alpha})y(t)$, $z(\hat{\tau}) = 0$ ima jedinstveno rješenje $z_0$. Štoviše

$$z_0(t) = \int_{\hat{\tau}}^t f_x(s, \hat{x}(s), \hat{\eta})(z_0(s) + y(s))ds$$

za svaki $t \in \Delta$.

Neka je $h = z_0 + y$ pa dobijemo $h(t) - \int_{\hat{\tau}}^t f_x(s, \hat{x}(s), \hat{\eta})h(s)ds = y(t)$ za svaki $t \in \Delta$, tj. $\Lambda h = y$ i $h$ su jedinstveni zbog jedinstvenosti $z_0$.

Nadalje, prema Banachovom teoremu o inverznom preslikavanju, operator $\Lambda$ je invertibilan. Neka je sada $\varepsilon_0 > 0$ takav da je $\varepsilon_0 \left\|\Lambda^{-1}\right\| < 1$ te vrijedi da je $\bar{K}_{C(\Delta;\mathbb{R}^n)}(\hat{x}, \delta) \subset U(\varepsilon_0)$. Stavimo $\theta = \varepsilon_0 \left\|\Lambda^{-1}\right\|$. Tada nejednakost (1.36) pomnožena s $\dfrac{\theta}{\left\|\Lambda^{-1}\right\|}$ vrijedi za svaki $(\tau, \xi, \eta) \in V(\varepsilon_0)$ i $x_i \in \bar{K}_{C(\Delta;\mathbb{R}^n)}(\hat{x}, \delta)$, $i = 1, 2$.

Preslikavanje $\mathcal{F}$ je neprekidno na području definicije i $\mathcal{F}(\hat{\tau}, \hat{x}(\hat{\tau}), \hat{\eta}, \hat{x}) = 0$ jer je $\hat{x}$ rješenje problema (1.32).

Sada postoji okolina $V \subset V(\varepsilon_0)$ točke $(\hat{\tau}, \hat{x}(\hat{\tau}), \hat{\eta})$ takva da je

$$\|\mathcal{F}(\tau, \xi, \alpha, \hat{x})\|_{C(\Delta;\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\delta(1-\theta)}{\left\|\Lambda^{-1}\right\|}$$

za svaki $(\tau, \xi, \eta) \in V$.

Iskoristimo Teorem 1.1.1 gdje stavimo da je $X = Y = C(\Delta; \mathbb{R}^n)$, $C = X$. Operator $\Lambda$ je definiran, $R_1 = \Lambda^{-1}$, $\gamma_1 = \left\|\Lambda^{-1}\right\|$, $\Sigma = V$, brojeve $\delta$ i $\theta$ smo definirali kao ranije kao i preslikavanje $\mathcal{F}$ te stavimo $y = 0$.

Tada postoji jedinstveno neprekidno preslikavanje $\varphi : V \to \bar{K}_{C(\Delta;\mathbb{R}^n)}(\hat{x}, \delta)$ koje preslikava $(\tau, \xi, \eta)$ u funkciju $x(\cdot, \tau, \xi, \eta)$ tako da je

$$x(t; \tau, \xi, \eta) - \xi - \int_\tau^t f(s, x(s; \tau, \xi, \eta), \eta) ds = 0, \quad \forall t \in \Delta.$$

Štoviše vrijedi da je

$$\|x(\cdot; \tau, \xi, \eta) - \hat{x}\|_{C(\Delta;\mathbb{R}^n)} \leq K \|\mathcal{F}(\tau, \xi, \eta, \hat{x})\|_{C(\Delta;\mathbb{R}^n)},$$

gdje je $K = \dfrac{\left\|\Lambda^{-1}\right\|}{1-\theta}$. Iz ovoga slijedi da je funkcija $x(\cdot; \tau, \xi, \alpha)$ neprekidno diferencijabilna i rješenje problema (1.32).

Točka $(\hat{\tau}, \hat{x}(\hat{\tau}), \hat{\eta})$ pripada kompaktnom skupu $\Gamma(\hat{x}) \times \{\hat{\eta}\}$, te je $\hat{\tau}$ nultočka na segmentu $\Delta$. Štoviše, ovaj kompaktni skup možemo prekriti okolinama sličnim skupu $V$. Sada konačan potpokrivač sadrži skup $\hat{G} \times \hat{W}$ kojeg smo definirali u iskazu teorema.

Da bismo dokazali jedinstvenost, uočimo da se preslikavanja podudaraju na presjeku okolina konačnih potpokrivača. Preslikavanje $\mathcal{F}$ definirano na $\hat{G} \times \hat{W}$, koje pridružuje $(\tau, \xi, \eta)$ jedinstvenom rješenju problema (1.32) je neprekidno sa $\hat{G} \times \hat{W}$ na $C(\Delta; \mathbb{R}^n)$.

Dokažimo sada da je preslikavanje diferencijabilno. Parcijalna derivacija od $\mathcal{F}$ s obzirom na $(\tau, \xi)$ u točki $(\hat{\tau}, \hat{x}(\hat{\tau}), \hat{\eta}, \hat{x})$ postoji i dana je s

$$\mathcal{F}_{(\tau,\xi)}(\hat{\tau}, \hat{x}(\hat{\tau}), \hat{\eta}, \hat{x})[\lambda, \nu] = f(\hat{\tau}, \hat{x}(\hat{\tau}), \hat{\eta})\lambda - \nu, \quad (\lambda, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \tag{1.37}$$

tj. $(\tau, \xi)$ je pridruženo konstantnoj funkciji na $C(\Delta; \mathbb{R}^n)$. Pod postojanje derivacije se misli

$$\mathcal{F}(\tau, \xi, \hat{\eta}, \hat{x}) = \mathcal{F}_{(\tau,\xi)}(\hat{\tau}, \hat{x}(\hat{\tau}), \hat{\eta}, \hat{x})[\tau - \hat{\tau}, \xi - \hat{x}(\hat{\tau})] + o(|(\tau - \hat{\tau}, \xi - \hat{x}(\hat{\tau}))|). \tag{1.38}$$

Uzmemo li $(\tau, \xi)$ dovoljno blizu $(\hat{\tau}, \hat{x}(\hat{\tau}))$, možemo pretpostaviti da desna strana izraza (1.38) nije veća od $|(\tau - \hat{\tau}, \xi - \hat{x}(\hat{\tau}))|$. Tada (1.38) i ocjena

$$\|x(\cdot; \tau, \xi, \eta) - \hat{x}\|_{C(\Delta;\mathbb{R}^n)} \leq K \|\mathcal{F}(\tau, \xi, \eta, \hat{x})\|_{C(\Delta;\mathbb{R}^n)}$$

daju:

$$\begin{aligned}\|x(\cdot;\tau,\xi,\eta)-\hat{x}\|_{C(\Delta;\mathbb{R}^n)} &\leq K(\left\|\mathcal{F}_{(\tau,\xi)}(\hat{\tau},\hat{x}(\hat{\tau}),\hat{\eta},\hat{x})\right\|_{C(\Delta;\mathbb{R}^n)}+1)\,|(\tau-\hat{\tau},\xi-\hat{x}(\hat{\tau}))| \\ &= K_1\,|(\tau-\hat{\tau},\xi-\hat{x}(\hat{\tau}))|\,.\end{aligned}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Prethodna nejednakost povlači da ako je $(\tau,\xi)$ dovoljno blizu točki $(\hat{\tau},\hat{x}(\hat{\tau}))$, tada je $x(\cdot;\tau,\xi,\eta)$ približno jednako točki $\hat{x}$. Tada (1.36) daje

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(\tau,\xi,\hat{\eta},\hat{x})+\Lambda(x(\cdot;\tau,\xi,\alpha)-\hat{x})\|_{C(\Delta;\mathbb{R}^n)} &\leq \varepsilon\|x(\cdot,\tau,\xi,\eta)-\hat{x}\|_{C(\Delta;\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \varepsilon K_1|(\tau-\hat{\tau},\xi-\hat{x}(\hat{\tau}))|,\end{aligned}$$

tj. $\mathcal{F}(\tau,\xi,\hat{\eta},\hat{x})+\Lambda(x(\cdot;\tau,\xi,\eta)-\hat{x}) = o(|(\tau-\hat{\tau},\xi-\hat{x}(\hat{\tau}))|)$.
Sada zajedno s (1.38) dobijemo:

$$\Lambda(x(\cdot;\tau,\xi,\eta)-\hat{x}) = -\mathcal{F}_{(\tau,\xi)}(\hat{\tau},\hat{x}(\hat{\tau}),\hat{\eta},\hat{x})[\tau-\hat{\tau},\xi-\hat{x}(\hat{\tau})]+o(|(\tau-\hat{\tau},\xi-\hat{x}(\hat{\tau}))|).$$

Djelujmo s operatorom $\Lambda^{-1}$ na obje strane i iskoristimo da je funkcija $\varphi$ diferencijabilna u točki $(\hat{\tau},\hat{x}(\hat{\tau}))$ te je $\Lambda = \mathcal{F}_x(\hat{\tau},\hat{x}(\hat{\tau}),\hat{\eta},\hat{x}))$ pa dobijemo

$$\varphi'(\hat{\tau},\hat{x}(\hat{\tau})) = -(\mathcal{F}_x(\hat{\tau},\hat{x}(\hat{\tau}),\hat{\eta},\hat{x}))^{-1}\mathcal{F}_{(\tau,\xi)}(\hat{\tau},\hat{x}(\hat{\tau}),\hat{\eta},\hat{x}).$$

Sada djelujmo operatorom $\mathcal{F}_x(\hat{\tau},\hat{x}(\hat{\tau}),\hat{\eta},\hat{x})$ na obje strane jednakosti i prema (1.37) za svaki $(\lambda,\nu)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ i $t\in\Delta$ dobijemo

$$\varphi'(\hat{\tau},\hat{x}(\hat{\tau}))[\lambda,\nu](t)-\int_{\hat{\tau}}^{t} f_x(s,\hat{x}(s),\hat{\eta})\varphi'(\hat{\tau},\hat{x}(\hat{\tau}))[\lambda,\nu](s)ds = -f(\hat{\tau},\hat{x}(\hat{\tau}),\hat{\eta})\lambda+\nu.$$

Iz ovoga slijedi da parcijalne derivacije preslikavanja $(\tau,\xi)\mapsto x(\cdot;\tau,\xi,\hat{\eta})$ s obzirom na $\tau$ i $\xi$ u točki $(\hat{\tau},\hat{x}(\hat{\tau},\hat{\eta})$ zadovoljavaju jednadžbe (1.33) i (1.34).

Neka je $(\tau,\xi,\eta)$ dopustiva točka skupa $\hat{G}\times\hat{W}$ i $x(\cdot;\tau,\xi,\eta)$. Uzmemo li $x$ i $\eta$ kao $\hat{x}$ i $\hat{\eta}$ u iskazu teorema, vidimo da su svi uvjeti teorema zadovoljeni. Štoviše, možemo konstruirati preslikavanje $(\tau,\xi,\eta)\mapsto x(\cdot;\tau,\xi,\eta)$ koje se, s obzirom na jedinstvenost, podudara s prethodnim preslikavanjem. Sada vrijede formule (1.33) i (1.34).

Derivacija preslikavanja $(\tau,\xi,\eta)\mapsto x(\cdot;\tau,\xi,\eta)$ s obzirom na $(\tau,\xi)$ dana s

$$-(\mathcal{F}_x(\tau,\xi,\eta,x(\cdot;\tau,\xi,\eta)))^{-1}\mathcal{F}_{(\tau,\xi)}(\tau,\xi,\eta,x(\cdot;\tau,\xi,\eta))$$

u svakoj točki $(\tau,\xi)\in\hat{G}\times\hat{W}$.

