Facultad de Educación

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Música y Matemáticas: algunas relaciones y una propuesta didáctica con alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias

Music and Mathematics: some relations and a teaching proposal with students of first year of Scientific Baccalaureate

Alumna: Vera López Arbiza

Especialidad: Matemáticas

Directores: Claudia Lázaro del Pozo y Tomás Recio Muñiz

Curso 2018 - 2019

Diciembre 2018

Firma Autora:

VºBº Directores:

Claudia Lázaro del Pozo Tomás Recio Muñiz

Índice

RESUMEN **4**

ABSTRACT **4**

1. INTRODUCCIÓN **5**

1.1. MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS DEL TRABAJO 5

1.2. DESCRIPCIÓN DEL DESARROLLO DEL TRABAJO 6

2. EL ARTE Y LA MÚSICA: BREVE RECORRIDO POR SU RELACIÓN CON LAS MATEMÁTICAS **8**

2.1. ARTE Y CIENCIA 8

2.1.1. La razón áurea *9*

2.1.2. El arte fractal *12*

2.1.3. Divulgación y educación *14*

2.2. MÚSICA Y MATEMÁTICAS 25

2.2.1. Algunos conceptos musicales básicos *26*

2.2.2. Algunas contribuciones de músicos y matemáticos ilustres *31*

3. RELACIÓN ENTRE PATRONES RÍTMICOS Y ELEMENTOS GEOMÉTRICOS: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA **37**

3.1. OBJETIVO Y HERRAMIENTAS DE LA PROPUESTA 37

3.2. DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA 44

4. EXPERIENCIA DIDÁCTICA **46**

4.1. CONTEXTO SOCIOEDUCATIVO DEL CENTRO 46

4.2. DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA 47

4.3. EVALUACIÓN DE LA EXPERIENCIA 48

5. VALORACIÓN Y CONCLUSIONES **57**

BIBLIOGRAFÍA **59**

ANEXO I. GUÍA DIDÁCTICA DE LA EXPERIENCIA **64**

ANEXO II. FICHA DE TRABAJO DEL ALUMNO **69**

Resumen

En el presente Trabajo de Fin de Máster (TFM) se realiza un breve recorrido por las estrechas relaciones existentes entre el arte y la ciencia y más en particular, entre la música y las matemáticas. Además, basándose en un estudio que relaciona la música flamenca y las matemáticas, en el que se analizan diferentes tipos de cante flamenco desde una perspectiva matemática, en este trabajo se describe una propuesta didáctica que relaciona los patrones rítmicos de dos canciones de diferentes estilos de música popular con ciertos elementos geométricos. Después, se detallan los hechos acaecidos en la implementación de dicha propuesta con un grupo de alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias, y, finalmente, se realiza un análisis de los resultados obtenidos a través de un cuestionario que recoge diversas actividades relacionadas con la propuesta, el cual cumplimentaron dichos alumnos.

Palabras clave: matemáticas, arte, música, patrones rítmicos.

Abstract

In the present Master's Thesis, a small tour through the close relations existing, between art and science and, more in particular, between music and mathematics, is reported. Moreover, based in a study that describes a special relationship between flamenco music and mathematics, in which different types of flamenco singing are analyzed from a mathematical point of view, in this work a teaching proposal that relates the rhythmic patterns of two popular music songs of different styles with certain geometric elements is described. Then, the implementation of this teaching proposal with a group of students of first year of Scientific Baccalaureate is detailed, and, finally, it is made an analysis of the results obtained through a questionnaire that contains some tasks about this proposal, which these students had completed.

Keywords: mathematics, art, music, rhythmic patterns.

1. Introducción

En este capítulo introductorio se va a explicar cuál ha sido la motivación para realizar este trabajo, así como los objetivos que se pretenden conseguir, para finalmente indicar someramente el contenido de los diversos capítulos y secciones que componen este documento.

1.1. Motivación y objetivos del trabajo

En el ámbito educativo ha existido, en general, una tendencia a no relacionar entre sí las diferentes asignaturas que se imparten, cuando en realidad hay fuertes relaciones entre distintas áreas de conocimiento. En particular, esto sucede con las matemáticas, que, en palabras de Servais (1980) que encontramos en Peralta (1998, p. 235), “tradicionalmente ha sido una materia que se ha considerado como deshumanizada, fría y cerrada, que no posee ninguna relación con otros ámbitos de conocimiento”. Bien es cierto que cada vez más se intenta fomentar la interdisciplinaridad entre las matemáticas y otras materias, mediante determinados proyectos y actividades a los que se hará referencia más adelante (véase epígrafe 2.1.3).

En este contexto, este trabajo surge del interés de su autora por estudiar las relaciones existentes entre las matemáticas y las disciplinas artísticas, particularmente la música; y de mostrar cómo estas pueden ser un recurso muy útil a la hora de enseñar matemáticas, pues ambas materias, matemáticas y música, tienen una estrecha relación en muchos aspectos, como se detallará en el capítulo siguiente. En dicho capítulo, se realizará un breve recorrido por diversos puntos en común entre las disciplinas artísticas y las matemáticas, centrándonos después en la música, donde se explicarán las matemáticas que subyacen a algunos conceptos musicales básicos, así como contribuciones de algunos músicos y matemáticos ilustres que relacionan estas dos materias.

Además, en este trabajo se pretenden sacar a la luz algunos proyectos que hoy en día se están llevando a cabo para mostrar dicha relación en el ámbito educativo.

Finalmente, en el mismo sentido, se pretende desarrollar una propuesta didáctica propia, ponerla en práctica en el aula con un grupo de alumnos y analizar los resultados obtenidos por dichos estudiantes.

1.2. Descripción del desarrollo del trabajo

El presente trabajo está organizado en diversos capítulos y secciones, cuyos contenidos se describen a continuación:

En el capítulo primero, en sus dos secciones (1.1 y 1.2), se aborda la motivación y los objetivos del trabajo, así como su organización interna.

El capítulo segundo trata, en primer lugar (véase sección 2.1), sobre la relación existente entre el arte y las matemáticas; y de cómo aquel puede ser un recurso didáctico a la hora de impartir la asignatura de matemáticas. Después, la sección 2.2. se centra en el caso particular de la música, en tanto que disciplina artística.

En el capítulo tercero se describe, en sus dos secciones, una propuesta didáctica propia que relaciona los patrones rítmicos de dos canciones de diferentes estilos de música popular con ciertos elementos geométricos, la cual está basada en un estudio que encontramos en Díaz-Báñez (2013), Díaz-Báñez [et. al] (2004) y Díaz-Báñez [et. al] (2005) que relaciona las matemáticas con la música flamenca, en la que se estudian diferentes tipos de cante flamenco desde un punto de vista matemático.

En el capítulo cuarto se detalla la puesta en práctica de la propuesta didáctica expuesta en el capítulo anterior. En la sección 4.1 se describe el contexto socioeconómico del centro educativo y del grupo de alumnos con los que se llevó a cabo. En la sección 4.2. se narran los hechos acontecidos en el aula durante su implementación y, finalmente, en la sección 4.3 se exponen y analizan los resultados obtenidos con los alumnos a través de un cuestionario que cumplimentaron.

En el capítulo quinto se realiza una valoración personal del trabajo y se exponen las conclusiones generales obtenidas tras su realización.

Al término de este trabajo se encuentra la bibliografía y la webgrafía consultada para su elaboración.

En dos anexos se incluyen, por un lado, las notas elaboradas para la puesta en práctica de la propuesta didáctica y que fueron entregadas a los alumnos como guía de esta (*Anexo I. Guía didáctica de la experiencia*), y por otro, el cuestionario que cumplimentaron los alumnos en el marco de dicha experiencia (*Anexo II. Ficha de trabajo del alumno*).

2. El arte y la música: breve recorrido por su relación con las matemáticas

En este capítulo se va a hacer un breve recorrido por algunas relaciones entre el arte y la música con las matemáticas, así como por las experiencias divulgativas y formativas actualmente en marcha, que fomentan la interdisciplinaridad, dado que ambas materias proporcionan recursos didácticos muy útiles a tener en cuenta para enseñar matemáticas.

2.1. Arte y ciencia

Las matemáticas “han formado parte desde la cultura griega de las llamadas artes liberales”, concretamente del Quadrivium, que “comprende la aritmética (estudio de los «números en reposo»), la geometría (las «magnitudes en reposo»), la música (los «números en movimiento») y la astronomía (las «magnitudes en movimiento»)”, como señala Peralta (1998, p. 237). En este sentido, Bertos (2009, p.3) señala que, desde entonces hasta el Renacimiento, “la música era considerada una parte de las matemáticas dentro de las siete artes liberales”, pues formaba parte del *Quadrivium*, de los llamados *saberes exactos*. Estas siete artes eran las siguientes:

- *Quadrivium* (del latín: *saberes exactos*): Geometría, Aritmética, Música y Astronomía.
- *Trivium* (del latín: *saberes humanos*): Gramática, Dialéctica, Retórica.

Las matemáticas están presentes en muchas obras de arte de tipo arquitectónico, pictórico, etc. Así, por ejemplo, aparecen cuando se pone el foco en aspectos tales como la simetría (o asimetría), la proporcionalidad, la perspectiva, la fractalidad, etc., presentes en cuadros, edificios, esculturas; o en otras propiedades más especiales, como las relaciones entre la longitud y la anchura de ciertos elementos como ventanas y puertas, que se manifiestan con frecuencia en monumentos y otros edificios, y que dan lugar a constantes como la razón áurea.

Dada la extensión limitada de este trabajo, se ha optado por centrarse solamente en la descripción de dos de estos aspectos: la razón áurea y el arte fractal, los cuales se van a desarrollar en los dos siguientes epígrafes.

2.1.1. La razón áurea

Desde la antigüedad, la razón áurea está presente en multitud de obras artísticas y un ejemplo de ello son las de tipo arquitectónico. Resulta interesante observar el contraste entre monumentos más antiguos, como es el caso de la Catedral de Murcia, construida entre 1394 y 1465, aunque sufrió varios añadidos en los siglos XVI y XVIII, como la torre-campanario, nuevas capillas y fachadas (véase Gago Blanco (2009) donde se estudia esta catedral desde un punto de vista interdisciplinar); y edificios más modernos, como el edificio anexo del Ayuntamiento de dicha ciudad (conocido como Edificio Moneo y diseñado por Rafael Moneo en 1998), pues ambos se encuentran en la misma plaza (Plaza del Cardenal Belluga), uno frente al otro y en los dos existen ciertos elementos que aproximadamente, siguen una proporción áurea:

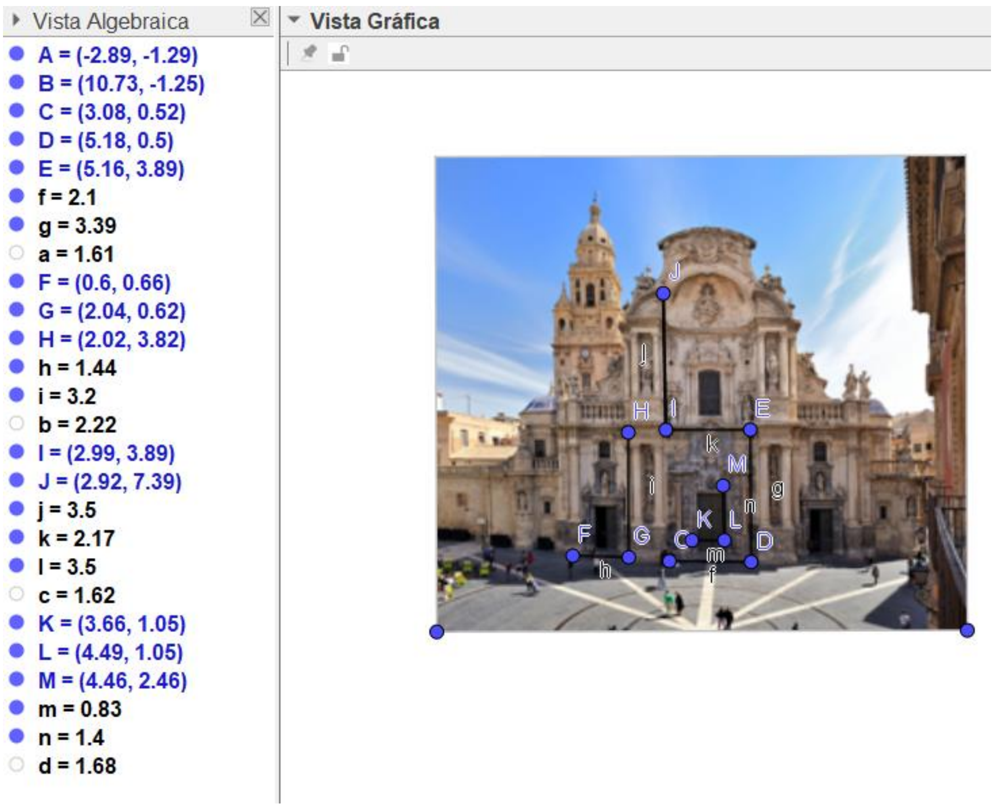


Figura 1: Captura de pantalla de la Catedral de Murcia, analizada con GeoGebra.

La figura 1 pertenece a la Catedral de Murcia y, ayudándose de GeoGebra, es fácil observar que la relación entre la longitud y anchura de ciertos elementos de la fachada siguen aproximadamente la razón áurea: g/f=1.61 y l/k=1.62, que son valores aproximados de φ =1.618…

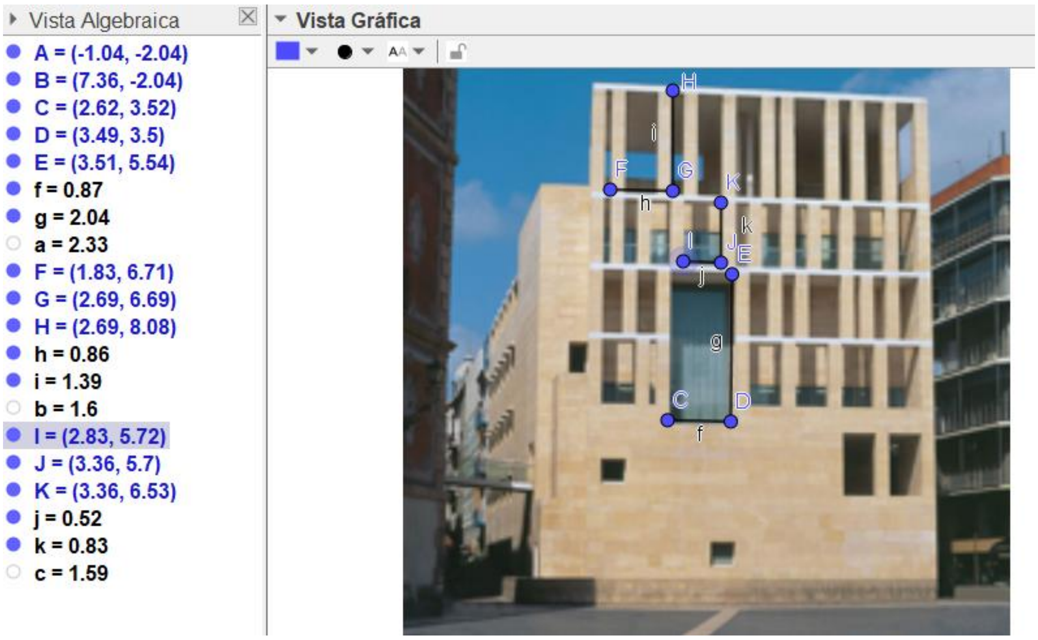


Figura 2: Captura de pantalla del Edificio Moneo, en Murcia, analizado con GeoGebra.

En la figura 2 se presenta una imagen que corresponde al Edificio Moneo (edificio anexo del Ayuntamiento de Murcia), en donde las relaciones entre longitud y anchura de algunas ventanas se asemejan también a la razón áurea: i/h=1.6, k/j=1.59, lo cual se ha hallado con la ayuda de GeoGebra.

Tras estos ejemplos de obras arquitectónicas que poseen elementos que están en razón áurea, conviene destacar a un autor clásico para todos aquellos que buscan la razón áurea en el arte: Luca Pacioli (1445-1517), un fraile franciscano y matemático (entre otras cosas), quien en su obra ‘De Divina Proportione’ (en español, ‘Sobre la proporción divina’), expuso la teoría de una proporción que los clásicos llamaban la “división de un segmento en media y extrema razón” y que se conoce como proporción o razón áurea, así como sus aplicaciones en el arte visual y la arquitectura. (Gutiérrez, 2009, p.110).