Neprekidnost ovog preslikavanja slijedi iz neprekidnosti preslikavanja

$$(\tau,\xi,\eta)\mapsto\mathcal{F}_x(\tau,\xi,\eta,x(\cdot;\tau,\xi,\eta))$$

i

$$(\tau,\xi,\eta)\mapsto\mathcal{F}_{(\tau,\xi)}(\tau,\xi,\eta,x(\cdot;\tau,\xi,\eta))$$

te neprekidnosti preslikavanja $\Lambda\to\Lambda^{-1}$ na skupu svih invertibilnih operatora te iz teorema o neprekinutosti kompozicije neprekinutih funkcija. □

## 1.2 Nužni uvjeti ekstremalnosti uz ograničenja tipa jednakosti i nejednakosti

Neka su $X$ i $Y$ normirani prostori, $V$ je otvoren podskup u $X$, $f_0 : V \to \mathbb{R}$ i $F : V \to Y$. Tada problem

$$f_0(x) \to min\,(max), \qquad F(x) = 0 \tag{1.39}$$

se naziva problem ekstrema s ograničenjima tipa jednakosti.

Za točku $x \in V$ kažemo da je *dopustiva točka* ako je $F(x) = 0$.

Točka $\hat{x} \in V$ se zove *lokalni minimum (maksimum) funkcije* $f_0$ ako postoji okolina $V_0 \subset V$ točke $\hat{x}$ tako da je $f_0(x) \geq f_0(\hat{x})$ $(f_0(x) \leq f_0(\hat{x}))$ za svaku dopustivu točku $x \in V_0$. Točke lokalnog minimuma i maksimuma se zovu *točke lokalnog ekstrema*.

Neka je $X^*$ dual normiranog prostora $X$. Označimo vrijednost funkcionala $x^* \in X^*$ na element $x \in X$ s $\langle x^*, x\rangle$. Ako je $Y$ neki drugi normirani prostor s dualom $Y^*$ i $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$, tada s $\Lambda^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ označavamo adjungirani operator.

Ako je $X = \mathbb{R}^n$, tada njegov dual možemo označiti s $(\mathbb{R}^n)'$, što je prostor vektor redaka n realnih brojeva. Ako je $a = (a_1, ..., a_n) \in (\mathbb{R}^n)'$ i $x = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, tada označavamo vrijednost funkcionala $a$ na element $x$ s $ax = \sum_{i=1}^n a_i x_i$.

Neka je sada $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times Y^*$. Tada funkciju $x \mapsto \mathcal{L}(x, \bar{\lambda}) = \lambda_0 f_0(x) + \langle\lambda, F(x)\rangle$ zovemo *Lagrangeova funkcija* problema (1.39), te je vektor $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda)$ *Lagrangeov multiplikator*.

Da bismo mogli iskazati sljedeći teorem , trebamo definirati jaki diferencijal preslikavanja. Neka su $X$ i $Y$ normirani prostori, $V$ okolina točke $\hat{x}$ i $\mathcal{F} : V \to Y$. Kažemo da je preslikavanje $\mathcal{F}$ *Frechet-diferencijabilno u točki* $\hat{x}$ ako postoji operator $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ tako da vrijedi jednakost

$$\mathcal{F}(\hat{x} + x) = \mathcal{F}(\hat{x}) + \Lambda x + r(x),$$

gdje

$$\frac{\| r(x) \|_Y}{\| x \|_X} \to 0 \qquad kad \quad x \to \hat{x}.$$

Ovako definiran operator $\Lambda$ je jedinstveno određen. Nazivamo ga *Frechetovim diferencijalom preslikavanja* $\mathcal{F}$ u točki $\hat{x}$ i označavamo s $\mathcal{F}'(x)$.

Preslikavnje $\mathcal{F} : V \to Y$ je *jako diferencijabilno* u točki $\hat{x}$ ako je diferencijabilno u toj točki i za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da ako je $\| x_i - \hat{x} \|_X < \delta$, i=1,2, tada vrijedi sljedeća nejednakost:

$$\| \mathcal{F}(x_1) - \mathcal{F}(x_2) - \Lambda(x_1 - x_2) \|_Y \leq \varepsilon \| x_1 - x_2 \|_X .$$

**Teorem 1.2.1.** *(pravilo Lagrangeovog multiplikatora za problem s jednakostima)*

*Pretpostavimo da su u problemu (1.39) X i Y Banachovi prostori, V je okolina točke $\hat{x} \in X$, funkcije $f_0$ i F su jako diferencijablne u točki $\hat{x}$ i* $\mathrm{Im}F'(\hat{x})$ *je zatvoren potprostor.*

*Ako je $\hat{x}$ lokalni ekstrem u danom problemu, tada postoji ne-nul Lagrangeov multiplikator $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda)$ tako da je*

$$\mathcal{L}_x(\hat{x}, \lambda) = 0 \qquad tj. \qquad \lambda_0 f_0'(\hat{x}) + (F'(\hat{x}))^* \lambda = 0. \tag{1.40}$$

*Ako je* $\mathrm{Im} F'(\hat{x}) = Y$*, tada* $\lambda_0 \neq 0$.

*Dokaz.* Degenerirani slučaj: $\mathrm{Im}F'(\hat{x})$ nije jednak cijelom $Y$. Tada postoji element $\lambda \in Y^*$, $\lambda \neq 0$, tako da je $\langle \lambda, F'(\hat{x})\rangle^* \lambda = 0$ za svaki $x \in X$, pa u (1.40) za $\bar{\lambda}$ možemo uzet $(0, \lambda)$.

Nedegenirani slučaj: $\mathrm{Im}F'(\hat{x}) = Y$. Promatrajmo preslikavanje $\mathcal{F} : V \to \mathbb{R} \times Y$ definirano s $\mathcal{F}(x) = (f_0(x), F(x))$. S obzirom da su $f_0$ i $F$ jako diferencijabilne u točki $\hat{x}$, slijedi da je i $\mathcal{F}$ jako diferencijabilna u točki $\hat{x}$.

Sada dokažimo da je pretpostavka $\mathrm{Im}\mathcal{F}'(\hat{x}) = \mathbb{R} \times Y$ u kontradikciji s tvrdnjom da je $\hat{x}$ lokalni ekstrem. Koristimo Teorem 1.1.1 u kojem je $\mathbb{R}\times Y = Y$ i $\Lambda = \mathcal{F}'(\hat{x})$. Uzmimo $\varepsilon > 0$ takav da je $\varepsilon\gamma < 1$ gdje je $\gamma$ iz ocjene desnog inverza od $\Lambda$. Tada jaka diferencijabilnost od $\mathcal{F}$ u $\hat{x}$ povlači da postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da nejednakost (1.1) za $\theta = \varepsilon\gamma$ vrijedi za svaki $x, x' \in \bar{K}_X(\hat{x}, \delta)$. Svi uvjeti Teorema 1.1.1 su zadovoljeni.

Sada za svaki broj $\nu$ s dovoljno malom apsolutnom vrijednosti točka $y_\nu = (f_0(\hat{x}) + \nu, 0)$ je sadržana u okolini od $\mathcal{F}'(\hat{x})$. Tada, prema (1.5) točke $x_\nu = \varphi(y_\nu)$ su približno jednake $\hat{x}$ tako da je $\mathcal{F}(x_\nu) = y_\nu$, tj. te točke su dopustive u (1.39) i $f_0(x_\nu)$ je manje (veće) od $f_0(\hat{x})$ ako je $\nu > 0\,(\nu < 0)$. To je kontradiktorno s tvrdnjom da je $\hat{x}$ lokalni ekstrem. Sada smo dokazali da je $\mathrm{Im}\mathcal{F}'(\hat{x}) \neq \mathbb{R} \times Y$.

Potprostor $\mathrm{Im}\mathcal{F}'(\hat{x})$ je zatvoren u $\mathbb{R} \times Y$. Stoga postoji ne-nul funkcional $\bar{\lambda} = (\lambda, 0) \in \mathbb{R} \times Y^*$ takav da je

$$\lambda_0 \langle f_0'(\hat{x}), x\rangle + \langle \lambda, F'(\hat{x})x\rangle = 0$$

za sve $x \in X$, što je ekvivalentno s (1.40).

Neka je sada $\mathrm{Im}\mathcal{F}'(\hat{x}) = \mathbb{R} \times Y$. Tada uzmemo $\lambda_0 = 0$, te (1.40) povlači da je $\lambda = 0$ što je u kontradikciji s dokazanim. □

Neka su $X$ i $Y$ normirani prostori, $V$ otvoren podskup u $X$, $f_i : V \to \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq m$ i $F : V \to Y$. Tada problem

$$f_0(x) \to min\,(max), \qquad f_i(x) \leq 0, \qquad 1 \leq i \leq m, \qquad F(x) = 0 \tag{1.41}$$

zovemo *problem ekstrema s ograničenjima tipa jednakosti i nejednakosti*. Pojmovi dopustive točke i lokalnog ekstrema su definirani na analogni način kao kod problema (1.39).

Neka je $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m, \lambda) \in (\mathbb{R}^{m+1})' \times Y^*$. Tada funkciju

$$x \mapsto \mathcal{L}(x, \bar{\lambda}) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x) + \langle \lambda, F(x)\rangle$$

nazivamo Lagrangeova funkcija problema (1.41), a vektor $\bar{\lambda}$ *Lagrangeov multiplikator*.

**Teorem 1.2.2.** *(pravilo Lagrangeovog multiplikatora za problem s jednakostima i nejednakostima)*

*Pretpostavimo da su u problemu (1.41) $X$ i $Y$ Banachovi prostori, $V$ je okolina točke $\hat{x} \in X$, funkcije $f_i, 0 \leq i \leq m$ i preslikavanje $F$ su jako diferencijabilne na $\hat{x}$ te je* $\mathrm{Im} F'(\hat{x})$ *zatvoren potprostor.*

*Ako je $\hat{x}$ lokalni ekstrem u zadanom problemu, tada postoji ne-nul vektor Lagrangeov multiplikator $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m, \lambda)$ tako da je*

$$\mathcal{L}_x(\hat{x}, \lambda) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) + (F'(\hat{x}))^* \lambda = 0 \tag{1.42}$$

*gdje je $\lambda_0 \geq 0$, u slučaju problema minimuma, odnosno $\lambda_0 \leq 0$, u slučaju problema maksimuma.*

*Dodatno, vrijede uvjet nenegativnosti za $\lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq m$ i uvjet komplementarnosti $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0, 1 \leq i \leq m$.*

*Dokaz.* Degeneriran slučaj: Neka je $\mathrm{Im} F'(\hat{x})$ različit od $Y$. Tada postoji element $\lambda \in Y^*$, $\lambda \neq 0$, takav da je $\langle \lambda, F'(\hat{x})x \rangle = 0$ za svaki $x \in X$, koji u (1.42) daje $\bar{\lambda} = (0, ..., 0, \lambda)$.

Nedegenirani slučaj: $\mathrm{Im} F'(\hat{x}) = Y$. Pretpostavimo prvo da je $\hat{x}$ lokalni minimum. Bez smanjenja općenitosti, stavimo da je $f_i(\hat{x}) = 0$, $1 \leq i \leq m$. Promatrajmo preslikavanje $\mathcal{F} : V \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1} \times Y$ definirano formulom

$$\mathcal{F}(x, u) = (f_0(x) + u_0, f_1(x) + u_1, ..., f_m(x) + u_m, F(x)).$$

Kako su $f_i$, $0 \leq i \leq m$ i $F$ jako diferencijabilne u točki $\hat{x}$, slijedi da je $\mathcal{F}$ jako diferencijabilna u točki $(\hat{x}, 0)$.

Pokažimo sada da je prepostavka da je $\mathrm{Im} \mathcal{F}'(\hat{x}, 0) = \mathbb{R}_+^{m+1} \times Y$ u kontradikciji s time da je $\hat{x}$ lokalni minimum. Koristimo Teorem (1.1.4) o implicitnoj funkciji gdje stavimo da je $\mathbb{R}_+^{m+1} \times Y$ jednak $Y$, a $X \times \mathbb{R}_+^{m+1}$ jednak $C$, $\Lambda = \mathcal{F}'(\hat{x}, 0)$, te $\Sigma$ postoji oko singularne točke.

Jaka diferencijabilnost od $\mathcal{F}$ u točki $(\hat{x}, 0)$ povlači da postoji $0 < \theta < 1$ i $\delta > 0$ tako da nejednakost (1.18) vrijedi za sve $x, x' \in \bar{K}_X(\hat{x}, \delta)$. Sada za sve dovoljno male $\nu > 0$, točke $y_\nu = (f_0(\hat{x}) - \nu, 0, ..., 0)$ su sadržane u susjedstvu od $\mathcal{F}'(\hat{x}, 0)$ i prema (1.21), je $(x_\nu, u_\nu) = \varphi(y_\nu)$. Te točke su dovoljno blizu $(\hat{x}, 0)$ i vrijedi da je $\mathcal{F}(x_\nu, u_\nu) = y_\nu$. Pošto je $u_\nu \geq 0$, točke $x_\nu$ su rješenja problema (1.41) i $f_0(x_\nu) = f_0(\hat{x}) - \nu < f_0(\hat{x})$. Ovo je kontradiktorno s time da je $\hat{x}$ lokalni minimum.

Zato je $\mathcal{F}'(\hat{x}, 0)(X \times \mathbb{R}_+^{m+1})$ zatvoreno u $\mathbb{R}^{m+1} \times Y$. Prema teoremu o separaciji, konus se može odvojiti nekom ravninom od svake točke koja ne pripada tom konusu. To neposredno povlači da postoji ne-nul element $\bar{\lambda} = (\lambda_0, ..., \lambda_m, \lambda) \in (\mathbb{R}^{m+1})' \times Y^*$ takav da

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i (\langle f_i'(\hat{x}), x \rangle + u_i) + \langle \lambda, F'(\hat{x}), x \rangle \geq 0$$

za svaki $(x, u) \in X \times \mathbb{R}^m_+$.

Stavimo li $x = 0$, dobijemo da je $\lambda_i \geq 0$, $i = 0, 1, ..., m$. Stavimo li pak $u = 0$, dobijemo nenegativan linearan funkcional $\sum_{i=0}^m \lambda_i f_i'(\hat{x}) + (F'(\hat{x}))^* \lambda$ u $X$ što daje (1.42).

Ako je $\hat{x}$ lokalni maksimum, tada možemo prvu komponentu u definiciji preslikavanja $\mathcal{F}$ definirati kao $f_0(x) - u_0$ te tada dobijemo da je $\lambda_0 \leq 0$. □

Sada promatrajmo drugu vrstu problema koji trebamo da bismo dokazali Pontrjaginov princip maksimuma. Neka je $V$ okolina oko točke $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ i $f_i : V \bigcap (\hat{x} + \mathbb{R}^n_+) \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, ..., m$, gdje je $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n\}$.

Razmotrimo problem

$$f_0(x) \to min\,(max), \qquad f_i(x) = 0, \qquad 1 \leq i \leq m, \qquad x \in \hat{x} + \mathbb{R}^n_+. \tag{1.43}$$

Prije iskaza sljedećeg teorema, trebamo definirati još jedan novi pojam. Neka je $V$ okolina točke $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ i $F : V \bigcap (\hat{x} + \mathbb{R}^n_+) \to \mathbb{R}^k$.
Kažemo da je F *diferencijabilna u točki $\hat{x}$ s obzirom na $\mathbb{R}^n_+$* ako postoji $k \times n$ matrica $A$ takva da vrijedi jednakost

$$F(\hat{x} + x) = F(\hat{x}) + Ax + r(x),$$

gdje $\dfrac{|\, r(x)\,|}{|\, x\,|} \to 0$ za $x \to 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}^n_+$ takav da je $\hat{x} + x \in V \bigcap (\hat{x} + \mathbb{R}^n_+)$.

Matrica $A$ koja zadovoljava te uvjete je jedinstveno određena. Ovako definiranu matricu nazivamo *diferencijalom od F u točki $\hat{x}$ s obzirom na $\mathbb{R}^n_+$* te ju označavamo s $F'(\hat{x} + 0)$.

Neka je $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m) \in (\mathbb{R}^{m+1})'$. Tada funkciju $x \mapsto \mathcal{L}(x, \bar{\lambda}) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x)$ nazivamo *Lagrangeova funkcija problema (1.43)* i $\bar{\lambda}$ *vektor Lagrangeovog multiplikatora*.
Sljedeći teorem je zapravo specijalni slučaj Teorema 1.2.2

**Teorem 1.2.3.** *(pravilo Lagrangeovog multiplikatora za problem (1.43))*

*Pretpostavimo da su u problemu (1.43) funkcije $f_i$, $0 \leq i \leq m$, jako diferencijabilne u točki $\hat{x}$ s obzirom na $\mathbb{R}^n_+$.*

*Ako je $\hat{x}$ lokalni ekstrem u (1.43), tada postoji Lagrangeov multiplikator $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m, \lambda)$, koji je ne-nul vektor tako da vrijedi sljedeća relacija:*

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i f_i'(\hat{x} + 0) \geq 0. \tag{1.44}$$

*Dokaz.* Ako su vektori $f_i'(\hat{x} + 0)$, $0 \leq i \leq m$ linearno zavisni, tada je relacija (1.44) dokazana.

Zato pretpostavimo da su linearno neovisni. Promatrajmo preslikavanje $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{m+1}$ definirano s

$$\mathcal{F}(x, u) = (f_0(x), f_1(x), ..., f_m(x), x_1 - u_1, ..., x_m - u_m)^T.$$

Ovo preslikavanje je jako diferencijabilno u točki $(\hat{x}, 0)$. Ako pretpostavimo da je $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+) = \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{m+1}$, tada nas Teorem 1.1.4 navodi na kontradikciju s time da je $\hat{x}$ lokalni ekstrem.

Štoviše, konus $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+)$ se ne podudara s cijelim prostorom i zato ga možemo separirati s bilo kojom točkom koja ne pripada prostoru. To znači da postoji ne-nul vektor $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m, \mu_1, ..., \mu_m) \in (\mathbb{R}^{2m+1})'$ takav da je $\sum_{i=0}^m \lambda_i f_i'(\hat{x}+0) \cdot x + \sum_{i=0}^m \mu_i(x_i - u_i) \geq 0$ za svaki $(x, u) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$.

Stavimo li $x = 0$, dobijemo da je $\mu_i \leq 0$ za $1 \leq i \leq m$.
Na kraju stavimo da je $u = 0$ i dolazimo do nejednakosti

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i f_i'(\hat{x}+0) \cdot x \geq -\sum_{i=0}^m \mu_i(x_i - u_i)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}^n_+$ što je ekvivalentno s (1.44). □

## 1.3 Nužni uvjeti ekstremalnosti u varijacijskom računu i optimalnom upravljanju

Neka je $\Delta = [t_0, t_1]$, $G$ otvoren podskup u $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$, $W$ otvoren podskup u $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Funkcije $L_i : G \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, ..., m$ i preslikavanje $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ (varijabla $t \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ i $u = (u_1, ..., u_r)^T \in \mathbb{R}^r$) su neprekinute na $G$. Nadalje, neka su funkcije $l_i : W \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, ..., m$ (varijabla $(\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$), neprekidne na $W$.

Tada problem

$$f_0(z) = \int_\Delta L_0(t, x(t), u(t))dt + l_0(x(t_0), x(t_1)) \to max\,(min), \quad \dot{x} = \varphi(t, x, u),$$

$$f_i(z) = \int_\Delta L_i(t, x(t), u(t))dt + l_i(x(t_0), x(t_1)) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m' \tag{1.45}$$

$$f_i(z) = \int_\Delta L_i(t, x(t), u(t))dt + l_i(x(t_0), x(t_1)) = 0, \quad m' + 1 \leq i \leq m$$

gdje je $z = (x, u)$.

Ovaj problem se naziva *Lagrangeov problem klasičnog varijacijskog računa.*

Sada označimo sa $Z = C^1(\Delta; \mathbb{R}^n) \times C(\Delta; \mathbb{R}^r)$. Za točku $z = (x, u) \in Z$ kažemo da je dopustiva točka u (1.45) ako $\Gamma(z) = \{(t, x(t), u(t)) \mid t \in \Delta\} \subset G$. Dodatno vrijedi da je

$$
\begin{aligned}
&(x(t_0), x(t_1)) \in W \\
&f_i(z) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m', \\
&f_i(z) = 0, \quad m' + 1 \leq i \leq m \quad i \\
&\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)) \quad za \quad svaki \quad t \in \Delta.
\end{aligned}
$$

Nultočku $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{u})$ zovemo *slabi lokalni minimum (maksimum)* u problemu (1.45) ako postoji okolina $V$ od $\hat{z}$ tako da nejednakost $f_0(z) \geq f_0(\hat{z})(f_0(z) \leq f_0\,(\hat{z}))$ vrijedi za svaku nultočku $z \in V$. Slabi lokalni ekstrem je ili slabi lokalni minimum ili slabi lokalni maksimum.

Neka je $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m, p) \in (\mathbb{R}^{m+1})' \times C(\Delta; (\mathbb{R}^n)')$,

$$L(t, x, u) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i L_i(t, x, u) + p(t) \cdot (\dot{x} - \varphi(t, x, u)),$$

i

$$l(x(t_0), x(t_1)) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i l_i(x(t_0), x(t_1)).$$

Funkciju

$$z \mapsto \mathcal{L}(z, \bar{\lambda}) = \int\limits_{\Delta} L(t, x(t), u(t))dt + l(x(t_0), x(t_1))$$

nazivamo *Lagrangeova funkcija problema (1.45)*, a vektor $\bar{\lambda}$ se naziva *Lagrangeov multiplikator*.

Za sljedeća dva teorema će nam trebati neke pretpostavke. Neka je $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{u})$ rješenje problema (1.45). Funkcije $L_i$, $0 \leq i \leq m$ te preslikavanje $\varphi$, zajedno s njezinim parcijalnim derivacijama s obzirom na $x$ i $u$, su neprekidne u okolini $\Gamma(\hat{z})$. Zatim, neka su funkcije $l_i, 0 \leq i \leq m$, neprekidno diferencijabilne u okolini točke $(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$.

**Teorem 1.3.1.** *(Euler-Lagrangeova jednadžba za Lagrangeov problem)*

*Ako je $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{u})$ slabi lokalni ekstrem u (1.45), tada postoji Lagrangeov multiplikator $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m, p) \in (\mathbb{R}^{m+1})' \times C^1(\Delta; (\mathbb{R}^n)')$ koji je različit od nul- vektora.*

*Vrijedi da je $\lambda_0 \geq 0$ u slučaju minimuma, odnosno $\lambda_0 \leq 0$ u slučaju maksimuma.*

*Nadalje, zadovoljeni su uvjet nenegativnosti $\lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq m'$, uvjet komplementarnosti $\lambda_i f_i(\hat{z}) = 0, 1 \leq i \leq m'$ te Euler-Lagrangeove jednadžbe*

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\dot{p} = p\hat{\varphi}_x(t) - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \hat{L}_{ix}(t), \tag{1.46}$$

$$\hat{L}_u(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow p(t)\hat{\varphi}_u(t) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \hat{L}_{iu}(t), \tag{1.47}$$

*i uvjet transverzalnosti*

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_i) = (-1)^i \hat{l}_{\xi_i}, \quad i = 0, 1. \tag{1.48}$$

*Dokaz.* Dokažimo teorem u slučaju problema s jednakostima. Koristimo Teorem 1.2.1 Neka je $X = Z = C^1(\Delta; \mathbb{R}^n) \times C(\Delta; \mathbb{R}^r)$ i $Y = C(\Delta; \mathbb{R}^n)$. Oba prostora su Banachovi prostori.

Definiramo $V = \{z = (x, u) \in Z \,|\, (t, x(t), u(t)) \in \Gamma(\hat{z}), t \in \Delta\}$.
$V$ je otvoreni podskup u $Z$ koji sadrži $\hat{z}$, tj. $V$ je okolina od $\hat{z}$.
S obzirom na pretpostavku glatkoće uvjeta, funkcije $f_i : V \to \mathbb{R}$, $0 \le i \le m$, i preslikavanje $\phi : V \to C(\Delta; \mathbb{R}^n)$, gdje je $\phi(z) = \dot{x} - \varphi(\cdot, x, u)$, su jako diferencijabilne u $\hat{z}$.