En esta época se tenía un concepto muy amplio de las matemáticas, tal y como demuestra Pacioli en el capítulo III de dicha obra al citar cuáles considera que son las disciplinas matemáticas, entre las que incluye la música:

> "… y, para nuestro propósito, por ciencias y disciplinas matemáticas se entienden la aritmética, la geometría, la astronomía, la música, la perspectiva, la arquitectura y la cosmografía, así como cualquier otra dependiente de estas*".* (Gutiérrez, 2009, p. 110)

En esta obra, como también apunta Gutiérrez (2009, p.110), Pacioli aplica la proporción divina "a la división de un segmento en dos partes tales que el todo sea a la mayor como la mayor es a la menor": si tomamos un segmento de longitud A+B y lo dividimos en dos partes, A y B, podemos expresar la proporción divina del siguiente modo, tal y como se observa en la figura 3:

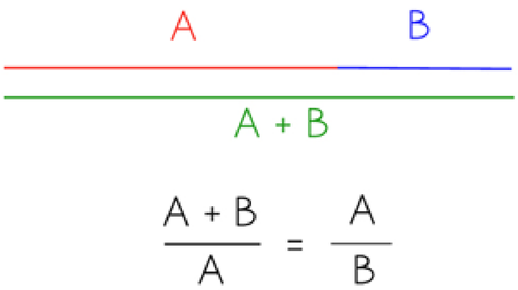


Figura 3: Proporción áurea.
Tomado de https://www.fotonostra.com/fotografia/seccionaurea.htm

La razón A/B que se observa en la figura 3 es la razón áurea. Este es un número irracional que se suele representar mediante la letra griega φ y su valor aproximado es 1.618… Como apunta Gutiérrez (2009, p.111) "está considerado como el canon de la belleza", pues está "presente en la arquitectura" (en el Partenón de Atenas, por ejemplo), en "el diseño de documentos actuales" (como el DNI), en "las hojas de papel DIN", etc. e incluso en la naturaleza y en la música.

Resulta interesante finaliza este epígrafe relativo a la razón áurea con las palabras con las que Johannes Kepler (1571-1630), científico ilustre y contemporáneo de Pacioli, se refirió al número áureo:

> “La geometría tiene dos grandes tesoros: uno es el teorema de Pitágoras; el otro, la división de una línea entre el extremo y su proporcional. El primero lo podemos comparar a una medida de plata; el segundo lo debemos denominar una joya preciosa”. (Gutiérrez, 2009, p.111)

2.1.2. El arte fractal

La razón áurea está presente en los cánones clásicos de belleza y se utiliza desde la antigüedad hasta hoy en día en diferentes obras artísticas, como se ha señalado en el epígrafe anterior. En contraposición a esto, en el siglo XX surgió el denominado arte fractal.

La fractalidad es un concepto reciente, surgido en el siglo pasado. El arte fractal tiene una estrecha relación con las matemáticas, sobre todo con la geometría, ya que los fractales se basan en una repetición constante de patrones geométricos en los que “una porción es idéntica al todo”. De este modo, el arte fractal “repite una serie de patrones hasta el infinito”, tal y como se recoge en la entrada publicada por Sanguino en la página web Cultura Colectiva.

Esto ya se aprecia en la obra de Maurits Cornelis Escher (1898-1972), que, aunque no conoció la geometría fractal, su arte matemático era muy similar al arte fractal, “dado que las semejanzas y congruencias con las que trabajó Escher son dos conceptos muy allegados a la autosimilitud, propiedad clave de los objetos fractales”, como apunta Puig (2014, p.77).

Quien está considerado el padre de la geometría fractal es Benoît Mandelbrot (1924-2010). La palabra fractal (del latín fractus, "irregular", "fragmentado") la acuñó el propio Mandelbrot para “describir la repetición "infinita" de patrones geométricos a diferentes escalas, que muestran versiones cada vez más pequeñas de sí mismos”, según se recoge en una entrada publicada por Sanz (2010) para la revista *Muy Interesante*, quien también explica que, según Mandelbrot, “las partes pequeñas de un fractal son semejantes al todo”, esto es, al conjunto completo.

Sanz (2010) también destaca que lo más interesante de Mandelbrot es que “demostró que la mayoría de las formas de la naturaleza son fractales”, los cuales se han utilizado para explicar los fenómenos atmosféricos, para calcular la longitud de las costas, para estudiar los seísmos, etc. e incluso “en telecomunicaciones se han diseñado antenas fractales”. Asimismo, “los hallazgos se Mandelbrot también se aplican en artes visuales, como en la mayoría de los objetos generados hoy en día por ordenador y en arquitectura” y “son necesarios para la compresión de imágenes digitales”.

En la contraportada del libro ‘La Geometría Fractal de la Naturaleza’, obra de Mandelbrot, se recogen sus palabras acerca de qué es para él la geometría fractal:

> “¿Por qué a menudo se describe la geometría como algo "frío" y "árido"? Si, es incapaz de descubrir la forma de la nube, una montaña, una costa o un árbol, porque ni las nubes son esféricas, ni las montañas cónicas, ni las costas circulares, ni el tronco de un árbol cilíndrico, ni un rayo rectilíneo. (…) Creo que muchas formas de la naturaleza son tan irregulares y fragmentadas que la naturaleza no sólo presenta un grado mayor de complejidad, sino que ésta se nos revela completamente diferente. (…) La existencia de estas formas representa un desafío: (…) la investigación de la morfología de lo «amorfo". (…) En respuesta a este desafío, concebí y desarrollé una nueva geometría de la naturaleza y empecé a aplicarla a una serie de campos. Permite describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean, dando lugar a teorías coherentes, identificando una serie de formas que llamo fractales. (…) Algunos conjuntos fractales [tienen] formas tan disparatadas que ni en las ciencias ni en las artes he encontrado palabras que lo describieran bien”. (Mandelbrot, 1997, contraportada)

Para cerrar este epígrafe, en la figura 4 se muestra una imagen en la que está presente el arte fractal y que fue premiada en el concurso *Benoit Mandelbrot Fractal Art Contest* en 2007:

Figura 4: Imagen premiada en el concurso *Benoit Mandelbrot Fractal Art Contest 2007*, obra de Cory Ench. Tomada de https://www.muyinteresante.es/ciencia/fotos/fotos-belleza-fractal/fotos-arte-fractal___1182

2.1.3. Divulgación y educación

Todos estos aspectos que se están viendo exigen ser divulgados al público en general y también servir como recurso educativo a la hora de enseñar matemáticas, de forma que los alumnos puedan ver aplicaciones reales de la materia a la vez que se trabaje la interdisciplinaridad, tan importante hoy en día. Desde las instituciones y otras entidades, se está llevando a cabo una importante tarea en este sentido, fomentando la interdisciplinaridad entre el arte y las matemáticas. En este epígrafe se describirán algunos organismos que realizan esta interesante labor, a través de, entre otros, la página web Divulgamat, la conferencia internacional Bridges, la corriente pedagógica basada en la aproximación STEAM a la enseñanza de la ciencia y el software GeoGebra, de los que se hablará en este epígrafe.

Divulgamat (http://www.divulgamat.net/) es una página web creada por la Real Sociedad Matemática Española (RSME) con el objetivo de divulgar y hacer más atractivas las matemáticas al público en general. Además, contribuye a mejorar la percepción de las matemáticas como asignatura árida y ofrece recursos para enseñarlas desde un punto de vista más práctico, con aplicaciones reales, de manera que a los estudiantes les resulten atractivas. El actual director es Raúl Ibáñez Torres (Universidad del País Vasco – Bilbao) y, tal y como se muestra a continuación en su menú principal, dispone de materiales de diversa índole:

Figura 5: Captura de pantalla del menú principal de la página web Divulgamat

Como se ve en la figura 5, en Divulgamat se pueden encontrar, entre otras cosas: retos matemáticos, biografías de matemáticos ilustres, matemáticas en diferentes culturas, exposiciones virtuales de arte y matemáticas, recursos didácticos variados, publicaciones de divulgación, etc. Además, en lo que concierne a este trabajo, destaca la sección ‘Cultura y matemáticas’, que está compuesta por diversas categorías en las que se encuentran numerosos artículos que relacionan las matemáticas con la música, el arte, el cine, el teatro, la literatura, la publicidad, la papiroflexia y la ciencia ficción, como se ve a continuación en la figura 6:

Figura 6: Captura de pantalla de la sección ‘Cultura y matemáticas’ de la página web Divulgamat

La categoría de ‘Arte y matemáticas’ como tal no dispone de muchas entradas: un total de ocho a fecha del 20 de noviembre de 2018 y todas datan de hace varios años. Sin embargo, la de ‘Música y matemáticas’, cuyo responsable es Francisco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid), dispone de un total de 95 entradas que tratan, por ejemplo, de la geometría en la música, de medidas de complejidad rítmica, de composición algorítmica, música fractal, análisis armónico, combinatoria musical, funciones musicales, etc.

Asimismo, destaca una entrada acerca del congreso *Mathematics and Computation in Music 2019*, un congreso interdisciplinar que tendrá actividad científica (ponencias, paneles especiales, conferencias plenarias, mesas redondas) y musical (conciertos) que se celebrará entre los días 18 y 21 de junio de 2019 en Madrid y que está organizado por Mariana Montiel (Universidad Estatal de Georgia), el propio Francisco Gómez Martín y el Real Conservatorio Superior de Música de Madrid. Este congreso se celebra bianualmente desde 2007, año en que en Berlín (en el Instituto Estatal de Musicología) se creó la *Society for Mathematics and Computation in Music* (en español: Sociedad para las Matemáticas y la Computación en la Música). Para más información acerca de este evento, consultar http://www.divulgamat.net/.

Los anteriores responsables de la sección ‘Música y matemáticas’, Rafael Losada Liste y Vicente Liern Carrión, son también expertos en estas materias con numerosas publicaciones en esta línea. Además, se ha de mencionar que Rafael Losada es experto en GeoGebra, siendo formador del Instituto Internacional GeoGebra (IGI) y del Instituto GeoGebra de Cantabria (IGC), así como el traductor de GeoGebra al español (de España), tal y como figura en https://www.geogebra.org/u/rafael.

Después de esta incursión por Divulgamat, ahora se va a hablar del proyecto Bridges Math Art (véase http://www.bridgesmathart.org/), impulsado por la organización Bridges y cuyo objetivo es fomentar la investigación, la práctica y el interés en las relaciones de las matemáticas con el arte, la música, la arquitectura, la educación y la cultura. Para ello, la principal actividad que desarrolla es la conferencia anual Bridges, en donde tienen lugar diversos actos en los que se tratan dichas relaciones.

Desde 1998, esta conferencia ha tenido lugar en diferentes localizaciones de América del Norte, Europa y Asia, reuniendo a participantes de más de treinta países. En sus veinte años de existencia, esta se ha celebrado dos veces en España: en 2003 en Granada y en 2007 en San Sebastián. Generalmente, tiene lugar a fines de julio o principios de agosto y reúne a un grupo interdisciplinario de matemáticos, científicos, artistas, educadores, músicos, escritores, informáticos, escultores, bailarines, etc. en un clima de intercambio de conocimientos y de inspiración, tal y como se desprende de la página web de Bridges.

Como también figura en su web, en dicha conferencia se incluyen charlas de personas invitadas, presentación de trabajos de investigación, talleres prácticos y educativos, una exhibición de arte visual, un "día de la familia" público y eventos artísticos de música, cine, poesía y teatro, entre los que se incluye un festival de cortometrajes y un recital de poesía en el que, en primer lugar, los poetas invitados leen una selección de su trabajo, tras lo cual se inicia un periodo de micrófono abierto donde los participantes de Bridges pueden leer sus propios poemas matemáticos.

En la página web de la organización, resulta de especial interés la sección 'Past Conferences' (en español: conferencias pasadas), en donde se puede consultar toda la información relativa a las conferencias anuales que han tenido lugar desde su comienzo en 1998, incluyendo los trabajos de investigación presentados, fotografías de las obras de arte que forman parte de las exhibiciones de arte visual, los cortometrajes que se han proyectado en los festivales, etc.

La siguiente imagen es una obra de arte que formó parte de la exhibición de arte visual de la conferencia Bridges 2017 celebrada en Waterloo (Ontario, Canada). Esta obra, realizada por Hans Kuiper (nacido en Bunnik, Holanda) es un tributo a Reza Sarhangi (1952-2016), que fue uno de los fundadores de la conferencia Bridges. Para su realización, el artista utilizó una fotografía de Reza y para el fondo, una obra de arte de este, llamada “Tray of love” (en español: bandeja de amor):

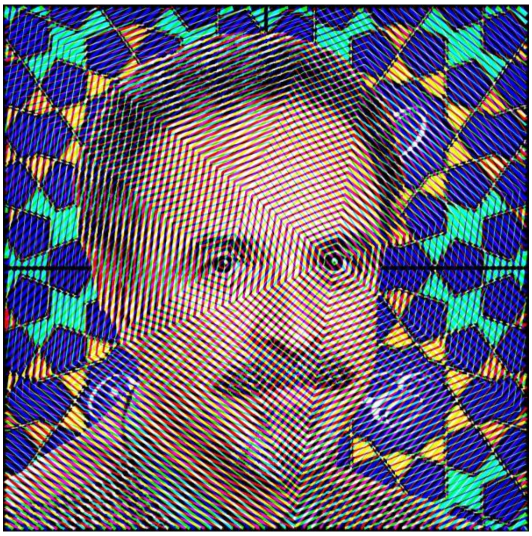


Figura 7: Tributo a Reza Sarhangi. Autor: Hans Kuiper. 2017. Tomado de http://gallery.bridgesmathart.org/exhibitions/2017-bridges-conference/hans-kuiper

Al observar esta imagen se crea un efecto sorprendente en el espectador. En ella se utilizan ocho colores (negro, blanco, rojo, verde, azul, cian, magenta y amarillo) los cuales se encuentran en diferentes formas (cuadrados, pentágonos y hexágonos).

Cabe mencionar que Bridges no está enfocada al ámbito educativo, sino que principalmente se centra en la divulgación y sería interesante aprovechar didácticamente los numerosos recursos que Bridges ofrece, pero esto excede de los objetivos y límites de este trabajo.

En el ámbito educativo, la presencia del arte en la enseñanza de las matemáticas se refuerza por un hecho singular acaecido en los últimos años. En efecto, las nuevas demandas de la sociedad contemporánea han hecho surgir el llamado aprendizaje por competencias, que pretende ofrecer una manera de atender a las necesidades de la sociedad actual. Este nuevo enfoque propicia, en particular, la interdisciplinaridad, puesto que la competencia en cualquier ámbito no depende, habitualmente, de tener únicamente conocimientos en una materia.

En esta línea, ha surgido la corriente denominada STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics), que propicia una enseñanza de la ciencia que considera, a la vez, todas estas áreas de conocimiento. Más recientemente, se ha incluido en el enfoque STEM la A de arte, dando lugar a la corriente didáctica basada en la enseñanza de la ciencia que tiene en cuenta también este nuevo ingrediente, el arte, como ponen de manifiesto Cilleruelo y Zubiaga (2014) y Zamorano, García y Reyes (2018). En educación, el enfoque STEAM se puede entender como una "aproximación para la enseñanza de las ciencias, tecnologías, ingenierías, artes y matemáticas de forma interdisciplinar, donde la rigurosidad de los conceptos científicos es desarrollada mediante actividades didácticas inmersivas aplicadas al mundo real" en palabras de García, Burgos y Reyes (2017) en Zamorano, García y Reyes (2018, p.3).

La aproximación STEAM no sólo abarca la enseñanza de los contenidos en sí, sino que también implica el desarrollo de determinadas competencias y tipos de pensamientos relacionados con el desarrollo de estas materias. Tradicionalmente ha existido una separación muy marcada entre las materias científico-tecnológicas, las sociolingüísticas y las artísticas y, en esta línea, el enfoque STEAM "ha logrado romper esta separación para lograr inculcar en la educación esa visión transversal de disciplinas tan necesaria en la sociedad actual", en palabras de Ortega (2016) publicadas en una entrada de la página web DIWO y además, "garantiza el desarrollo de un conocimiento transversal, en el que los contenidos de cada una de estas ramas no se trabajan de manera aislada, sino de forma interdisciplinar para garantizar un aprendizaje contextualizado y significativo", según se explica en ese mismo portal web.