Štoviše,

$$f_i'(\hat{z})[z] = \int_\Delta (\hat{L}_{ix}(t)) \cdot x(t) + \hat{L}_{iu}(t) \cdot u(t))dt + \hat{l}_{\xi_0} \cdot x(t_0) + \hat{l}_{\xi_1} \cdot x(t_1), \quad 0 \le i \le m.$$

te je $\phi'(\hat{z})[z] = \dot{x} - \hat{\varphi}_x x - \hat{\varphi}_u u$. Preslikavanje $\phi'(\hat{z}) : Z \to C(\Delta; \mathbb{R}^n)$ je surjekcija.

Neka je $y \in C(\Delta; \mathbb{R}^n)$ i $\bar{x}$ rješenje linearne jednadžbe $\dot{x} = \hat{\varphi}_x(t)x + y(t)$, koje postoji prema Teoremu 1.1.5 te je tada $\phi'(\hat{z})[\bar{x}, 0] = y$.

Definirajmo sada preslikavanje $F : V \to \mathbb{R}^m \times C(\Delta; \mathbb{R}^n)$ sa $F(z) = (f_i(z), ..., f_m(z), \phi(z))$. $F$ je jako diferencijabilna u $\hat{z}$ jer je kompozicija jako diferencijabilnih funkcija u $\hat{z}$ te je $F'(\hat{z}) = (f_i'(z), ..., f_m'(z), \phi'(z))$.

Prema lemi o zatvorenoj slici, potprostor $\mathrm{Im}F'(\hat{z})$ je zatvoren u $C(\Delta; \mathbb{R}^n)$.

Svi uvjeti Teorema 1.2.1 su zadovoljeni. Koristeći navedeni teorem, postoji ne-nul Lagrangeov multiplikator $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m, \mu) \in (\mathbb{R}^{m+1})' \times C^*(\Delta; \mathbb{R}^n)$ takav da vrijedi $\tilde{\mathcal{L}}_z(\hat{z}, \bar{\lambda}) = 0$ ili $\tilde{\mathcal{L}}_x(\hat{z}, \bar{\lambda}) = 0$ i $\tilde{\mathcal{L}}_u(\hat{z}, \bar{\lambda}) = 0$, za Lagrangeovu funkciju

$$z \mapsto \tilde{\mathcal{L}}(z, \bar{\lambda}) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(z) + \langle \mu, \dot{x} - \varphi(\cdot, x, u) \rangle = \int_\Delta \tilde{L}(t, x(t), u(t))dt + l(x(t_0), x(t_1))$$

gdje je $\tilde{L}(t, x, u) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i L_i(t, x, u)$ i $l(x_0, x_1) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i l_i(x_0, x_1)$.

Poništavanje ovih derivacija povlači da identiteti

$$\int_\Delta \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \hat{L}_{ix}(t) \cdot x(t)dt + \hat{l}_{\xi_1} \cdot x(t_1) + \langle \mu, \dot{x} - \hat{\varphi}_x x \rangle = 0, \quad \forall x \in C^1(\Delta; \mathbb{R}^n) \tag{1.49}$$

i

$$\int_\Delta \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \hat{L}_{iu}(t) \cdot u(t)dt + \langle \mu, -\hat{\varphi}_u u \rangle = 0, \quad \forall u \in C(\Delta; \mathbb{R}^r) \tag{1.50}$$

vrijede.

Neka je $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $y \in C(\Delta; \mathbb{R}^n)$. Koristeći Teorem 1.1.5, postoje jedinstvena rješenja $\bar{x}$ i $\bar{p}$ Cauchyjevih problema $\dot{x} = \hat{\varphi}_x(t)x + y(t)$, $x(t_0) = x_0$ i $-\dot{p} = p\hat{\varphi}_x(t) - \sum_{i=0}^m \lambda_i \hat{L}_{ix}(t)$, $p(t_1) = -\hat{l}_{\xi_1}$. Uvrstimo li $\dot{\bar{p}} + \bar{p}\hat{\varphi}_x$ u (1.49) u $\sum_{i=0}^m \lambda_i \hat{L}_{ix}$ i $y$ u $\dot{\bar{x}} - \hat{\varphi}_x \bar{x}$ te parcijalno integriramo i iskoristimo rubne uvjete, dobijemo

$$-\int_\Delta \bar{p}(t) \cdot y(t)dt + (\hat{l}_{\xi_0} - \bar{p}(t_0)) \cdot x_0 + \langle \mu, y \rangle = 0.$$

Stavimo li $y \equiv 0$, dobijemo da je $\bar{p}(t_0) = \hat{l}_{\xi_0}$ te ako je $x_0 = 0$, tada je $\langle \mu, y \rangle = \int_\Delta \bar{p}(t) \cdot y(t)dt$ za svaki $y \in C(\Delta, \mathbb{R}^n)$.

Sada sve to uvrstimo u (1.50) te se vratimo na

$$\int_\Delta \left( \sum_{i=0}^m \lambda_i \hat{L}_{iu}(t) - \bar{p}(t)\hat{\varphi}_u(t) \right) \cdot u(t)dt = 0, \quad \forall u \in C(\Delta; \mathbb{R}^r);$$

štoviše $\sum_{i=0}^m \lambda_i \hat{L}_{iu}(t) - \bar{p}(t)\hat{\varphi}_u(t) = 0$.

Ako je sada $p = \bar{p}$, tada vektor $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m, p)$ zadovoljava sve tvrdnje teorema.

□

Prođimo sada kroz problem optimalnog upravljanja. Neka je $\Delta = [t_0, t_1]$, $U$ neprazan podskup u $\mathbb{R}^r$, $G$ je otvoren podskup u $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $W$ otvoren podskup u $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
Funkcije $L_i : G \times U \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, ..., m$ i preslikavanje $\varphi : G \times U \to \mathbb{R}^n$ (varijabla $t \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ i $u = (u_1, ..., u_r)^T \in \mathbb{R}^r$) su neprekinute na $G \times U$, a funkcije $l_i : W \to \mathbb{R}$ (varijable $(\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$), $i = 0, ..., m$ su neprekidne na $W$.

Problem

$$\begin{aligned} f_0(\zeta) &= \int_\Delta L_0(t, x(t), u(t))dt + l_0(x(t_0), x(t_1)) \to min \qquad \dot{x} = \varphi(t, x, u), \quad u(t) \in U, \\ f_i(\zeta) &= \int_\Delta L_i(t, x(t), u(t))dt + l_i(x(t_0), x(t_1)) \le 0 \qquad 1 \le i \le m', \\ f_i(\zeta) &= \int_\Delta L_i(t, x(t), u(t))dt + l_i(x(t_0), x(t_1)) = 0 \qquad m' + 1 \le i \le m. \end{aligned} \tag{1.51}$$

gdje se $\zeta = (x, u)$ se naziva *problem optimalnog upravljanja.*

Napravimo sada detaljniju analizu. Neka je $PC^1(\Delta; \mathbb{R}^n)$ familija svih po dijelovima neprekinuto diferencijabilnih funkcija i $PC(\Delta; \mathbb{R}^r)$ je familija svih po dijelovima neprekinutih funkcija na $\Delta$, s vrijednostima u $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^r$. Označimo s $Z = PC^1(\Delta; \mathbb{R}^n) \times PC(\Delta; \mathbb{R}^r)$. Točka $\zeta = (x, u) \in Z$ je rješenje u (1.51) ako $\Gamma(\zeta) = \{(t, x(t)) \,|\, t \in \Delta\} \subset G$ te je $u(t) \in U$.
Jednakost $\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t))$ vrijedi za svaki $t \in \Delta$ na kojem je funkcija $u$ neprekinuta. Također vrijedi $(x(t_0), x(t_1)) \in W$, $f_i(\zeta) \le 0$ za $1 \le i \le m'$ i $f_i(\zeta) = 0$ za $m' + 1 \le i \le m$.

Točka $\hat{\zeta} = (\hat{x}, \hat{u})$ se naziva *jaki (lokalni)minimum* u problemu (1.51) ako postoji okolina $V \subset C(\Delta; \mathbb{R}^n) \times C(\Delta; \mathbb{R}^r)$ točke $\hat{x}$ tako da nejednakost $f_0(\zeta) \geq f_0(\hat{\zeta})$ vrijedi za sve dopustive točke $\zeta = (x, u)$ gdje je $x \in V$.

Lagrangeova funkcija je jednako definirana za problem (1.51) kao i za (1.45). Također koristimo istu notaciju kao u prethodnom teoremu.

**Teorem 1.3.2.** *(Pontrjaginov princip maksimuma)*
*Ako je $\hat{\zeta} = (\hat{x}, \hat{u})$ jaki minimum u (1.51), tada postoji Lagrangeov multiplikator*

$$\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m, p) \in (\mathbb{R}^{m+1})' \times PC^1(\Delta; (\mathbb{R}^n)')$$

*različit od nul-vektora.*

*Zadovoljeni su uvjet nenegativnosti*

$$\lambda_i \geq 0, \quad 0 \leq i \leq m',$$

*uvjet komplementarnosti*

$$\lambda_i f_i(\hat{\zeta}) = 0, \quad 1 \leq i \leq m',$$

*te uvjet stacionarnosti s obzirom na x*

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \iff -\dot{p} = p\hat{\varphi}_x(t) - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \hat{L}_{ix}(t). \tag{1.52}$$

*Nadalje, zadovoljeni su uvjet minimuma*

$$\min_{u \in U} L(t, \hat{x}(t), u) = L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \tag{1.53}$$

*na točkama neprekinutosti od $\hat{u}$ i uvjet transverzalnosti*

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_i) = (-1)^i \hat{l}_{\xi_i}, \quad i = 0, 1. \tag{1.54}$$

Da bismo dokazali ovaj teorem trebat ćemo se malo potruditi. Koristit ćemo Lagrangeovu funkciju i reducirati problem na konačnodimenzionalan.

Zamislimo pojednostavljenu situaciju

$$\begin{aligned} &J(x, u) = \int_\Delta f(t, x(t), u(t))dt \to min, \quad \dot{x} = \varphi(t, x, u), \quad u(t) \in U, \\ &x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \end{aligned} \tag{1.55}$$

Sada uzmimo da je $U = \mathbb{R}^r$, tj. imamo poseban slučaj Lagrangeova problema

$$J(x, u) = \int_\Delta f(t, x(t), u(t))dt \to min, \quad \dot{x} = \varphi(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \tag{1.56}$$

i zadovoljeni su nužni uvjeti za slabi lokalni minimum u navedenom problemu. Uzmimo da je $(\hat{x}, \hat{u})$ slabi lokalni minimum u problemu (1.56). Možemo konstruirati familiju varijacija lokalnog minimuma.

Neka je $N \in \mathbb{N}$, $u_i \in C(\Delta; \mathbb{R}^r)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., N$, $\bar{u} = (u_1, ..., u_N)$, $\bar{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$, i

$$u_{\bar{\alpha}} = \hat{u} + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i.$$

Prema Teoremu 1.1.6, za dovoljno mali $\bar{\alpha}$, postoji rješenje $x_{\bar{\alpha}}(\cdot; \bar{u})$ Cauchyjevog problema $\dot{x} = \varphi(t, x, x_{\bar{\alpha}}(\cdot; \bar{u}))$, $x(t_0) = x_0$ na cijelom segmentu $\Delta$ gdje je preslikavanje $\bar{\alpha} \to x_{\bar{\alpha}}$ neprekidno diferencijabilno.

Definirajmo $g_0(\bar{\alpha}) = g_0(\bar{\alpha}; \bar{u}) = J(x_{\bar{\alpha}}(\cdot; \bar{u}), u_{\bar{\alpha}}(\cdot; \bar{u}))$. Kao kompozicija neprekidno diferencijabilnih funkcija ova funkcija je neprekidno diferencijabilna u okolini nule. Promatrajmo problem

$$g_0(\bar{\alpha}; \bar{u}) \to min, \quad g_i(\bar{\alpha}; \bar{u}) = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{1.57}$$

gdje su $g_i(\bar{\alpha}; \bar{u})$, $1 \leq i \leq n$, komponente vektora $x_{\bar{\alpha}}(t_1; \bar{u}) - x_1$. Očito je da je točka $\bar{\alpha} = 0$ lokalni minimum ovoga problema.

Prema pravilu Lagrangeovog multiplikatora, postoji ne-nul vektor $\lambda = \lambda(\bar{u}) = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n) \in (\mathbb{R}^{n+1})'$ takav da derivacija Lagrangeove funkcije $\mathcal{L}(\bar{\alpha}, \lambda) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i g_i(\bar{\alpha}; \bar{u})$ za problem (1.57) iščezava u točki $\bar{\alpha} = 0$, tj.

$$\lambda_0 \int_{\Delta} (\hat{f}_x(t) \cdot y(t, u_i) + \hat{f}_u(t) \cdot u_i(t)) dt + \tilde{\lambda} \cdot y(t_1, u_i) = 0, \quad i = 1, ..., N, \tag{1.58}$$

gdje su $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, ... \lambda_n)$ i $y(\cdot, u_i)$, $1 \leq i \leq N$, parcijalne derivacije preslikavanja $\bar{\alpha} \to x_{\bar{\alpha}}(\cdot; \bar{u})$ u nuli.

Jer je $\lambda \neq 0$, možemo pretpostaviti da je $|\lambda| = 1$, tj. $\lambda$ je element jedinične sfere $\mathcal{S}^n$ u prostoru $(\mathbb{R}^{n+1})'$. Označimo s $\Lambda(\bar{u})$ skup svih vektora Lagrangeova multiplikatora $\lambda$ za problem (1.57) koji zadovoljava uvjet $|\lambda| = 1$. Jasno je da je skup $\Lambda(\bar{u})$ neprazan zatvoren podskup u $\mathcal{S}^n$.

Sada promatrajmo familiju svih konačnih vektora $\bar{u} = (u_1, ..., u_N)$, $u_i \in C(\Delta; \mathbb{R}^r)$, $i = 1, ..., N$. Označimo sa $\mathcal{A}$ familiju svih takvih skupova. Familija $\mathcal{A}$ ima svojstvo konačnog presjeka. U topološkim prostorima to svojstvo je ekvivalentno s kompaktnošću. Proučimo malo tu povezanost. Kada govorimo o kompaktnosti, topološki prostor T je kompaktan ako svaki otvoreni pokrivač toga prostora sadrži konačan potpokrivač.

Nadalje, kažemo da familija podskupova $\{\mathcal{A}\}$ ima *svojstvo konačnog presjeka* ako je presjek $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ konačno mnogo podskupova te familije neprazan. U literaturi možemo naći da se familija s takvim svojstvom naziva još i *centralni sustav*. Iz formalne definicije kompaktnosti i spomenutog svojstva, slijedi tvrdnja:

**Lema 1.3.3.** *(lema o familiji konačnih presjeka)*
*Topološki prostor T je kompaktan ako i samo ako svaka familija zatvorenih podskupova $\{\mathcal{A}\}$ topološkog prostora T ima svojstvo konačnog presjeka.*

Ako je $\Lambda(\bar{u}_1), ..., \Lambda(\bar{u}_m)$ skup nultočaka elemenata od $\mathcal{A}$ i $\tilde{u}$ je vektor koji je unija vektora $\bar{u}_1, ..., \bar{u}_m$ i $\lambda \in \Lambda(\tilde{u})$, tada (1.58) povlači da je $\lambda \in \Lambda(\bar{u}_i)$, $i = 1, ..., m$. Štoviše, vrijedi da je $\bigcap_{i=1}^m \Lambda(\bar{u}_i) \neq \emptyset$, tj. familija $\mathcal{A}$ ima svojstvo konačnog presjeka.

Prema lemi o familiji konačnih presjeka, tada postoji $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}) \in \mathcal{S}^n$ koji pripada svim elementima od $\mathcal{A}$, tj. jednakosti (1.58) vrijede za svaki vektor $\bar{u}$ sa takvim $\bar{\lambda}$. Zapravo, sljedeća jednakost vrijedi za svaku funkciju $u \in C(\Delta; \mathbb{R}^r)$ :

$$\bar{\lambda}_0 \int_{t_0}^{t_1} (\hat{f}_x(t) \cdot y(t, u) + \hat{f}_u(t))dt + \bar{\lambda} \cdot y(t_1, u) = 0. \tag{1.59}$$

Neka je $p_1$ rješenje Cauchyjevog problema

$$\dot{p} = -p\hat{\varphi}_x(t) + \bar{\lambda}_0\hat{f}_x(t), \quad p(t_1) = -\bar{\lambda}. \tag{1.60}$$

Prema Teoremu 1.1.5, takvo rješenje postoji, te to dokazuje (1.46) za naš slučaj s $\lambda_0 = \bar{\lambda}_0$. Uvrstimo li funkciju $\bar{\lambda}_0\hat{f}_x$ u (1.59) sa izrazom u (1.60) te zatim funkciju $\hat{\varphi}_x y(\cdot; u)$ sa izrazom $\dot{y}(\cdot; u) - \hat{\varphi}_u u$, nakon računanja dobijemo

$$\int_{t_0}^{t_1} (-p_1(t)\hat{\varphi}_u(t) + \bar{\lambda}_0\hat{f}_u(t)) \cdot u(t)dt = 0.$$

Pošto ova jednakost vrijedi za svaki $u \in C(\Delta; \mathbb{R}^r)$, slijedi da je $p_1\hat{\varphi}_u = \bar{\lambda}_0\hat{f}_u$, tj. jednakost (1.47) vrijedi u ovom slučaju za $\lambda_0 = \bar{\lambda}_0$.

Sada napokon možemo započeti dokaz Teorema 1.3.2 koristeći problem (1.55).

*Dokaz.* Neka je točka $(\hat{x}, \hat{u})$ strogi lokalni minimum problema (1.56). Trebamo konstruirati familiju varijacija ove točke. Neka je $N \in \mathbb{N}$. Označimo s $\mathcal{N}$ skup točaka $(\tau_i, v_i) \in [t_0, t_1] \times U$, $1 \leq i \leq N$, gdje je $t_0 < \tau_1 \leq ... \leq \tau_N < t_1$. Točke $\tau_i$ pripadaju skupu T, koji je skup točaka neprekinutosti funkcije $\hat{u}$.

Neka je nadalje, $\bar{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_N)^T \in \mathbb{R}_+^N$, gdje su $\alpha_i$ dovoljno mali tako da su segmenti $\Delta_i(\bar{\alpha}) = [\tau_i + \sum_{j=1}^N \alpha_j, \tau_i + i\sum_{j=1}^N \alpha_j + \alpha_i]$, $1 \leq i \leq N$ disjunktni i sadržani su u skupu T.

Definirajmo igličastu varijaciju funkcije $\hat{u}$ s

$$u_{\bar{\alpha}}(t; \mathcal{N}) = \begin{cases} \hat{u}(t) & ako \quad t \in [t_0, t_1] \setminus \bigcup_{i=1}^N \Delta_i(\bar{\alpha}), \\ v_i, & ako \qquad t \in Int\Delta_i(\bar{\alpha}), \qquad 1 \leq i \leq N. \end{cases}$$

U sljedećoj tvrdnji promatramo egzistenciju rješenja Cauchyjevog problema

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u_{\bar{\alpha}}(t; \mathcal{N})), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.61}$$

te njegova svojstva.

**Lema 1.3.4.** *(igličaste varijacije)*

*Postoji okolina $V$ oko nule u $\mathbb{R}^N$ takva da za svaki $\bar{\alpha} \in V \cap \mathbb{R}^N_+$ postoji jedinstveno rješenje $x_{\bar{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N})$ problema (1.61) na cijelom segmentu $[t_0, t_1]$. Štoviše, $x_{\bar{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}) \to \hat{x}$ uniformno na $[t_0, t_1]$ za $\bar{\alpha} \to 0$.*

*Za svaki $t \in [t_0, t_1]$, $t \neq \tau_i$, postoji okolina $V_t$ oko nule u $\mathbb{R}^N$ takva da je preslikavanje $\bar{\alpha} \to x_{\bar{\alpha}}(t; \mathcal{N})$ neprekidno diferencijabilno na $V_t \cap \mathbb{R}^N_+$. Također, parcijalna derivacija s obzirom na $\alpha_i$ u nuli zadovoljava sljedeću jednakost na $[\tau_i, t_1]$:*

$$\dot{y} = \hat{\varphi}_x(t)y, \quad y(\tau_i) = \Delta_{\tau_i, v_i}\varphi, \tag{1.62}$$

*gdje je $\Delta_{\tau_i, v_i}\varphi = \varphi(\tau_i, \hat{x}(\tau_i), v_i) - \varphi(\tau_i, \hat{x}(\tau_i), \hat{u}(\tau_i))$, za $1 \leq i \leq N$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo prvo da je funkcija $\hat{u}$ neprekinuta na $[t_0, t_1]$. Prema Teoremu 1.1.6, skup $G$, spomenut u formulaciji teorema, sadrži otvoren podskup $\hat{G}$ takav da Cauchyjev problem $\dot{x} = \varphi(t, x, \hat{u}(t))$, $x(\tau) = \xi$ ima jedinstveno rješenje $x(\cdot; \tau, \xi)$ na $[t_0, t_1]$ za svaki $(\tau, \xi) \in \hat{G}$, $\tau \in [t_0, t_1]$. Preslikavanje definirano sa $\hat{G}$ na $C([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ $(\tau, \xi) \mapsto x(\cdot; \tau, \xi)$ je neprekinuto diferencijabilno.

Prema Teoremu 1.1.5, tada postoje intervali $D_i = [\tau_i - \delta_1, \tau_i + \delta_1]$, $1 \leq i \leq N$, na kojima Cauchyjev problem

$$\dot{x} = \varphi(t, x, v_i), \quad x(\tau_i) = \hat{x}(\tau_i), \quad 1 \leq i \leq N \tag{1.63}$$

ima jedinstvena rješenja $x_i$. Vidljivo je da su ta rješenja međusobno disjunktna i grafovi rješenja $x_i$ leže u $\hat{G}$.

Pozovemo li se opet na Teorem 1.1.6, tada postoje otvoreni skupovi $\hat{G}_i \subset \hat{G}$ takvi da sadrže grafove od $x_i$, $1 \leq i \leq N$. Također, Cauchyjev problem $\dot{x} = \varphi(t, x, v_i)$, $x(\tau) = \xi$ ima jedinstveno rješenje $x(\cdot; \tau, \xi)$ na $D_i$ za svaki $(\tau, \xi) \in \hat{G}_i$, $\tau \in D_i$. Preslikavanje sa $\hat{G}_i$ na $C(D_i, \mathbb{R}^n)$ $(\tau, \xi) \to x(\cdot; \tau, \xi)$ je neprekidno diferencijabilno.

Pretpostavimo da je $\bar{\alpha} > 0$ dovoljno mali tako da je $\Delta_i(\bar{\alpha}) \subset D_i$ i

$$\left(\tau_i + i\sum_{j=1}^N \alpha_j, \hat{x}\left(\tau_i + i\sum_{j=1}^N \alpha_j\right)\right) \in \hat{G}_i \quad za \quad 1 \leq i \leq N.$$

Za svaki $\bar{\alpha}$, označimo funkciju $x_{\bar{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N})$ prema sljedećem pravilu:
na intervalu $\Delta_i(\bar{\alpha})$, funkcija $x_{\bar{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N})$ je jedinstveno rješenje $x_{i\bar{\alpha}}$ Cauchyjevog problema

$$\dot{x} = \varphi(t, x, v_i), \qquad x\left(\tau_i + i\sum_{j=1}^N \alpha_j\right) = \hat{x}\left(\tau_i + i\sum_{j=1}^N \alpha_j\right), \qquad 1 \leq i \leq N. \tag{1.64}$$

Između intervala $\Delta_i(\bar{\alpha})$ i $\Delta_{i+1}(\bar{\alpha})$, $1 \leq i \leq N-1$, te na segmentu $[\tau_N + N\sum_{j=1}^N \alpha_j + \alpha_N, t_1]$, funkcija $x_{\bar{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N})$ je jedinstveno rješenje Cauchyjevog problema

$$\dot{x} = \varphi(t, x, \hat{u}(t)), \qquad x(\tau_i + i\sum_{j=1}^N \alpha_j + \alpha_i) = x_{i\bar{\alpha}}(\tau_i + i\sum_{j=1}^N \alpha_j + \alpha_i), \qquad 1 \leq i \leq N, \tag{1.65}$$

te je $x_{\bar{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}) = \hat{x}$ na intervalu $[t_0, \tau_i + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j]$.