En definitiva, STEAM es un nuevo enfoque educativo que pretende fomentar la interdisciplinaridad entre la ciencia y el arte. En este sentido, la experiencia didáctica que propongo en el capítulo 4 pretende contribuir a que esta nueva corriente pedagógica se siga poniendo de manifiesto en el aula.

Dada la relevancia que actualmente tiene esta aproximación, se considera importante desarrollar con un poco más de detenimiento esta idea. Como se recoge en Valle y Manso (2013, p.21):

> “El trabajo sobre la conceptualización de las competencias clave y la definición de cuáles eran y cómo debían implementarse en el quehacer de los sistemas europeos de educación y formación, ha supuesto para todos los centros escolares de Europa y su profesorado un cambio de paradigma integral en la concepción didáctica del currículo y en el diseño de las metodologías empleadas para su desarrollo”

En esta línea, el marco de referencia europeo establece ocho competencias clave, que se consideran igualmente importantes, pues “cada una de ellas puede contribuir al éxito en la sociedad del conocimiento”, como señala la Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo (2006, p.3). Muchas de ellas están relacionadas entre sí, ya que algunos aspectos esenciales de unas competencias contribuyen a la consecución de otras. Estas competencias, como se señala en esta misma recomendación, son las siguientes:

1. *Comunicación en la lengua materna*
2. *Comunicación en lenguas extranjeras*
3. *Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología*
4. *Competencia digital*
5. *Aprender a aprender*
6. *Competencias sociales y cívicas*
7. *Sentido de la iniciativa y espíritu de empresa*
8. *Conciencia y expresión culturales*

Esta última competencia, se define como la “apreciación de la importancia de la expresión creativa de ideas, experiencias y emociones a través de distintos medios, incluida la música, las artes escénicas, la literatura y las artes plásticas”, como recoge la Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo (2006, p.3). Además, en la normativa española se señala que:

> “La competencia para la conciencia y expresión cultural requiere de conocimientos que permitan acceder a las distintas manifestaciones sobre la herencia cultural (patrimonio cultural, histórico-artístico, literario, filosófico, tecnológico, medioambiental, etcétera) a escala local, nacional y europea y su lugar en el mundo. Comprende la concreción de la cultura en diferentes autores y obras, así como en diferentes géneros y estilos, tanto de las bellas artes (música, pintura, escultura, arquitectura, cine, literatura, fotografía, teatro y danza) como de otras manifestaciones artístico-culturales de la vida cotidiana (vivienda, vestido, gastronomía, artes aplicadas, folclore, fiestas...)”. (España, 2015, p.7001)

Haciéndose eco de esta tradición, la ley recoge el papel del arte a la hora de enseñar matemáticas, siendo una de las competencias clave de la LOMCE la relativa a la ‘conciencia y expresiones artísticas y culturales’:

> “A lo largo de la historia el pensamiento matemático ha contribuido a la explicación, justificación y resolución de situaciones y problemas de la humanidad que han facilitado la evolución de las sociedades, contribuyendo y formando parte de su desarrollo cultural. La aportación matemática se hace presente en multitud de producciones artísticas, así como sus estrategias y procesos mentales fomentan la conciencia y expresiones culturales de las sociedades. Igualmente el alumno, mediante el trabajo matemático podrá comprender diversas manifestaciones artísticas siendo capaz de utilizar sus conocimientos matemáticos en la creación de sus propias obras*”* (Cantabria, 2015, p. 3229-3230).

Para cerrar esta parte de la normativa, se recoge lo que se dice en cuanto a la interdisciplinaridad, a la que se ha hecho mención anteriormente:

> “La adquisición eficaz de las competencias clave por parte del alumnado y su contribución al logro de los objetivos de las etapas educativas, desde un carácter interdisciplinar y transversal, requiere del diseño de actividades de aprendizaje integradas que permitan avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo”. (España, 2015, p. 6989).

Como se ha señalado anteriormente, haciéndose eco de esta normativa, ha surgido con fuerza una corriente pedagógica que propone la transversalidad en la enseñanza en general, el llamado enfoque STEAM, que relaciona metodológicamente, entre otras disciplinas, el arte y las matemáticas.

Es importante destacar que la Universidad de Cantabria (UC) ha recogido este reto y, desde hace algunos años, organiza diversas actividades cuyo principal objetivo es el fomento de la cultura y de la divulgación científicas, poniendo un especial acento en su repercusión en la comunidad educativa cántabra. La Unidad de Cultura Científica, además de organizar algunas actividades, da soporte y colabora en el desarrollo de aquellas propuestas de divulgación científica y de innovación organizadas desde otros grupos, institutos y departamentos de la Universidad de Cantabria.

Estas actividades abarcan un amplio abanico de posibilidades, dirigiéndose a diferentes públicos y empleando diversos formatos con los cuales se trata de hacer llegar la ciencia a todos los sectores de la población. Ejemplos de estas actividades son 'La Feria de la Ciencia', 'La Noche de los Investigadores', 'La Semana de la Ciencia', 'Pint of science', etc., las cuales se pueden consultar en detalle en la sección 'Actividades' de la página web de la Unidad de Cultura Científica de la Universidad de Cantabria (véase https://web.unican.es/unidades/cultura-cientifica/actividades).

Anteriormente se ha comentado que la transición de STEM a STEAM ha sido algo reciente, por lo que no es de extrañar que en estas actividades el arte tenga un papel poco importante. Como una excepción a esta afirmación, se puede señalar la existencia de unos paseos matemáticos, que anualmente recorren la ciudad en la Noche de los Investigadores y que están basados en el libro '*Santander, mirar y ver… matemáticas, arquitectura e historia*', publicado por la Universidad de Cantabria, véase Abad Palazuelos [et al.], (2014).

Otra actividad que se lleva a cabo en la misma dirección de fomentar la competencia interdisciplinar, pero en este caso dirigido específicamente al ámbito educativo, es el proyecto STEMforYouth. En dicho proyecto participa la

Universidad de Cantabria a través del departamento de Matemáticas, Estadística y Computación (MATESCO), siendo uno de los diez miembros de seis países diferentes (España, Italia, Grecia, Eslovenia, República Checa y Polonia) que se unen con el objetivo de hacer la ciencia más atractiva para los adolescentes. En la figura 8 se muestra un mapa con los miembros de cada país:

Figura 8: Miembros de STEMforYouth. Tomado de https://stemforyouth.unican.es

Este proyecto está financiado por la Comisión Europea y, como se describe en la página web del mismo, "se enmarca en la sección Science with and for Society (Ciencia con y para la sociedad) del programa Horizon 2020, de dos años de duración" y está coordinado por la Universidad Tecnológica de Varsovia. En su web también se explica que STEMforYouth produce una serie de cursos sobre diversas disciplinas científicas (Matemáticas, Física, Astronomía, Biología, Ingeniería y Medicina) y expone los principales retos STEM a los jóvenes de entre 12 y 19 años. Además, para cada área de conocimiento, se desarrollan entre 7 y 9 acciones vinculadas a aplicaciones prácticas con gran repercusión en la vida cotidiana. Es fácil comprobar en la página web https://web.unican.es/unidades/cultura-cientifica/actividades/stemforyouth que las actividades en las que el arte está implicado son muy escasas, siendo evidente que el proyecto está diseñado sin tener en cuenta la A de STEAM.

Para finalizar este breve recorrido por los diversos escenarios en los que se encuentran el arte y las matemáticas, puede ser relevante considerar la situación de GeoGebra (https://www.geogebra.org/), que es el software educativo más utilizado actualmente para la enseñanza de las matemáticas, "con millones de usuarios en todo el mundo y que apoya la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM), así como la innovación en la enseñanza y el aprendizaje", lo cual se describe en su página web, en la sección *about GeoGebra*.

En términos de interdisciplinaridad, la combinación entre GeoGebra y el arte puede resultar muy adecuada para relacionar el arte con las matemáticas en la enseñanza. Como se dice en la página web de la Federación Española de Sociedades y Profesores de Matemáticas (FESPM) con motivo del IV Día de GeoGebra, celebrado el 19 de mayo de 2018 en Albacete y que organizan los Institutos GeoGebra españoles conjuntamente:

> "En los últimos años, GeoGebra se ha convertido en el programa de matemáticas dinámicas de mayor aceptación entre el profesorado de matemáticas, por su calidad, versatilidad, carácter abierto y gratuito, y por la existencia de una amplísima comunidad de usuarios dispuestos a compartir experiencias y materiales educativos realizados con GeoGebra. Las más de 40 millones de visitas a la página web de GeoGebra realizadas en el año 2017 (desde más de 200 países) pueden dar una idea del impacto de este programa". (FESPM, 2018)

En efecto, GeoGebra es un recurso muy útil para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles, ya que es un programa que combina de forma dinámica geometría, álgebra, análisis y estadística en un único conjunto, cuyo manejo es sencillo. Esto se ha visto en las figuras 1 y 2 en el epígrafe 2.1.1., en las que con ayuda de GeoGebra se ha comprobado que la razón áurea está presente en la fachada de la Catedral de Murcia y en el Edificio Moneo de esa misma ciudad.

Otra de las ventajas que tiene GeoGebra es que, además de poder trabajar en tres dimensiones, dispone de una doble percepción de los objetos: la vista gráfica y la vista algebraica, de forma que se establece una permanente conexión entre los símbolos algebraicos y las gráficas geométricas, ya que a los objetos que se van incorporando en la zona gráfica le corresponde una expresión en la ventana algebraica y viceversa.

Además, GeoGebra es una buena herramienta para crear arte, como se observa en las ponencias del grupo de trabajo nº1 en el congreso CADGME-Conference of Digital Tools in Mathematics Education (en español: conferencia en herramientas digitales en educación matemática) celebrado entre los días 25 y 29 de junio de 2018 en Coimbra (Portugal), véase CADGME (2018).

También cabe mencionar que existe un grupo en la red social Facebook denominado 'GeoGebra Arts & STEAM' (véase https://www.facebook.com/groups/GeoGebraSTEAM/) donde se difunden publicaciones relacionadas con creaciones artísticas a través de GeoGebra, enlaces a noticias de interés relacionados con este asunto, así como otras relativas a actividades matemáticas de tipo STEAM.

2.2. Música y matemáticas

Tras haber abordado en la sección anterior algunos aspectos de la conexión especial entre arte y matemáticas, tanto desde la perspectiva histórica a la actual, desde la creación artística a la enseñanza de las ciencias, desde la faceta divulgativa (al público general) a la educativa en los centros escolares, en esta nueva sección se pondrá el acento en el caso particular de la música.

La relación entre la música y las matemáticas se remonta, al menos, a la época en que en la Antigua Grecia se comenzaron a formalizar los aspectos matemáticos de la música. En palabras de Díaz-Báñez (2013, p.515), desde que "los matemáticos griegos establecieron las bases de la teoría musical actual", las matemáticas y la música "vienen de la mano, tanto en el terreno analítico como compositivo".

Antes de empezar a abordar el siguiente epígrafe, en el que se mostrarán las matemáticas subyacentes a algunos conceptos musicales básicos, resulta interesante compartir también unas palabras de Pere Puig Adam que recoge

Puig i Llompart (2011, p.1), en las que afirma que “tal vez sea la música la matemática de los sentidos y las matemáticas la música de la razón”.

2.2.1. Algunos conceptos musicales básicos

En este epígrafe se va a estudiar la matemática que hay detrás de ciertos conceptos básicos de lenguaje musical. En líneas generales, tal y como apuntan Arbonés y Milrud (2010, p.143), “la escritura musical es un ejemplo de la matemática aplicada a una disciplina artística, pues incluye un importante conjunto de reglas y símbolos de origen matemático o susceptibles de ser interpretados mediante conceptos matemáticos”. Según Liern y Queralt (2008, p.2), “la manera de elegir las notas musicales, su disposición, las tonalidades, los tiempos e incluso gran parte de los métodos de composición son pura matemática”.

En las siguientes líneas se van a ver algunos ejemplos en los que se puede apreciar la estrecha relación entre ambas áreas de conocimiento.

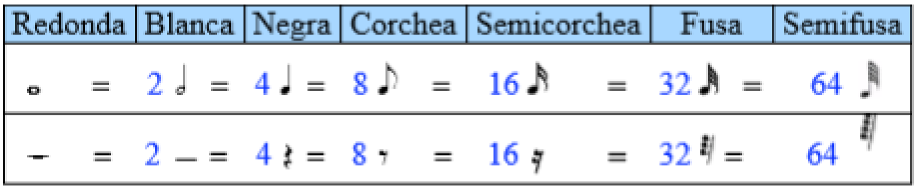
Es sabido que la lectura musical de una partitura se realiza de izquierda a derecha y los ritmos musicales se indican a través de una secuencia de figuras y silencios equivalentes colocados en el pentagrama, siguiendo un eje horizontal. Dichas figuras y silencios poseen entre sí una duración relativa, independiente de la velocidad de ejecución (*tempo*) de la obra musical, que es la que determina la duración real de las notas. Esta última aparece indicada mediante una *indicación metronómica*, para lo que se utiliza la ayuda de un aparato denominado *metrónomo*. Como apuntan Arbonés y Milrud (2010), esto guarda cierta similitud con las representaciones gráficas que se realizan en física en las que interviene la variable *tiempo*, que a menudo se representa en el eje horizontal y transcurre de izquierda a derecha.

En la tabla 1 se recogen las duraciones relativas de las figuras y sus silencios equivalentes, que es de 2^n con $0<n<6$:

n	2^n	Nombre figura/silencio	Duración con respecto a la redonda: $\frac{1}{2^n}$
0	1	Redonda	1
1	2	Blanca	1/2
2	4	Negra	1/4
3	8	Corchea	1/8
4	16	Semicorchea	1/16
5	32	Fusa	1/32
6	64	Semifusa	1/64

Tabla 1: Duración relativa de las figuras y sus silencios.
Basada en Arbonés y Milrud (2010, p. 151)

Como se ha visto en la tabla 1, las figuras tienen un valor relativo cuya relación viene dada por potencias de 2. Así, una redonda equivale a dos blancas, a cuatro negras, a ocho corcheas, etc. Las equivalencias entre las distintas figuras (primera fila) y sus silencios (segunda fila) se muestran en la tabla 2, así como sus símbolos correspondientes:



	Redonda	Blanca	Negra	Corchea	Semicorchea	Fusa	Semifusa
figuras	𝅝 =	2 𝅗𝅥 =	4 ♩ =	8 ♪ =	16 𝅘𝅥𝅯 =	32 𝅘𝅥𝅰 =	64 𝅘𝅥𝅱
silencios	𝄻 =	2 𝄼 =	4 𝄽 =	8 𝄾 =	16 𝄿 =	32 𝅀 =	64 𝅁

Tabla 2: Equivalencias entre figuras y silencios y sus símbolos correspondientes.
Tomado de Liern y Queralt (2008, p.4)

Además, como se puede observar en las tablas 1 y 2 y como apuntan Arbonés y Milrud (2010), la duración relativa de las figuras cumple la propiedad transitiva: si una blanca equivale a dos negras y una negra equivale a dos corcheas, una blanca equivale a cuatro corcheas.

También se ha de destacar que, si a una figura o silencio se le añade un punto su derecha, el cual se denomina *puntillo*, dicha figura “se incrementa en la mitad de su valor”, como destacan Liern y Queralt (2008, p.4). Esto se observa en la figura 9, en las que aparecen algunas figuras con puntillo:

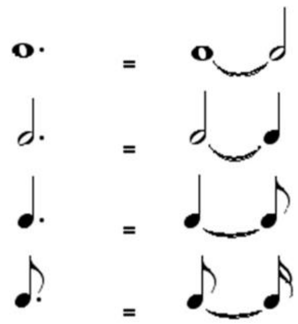


Figura 9: Equivalencia de la redonda, blanca, negra y corchea con puntillo. Tomada de https://www.unprofesor.com/musica/que-es-el-puntillo-musical-510.html

Como se observa en la imagen anterior, una redonda con puntillo equivale a una redonda más una blanca, una blanca con puntillo a una blanca más una negra, etc.

Un elemento que se debe destacar en la métrica musical es el compás, el cual se compone de varias unidades de tiempo o figuras musicales organizadas en grupos (en los que existe una contraposición entre partes *acentuadas* y partes sin acentuar, llamadas *átonas*), separados por una *línea divisoria*.

Ciertamente, “el compás es una fracción”, como dicen Liern y Queralt (2008, p.6) en la que el numerador indica el número de tiempo que tiene el compás y el denominador indica el tipo de figura que ocupa cada tiempo (por ejemplo, el 4 indica que una negra ocupa un tiempo, 8 que es una corchea, etc.), tal y como se observa en la figura 10:

Figura 10: Cuatro ejemplos de compases. Tomada de
http://curso-musa.blogspot.com/2013/05/el-compas-1-parte.html

Anteriormente se ha hablado de la duración relativa de las figuras, pero también se ha hablado de la duración real, la cual viene determinada por el *tempo.* Este expresa la velocidad de ejecución de una obra musical, para lo que existen unos términos italianos que se corresponden, de manera aproximada, con las siguientes pulsaciones (tiempos) por minuto, como señalan Liern y Queralt (2008):

Nombre	Pulsaciones/minuto	Nombre	Pulsaciones/minuto
Largo	hasta 50	Moderato	108-120
Larghetto	50-66	Allegro	120-168
Adagio	66-76	Presto	168-200
Andante	76-108	Prestissimo	200-207

Tabla 3: Pulsaciones o tiempos por minuto de cada tipo de velocidad de ejecución. Tomada de Liern y Queralt (2008, p.7)

Sin embargo, estos autores también destacan que para dar una indicación del *tempo* más precisa, se emplea el número de figuras por minuto. Por ejemplo, la indicación metronómica ♩ = 90 significa que en un minuto se han de ejecutar 90 negras.

Después de esta incursión por la métrica musical, se va a hablar de algunos otros conceptos musicales que también se pueden relacionar con otros de carácter matemático, como es el caso de la *inversión de intervalos,* lo que consiste en encadenar al intervalo original otro que complete los doce semitonos de la octava. Un ejemplo sencillo de esto se ve en la figura 11:

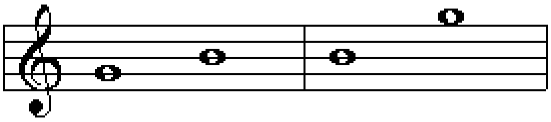


Figura 11: Ejemplo de inversión de intervalos.
Tomado de https://clasesdeguitarra.com.co/la-inversion-de-intervalos/

En la figura anterior se observa que el inverso del intervalo sol-si, es si-sol, pues completa la octava. Arbonés y Milrud (2010) explican que este concepto es similar al de los ángulos complementarios, pues dado un ángulo α, su complementario, β, es lo que le falta para completar 90º.

Se va a finalizar este epígrafe hablando brevemente de diferentes tipos de *traslaciones* que están presentes en multitud de obras musicales. Este concepto matemático consiste en aplicar a una figura “una transformación geométrica que genera un desplazamiento en una dirección, sin modificar su forma ni sufrir rotación alguna” como explican Arbonés y Milrud (2010, p.71). Estos autores destacan que, en las obras musicales, pueden darse diferentes tipos de *traslación*:

- Traslación horizontal: se manifiesta con la *repetición,* que se trata de repetir una melodía o un fragmento musical varias veces, “uno a continuación del otro”; y el *canon,* que consiste en que una estructura musical es “interpretada por varias voces, de manera simultánea, pero comenzando cada una su participación tras algunos tiempos de espera desde la entrada de la voz anterior” *(*p.72*).*
- Traslación vertical: se manifiesta a través del *transporte,* generado por “la traslación isométrica de las notas”, obteniéndose la misma melodía, “pero en una entonación más aguda o más grave, según se ascienda o se descienda en el pentagrama” (p.73).

Una vez que se han visto unos cuantos conceptos musicales y las matemáticas que subyacen a ellos, en el siguiente epígrafe se van a exponer algunas contribuciones de músicos y matemáticos ilustres de diversas épocas, todo lo cual puede servir como recurso didáctico para relacionar ambas disciplinas.

2.2.2. Algunas contribuciones de músicos y matemáticos ilustres

Como se ha indicado anteriormente, en este epígrafe se describen algunas contribuciones relevantes a la integración de la música y las matemáticas realizadas por ilustres músicos y matemáticos.

Uno de los matemáticos más destacados de la historia, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), estaba convencido de que la "música posee una irrefutable estructura matemática", como señala Bertos (2009, p.3). En esta línea, Lluis-Puebla (2002) señala que Leibniz describe la música como "un ejercicio inconsciente en la aritmética" (p.130), como "el contar sin saber que se está contando" (p.133).

Uno de los grandes compositores de todos los tiempos y que perteneció a una de las familias más extraordinarias de compositores y destacados intérpretes de la historia de la música es Johann Sebastian Bach (1685-1750), quien en vida gozó de una gran reputación como organista y clavecinista. Liern (2009a, p.115) habla de "la grandeza estructural" (p.114) de las obras de Bach y considera que "la estructura de sus obras es pura geometría" (p.115):

> "La genialidad de Bach alcanza su cénit con el contrapunto y la fuga, composiciones en las que la estructura geométrica es incuestionable. Se parte de uno o varios temas y se les somete a transformaciones geométricas que mantienen la forma del tema: *traslaciones, giros y simetrías* que confieren a la obra una estructura muy rígida, pero en la que el compositor encontró una fuente de inspiración. Se planteaba las fugas con el mismo rigor estructural que un geómetra, pero les añadía una velocidad y brillantez en la improvisación, que resultaron admirables". (Liern, 2009a, p. 115)

Dada la complejidad analítica de una fuga a seis voces y a modo de ejemplo, se propone hacer un pequeño análisis de otra obra musical suya cuyo análisis resulta más sencillo. Este es el caso de la Invención I a dos voces, cuyos ocho primeros ocho compases se muestran en la figura 12:

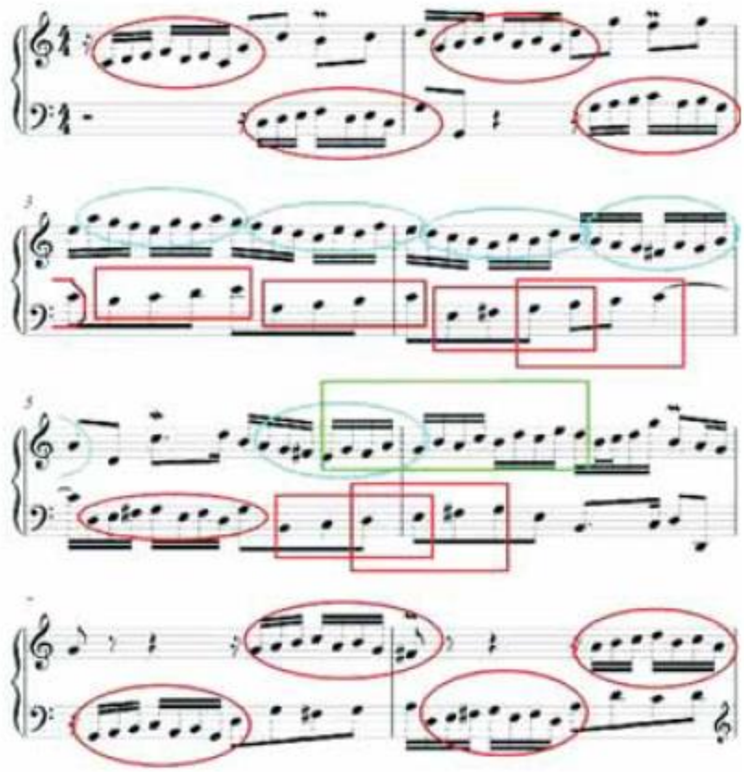


Figura 12: Ocho primeros compases de la Invención I a dos voces, compuesta por Johann Sebastian Bach. Tomado de Liern (2009a, p. 115)

De acuerdo a Liern (2009a), en la figura anterior se observa que el *sujeto* o tema principal aparece en el primer compás con las notas que se han marcado con una elipse roja (do, re, mi, fa, re, mi, do, sol); en el compás siguiente, también marcado con una elipse roja, el tema se repite, pero esta vez subido una quinta ascendente (do – sol). Se observa que este tipo de acciones se repiten numerosas veces a lo largo de la obra: cada vez que en el pentagrama aparece una elipse de color rojo, se ha hecho una traslación en la que el tema principal se ha subido o bajado un intervalo.

Uno de los matemáticos más prolíficos de la historia, como es Leonhard Euler (1707-1783), también mostró interés por la música. Liern (2012, p.93) señala que “en 1726 Euler finalizó su doctorado”, con una tesis que versaba “sobre la propagación del sonido” y, unos años más tarde, en 1731, escribió una obra que trataba sobre música: *Tentamen novae theoriae musicae* (en español: una nueva teoría de la música), cuya portada se muestra en la figura 13:

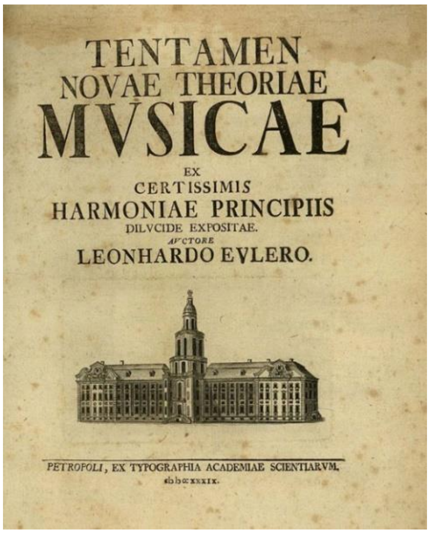


Figura 13: *Tentamen Novae Theoriae Musicae*, obra de Leonard Euler. Tomada de http://www.kettererkunst.com/details-e.php?obnr=410702270&anummer=309&detail=1

Como también apunta Liern (2012, p.93), el objetivo de Euler era “encontrar una regla general con la que expresar el orden oculto de los distintos grados de consonancia, de la armonía y de la música en general”.

Cabe mencionar que se habla de *consonancia* cuando los sonidos producidos de manera simultánea se perciben como agradables y de *disonancia* cuando resultan desagradables y, según la escuela pitagórica, “la mayor o menor consonancia entre dos sonidos estaba directamente relacionada con la proporción entre la longitud de las cuerdas emisoras de un sonido y otro”, como señalan Arbonés y Milrud (2010, p.148). En este sentido, apuntan que “los intervalos de octava (producidos por dos cuerdas en las que la proporción de sus longitudes es 1/2), quinta (proporción de longitudes 2/3) y cuarta (3/4) son consonantes”, mientras que “los otros intervalos…resultan disonantes”.

Unos años más tarde, en 1739, “Euler desarrolló una teoría de consonancia basada en la ley pitagórica”, como apunta Lluis-Puebla (2002, p.134). Resulta interesante cerrar esta parte relativa a Euler recogiendo unas palabras de Goldáraz (2004) que se encuentran en Liern (2012, p. 94), en las que describe la visión que tenía Euler de la música, comparándola de algún modo con las matemáticas: “lo interesante de la música es que las estructuras no se conocen a priori, sino que debemos llegar hasta ellas a través del estudio de sus partes, como podemos conocer el término general de una progresión cuando conocemos algunos de sus términos”.

Otro ilustre músico y compositor, de los más importantes que ha habido en la historia de la música es Wolfgang Amadeus Mozart (1756-1791). En 1777, como apunta Lluis-Puebla (2002) escribió un "Juego de Dados Musical” con el que es posible escribir valses con la ayuda de dos dados únicamente, no siendo necesario ni ser músico ni tener nociones de composición. Mozart escribió primero 176 compases y los colocó en dos tablas de 88 elementos cada una. A partir de aquí, el funcionamiento de dicho juego es el siguiente:

> “El juego comienza lanzando los dos dados, de tal manera que tenemos 11 números posibles (del 2 al 12) y hacemos 8 tiradas obteniendo distintos compases excepto los de la última columna que son iguales (éstos últimos con dos posibilidades: una para la repetición y otra para continuar con la segunda tabla). La segunda tabla es igual a la primera excepto que tiene otros 88 compases con los de la última columna idénticos. Así, mediante un simple cálculo, utilizando conceptos del Álgebra Superior, se tienen 11^{14} valses diferentes…” (Lluis-Puebla (2002, p. 130-131).

Otro importante compositor y virtuoso pianista, de los mejores de la historia, es Fryderyk Franciszek Chopin (1810-1849), conocido como Frédéric Chopin. Como apunta Pol i Llompart (2011, p.3) se puede observar “un paralelismo entre las funciones matemáticas y la música de Chopin” en algunas de sus obras. A continuación, se muestran dos de los ejemplos que proporciona este mismo autor:

- En el preludio op. 28 nº 15, conocido como el de “la gota de agua”, se observa que hay una nota que se repite con mucha mayor frecuencia que las demás (el *la bemol* que en el piano se ejecuta con la mano izquierda), como se ve en la figura 14, marcada en color rojo:

Figura 14: Primeros tres compases del preludio op. 28 nº 15 de Frédéric Chopin. Tomado de Pol i Llompart (2011, p.4).

Al observar la figura 14, se observa un paralelismo entre la función constante (de la forma $y=c$) y la nota *la bemol* antes mencionada.

- En el preludio op. 28 nº 3, se observa que la línea melódica descrita por la mano izquierda (marcada en color rojo) repite el mismo dibujo en cada compás, como se aprecia en la figura 15:

Figura 15: Primeros cinco compases del preludio op. 28 nº 3 de Frédéric Chopin. Tomado de Pol i Llompart (2011, p.5)

Al observar la figura 15, se puede establecer un paralelismo entre una función periódica y la línea melódica de la mano izquierda, la cual está presente de este modo durante todo el preludio.

Uno de los científicos más populares del siglo XX, Albert Einstein (1879-1955), fue un gran apasionado de la música. En particular, fue un gran admirador de la música de Mozart y en ella encontró inspiración, como se recoge en un artículo publicado por Miller (2006) en el periódico norteamericano *The New York Times*.

Un importante compositor y músico del siglo XX, Béla Viktor János Bartók (1881-1945), conocido como Béla Bartók, desarrolló, a principios del siglo XX:

> "un método para integrar todos los elementos de la música (escalas, estructuras de acordes con los motivos melódicos apropiados, proporciones de longitud, tanto de la obra en general como los de la exposición, desarrollo, reexposición, frases de conexión entre movimientos etc.) basado en la razón áurea" Lluis-Puebla (2002, p. 136).

Por último, se finaliza este capítulo con dos personalidades actuales dignas de mención que trabajan en ambos campos, como son:

- Pilar Bayer i Isant (1946-): catedrática de Álgebra de la Universidad de Barcelona (especialista en teoría de números) y profesora de piano, siendo las matemáticas y la música sus dos grandes pasiones. Posee un currículo investigador extraordinario, pero también son dignas de mención sus facetas docente y divulgadora, por todo lo cual ha habiendo recibido numerosos reconocimientos, véase Macho Stadler (2015).
- William Timothy Gowers (1963-): destacado matemático británico y profesor de la Universidad de Cambridge que en 1988 obtuvo la medalla Fields y que también se dedica a la investigación en música y matemáticas, como se recoge, por ejemplo, en un artículo publicado por el diario británico *The Independent* (2011).

3. Relación entre patrones rítmicos y elementos geométricos: una propuesta didáctica

En este capítulo se describe una propuesta didáctica basada en los siguientes artículos: Díaz-Báñez (2013), Díaz-Báñez [et. al] (2004) y Díaz-Báñez [et. al] (2005), que hacen referencia a una relación entre las matemáticas y la música flamenca, concretamente entre patrones rítmicos de diversos tipos de cante flamenco y ciertos elementos geométricos. En dichos artículos se recogen las herramientas que se van a utilizar en la propuesta didáctica que se va a exponer en este capítulo, la cual se experimentó en el aula durante las prácticas del máster.

3.1. Objetivo y herramientas de la propuesta

El objetivo de esta propuesta didáctica es utilizar la música como un recurso didáctico más a la hora de enseñar matemáticas y que los alumnos observen la conexión existente entre ambas disciplinas, a través de problemas en los que intervienen patrones rítmicos y elementos geométricos.