Za svaku dovoljno malu $\bar{\alpha} > 0$, imamo uniformnu funkciju $x_{\bar{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N})$ koja je definirana na cijelom segmentu $[t_0, t_1]$ i zadovoljava jednadžbu (1.61) svugdje, osim u krajnjim točkama segmenta $\Delta_i(\bar{\alpha})$, $1 \leq i \leq N$.

Teorem 1.1.6 povlači da funkcija $x_{\bar{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N})$ konvergira uniformno k $\hat{x}$ na $[t_0, t_1]$ kada $\bar{\alpha} \searrow 0$, te tada za svaki $t \in [t_0, t_1]$, $t \neq \tau_i$, preslikavanje $\bar{\alpha} \to x_{\bar{\alpha}}(t; \mathcal{N})$ je neprekidno diferencijabilno za mali $\bar{\alpha} \geq 0$ (zato što je navedena funkcija kompozicija neprekidno diferencijabilnih funkcija).

Sada dokažimo zadnju tvrdnju leme. Neka je $1 \leq i \leq N$. Promatrajmo preslikavanje $\alpha_i \mapsto \bar{x}$, gdje je $\bar{\alpha} = (0, ..., 0, \alpha_i, 0, ..., 0)^T$. U tom slučaju, interval $[\tau_i + i\alpha_i, \tau_i + (i+1)\alpha_i]$ sadrži samo jedan šiljak funkcije.

Funkcija $x_{\bar{\alpha}} = x(\cdot; \tau(\alpha_i), \xi(\alpha_i))$ gdje su $\tau(\alpha_i) = \tau_i + (i+1)\alpha_i$ i $\xi(\alpha_i) = x_{i\bar{\alpha}}(\tau_i + (i+1)\alpha_i)$, je rješenje jednadžbe $\dot{x} = \varphi(t, x, \hat{u}(t))$ i neprekidno je diferencijabilna kao posljedica Teorema 1.1.6 i teorema o kompoziciji neprekidno diferencijabilniih preslikavanja. Njezine derivacije su dane s

$$\frac{\partial x_{\bar{\alpha}}}{\partial \alpha_i}|_{\alpha_i=0} = \frac{\partial x_{\bar{\alpha}}}{\partial \tau}|_{\tau=\tau_i} + \frac{\partial x_{\bar{\alpha}}}{\partial \xi}|_{\xi=\hat{\tau}_i} \quad \frac{\partial \xi(\alpha_i)}{\partial \alpha_i}|_{\alpha_i=0}.$$

Prema Teoremu 1.1.6, prva derivacija s desne strane, zadovoljava jednadžbu

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \varphi_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))z, \\ z(\tau_i) &= -\varphi(\tau_i, \hat{x}(\tau_i), \hat{u}(\tau_i)). \end{aligned}$$

Štoviše, parcijalna derivacija od $x_{\bar{\alpha}}$ s obzirom na $\alpha_i$ u nuli zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \varphi_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), y)), \\ y(\tau_i) &= \varphi(\tau_i, \hat{x}(\tau_i), v_i) - \varphi(\tau_i, \hat{x}(\tau_i), \hat{u}(\tau_i)) \end{aligned}$$

na $[\tau_i, t_1]$.

Kada je funkcija $\hat{u}$ neprekidna, lema je dokazana. Ako funkcija nije neprekidna, možemo rastaviti funkciju po intervalima neprekidnosti, uzimajući u obzir da je $\hat{u}$ jednaka vrijednostima limesa u krajnjim točkama intervala. □

Pokažimo sada da postoji okolina $V_0$ oko nule u $\mathbb{R}^N$ takva da je funkcija

$$\bar{\alpha} \to g_0(\bar{\alpha}; \mathcal{N}) = J(x_{\bar{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}), u_{\bar{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}))$$

je neprekidno diferencijabilna na $V_0 \cap \mathbb{R}^N_+$, te je

$$\frac{\partial g_0}{\partial \alpha_i}(0+0; \mathcal{N}) = \Delta_{\tau_i v_i} f + \int_{\tau_i}^{t_1} \hat{f}_x(t) \cdot y_{\tau_i v_i}(t) dt, \quad 1 \leq i \leq N, \tag{1.66}$$

gdje je $\Delta_{\tau_i v_i} f = f(\tau_i, \hat{x}(\tau_i), \hat{u}(\tau_i))$ i $y_{\tau_i} v_i$ je rješenje problema (1.62).

Promatrajmo Cauchyjev problem

$$\dot{z} = \psi(t, z, u_{\bar{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N})), \qquad z(t_0) = z_0, \tag{1.67}$$

gdje su $z = (x, y)^T \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, $\psi(t, z, u) = (\varphi(t, x, u), f(t, x, u))^T$ i $z(t_0) = (x(t_0), 0)^T$.

Rješenje $\tilde{z}_{\bar{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}) = (\tilde{x}_{\bar{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}), \tilde{y}_{\bar{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}))^T$ ovog problema postoji kao posljedica leme, tj. za svaki $t \in [t_0, t_1]$, rješenje je jedinstveno pa je $\tilde{x}_{\bar{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}) = x_{\bar{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N})$.

Sada jer je

$$y_{\bar{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_{\bar{\alpha}}(t; \mathcal{N}), u_{\bar{\alpha}}(t; \mathcal{N}))dt = J(x_{\bar{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}), u_{\bar{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N})),$$

diferencijabilnost preslikavanja $\bar{\alpha} \to g_0(\bar{\alpha}; \mathcal{N})$ je dokazana.

Dokažimo sada jednakost (1.66). Označimo s $\bar{\alpha}_i = (0, ..., 0, \alpha_i, 0, ..., 0)^T$, $1 \le i \le N$. Vrijedi da je

$$u_{\bar{\alpha}_i}(t; \mathcal{N}) = \begin{cases} \hat{u}(t), & \text{ako } t \notin [\tau_i + \alpha_i, \tau_i + (i+1)\alpha_i] \\ v_i, & \text{ako } t \in [\tau_i + i\alpha_i, \tau_i + (i+1)\alpha_i]. \end{cases}$$

Prema definiciji, imamo

$$\frac{\partial g_0}{\partial \alpha_i}(0 + 0; \mathcal{N}) = \lim_{\alpha_i \to 0} \frac{g_0(\bar{\alpha}_i) - g_0(0)}{\alpha_i}$$

$$\lim_{\alpha_i \to 0} \frac{1}{\alpha_i} \int_{\tau_i + i\alpha_i}^{\tau_i(i+1)\alpha_i} (f(t, x_{\bar{\alpha}_i}(t), v_i) - f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)))dt +$$
$$\lim_{\alpha_i \to 0} \frac{1}{\alpha_i} \int_{\tau_i(i+1)\alpha_i}^{t_1} (f(t, x_{\bar{\alpha}_i}(t), v_i) - f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)))dt.$$

Na ovaj integral možemo primijeniti teorem o diferencijabilnosti podintegralnih funkcija zato što je funkcija $\bar{\alpha}_i$ neprekidno diferencijabilna s obzirom na $\alpha_i$ te segment $[\tau_i, t_1]$ možemo podijeliti na konačni broj podsegmenata na kojima je funkcija $\hat{u}$ neprekidna.

Primijenimo li teorem srednje vrijednosti, dobijemo

$$\frac{\partial g_0}{\partial \alpha_i}(0 + 0; \mathcal{N}) = \lim_{\alpha_i \to 0} (f(\xi, x_{\bar{\alpha}_i}(\xi), v_i) - f(\xi, \hat{x}(\xi), \hat{u}(\xi))) + \int_{\tau_i}^{t_1} \hat{f}_x(t) \cdot y_{\tau_i v_i}(t)dt,$$

gdje je $\xi \in [\tau_i + i\alpha_i, \tau_i + (i+1)\alpha_i]$. Sada jer $\alpha_i \to 0$, vrijedi prema lemi da $\xi \to \tau_i$, $x_{\bar{\alpha}_i}(\xi) \to \hat{x}(\tau_i)$. Također $\hat{u}(\xi) \to \hat{u}(\tau_i)$ zato što je funkcija $\hat{u}$ neprekidna u točki $\tau_i$. Dokazali smo (1.66).

Gledamo li presjek okoline u nuli s $\mathbb{R}^N$ i $\mathbb{R}^N_+$, funkcija $\bar{\alpha} \to g_0(\bar{\alpha}; \mathcal{N}) = J(x_{\bar{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}), u_{\bar{\alpha}}(\cdot; \mathcal{N}))$ i preslikavanje $\bar{\alpha} \to x_{\bar{\alpha}}(t_1; \mathcal{N})$ su neprekidno diferencijabilne.

Sada na tom skupu promatrajmo sljedeći problem:

$$g_0(\bar{\alpha}; \mathcal{N}) \to min\,(max), \qquad g_i(\bar{\alpha}; \mathcal{N}) = 0, \qquad 1 \le i \le n, \qquad \bar{\alpha} \in \mathbb{R}^N_+,$$

gdje su $g_i(\bar{\alpha}; \mathcal{N})$, $1 \le i \le n$, komponente vektora $x_{\bar{\alpha}}(t_1; \mathcal{N}) - x_1$.

Jasno je da je točka $\bar{\alpha} = 0$ lokalni ekstrem ovoga problema. Primjenom Teorema 1.2.3, tada postoji ne-nul vektor, Lagrangeov multiplikator $\lambda = \lambda(\mathcal{N}) = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n)$ tako da je $\sum_{i=0}^n \lambda_i g_i'(0+0; \mathcal{N}) \ge 0$ ili

$$\lambda_0(\Delta_{\tau v} f + \int_{\tau_i}^{t_1} \hat{f}_x(t) \cdot y_{\tau_i v_i}(t) dt) + \tilde{\lambda} \cdot y_{\tau_i v_i}(t_1) \ge 0, \qquad i = 1, ..., N,$$

gdje je $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Ako se sada koristimo istim argumentima iz leme o konačnim presjecima, možemo zaključiti da postoji ne-nul vektor $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda})$, gdje je $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, ..., \bar{\lambda}_n)$, tako da je

$$\bar{\lambda}_0(\Delta_{\tau v} f + \int_{\tau}^{t_1} \hat{f}_x(t) \cdot y_{\tau v}(t) dt) + \bar{\lambda} \cdot y_{\tau v}(t_1) \ge 0 \tag{1.68}$$

za svaki par $(\tau, v) \in T \times U$.

Neka je $p_2$ rješenje Cauchyjevog problema

$$-\dot{p} = p\hat{\varphi}_x(t) - \bar{\lambda}_0 \hat{f}_x(t), \qquad p(t_1) = -\bar{\lambda}. \tag{1.69}$$

Takvo rješenje postoji, štoviše dokazali smo (1.52).

Nadalje, za svaki $t \in [\tau, t_1]$ imamo

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}_0 \hat{f}_x(t) \cdot y_{\tau v}(t) &= p_2(t)\hat{\varphi}_x(t) y_{\tau v}(t) + \dot{p}_2(t) \cdot y_{\tau v}(t) \\
&= p_2(t) \cdot \dot{y}_{\tau v}(t) + \dot{p}_2(t) \cdot y_{\tau v}(t) \\
&= \frac{d}{dt}(p_2(t) \cdot y_{\tau v}(t)).
\end{aligned}$$

Integriramo li ovu jednakost na segmentu $[\tau, t_1]$ i ako umetnemo rezultat u (1.68), vraćamo se na nejednakost $\bar{\lambda}_0 \Delta_{\tau v} f - p_1(\tau) \cdot \Delta_{\tau v} \varphi \ge 0$ u relaciji (1.53).

Napokon smo dokazali Pontrjaginov princip maksimuma. □

# Poglavlje 2

# Primjene u teoriji optimalnog upravljanja

## 2.1 Primjeri problema optimalnog upravljanja

**Napomena 2.1.1.** *Kod postavljanja problema upravljanja, moramo imati na umu da zadani problem možemo maksimizirati ili minimizirati. No, prijelaz iz minimizacije u maksimizaciju, i obratno, nije problem. Tako je*

$$\int f \to max$$

*ekvivalentno s*

$$-\int f \to min.$$

**Napomena 2.1.2.** *U prvom dijelu smo definirali Lagrangeovu funkciju za klasični varijacijski račun i problem upravljanja koju smo označili s L. Sada se bavimo isključivo problemom upravljanja pa ćemo koristiti oznaku H za Lagrangeovu funkciju. Razlog za takvu oznaku je to što navedenu funkciju u teoriji upravljanja nazivamo Hamiltonovom funkcijom.*

Za početak pogledajmo primjere da bismo se što lakše približili teoriji upravljanja.

**Primjer 2.1.3.** *(Dubinovo vozilo)*

*Promatramo problem upravljanja pokretnim robotom od točke a do točke b. Kinematika robota je opisana diferencijalnim jednadžbama*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= vcos\theta \\ \dot{y} &= vsin\theta \\ \dot{\theta} &= \omega. \end{aligned} \tag{2.1}$$

*Ovdje su $(x, y)$ koordinate referentne točke robota, $\theta$ je njegov smjer. Na primjer $\theta$ može biti kut između središnje osi vozila i pozitivne $x$-osi, dok je $v$ konstantna brzina. Polumjer zakretanja ima donju granicu $R$, pa je kutna brzina $\omega$ ograničena*

$$|\omega| \leq \frac{v}{R}.$$

*Mora postojati granica za polumjer zakretanja. Naime, iako možemo ternutačno zakrenuti prednje kotače za upravljanje, to ne znači da se i $\theta$ mijenja trenutačno jer pretpostavljamo da stražnji kotači ne mogu klizati po površini.*

*Cilj je pronaći najkraći mogući put od početne točke $a$ do točke $b$. U matematičkom smislu to znači da želimo minimizirati*

$$\int_0^T (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} dt = vT$$

*uz uvjet da vrijedi kinematička jednadžba (2.1) te početna i završna ograničenja*

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ \theta(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(T) \\ y(T) \\ \theta(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_\theta \end{bmatrix}.$$

*Pretpostavka o konstantnoj brzini zamjenjuje problem određivanja najkraćeg puta problemom određivanja najkraćeg vremena.*

**Primjer 2.1.4.** *(Kolica)*
*Zamislimo mehanizam, poput dizalice ili kolica, koja ima masu $m$ koju mičemo horizontalno po pravcu bez trenja.*

*Ako $x(t)$ predstavlja poziciju tijela u trenutku $t$, tada gibanje tijela zadovoljava Newtonovu jednadžbu gibanja*

$$m\ddot{x}(t) = u(t), \qquad t > 0, \tag{2.2}$$

*gdje je $u(t)$ vanjska sila upravljanja kojom djelujemo na kolica.*

*Pretpostavimo sada da su početna pozicija i brzina tijela dani s*

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = y_0.$$

*Sada želimo odabrati silu u koju prirodno zovemo funkcija upravljanja. Fizikalno, uvjet će obično zahtijevati da je sila omeđena, tj.*

$$|\ u(t)\ | \leq M. \tag{2.3}$$

*Pretpostavimo li da su $m = M = 1$, jednadžbu (2.2) možemo zapisati*

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad \dot{x}_2 = u(t)$$

*gdje su $x_1(t)$ i $x_2(t)$ pozicija i brzina tijela u vremenu $t$. Tada jednadžba (2.2) postaje*

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

*ili*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \qquad x(0) = \begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix} \tag{2.4}$$

*gdje su*

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad i \quad b = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

*te je naš problem upravljanja naći funkciju $u$, koja daje rješenje $x(t)$ problema (2.4). Rješenje $x$ će u završnom trenutku $t_1$ biti jednako nuli, tj.*

$$x(t_1) = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}.$$

*To želimo postići u minimalnom vremenu.*

*Svako upravljanje koje teži prema nuli u minimalnom vremenu se naziva optimalno upravljanje.*

*Intuitivno, možemo očekivati optimalno upravljanje u prvom periodu s maksimalnim ubrzanjem ($u = +1$), i nakon toga maksimalnim usporenjem ($u = -1$), ili obratno.*

**Primjer 2.1.5.** *(Isaacs)*

*Neka je $x(t)$ količina čelika proizvedena u vremenu $t$. Količina proizvedena u vremenu $t$ je iskorištena u dvije svrhe: proizvedeni čelik namjenjujemo za prodaju ili proizvedeni čelik dalje obrađujemo.*

*Neka je funkcija upravljanja $u(t)$ postotak čelika koji ide u daljnju obradu , gdje je $0 \leq u(t) \leq 1$. Pretpostavimo li da je čelik kojeg dodatno obrađujemo iskorišten za pojačanje produktnih kapaciteta, to možemo zapisati kao*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ku(t)x(t),$$

*gdje je $x(0) = C$ početni uvjet, a $k$ odgovarajuća konstanta.*

*Problem je izabrati $u(t)$ tako da maksimiziramo cjelokupnu prodaju u fiksiranom periodu u vremenu $T > 0$. Želimo maksimizirati*

$$\int_0^T (1 - u(t))x(t)dt.$$

*Pitanje je konzumiramo li sve što je proizvedeno ili prerađujemo dio čelika za povećanje kapaciteta.*

## Opći zapis problema upravljanja

Nakon navedena tri primjera razradimo detaljnije problem upravljanja kojeg smo definirali u prvom dijelu.

**(1)**

$$\dot{x} = \varphi(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_r) \tag{2.6}$$

ili vektorski prikaz

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u)$$

gdje je

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \quad i \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ . \\ u_r \end{bmatrix}.$$

**(2)** Početna točka je $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ te je završna točka $x_1 \in \mathbb{R}^n$. Mi smo tu uzeli da je početna točka $x_0$ u trenutku $t_0 = 0$, a završna točka $x_1$ u trenutku $t_1$. Završna točka se često naziva i ciljna točka, koja može i ne mora biti zadana.

**(3)** Neka je $\Gamma$ skup svih funkcija upravljanja $u$ sa svim svojim ograničenjima. Takve funkcije nazivamo *dopustivim upravljanjima*.

Tako je u primjeru 2.1.4 $\Gamma = \{u : |u| \leq 1\}$. Najčešće, uzmemo kompaktan i konveksan skup $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ i uzmemo da je

$$\Gamma = PC([t_0, t_1]; \Omega).$$

**(4)** *Funkcija vrijednosti* uspoređuje učinkovitost različitih upravljanja. Najčešće je zapisujemo u obliku

$$J(t_1, x, u) = \int_0^{t_1} f_0(t, x(t), u(t))dt \to min,$$

gdje je $f_0$ neprekidna realna funkcija. Integral možemo inetrpetirati kao: uzmemo funkciju upravljanja $u \in \Gamma$, riješimo jednadžbu ovisno o x varijabli, izračunamo $f_0$ kao funkciju ovisnu o varijabli $t$ i integriramo.

Ukoliko nam je zadana ciljna točka, tada $t_1$ mora zadovoljiti $x(t_1) = x_1$. Općenito, ako je $f_0 \equiv 1$, tada je $J(t_1, x, u) = t_1$ i imamo problem minimalnog vremena.

Ako pak nemamo zadanu ciljnu točku, tada je $t_1$ zadano fiksno vrijeme te integriramo na segmentu $[0, t_1]$.

Sada možemo formulirati problem optimalnog upravljanja:
*Naći funkciju $\hat{\zeta}$ koja minimizira funkciju cilja*, tj. vrijedi:

$$J(\hat{\zeta}) \leq J(\zeta),$$

na skupu dopustivih točaka $\zeta$, tj. $\zeta = (x, u) \in PC^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n) \times PC([t_0, t_1]; \Omega)$ takvi da je $u \in \Gamma$, $\dot{x} = f(t, x, u)$, $x(0) = x_0$ i $x(t_1) = x_1$, ako je poznat završni uvjet.

Takvu funkciju upravljanja $\hat{\zeta}$ nazivamo funkcijom optimalnog upravljanja. Nužni uvjet za optimalnost problema je upravo Pontrjaginov princip maksimuma kojeg smo teorijski obradili u prvom dijelu ovoga rada.

**Napomena 2.1.6.** *Ako završno vrijeme $t_1$ nije zadano, već je varijabla po kojoj vršimo optimizaciju, za $\zeta$ uzimamo $\zeta = (t_1, x, u) \in [t_0, +\infty\rangle \times PC^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n) \times PC([t_0, t_1]; \Omega)$.*

## 2.2 Pontrjaginov princip maksimuma

Promatramo autonomni problem upravljanja.

(1) $\dot{x} = f(x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_r)$, gdje je $f$ neprekidno diferencijabilna na $\mathbb{R}^n \times \Omega$.

(2) Zadani su početna točka $x_0$ i (eventualno) krajnja točka $x_1$,

(3) klasa $\Gamma$ svih dopustivih upravljanja $u$, koja su po dijelovima neprekidne funkcije, s vrijednostima u $\Omega$,

(4) funkcional vrijednosti

$$J(x, u) = \int_0^{t_1} f_0(x(t), u(t))dt \to min,$$

gdje je $f_0$ neprekidno diferencijabilna na $\mathbb{R}^n \times \Omega$.

Sada za $x, u, \lambda \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ te označimo s $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda)$. Definiramo Hamiltonovu funkciju

$$\begin{aligned} H(x, u, \bar{\lambda}) &= \lambda_0 f_0(x, u) + \lambda_1 f_1(x, u) + ... + \lambda_n f_n(x, u) \\ &= \lambda_0 f_0(x, u) + \lambda \cdot f(x, u). \end{aligned}$$

Nadalje imamo

$$M(x, \bar{\lambda}) = \max_{u \in \Omega} H(\hat{x}, u, \bar{\lambda}) = H(\hat{x}, \hat{u}, \bar{\lambda}).$$

Sada možemo iskazati slabiju inačicu Pontrjaginovog principa maksimuma koju ćemo primijeniti na primjerima.

**Korolar 2.2.1.** *Neka je $\hat{u}$ optimalno upravljanje za zadani problem upravljanja i $\hat{x}$ je pripadajuća trajektorija. Tada postoje Lagrangeovi multiplikatori $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ i $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in C^1([0, t_1])$ takvi da je*

$$(a) \quad \dot{\hat{x}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = f_i(\hat{x}, \hat{u}), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

$$(b) \quad \dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_i}(\hat{x}, \hat{u}) - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\hat{x}, \hat{u}) - ... - \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(\hat{x}, \hat{u}),$$

$(c)$ $\lambda_0$ *je nepozitivna konstanta i*

$$H(\hat{x}, \hat{u}, \bar{\lambda}) = M(\hat{x}, \bar{\lambda})$$
$$= \max_{u \in \Omega} H(\hat{x}, u, \bar{\lambda}).$$

*Štoviše,* $M(\hat{x}, \bar{\lambda})$ *je konstantan za* $0 \leq t \leq t_1$.