Como apunta Liern (2009b, p.107), “la música popular, que suele interpretarse con agrupaciones sencillas, permite aislar patrones rítmicos […] de una forma más eficiente que en otro tipo de manifestaciones musicales”, y esa es la razón por la que se ha optado por elegir canciones de este tipo en lugar de obras de música clásica, cuyo análisis resulta más complejo.

Los patrones rítmicos se pueden definir como la estructura rítmica que se repite a lo largo de la pieza, canción u obra musical y tienen diversas funciones, entre las que destacamos las siguientes: sirven de estabilizadores rítmicos, marcan el fraseo y definen el carácter o el género de la pieza en cuestión, como se señala en Díaz-Báñez [et. al] (2005). Como bien se explica en este mismo artículo, los patrones rítmicos “funcionan como elementos estructurantes”, de ahí “su atractivo matemático”, por lo que resulta interesante hacerse ciertas preguntas que surgen al respecto: “¿qué características tienen esos patrones rítmicos para determinar ciertos estilos musicales?, ¿qué *similaridad* podemos encontrar entre esos patrones rítmicos? ... ¿qué medida de *similaridad* podemos definir entre patrones rítmicos? ¿Puede ser una *medida* en el sentido matemático?" (Díaz-Báñez [et. al], 2005, p.491). (Nota: la cursiva es de la autora del trabajo, para resaltar determinados conceptos)

A continuación, se va a describir una propuesta en la que se propone realizar análisis matemático de los patrones rítmicos de dos canciones de música popular: 'Tu canción', de Amaia y Alfred, y 'No woman no cry', de Bob Marley. Esta propuesta está basada en las ideas que aparecen en los artículos siguientes: Díaz-Báñez (2013), Díaz-Báñez [et al.] (2004) y Díaz-Báñez [et al.] (2005), los cuales se utilizan como referencias en lo que sigue de sección. Dicho análisis comienza utilizando los siguientes tipos de notación:

<u>Notación de cajas</u>: consiste en dibujar cajas en las que se indiquen las posiciones de los acentos fuertes (mediante un círculo negro) y débiles (dejándolas en blanco).

<u>Notación numérica</u>*:* se trata de escribir números que indiquen las posiciones de los acentos fuertes (escribiendo el número en tamaño grande) y débiles (escribiendo el número en tamaño normal).

En la siguiente figura se muestran ejemplos de estos tipos de notación:

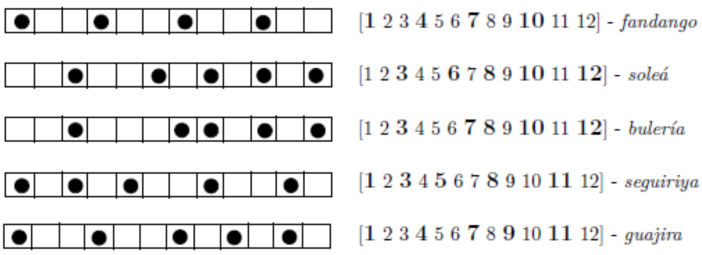


Figura 16: Notación de cajas y notación numérica, respectivamente, de diferentes tipos de cante flamenco (fandango, soleá, bulería, seguiriya y guajira).
Tomada de Díaz-Báñez (2013, p.518).

Para continuar con el análisis matemático de los patrones rítmicos se utilizan las siguientes representaciones geométricas:

Representación cronotónica: el tiempo existente entre un acento y el siguiente es el que determina la dinámica del ritmo. Cada espacio temporal entre dos acentos fuertes consecutivos se representa como una caja bidimensional donde los ejes (*x* e *y*) representan la longitud temporal del intervalo, comenzando en tiempo cero.

Representación poligonal: se consideran las doce posiciones como puntos equidistantes sobre una circunferencia, de forma que se puede imaginar un collar de perlas negras (acentos fuertes) y blancas (acentos débiles) en forma de diagrama de reloj. Al unir cada dos acentos fuertes consecutivos se obtiene un polígono cuyos vértices son las perlas negras.

Unos ejemplos de estos dos tipos de representaciones se muestran en las figuras siguientes:

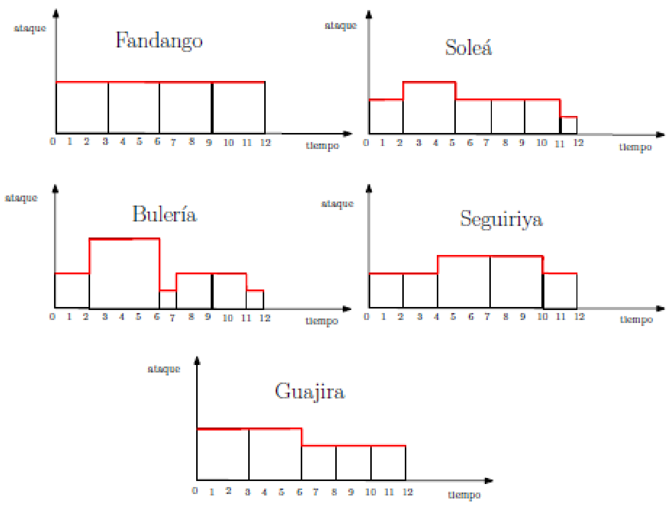


Figura 17: Representación cronotónica de diferentes tipos de cante flamenco (fandango, soleá, bulería, seguiriya y guajira). Tomada de Díaz-Báñez (2013, p.519).

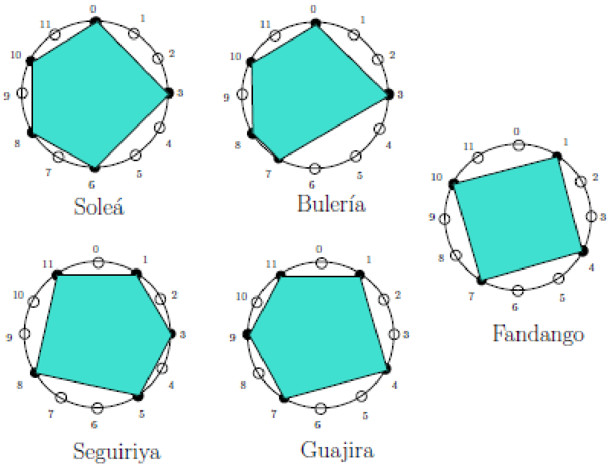


Figura 18: Representación poligonal de diferentes tipos de cante flamenco (fandango, soleá, bulería, seguiriya y guajira). Imagen tomada de Díaz-Báñez (2013, p.520).

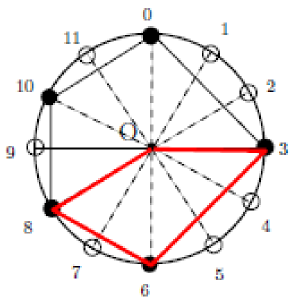
Dentro de la representación poligonal, el “1” marca la posición en la cual comienza el patrón rítmico y los vértices indican las posiciones donde se sitúan los acentos fuertes.

Se considera que la circunferencia en la que está inscrita el polígono tiene radio 1. De esta manera, como se verá en las figuras mostradas inferiormente, se puede hallar fácilmente el área del polígono resultante subdividiéndolo en triángulos y aplicando la siguiente propiedad:

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman.

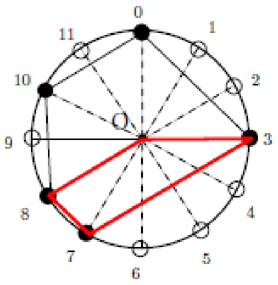
Área= $\frac{1}{2}$ *ab sen α,*

siendo a, b dos de sus lados y α el ángulo que forman dichos lados.



$$A_{O68} + A_{036} = \frac{\operatorname{sen} 60^{o}}{2} + \frac{\operatorname{sen} 90^{o}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}.$$

Figura 19: Soleá. Tomada de Díaz-Báñez (2013, p. 523).



$$A_{O78} + A_{O37} = \frac{\text{sen } 30^{\circ}}{2} + \frac{\text{sen } 120^{\circ}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Figura 20: Bulería. Tomada de Díaz-Báñez (2013, p. 523).

Cada polígono es representativo de diferentes tipos de cante flamenco y, como se ve en el ejemplo anterior, soleá tiene más área que bulería.

Además del cálculo de áreas, otro elemento geométrico que se analiza a partir de los patrones es la distancia entre dos de ellos. Para ello se utilizan las siguientes *medidas de similitud* rítmica:

<u>Distancia cronotónica:</u> dados dos patrones rítmicos P_1 y P_2, representados en forma cronotónica, se define la *distancia cronotónica*, $d_C(P_1, P_2)$, como el área de la diferencia entre dichas representaciones.

En la figura siguiente se muestra un ejemplo de superposición de las representaciones cronotónicas de fandango y seguiriya:

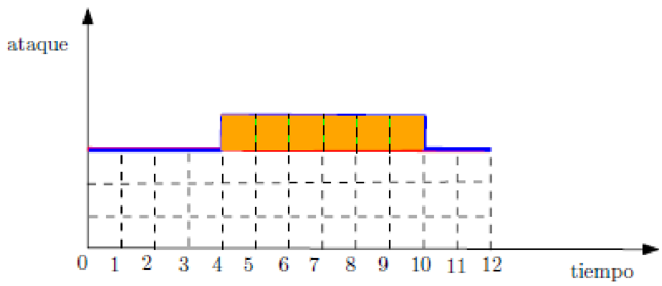


Figura 21: Distancia cronotónica entre fandango y seguiriya.
Tomada de Díaz-Báñez (2013, p.526).

Como puede verse en la figura anterior, el área comprendida entre fandango y seguiriya es igual a 6, esto es, su distancia cronotónica es 6.

<u>Distancia de permutación:</u> la *distancia de permutación* entre dos conjuntos U y V, $d_P(U, V)$, se define como el número mínimo de intercambios que permiten transformar un conjunto en el otro. En este caso, los conjuntos U y V están

formado por las diferentes posiciones en las que se encuentran los acentos fuertes en cada patrón (u_i y v_i, respectivamente), siendo k el número total de posiciones de cada conjunto. Entonces, se tiene que:

$$d_P(U,V) = \sum_{i=1}^{k} |u_i - v_i|$$

Fórmula 1. Tomada de Díaz-Báñez [et al.] (2005, p. 499)

Hay que tener en cuenta que, dependiendo del número de acentos fuertes que haya en cada patrón, pueden darse dos casos:

- Caso 1: ambos patrones tienen el mismo número de acentos fuertes. En este caso, la distancia de permutación se calcula aplicando la fórmula 1.
- Caso 2: cada patrón tiene un número diferente de acentos fuertes. En este caso, además de aplicar la fórmula 1, se tienen en cuenta unas consideraciones de las que se hablará un poco más adelante.

A continuación, se va a mostrar un ejemplo representativo de cada caso:

Ejemplo 1: dos patrones rítmicos que tienen el mismo número de acentos fuertes.

Se procede, en primer lugar, representando cada patrón rítmico como un vector que indica las posiciones donde se encuentran los acentos fuertes. Por ejemplo, seguiriya la representamos como *Se* = (1*,* 3*,* 5*,* 8*,* 11) y guajira como *Gu* = (1*,* 4*,* 7*,* 9*,* 11). Ahora aplicamos la fórmula 1, según la cual el número mínimo de intercambios necesarios puede calcularse sumando las diferencias (en valor absoluto) entre las coordenadas de estos vectores.

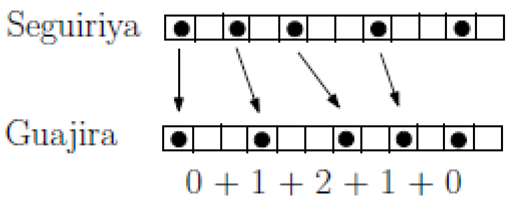


Figura 22: Distancia de permutación entre seguiriya y guajira.
Tomada de Díaz-Báñez (2013, p.530)

Aplicando la fórmula 1, se tiene que:

d_P(Se, Gu) = |1−1|+|3−4|+|5−7|+|8−9|+|11−11| = 4, por lo que la distancia de permutación entre seguiriya y guajira es 4.

Ejemplo 2: dos patrones rítmicos que tienen distinto número de acentos fuertes.

En este caso se aplica la fórmula 1 y además se tienen en cuenta las siguientes consideraciones, que se recogen en Díaz-Báñez (2013, p. 529):

1. Se convierte el ritmo de más acentos fuertes (seguiriya en el ejemplo), al de menos acentos fuertes (fandango).
2. Cada acento fuerte del mayor ha de moverse a un acento del menor.
3. Cada acento del menor (fandango en el ejemplo) ha de recibir al menos un acento del mayor (seguiriya).
4. Los acentos no pueden cruzar el final de la cadena y aparecer por el principio.

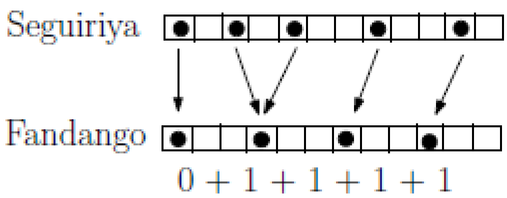


Figura 23: Distancia de permutación entre seguiriya y fandango. Tomada de Díaz-Báñez (2013, p. 530)

Ahora, aplicando la fórmula 1 y teniendo en cuenta las anteriores consideraciones, se tiene que:

d_P (*Se, Fa*) = |1−1|+|3−4|+|5−4|+|8−7|+|11−10| = 4, por lo que la distancia de permutación entre seguiriya y fandango es 4.

Después de haber explicado el objetivo de la propuesta, así como las herramientas que se van a utilizar, en la siguiente sección se va a proceder a describir la propuesta didáctica.

3.2. Descripción de la propuesta

Una vez descrito el análisis matemático de los patrones rítmicos, se pasa a detallar cómo se va a llevar al aula la propuesta didáctica.

La experiencia, prevista para unos 50 minutos de duración, se divide en dos partes que se pasan a describir:

Una primera parte teórica, de aproximadamente 15 minutos, en la que se explica a los alumnos todo el análisis matemático ya descrito en este capítulo. Para facilitar la tarea, se proporciona a los alumnos unas notas a modo de guía didáctica que se incluyen en el *Anexo I. Guía didáctica de la experiencia* y que será lo que se siga en la explicación.

Una segunda parte práctica, de unos 35 minutos (incluida en el *Anexo II. Ficha de trabajo del alumno*) en la que se pide a los alumnos, agrupados de dos en dos, que respondan de manera anónima a:

1. Unas preguntas de carácter general.
2. Un cuestionario relativo a la teoría explicada en la primera parte.
3. Una encuesta de valoración personal de la experiencia. De modo opcional, pueden dejar algún comentario si así lo consideran.

El hecho de que se les pida a los alumnos que respondan a unas preguntas de carácter general, es porque se considera que sus respuestas pueden ser relevantes a la hora de valorar la experiencia. En este caso, se precisa saber si al alumno le gustan las matemáticas y la música, así como información acerca de las calificaciones obtenidas en matemáticas en lo que llevan de curso escolar, y, finalmente, si cursan en el momento (o habían cursado en el pasado) estudios oficiales de música y durante cuántos años.

Para el cuestionario relativo a la teoría, se ha optado por analizar los patrones rítmicos desde una perspectiva matemática de dos canciones que gozan de gran popularidad y que representan estilos musicales diferentes:

- ‘Tu canción’, de Amaia y Alfred.

- ‘No woman no cry’, de Bob Marley.

La elección de ‘Tu canción’, con estructura de vals, se debe a su gran éxito en el momento, especialmente entre adolescentes, y la de ‘No woman no cry’, de estilo reggae, a que es un clásico de la música popular.

Para cumplimentar el cuestionario que recoge las preguntas de carácter matemático, los alumnos trabajan en parejas. De cada una de las canciones ya mencionadas, se pide, en el siguiente orden:

• Identificar cuál es su patrón rítmico

• Transcribir cada patrón en notación de cajas y numérica

• Hacer una representación cronotónica y otra poligonal

• Calcular el área del polígono asociado a cada patrón, y,

• Hallar las distancias cronotónica y de permutación entre los patrones rítmicos de ambas canciones.