Gledamo li autonomni problem s linearnim vremenom, imamo

$$\dot{x} = Ax + bu = f(x, u), \qquad \Omega = [-1, 1],$$

i

$$J(u) = \int_0^{t_1} 1 dt,$$

te

$$f_0 \equiv 1.$$

Sada je Hamiltonova funkcija

$$H(x, v, \bar{\lambda}) = \lambda_0 + \lambda^T (Ax + bv),$$

za $v \in \Omega$, te princip maksimuma postaje

$$H(\hat{x}, \hat{u}, \bar{\lambda}) = \max_{|v| \leq 1} (\lambda_0 + \lambda^T (Ax(t) + bv)),$$

pa je

$$\max_{|v| \leq 1} (\lambda^T bv).$$

Maksimum se postiže za

$$\hat{u} = sgn(\lambda^T b),$$

te računamo $\lambda$ iz (b) kao

$$\dot{\lambda} = -A\lambda.$$

Vratimo se na Primjer 2.1.5. Uzmemo da je konstanta $k = 1$ i

$$\dot{x} = ux, \qquad x(0) = x_0,$$

$$max \int_0^T (1 - u(t))x(t)dt.$$

Hamiltonova funkcija iznosi

$$H(x, u, \bar{\lambda}) = (u - 1)x + \lambda ux,$$

i pripadajuća jednadžba je

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(u - 1 - \lambda u) = 1 - u(\lambda + 1), \quad \lambda(T) = 0.$$

Trebamo minimizirati za $0 \leq u \leq 1$,

$$u(x + \lambda x) = ux(1 + \lambda),$$

te je optimalno upravljanje dano s

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 1 & ako \quad 1 + \lambda(t) < 0 \\ 0 & ako \quad 1 + \lambda(t) > 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

gdje je $x$ uvijek pozitivan.

Kako je $\lambda(T) = 0$, optimalno upravljanje mora biti nula počevši od nekog vremena. Iskoristimo li to, možemo riješiti jednadžbu za $t = T$, s $\lambda(T) = 0$ i $\hat{u} = 0$. Tada je

$$\lambda(t) = t - T \qquad t \leq T.$$

Upravljanje će imati prijelaz kada je $1 + \lambda(t) = 0$, a to je kada je

$$1 + t - T = 0 \quad ili \quad t = T - 1,$$

pa je

$$\lambda(t) = t - T, \quad \hat{u}(t) = 0, \quad za \quad t \in (T - 1, T).$$

Vrijedi da je $\lambda$ neprekidna na $(0, T)$ te je interval prijelaza

$$\dot{\lambda} = -\lambda, \quad \lambda(T - 1) = -1,$$

tj.

$$\lambda(t) = -e^{T-t-1}, \quad t \leq T - 1.$$

Pošto eksponencijalna funkcija može biti jednaka -1 najviše u jednoj točki, imamo

$$\lambda(t) = -e^{T-t-1}, \quad 0 \leq t \leq T - 1,$$
$$\hat{u}(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq T - 1.$$

Funkcija vrijednosti od $\hat{u}$ je dobivena iz

$$\dot{\hat{x}} = \hat{x}, \quad \hat{x}(0) = x_0 \quad u \quad [0, T - 1],$$

te iznosi

$$\hat{x}(t) = x_0 e^t, \quad 0 \leq t \leq T - 1.$$

Za $T - 1 \leq t \leq T$, je $\dot{\hat{x}} = 0$, gdje je $\dot{\hat{x}}(t) = x_0 e^{T-1}$ dok je $\hat{x}$ neprekidna.

Dobili smo

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \int_0^T (1 - \hat{u})\hat{x}dt = \int_{T-1}^T (1 - \hat{u})\hat{x}(t)dt = x_0 e^{T-1},$$

gdje je $\hat{u}$ optimalno upravljanje, a $\hat{x}$ pripadna funkcija stanja.

## 2.3 Primjena principa maksimuma

Opet promatramo problem upravljanja iz Primjera 2.1.4. Glavna jednadžba je

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad x(0) = (x_0, y_0). \tag{2.8}$$

Stoga je,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

i $\Phi(t)$ je fundamentalno rješenje

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t), \quad \Phi(0) = I.$$

Tada

$$\Phi(t) = e^{At} = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$$

i

$$\Phi^{-1}(t) = e^{-At} = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Po principu maksimuma, optimalno upravljanje ima formu

$$\hat{u}(t) = sgn(\eta_1 t + \eta_2) \quad \text{za neki} \quad (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.9}$$

Vrijedi da je $\hat{u} \in [-1, 1]$. Uzmemo li da je $\hat{u} = 1$, možemo riješiti (2.8) s početnim uvjetom $x(0) = (x_0, y_0)$, te je

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = 1, \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{1}{x_2}, \quad x(0) = (x_0, y_0),$$

$$x_1 = x_2^2 + x_0 - \frac{y_0^2}{2}$$

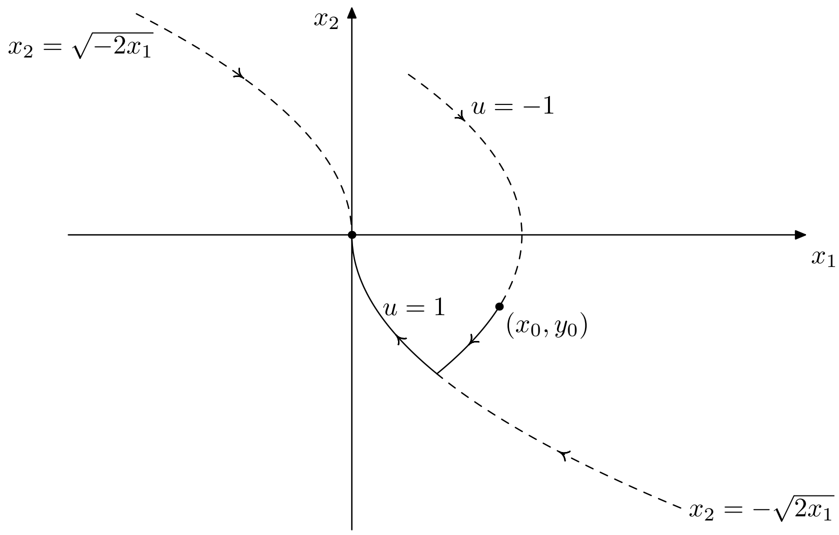
Uočimo da je $x_2$ uvijek rastuća. Nasuprot tome, za $\hat{u} = -1$, imamo

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + (x_0 + \frac{1}{2}y_0^2).$$

Sada je $x_2$ padajuća.

Princip maksimuma sada daje da je optimalno upravljanje kada je $\hat{u} = 1$, pa nakon toga je $\hat{u} = -1$ ili obratno.

Sada možemo konstruirati funkciju stanja (optimalnu trajektoriju) koju možemo vidjeti na slici (2.1).




Slika 2.1: Optimalna trajektorija

Na primjer, ako je $x_0 = 4$ i $y_0 = -1$, tada moramo upravljati prvo sa $\hat{u} = -1$, a kada se dvije parabole sijeku, mijenjamo $\hat{u} = 1$.

Računamo li vrijeme $t_1$ prijelaza iz $\hat{u} = -1$ u $\hat{u} = 1$, imamo prvu parabolu:

$$x_1 = \frac{1}{2}(9 - x_2^2)$$

ili $x_2 = -\sqrt{9 - x_2^2}$ dok je $x_2 < 0$. Tada je točka sjecišta u

$$-\sqrt{9 - x_2^2} = -\sqrt{2x_1},$$

tj.

$$9 - 2x_1 = 2x_1,$$

$$x_1 = \frac{9}{4} \quad x_2 = -\sqrt{9 - \frac{9}{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Sada računamo glavnu jednadžbu sa $u = -1$ u ovisnosti o $t$ daje

$$x_2(t) - t + y_0 = -\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

tada je

$$t_1 + 1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad t_1 = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2} = 1.121...$$

vrijeme prijelaza.

Slično, nakon prijelaza na $u = 1$, tada je

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 1$$

Prijelazimo iz $(\frac{9}{4}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$ u $(0,0)$. Računamo li za $x_2$, dobijemo $x_2(t) = t - \frac{3\sqrt{2}}{2}$, i $x_2 = 0$ kada je $t = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ sekundi (s). Cjelokupno vrijeme je $t_1 = 2\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1 = 3\sqrt{2} - 1 = 3.242s$.

Sada stavimo :

$$x_2 = W(x_1) = \begin{cases} -\sqrt{2x_1} & za \quad x_1 \geq 0 \\ \sqrt{-2x_1} & za \quad x_1 < 0 \end{cases}$$

Tada ako je skup,

$$\psi(x_1, x_2) = \begin{cases} -1 & ako \quad x_2 > W(x_1) \\ 0 & ako \quad x_1 = x_2 = 0 \\ 1 & ako \quad x_2 < W(x_1) \end{cases}$$

optimalna trajektorija s početnom točkom $x(0) = (x_0, y_0)$ je rješenje od

$$\dot{z} = \psi(z, \dot{z}), \quad z(0) = x_0, \quad \dot{z}(0) = y_0,$$

koje daje $z(t_1) = 0$, $\dot{z}(t_1) = 0$. Za bilo koju točku $(z(t), \dot{z}(t))$ na ovoj trajektoriji, vrijednost optimalnog upravljanja u vremenu $t$ je

$$\hat{u}(t) = \psi(z(t), \dot{z}(t)).$$

Kod jednadžbe ovakvog oblika, znamo li samo poziciju tereta na kolicima i brzinu kolica u bilo kojem trenutku $t$ moći ćemo odrediti optimalno upravljanje. Upravljanje ovakvog tipa se naziva se *zatvorena petlja* ili *povratno upravljanje*.

# Bibliografija


[1] G. G. Magaril-Il'yaev, V. M. Tikhomirov, *Newton's Method, Differential Equations, and the Lagrangian Principle for Necessary Extremum Conditions*, Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V. A. Steklova, Vol. 262, 2008, 156-177.

[2] G. Knowles, *An introduction to Applied Optimal Control*, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, New York, 1981.

[3] F. Bačić, Nužni uvjeti optimalnosti u zadaćama optimalnog upravljanja, Diplomski rad, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2010.

[4] S. Kurepa, Funkcionalna analiza, Školska knjiga, Zagreb, 1981.

# Sažetak

Ovaj rad se sastoji od dva dijela koje povezuje jaki rezultat, Pontrjaginov princip maksimuma.

U prvom dijelu je osigurana teorijska podloga tako da bi se moglo doći do nekih važnih rezultata. Dotaknuli smo se Newtonove metode pomoću koje smo dokazali važne teoreme poput teorema o inverznom preslikavanju i teorema o implicitnoj funkciji. Također smo dokazali egzistenciju i jedinstvenost rješenja za nekoliko postavljenih Cauchyjevih problema za obične diferencijalne jednadžbe. Time je pokazana sva snaga na prvi pogled prilično jednostavne Newtonove metode.

Na kraju prvog poglavlja je obrađen Lagrangeov problem varijacijskog računa s ograničenjem i Lagrangeov problem optimalnog upravljanja. Prvi dio rada završava Pontrjaginovim principom maksimuma koji daje nužne uvjete za optimalno upravljanje. On nam omogućuje da u drugom dijelu rada u primjerima problema upravljanja odredimo optimalno upravljanje te optimalnu trajektoriju.

Cilj ovog rada je bio pokazati kako nas upravljanje prati u svakodnevnom životu te nam omogućuje da što bolje iskoristimo ponuđeno. Zato je drugi dio temeljen na primjerima na kojima je pokušano što jednostavnije demonstrirati važnost teorije upravljanja.

# Summary

This thesis consist of two parts connected by a strong result, Pontryagin Maximum Principle.

In the first part a theoretical basis is presented so that we could reach some important conclusions. We have studied Newton's method, which enables us to prove some important theorems like the Inverse mapping theorem and the Implicit function theorem. Also, we proved the existence and uniqueness of solution to several Cauchy problems for ordinary differential equations. This way we have shown all the strength of, at first glance, quite simple Newton's method.

We elaborated the Lagrange problem of calculus of variation and the Lagrange problem of optimal control. The first part ends with the Pontryagin Maximum Principle that will allow us to determine the necessary conditions for optimal control and the optimal trajectory of some examples presented in the second part of this thesis.

The goal of this work was to demonstrate how control is present in everyday life and it allows us to take more advantage of what is given. That is why the second part was based on examples in which we tried to explain, as simply as we could, the importance of control theory.

# Životopis

Rođena sam 22.11.1984. u Zagrebu. Završila sam Gornjogradsku gimnaziju u Zagrebu, opći smjer. Godine 2003. sam upisala Preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2011. sam upisala Diplomski studij primijenjene matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu.
Govorim vrlo dobro engleski jezik i dobro njemački jezik. Tijekom studiranja na navedenom fakultetu stekla sam programerske vještine za koje se nadam da ću ih u budućem radu još više povećati.