Finalmente, los alumnos responden a una encuesta de satisfacción que contribuye a valorar la experiencia. En estas cuestiones, se pregunta si los contenidos se han explicado con claridad y orden, si se han atendido correctamente las preguntas y dudas surgidas, si se ha fomentado la participación, si los materiales proporcionados eran adecuados, y, por último, si la experiencia en conjunto ha sido interesante. En cada una de ellas, los alumnos deben de marcar la respuesta asociada a su grado de conformidad de acuerdo a la escala nada/algo/bastante/totalmente de acuerdo.

El listado completo de preguntas se recoge en el *Anexo II. Ficha de trabajo del alumno.*

4. Experiencia didáctica

En este capítulo se va a narrar cómo fue la puesta en práctica de la propuesta explicada en el capítulo anterior, describiendo su contexto socioeducativo, así como su desarrollo y un posterior análisis de los resultados obtenidos.

4.1. Contexto socioeducativo del centro

El centro educativo en el que se ha puesto en práctica la propuesta didáctica ha sido el Instituto de Educación Secundaria (IES) Las Llamas, situado en la zona del Sardinero, en la ciudad de Santander.

El IES Las Llamas es un centro público que oferta las siguientes enseñanzas:

- Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales y de Ciencias y Tecnología, con horario matinal, de 8:30 a 14:25 horas.
- Ciclos formativos de Grado Medio y cuatro de Grado Superior, todos ellos de la familia profesional de Comercio y Marketing, con horario vespertino, de 15:00 a 20:35 horas.

En cuanto a la procedencia del alumnado del centro, las familias cuyos hijos acuden a este instituto poseen, en general, un nivel socioeconómico medio-alto, y un alto nivel educativo y cultural. Esto se traduce en que se preocupan por la educación que reciben sus hijos y tienen altas expectativas puestas en ellos, tanto en el aprendizaje como en las calificaciones que obtienen.

La propuesta didáctica se llevó a cabo con los alumnos del grupo de 1ºC de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. Dicho grupo estaba compuesto por 21 alumnos, entre los cuales no había ninguno que necesitase medidas educativas especiales, así como tampoco que repitiera curso. En general, era un grupo que tenía un buen comportamiento en clase, lo cual facilitaba la tarea del profesor.

4.2. Desarrollo de la experiencia

La puesta en práctica de la experiencia tuvo lugar el viernes 20 de abril de 2018 en la hora semanal que el grupo de alumnos tenía destinada a la tutoría, la cual amablemente se me cedió para este menester. Se aprovechó la distribución ordinaria del aula, en la que los alumnos estaban agrupados en pupitres de dos en dos formando tres columnas, pero como eran impares (21 alumnos) se decidió que ningún alumno se quedara sin emparejar, por lo que en total se conformaron nueve parejas y un trío. El hecho de aprovechar la distribución ordinaria del aula de cara a los agrupamientos fue para no tener que perder tiempo en realizar una nueva distribución y así, únicamente un alumno se desplazó de su sitio habitual en clase.

Dado que esta se desarrolló durante la última hora lectiva del viernes, los alumnos estaban cansados y revueltos, por lo que era necesario poner orden para que todo se pudiera desarrollar con normalidad y que hubiese tiempo suficiente para realizar la experiencia, puesto que únicamente disponía de 52 minutos, que es la duración estándar de una hora lectiva en este centro educativo.

En primer lugar, les conté a los alumnos brevemente lo que se iba a realizar en esa hora, la planificación y las tareas que se les encomendaban. Su reacción fue de sorpresa, pues no es habitual realizar experiencias de este tipo, pero a la vez se les percibía contentos por dedicar la hora de tutoría a una actividad diferente a las que acostumbran.

Después les proporcioné unas notas que había redactado (véase Anexo I) para facilitarles la comprensión de las tareas y les fui explicando, siguiendo dichas anotaciones, lo que necesitaban saber para realizar las diversas actividades.

A continuación, con ayuda del ordenador existente en el aula, los alumnos escucharon un par de veces un fragmento de cada una de las canciones que eran objeto de análisis: ‘Tu canción’, de Amaia y Alfred y ‘No woman no cry’, de Bob Marley. Hubo que repetirlo otra vez para que pudieran captar mejor los patrones rítmicos de dichas canciones, puesto que era importante que esta parte la hicieran lo mejor posible, ya que era la base que permitía responder correctamente a la ficha del alumno (véase Anexo II).

Después, cada grupo se dispuso a cumplimentar la ficha, mientras yo iba pasando por las mesas para ver cómo lo estaban haciendo y para resolver las dudas que iban surgiendo.

Cuando finalizó la clase, únicamente recogí las fichas de los dos únicos grupos que ya habían finalizado todo el trabajo propuesto. A los demás, les pedí que lo terminaran en casa y me lo entregaran la semana siguiente. Excepto una pareja que finalmente no me lo entregó, las demás si me lo devolvieron, si bien algunos alumnos no hicieron nada más que lo que les dio tiempo en clase.

El hecho de que esta experiencia no fuese para ellos una actividad evaluable propició que no resultara fácil conseguir que me entregasen las fichas todos los grupos, y mucho más que no se hicieran todas las tareas propuestas, pese a que les insistí en que las realizaran. En este aspecto, los alumnos con mejor actitud en el aula ordinaria fueron los que me lo entregaron con mayor facilidad.

4.3. Evaluación de la experiencia

En esta sección se van a analizar, con la ayuda de gráficos, los resultados del cuestionario realizado a los alumnos, así como explicar el tipo de errores que ellos cometieron.

Lo que se pretende es analizar los resultados de la clase como grupo único, contextualizándolo mediante la información proporcionada en las respuestas a las preguntas de carácter general y, además, utilizar dicha información para sacar algunas conclusiones del desempeño de los alumnos que han cursado estudios oficiales de música, de los que han aprobado ambas evaluaciones y de los que han suspendido dichas evaluaciones con notas muy bajas, por ejemplo.

Además, con las preguntas que permiten valorar la experiencia, se pretende obtener información acerca del grado de satisfacción de los alumnos con los que se ha realizado esta experiencia didáctica y así, poder obtener conclusiones acerca de la misma.

Ahora se va a comenzar a analizar la información obtenida en las preguntas de carácter general con el fin de poner en contexto el grupo de alumnos, para lo cual se dispone de información proporcionada por 19 alumnos.

¿Os gustan las matemáticas y la música?

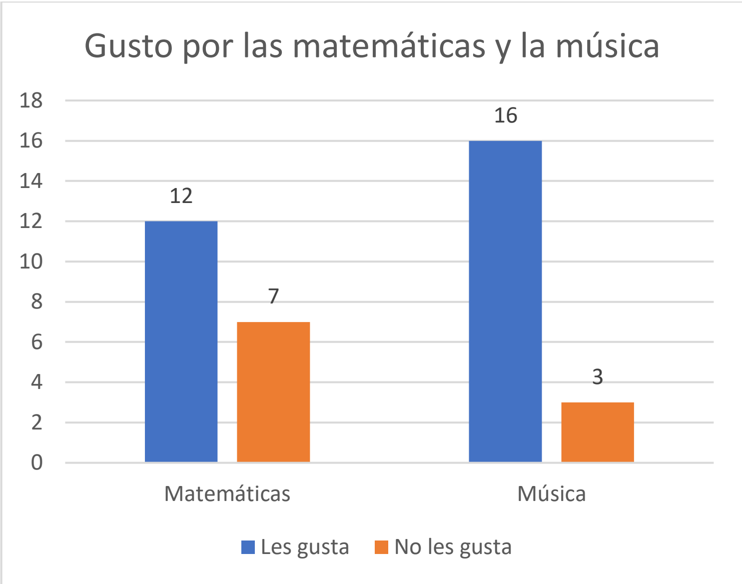


Gráfico 1: Nº de alumnos a los que les gusta y no les gusta las matemáticas y la música

En el gráfico 1 se observa que la música gusta más que las matemáticas, ya que a 16 de los 19 alumnos participantes (84.21%) les gusta la música, mientras que a 12 les gustan las matemáticas (63.16%).

En cuanto a la afinidad de gustos entre los miembros de cada grupo, 5 de los 9 grupos coinciden en gustos (55.56%), mientras que los restantes, 4, difieren (44.44%) tal y como se recoge en el siguiente gráfico 2:

Gráfico 2: Nº de grupos que, entre sus miembros, coinciden y difieren en su gusto por las matemáticas y la música

¿Qué calificaciones habéis obtenido este curso en la primera y en la segunda evaluación en Matemáticas?

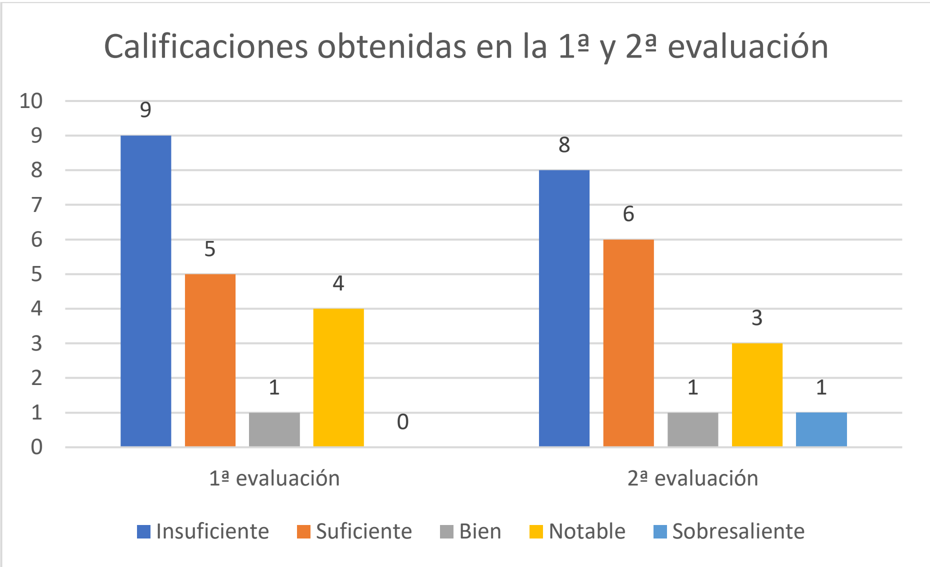


Gráfico 3: Nº de alumnos que han obtenido insuficiente, suficiente, bien, notable y sobresaliente en las calificaciones de la 1ª y la 2ª evaluación del curso 2017/2018.

Como observamos en el gráfico 3, ha habido bastantes alumnos suspensos tanto en la primera evaluación (9), lo que supone un 47.37%, como en la segunda (8), un 42.11%, aunque en esta última las notas, en general, mejoraron. Se destaca también que, aunque no figura en el diagrama precedente, ha habido 8 alumnos que han aprobado ambas evaluaciones (un 42.11%).

¿Estudiáis (o habéis estudiado) música en el conservatorio? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuántos años?

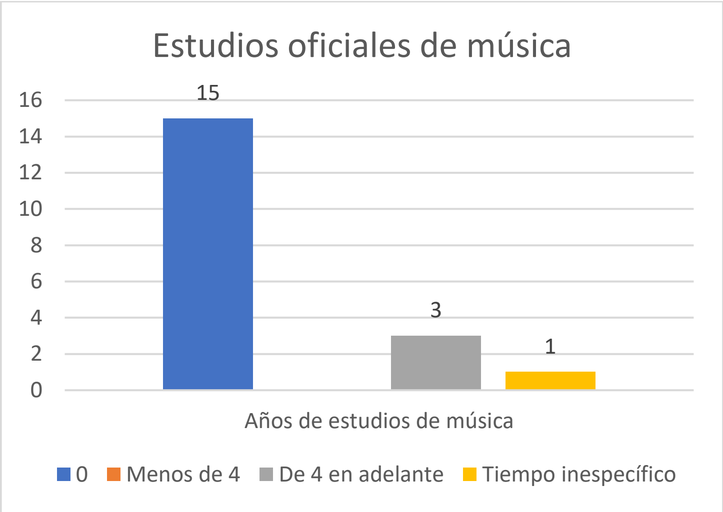


Gráfico 4: Nº de alumnos que han cursado estudios oficiales de música de acuerdo a la escala 0/ menos de 4/ de 4 en adelante/ tiempo inespecífico.

Como se ve en el gráfico 4, la mayoría de los alumnos no han cursado estudios de música en el conservatorio (15 de ellos). Únicamente cuatro alumnos los han cursado (21.05%): dos durante cinco años, uno durante cuatro años y otro en una escuela de música, aunque no especifica el tiempo. Se destaca que estos cuatro alumnos conforman dos de los grupos participantes.

Una vez que ya se conoce la información de carácter general, se va a proceder a analizar las respuestas obtenidas en las actividades de carácter matemático: primero se mostrarán el total de respuestas correctas, incorrectas y no contestadas y después, se estudiarán las dos canciones por separado. Para estas preguntas, que se hacían en parejas (y un trío dado que eran impares), se dispone de información proporcionada por 9 grupos, la cual se va a proceder a analizar a continuación:

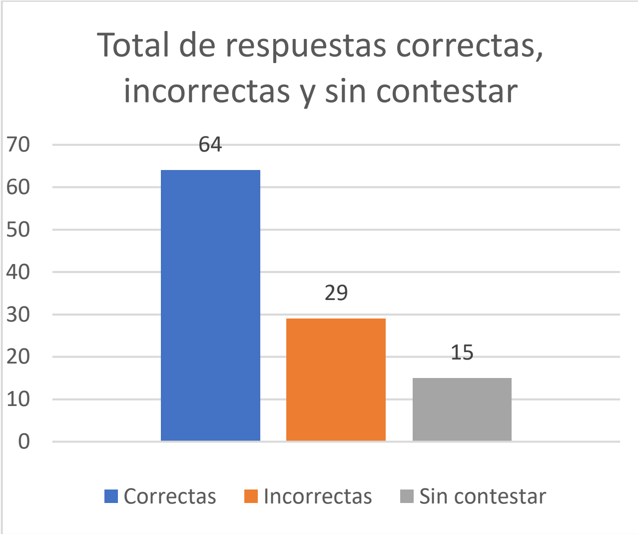


Gráfico 5: Nº total de respuestas correctas, incorrectas y sin contestar

Como se observa en el gráfico 5, la mayoría de las respuestas han sido correctas. De un total de 108 preguntas, ha habido 64 respuestas correctas (59.26%), 29 incorrectas (26.85%) y 15 no contestadas (13.89%).

Ahora se van a analizar las dos canciones por separado, pero en este caso únicamente desde la actividad 1 a la 5, pues en las actividades 6 y 7 no hay distinción alguna entras las dos canciones:

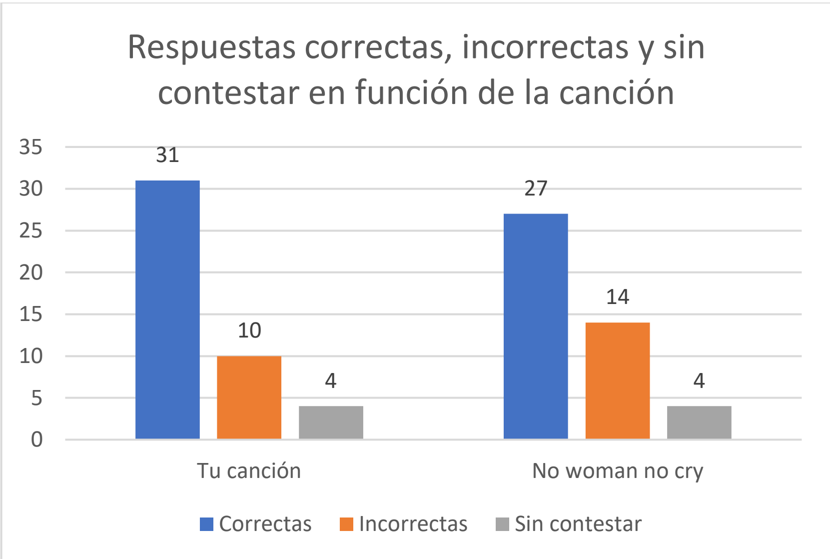


Gráfico 6: Nº total de respuestas correctas, incorrectas y sin contestar en función de la canción

En este caso, se disponía de un total de 45 respuestas por canción. Como se observa en el gráfico 6, en el caso de 'Tu canción' ha habido 31 respuestas correctas (68.89%), 10 incorrectas (22.22%) y 4 sin responder (8.89%), mientras que para 'No woman no cry' se han contabilizado 27 respuestas correctas (60%), 14 incorrectas (31.11%) y 4 sin contestar (8.89%). A la vista de estos datos, las tareas han resultado más sencillas de realizar en el caso de la canción de Amaia y Alfred que en la de Bob Marley.

El análisis de 'No woman no cry' les ha costado un poco más a los alumnos, puesto que se trata de un ritmo algo más complejo que el de 'Tu canción', pues el reggae es un estilo musical con un patrón rítmico binario y regular, donde los acentos fuertes se suceden cada dos tiempos en los pulsos pares (es decir, a contratiempo), siendo esto último el principal error cometido en las actividades 1 y 2, en las que varios alumnos "adelantaron" una posición los acentos fuertes, colocándolos en los pulsos impares. En cambio, 'Tu canción', con estructura de vals, posee un patrón rítmico ternario y también regular. En ella, los acentos fuertes se suceden cada tres tiempos y el patrón rítmico es el mismo que el del fandango, ya visto anteriormente.

En la actividad 3, los fallos que hubo aparecieron en la canción de Bob Marley, pues es donde había mezcla de cuadrados de lado 1 (provocados por empezar a contratiempo) y de lado 2, mientras que en 'Tu canción', eran todos de lado 3 y en algunos casos no se percataron de esa diferencia en 'No woman no cry' y pusieron todos de lado 2. Además, hubo un caso en el que simplemente se dibujaban barras para acentos fuertes y cuadrados para acentos débiles.

En la actividad 4 no hubo apenas fallos destacables, únicamente las posiciones en las que comenzaron algunos alumnos las figuras geométricas, pero el "resultado", es decir, la figura, les coincidía.

La mayoría de tareas sin que los alumnos dejaron sin contestar corresponden a las actividades 5, 6 y 7. En la tarea 5 es donde se produjeron más fallos, pues hubo algunos alumnos que únicamente calcularon el área del triángulo y se les olvidó multiplicar por el número de triángulos que daba lugar al área total de la figura geométrica, mientras que también hubo otros casos en los que pusieron mal el valor del seno de 90º (un grupo puso que valía $\frac{\sqrt{2}}{2}$). En la actividad 6 no se aprecian fallos en sí, pues o está correcta o está sin hacer. Por último, en la tarea 7 se dan algunos casos en los que los acentos fuertes de un patrón no se movían a las posiciones más cercanas en el otro patrón pese a que sí se cumplían las reglas que se explicaron en el capítulo 3 cuando se pretende convertir un patrón en otro que no tiene el mismo número de acentos fuertes.

Una vez que ya se han analizado las tareas de carácter matemático, se va a proceder a analizar las respuestas obtenidas en las preguntas que contribuyen a valorar personalmente la experiencia, en las que, para cada una de las cinco preguntas siguientes, tenían que contestar de acuerdo a la escala nada/algo/bastante/totalmente de acuerdo:

1) Los contenidos han sido explicados con claridad y orden

2) Se han atendido adecuadamente las preguntas y dudas

3) Se ha fomentado la participación de los alumnos

4) Se han proporcionado materiales adecuados para la realización de la experiencia

5) La experiencia ha resultado interesante

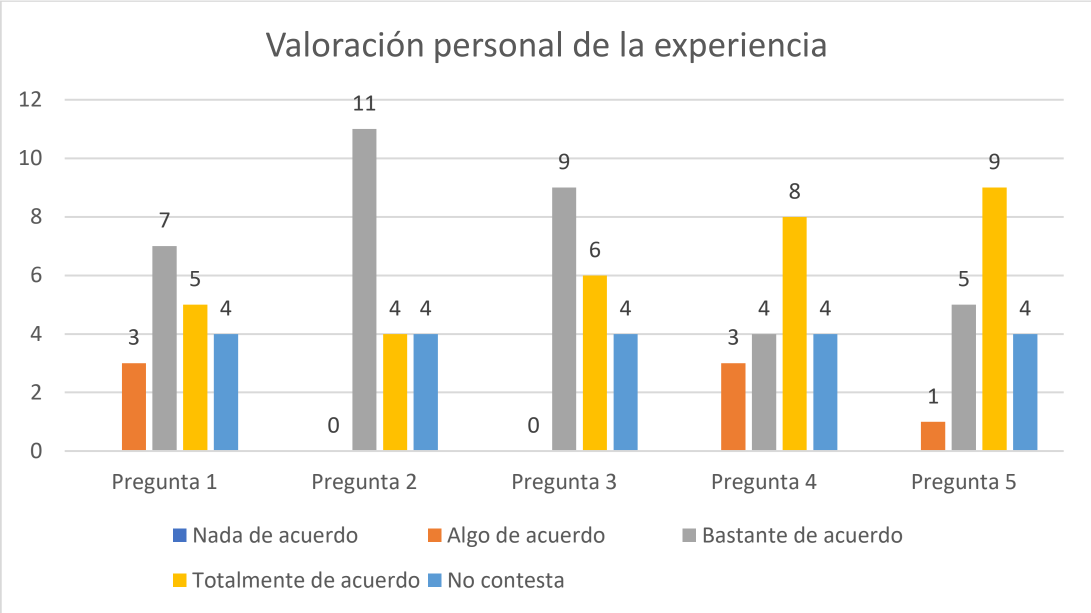


Gráfico 7: Nº de respuestas obtenidas de acuerdo a la escala nada/algo/bastante/totalmente de acuerdo o no contesta en cada una de las cinco preguntas anteriores

De acuerdo al gráfico 7, se observa que, en general, la experiencia ha sido del agrado de los alumnos, pues en cada una de las preguntas, las respuestas más elegidas han sido ‘bastante de acuerdo’ y ‘totalmente de acuerdo’. Además, no ha habido nadie que haya respondido ‘nada de acuerdo’ en ninguna de las preguntas. Se observa también que cuatro de los alumnos no han proporcionado respuesta alguna.

En el apartado final, en el que se ofrecía a los alumnos la posibilidad de dejar algún comentario, seis de ellos han estimado oportuno realizar las siguientes reflexiones:

- Alumno 1: “Ha sido una actividad muy interesante”.
- Alumno 2: “Un tema muy original sobre el que trabajar, además de la relación establecida entre matemáticas y música”.
- Alumno 3: “Me ha gustado mucho, y no pensé que existía esta relación entre música y mates”
- Alumno 4: “Muy entretenido, un buen modo de introducir las matemáticas sin llegar a aburrir a los participantes”.
- Alumno 5: “Todo perfecto”.
- Alumno 6: “Excelente”.

Como se puede ver, los alumnos no han vertido ningún comentario negativo. Todas las reflexiones han sido muy positivas y en ellas se enfatiza que es una propuesta original e interesante y una buena manera de relacionar la música y las matemáticas que les ha resultado muy entretenida.

Para finalizar, se van a hacer unos últimos comentarios referidos al desempeño en las preguntas de carácter matemático. Se ha de mencionar que los dos grupos en los que sus miembros han cursado estudios oficiales de música identificaron correctamente los patrones rítmicos. Uno de los grupos realizó correctamente el resto de las actividades, mientras que el otro respondió incorrectamente a la tarea 5 y dejó en blanco la 6 y la 7. Los dos grupos en los que sus miembros habían aprobado la 1ª y la 2ª evaluación realizaron bastante bien las actividades: uno de ellos respondió todas las preguntas correctamente y el otro dejó sin contestar la tarea 7. Por otro lado, el grupo formado por alumnos que habían suspendido ambas evaluaciones con notas muy bajas respondió incorrectamente a muchas de las preguntas.

5. Valoración y conclusiones

En las siguientes líneas se procederá a valorar el trabajo, a sacar las conclusiones generales una vez realizado el mismo.

Este trabajo ha pretendido contribuir a visibilizar la estrecha relación existente entre el arte y la música, y más en particular, entre la música y las matemáticas. Para ello, se ha revisado literatura existente tanto en el ámbito divulgativo como educativo y se ha comprobado que existen iniciativas que fomentan la interdisciplinaridad entre estas áreas de conocimiento, donde destaca Divulgamat, que realiza una labor excelente para mostrar las matemáticas desde un punto de vista atractivo, con un extenso catálogo de materiales. Asimismo, en el ámbito formativo la corriente STEAM viene pisando fuerte en el terreno de la interdisciplinaridad, más aún cuando se incluyó el arte, pasando de STEM a STEAM.

Por otro lado, se ha querido indagar en las matemáticas existentes en conceptos básicos de lenguaje musical, pues como ya se dijo anteriormente en la sección correspondiente, en la música se hallan presentes muchos elementos de carácter matemático. Además, se han pretendido mencionar algunas contribuciones de destacados músicos y matemáticos que, de primeras, son muy conocidos por sus trabajos en uno de esos campos pero que también han hecho contribuciones en el otro (música o matemáticas, según sea el caso) y dicho área de conocimiento ha estado muy presente en sus vidas, lo cual es desconocido para la mayoría de la gente.

Además, para contribuir a esa interdisciplinaridad de la que se hablaba anteriormente, se ha desarrollado e implementado una propuesta didáctica, con el fin de enseñar a los alumnos la estrecha relación existente entre la música y las matemáticas a través de un ejemplo concreto, de una forma entretenida para ellos. Se puede decir que este propósito se logró de manera exitosa, en vista de las valoraciones y comentarios, todos ellos positivos, que se mostraron en el capítulo anterior.

Se ha de destacar también que, durante el desarrollo de la experiencia, a los alumnos se les vio realizar las actividades con gran interés, siendo estas bastantes inusuales, pues este tipo de experiencias no se suelen poner en práctica en las aulas, ya sea por falta de tiempo o por otros motivos.

En vista de los resultados proporcionados en las distintas tareas, el desempeño de los alumnos fue, en general, bueno, donde los grupos formados por alumnos con bajas calificaciones en Matemáticas tuvieron más fallos y los que habían cursado algunos años de estudios oficiales de música y sobre todo los que habían aprobado las dos primeras evaluaciones en lo que llevaban de curso, tuvieron, en general, un buen desempeño en las tareas.

En definitiva, ha sido muy gratificante profundizar en la fuerte conexión existente entre la música y las matemáticas, pues son áreas de conocimiento a las que he dedicado bastantes años de mi vida: por un lado en el Conservatorio y por otro en la Universidad y, ciertamente, conocía su estrecha relación pero nunca me había puesto a estudiar esta con detenimiento.

Bibliografía

ABAD PALAZUELOS, E. [et al.] 2014. *Santander, mirar y ver... matemáticas, arquitectura e historia.* Ediciones Universidad Cantabria. ISBN 978-84-8102-720-4. [Consulta: 16 noviembre 2018]. Disponible en http://www.editorial.unican.es/libro/santander-mirar-y-ver-matematicas-arquitectura-e-historia

ARBONÉS, J; MILRUD, P. 2010. *La armonía es numérica*: *Música y matemáticas.* Madrid: RBA Coleccionables. El mundo es matemático. ISBN 978-84-473-6961-4.

BERTOS, M.C. 2009. Música y matemáticas. *Jornadas de Investigación en el aula de Matemáticas*, *19,20, 21 de noviembre y 10, 11 y 12 de diciembre 2009, Universidad de Granada*, pp. 1-7. [Consulta: 18 noviembre 2018]. Disponible en http://www.ugr.es/~jmcontreras/thales/1/MesaRedondaPDF/BertosMesaRedonda.pdf

CADGME (2018). *Conference on Digital Tools in Mathematics Education, 25 al 28 de junio de 2018, Universidad de Coimbra (Portugal)*. [Consulta: 20 noviembre 2018]. Disponible en https://www.uc.pt/en/congressos/cadgme2018/generalinformation/listTalks

CANTABRIA. 2015. Decreto 38/2015, de 22 de mayo, que establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria. Boletín Oficial de Cantabria, 5 de junio de 2015, 39 (extraordinario), pp. 2711-3784. [Consulta: 17 noviembre 2018]. Disponible en https://boc.cantabria.es/boces/verAnuncioAction.do?idAnuBlob=287913

CILLERUELO, L; ZUBIAGA, A. 2014. Una aproximación a la Educación STEAM. Prácticas educativas en la encrucijada arte, ciencia y tecnología. *Jornadas de Psicodidáctica 2014. Universidad del País Vasco (UPV/EHU),* pp. 1-18. [Consulta: 30 noviembre 2018]. Disponible en https://www.augustozubiaga.com/web/wp-content/uploads/2014/11/STEM-TO-STEAM.pdf

DÍAZ-BÁÑEZ, J.M. 2013. Sobre problemas de matemáticas en el estudio del cante flamenco. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, **16** (3), pp. 513-542. ISSN 1138-8927. [Consulta: 10 abril 2018]. Disponible en https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4392923

DÍAZ-BÁÑEZ, J.M. [et al.] 2004. El Compás Flamenco: A Phylogenetic Analysis. En: Sarhangi, R.; Séquin, C. (eds.) *Bridges: Mathematical Connections in Art, Music and Science, 30 July – 1 August 2004, Southwestern College.* Winfield (Kansas): Bridges Conference: pp. 61-70. [Consulta: 10 abril 2018]. Disponible en http://archive.bridgesmathart.org/2004/bridges2004-61.html

DÍAZ-BÁÑEZ, J.M. [et al.] 2005. Similaridad y evolución en la rítmica del flamenco: una incursión de la matemática computacional. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, **8** (2), pp. 489-509. ISSN 1138-8927. [Consulta: 10 abril 2018]. Disponible en https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1971791

ESPAÑA. 2015. Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, 29 de enero de 2015, 25, pp.6986-7003. [Consulta: 17 noviembre 2018]. Disponible en https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/29/pdfs/BOE-A-2015-738.pdf

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM). 2018. IV Día de GeoGebra. 5 marzo 2018. [Consulta: 16 noviembre 2018]. Disponible en http://fespm.es/IV-Dia-de-Geogebra-Albacete-2018

GAGO BLANCO, C. 2009. La Catedral de Murcia: Un punto de vista interdisciplinar. [Consulta: 21 noviembre 2018]. Disponible en https://core.ac.uk/download/pdf/141705863.pdf

GEOGEBRA. [Consulta: 27 octubre 2018]. Disponible en https://www.geogebra.org/

GUTIÉRREZ, S. 2009. Luca Pacioli y la Divina Proporción. *Suma*, **61**, pp. 107-112. ISSN 1130-488X. [Consulta: 18 octubre 2018] Disponible en https://revistasuma.es/IMG/pdf/61/107-112.pdf

LIERN CARRIÓN, V. 2009a. Las matemáticas de Johann Sebastian Bach. *Suma*, **61**, pp. 113-118. ISSN 1130-488X. [Consulta: 24 noviembre 2018]. Disponible en https://revistasuma.es/IMG/pdf/61/113-118.pdf

LIERN CARRIÓN, V. 2009b. Las matemáticas y la música popular. *Suma*, **62**, pp. 107-113. ISSN 1130-488X. [Consulta: 24 noviembre 2018]. Disponible en https://revistasuma.es/IMG/pdf/62/107-113.pdf

LIERN CARRIÓN, V. 2012. Euler y su interés por la música. *Suma*, **70**, pp. 93-98. ISSN 1130-488X. [Consulta: 25 noviembre 2018]. Disponible en http://revistasuma.es/IMG/pdf/70/093-098.pdf

LIERN CARRIÓN, V; QUERALT LLOPIS, T. 2008. La armonía de los números. Dia escolar de las matemáticas (12 de mayo de 2008), pp. 1-11. [Consulta: 4 diciembre 2018]. Disponible en https://www.fespm.es/IMG/pdf/dem2008_-_musica_y_matematicas.pdf

LLUÍS-PUEBLA, E. 2002. La matemática en la música. *Pro Mathematica,* **16** (31-32), pp. 129-143. ISSN 2305-2430. [Consulta: 25 noviembre 2018]. Disponible en http://revistas.pucp.edu.pe/index.php/promathematica/article/view/8188

MACHO STADLER, M. 2015. Pilar Bayer: entre la matemática y la música. En: *Mujeres con Ciencia,* 27 de diciembre de 2015. [Consulta: 19 noviembre 2018]. Disponible en https://mujeresconciencia.com/2015/12/27/pilar-bayer-entre-la-matematica-y-la-musica/

MANDELBROT, B. 1997. *La geometría fractal de la naturaleza*. Barcelona: Tusquets Editores. Metatemas, 49. ISBN 84-8310-549-7. [Consulta: 29 octubre 2018]. Disponible en https://es.scribd.com/doc/103237194/Mandelbrot-Benoit-La-geometria-fractal-de-la-naturaleza

MILLER, A.I. 2006. A Genius Finds Inspiration in the Music of Another. En: *The New York Times*, 31 de enero de 2016. [Consulta: 18 noviembre 2018]. Disponible en https://www.nytimes.com/2006/01/31/science/a-genius-finds-inspiration-in-the-music-of-another.html

ORTEGA, B. 2016. ¿Qué es STEAM?. En: *DIWO*. 5 abril 2016. [Consulta: 7 octubre 2018]. Disponible en diwo.bq.com/que-es-steam-educacion/

PERALTA CORONADO, J. 1998. Las matemáticas en el arte, la música y la literatura. *Tendencias pedagógicas*, **2** (extraordinario), pp. 235-244. ISSN 1133-2654. [Consulta: 7 octubre 2018]. Disponible en https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=287556

POL I LLOMPART, J.L. 2011. Matemáticas *alla romántica. Matematicalia*, **7** (1), pp.1-7. ISSN 1699-7700. [Consulta: 20 noviembre 2018]. Disponible en http://www.matematicalia.net/articulos/v7n1mar2011/jlpol.pdf

PUIG, J.E. 2014. Diez años tras las huellas de Escher. *Hipótesis,* **17**, pp. 69-79. ISSN 1692-729X. [Consulta: 25 noviembre]. Disponible en http://hipotesis.uniandes.edu.co/hipotesis/images/stories/ed17pdf/Huellas-de-Escher-17.pdf

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA. *Divulgamat.net*. [Consulta: 30 octubre 2018]. Disponible en http://www.divulgamat.net/

RECOMENDACIÓN DEL PARLAMENTO EUROPEO Y DEL CONSEJO de 18 de diciembre de 2006 sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente. *Competencias clave para el aprendizaje permanente - Un marco europeo,* pp.1-12. [Consulta: 21 noviembre 2018]. Disponible en http://www.mecd.gob.es/dctm/ministerio/educacion/mecu/movilidad-europa/competenciasclave.pdf?documentId=0901e72b80685fb1

SANGUINO, J. *El arte fractal y las matemáticas*. [Consulta: 15 octubre 2018]. Disponible en https://culturacolectiva.com/arte/el-arte-fractal-y-las-matematicas/

SANZ, E. 2010. Fallece Benoît Mandelbroot, el padre de la geometría fractal. En: MUY INTERESANTE [Consulta: 17 octubre 2018]. Disponible en https://www.muyinteresante.es/ciencia/articulo/fallece-benoit-mandelbrot-el-padre-de-la-geometria-fractal

STEM POR YOUTH. [Consulta: 19 octubre 2018]. Disponible en https://stemforyouth.unican.es/stemforyouth/

THE BRIDGES ORGANIZATION. *Bridges*. [Consulta: 21 octubre 2018]. Disponible en http://www.bridgesmathart.org/

THE INDEPENDENT. 2011. The enduring myth of music and maths. [Consulta: 19 noviembre 2018]. Disponible en https://www.independent.co.uk/arts-entertainment/classical/features/the-enduring-myth-of-music-and-maths-2307387.html

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA. *Unidad de Cultura Científica: actividades.* [Consulta: 19 noviembre 2018] Disponible en https://web.unican.es/unidades/cultura-cientifica/actividades

VALLE, J; MANSO, J. 2013. Competencias clave como tendencia de la política educativa supranacional de la Unión Europea. *Revista de Educación*, Extraordinario 2013, pp. 12-33. ISSN 1988-592X. Disponible en http://dx.doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2013-EXT-255

ZAMORANO ESCALONA, T; GARCÍA CARTAGENA, Y; REYES GONZÁLEZ, D. 2018. Educación para el sujeto del siglo XXI: principales características del enfoque STEAM desde la mirada educacional. *Contextos*, **41**, pp. 1-21. ISSN 0719-1014. [Consulta: 9 octubre 2018]. Disponible en http://revistas.umce.cl/index.php/contextos/article/view/1395/1428

Anexo I. Guía didáctica de la experiencia

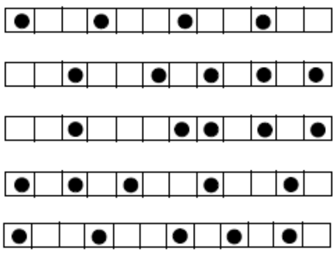
ANÁLISIS MATEMÁTICO DE PATRONES RÍTMICOS DE CANCIONES

1. Notaciones de patrones rítmicos

1.1. Notación de cajas: se trata de dibujar cajas en las que se indiquen las posiciones de los acentos fuertes (mediante un círculo negro) y débiles (dejándolas en blanco).

1.2. Notación numérica: se trata de escribir números que indiquen las posiciones de los acentos fuertes (el número en tamaño grande) y débiles (el número en tamaño normal).

Ejemplos:



[**1** 2 3 **4** 5 6 **7** 8 9 **10** 11 12] - *fandango*

[1 2 **3** 4 5 **6** 7 **8** 9 **10** 11 **12**] - *soleá*

[1 2 **3** 4 5 6 **7** **8** 9 **10** 11 **12**] - *bulería*

[**1** 2 **3** 4 **5** 6 7 **8** 9 10 **11** 12] - *seguiriya*

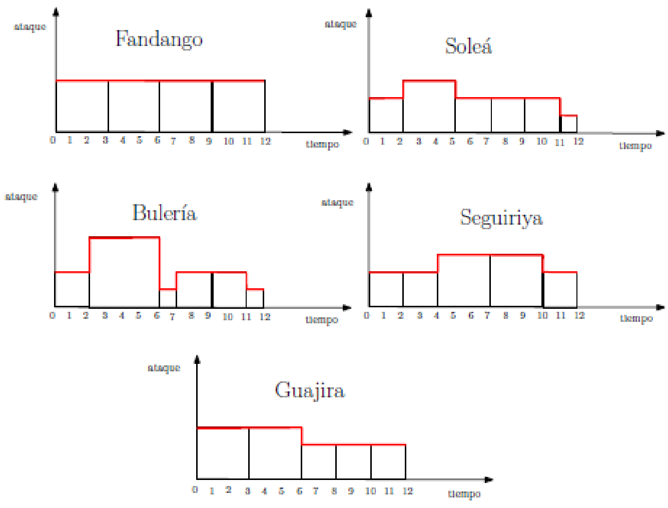
[**1** 2 3 **4** 5 6 **7** 8 **9** 10 **11** 12] - *guajira*

Notación de cajas Notación numérica

2. Representaciones geométricas de patrones rítmicos

2.1. Representación cronotónica: el tiempo que separa un acento (o ataque musical) del siguiente determina la dinámica del ritmo. Cada espacio temporal entre dos acentos fuertes consecutivos (intervalo rítmico) se representa como una caja bidimensional y ambos ejes, x e y, representan la longitud temporal del intervalo (se comienza en tiempo cero).

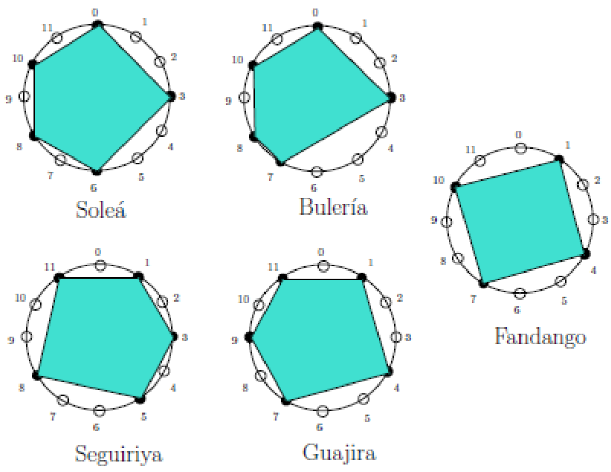
Ejemplos:



Representación cronotónica

2.2. Representación poligonal: consideramos las doce posiciones como puntos equidistantes sobre una circunferencia, de forma que podemos imaginar un collar de perlas negras (acentos fuertes) y blancas (acentos débiles) en forma de diagrama de reloj. Al unir cada dos acentos fuertes consecutivos, nos aparece el polígono cuyos vértices son, precisamente, esas perlas negras.

Ejemplos:



Representación poligonal

El "1" marca la posición en la cual comienza el patrón rítmico y los vértices indican donde están los acentos fuertes.

También podemos hallar el área del polígono resultante (se calcula fácilmente subdividiéndolo en triángulos y aplicando el siguiente resultado):

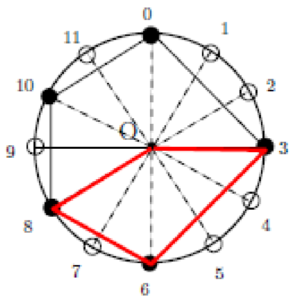
El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman.

Área= $\frac{1}{2}$ *ab sen α,*

siendo a, b dos de sus lados y α el ángulo que forman dichos lados.

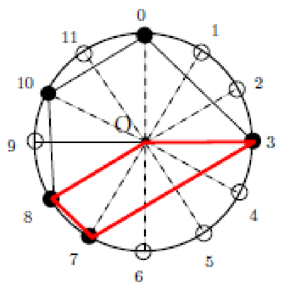
Nota: consideramos que la circunferencia en la que está inscrita el polígono tiene radio 1.

Ejemplos:



$$A_{O68} + A_{036} = \frac{\text{sen}\, 60^{\text{o}}}{2} + \frac{\text{sen}\, 90^{\text{o}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}.$$

Soleá



$$A_{O78} + A_{O37} = \frac{\text{sen}\, 30^{\text{o}}}{2} + \frac{\text{sen}\, 120^{\text{o}}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

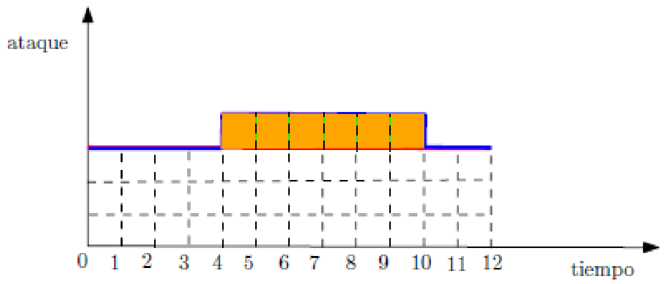
Bulería

Soleá tiene más área que bulería.

3. Medidas de similitud rítmica

3.1. Distancia cronotónica: dados dos patrones rítmicos P_1 y P_2, representados en forma cronotónica, se define la distancia cronotónica, $d_c(P_1, P_2)$, como el área de la diferencia entre dichas representaciones.

Ejemplo: si superponemos las representaciones cronotónicas de fandango y seguiriya, el área comprendida entre ellas es igual a 6.

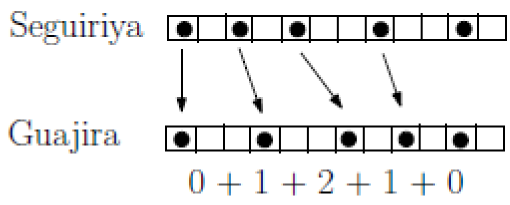


Distancia cronotónica entre fandango y seguiriya

3.2. Distancia de permutación: la distancia de permutación entre dos patrones rítmicos P_1 y P_2, $d_p(P_1, P_2)$, se define como el número mínimo de intercambios que permiten transformar un patrón rítmico en el otro.

Ejemplo 1: dos patrones rítmicos que tienen el mismo número de acentos fuertes.

Utilizamos la siguiente idea: representamos cada patrón rítmico como un vector que indica las posiciones donde se encuentran los acentos fuertes. Por ejemplo, seguiriya la representamos como *Se* = (1, 3, 5, 8, 11) y guajira como *Gu* = (1, 4, 7, 9, 11). Observamos ahora que el número mínimo de intercambios necesarios puede calcularse sumando las diferencias (en valor absoluto) entre las coordenadas de estos vectores.



Distancia de permutación entre seguiriya y guajira:

$d_p(Se, Gu)$ = |1−1|+|3−4|+|5−7|+|8−9|+|11−11| = 4.

Ejemplo 2: dos patrones rítmicos que tienen distinto número de acentos fuertes.

En este caso se procede de la siguiente manera:

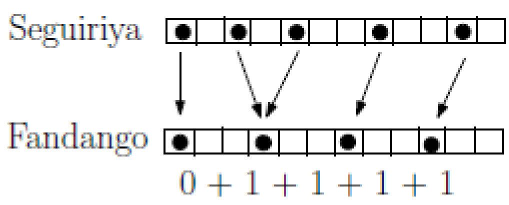
1. Se convierte el ritmo de más acentos fuertes (seguiriya en el ejemplo), al de

menos acentos fuertes (fandango).

2. Cada acento fuerte del mayor ha de moverse a un acento del menor.

3. Cada acento del menor (fandango en el ejemplo) ha de recibir al menos un acento del mayor (seguiriya).

4. Los acentos no pueden cruzar el final de la cadena y aparecer por el principio.



Distancia de permutación entre seguiriya y fandango:

d_p (*Se*, *Fa*) = |1−1|+|3−4|+|5−4|+|8−7|+|11−10| = 4.

Anexo II. Ficha de trabajo del alumno

ANÁLISIS MATEMÁTICO DE PATRONES RÍTMICOS DE CANCIONES: ACTIVIDADES

Actividades para realizar en parejas. Es ANÓNIMO, pero se requiere que respondáis a las siguientes preguntas (la persona que responda en 1- debe ser siempre la misma y análogamente en 2-):

¿Os gustan las matemáticas y la música?

1-

2-

¿Qué calificaciones habéis obtenido este curso en la primera y en la segunda evaluación en Matemáticas?

Primera evaluación:

1-

2-

Segunda evaluación:

1-

2-

¿Estudiáis (o habéis estudiado) música en el conservatorio? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuántos años?

1-

2 -

De aquí en adelante, trataréis de hacer un análisis matemático de los patrones rítmicos de las siguientes canciones:

- Tu canción – Amaia y Alfred
- No woman no cry – Bob Marley

Para ello, se os pide que realicéis las siguientes actividades:

Actividad 1: *Escribid el patrón rítmico de cada canción mediante la notación de cajas*.

Tu canción:

No woman no cry:

Actividad 2: *Escribid el patrón rítmico de cada canción utilizando la notación numérica*.

Tu canción:

No woman no cry:

Actividad 3: *Realizad una representación cronotónica del patrón rítmico de cada canción.*

Tu canción:

No woman no cry:

Actividad 4. *Realizad una representación poligonal del patrón rítmico de cada canción.*

Tu canción:

No woman no cry:

Actividad 5. *Calculad el área del polígono asociado al patrón rítmico de cada canción.*

Tu canción:

No woman no cry:

Actividad 6. *Calculad la distancia cronotónica entre los patrones rítmicos de las dos canciones.*

Actividad 7. *Calculad la distancia de permutación entre los patrones rítmicos de las dos canciones.*

Valoración personal de la experiencia. Finalmente, se os pide que valoréis la experiencia respondiendo a las siguientes cuestiones (la persona 1- pone un 1 a la derecha de la respuesta que estime oportuna en cada caso y análogamente, la persona 2- pone un 2):

1) Los contenidos han sido explicados con claridad y orden

- Nada de acuerdo
- Algo de acuerdo
- Bastante de acuerdo
- Totalmente de acuerdo

2) Se han atendido adecuadamente las preguntas y dudas

- Nada de acuerdo
- Algo de acuerdo
- Bastante de acuerdo
- Totalmente de acuerdo

3) Se ha fomentado la participación de los alumnos

- Nada de acuerdo
- Algo de acuerdo
- Bastante de acuerdo
- Totalmente de acuerdo

4) Se han proporcionado materiales adecuados para la realización de la experiencia

- Nada de acuerdo
- Algo de acuerdo
- Bastante de acuerdo
- Totalmente de acuerdo

5) La experiencia ha resultado interesante

- Nada de acuerdo
- Algo de acuerdo
- Bastante de acuerdo
- Totalmente de acuerdo

Comentarios:

1-

2-