ÍNDICE CON ELECCIÓN FLEXIBLE DE PESOS PARA LA ORDENACIÓN DE ALTERNATIVAS.

Contreras Rubio, Ignacio

Hinojosa Ramos, Miguel Ángel

Departamento de Economía y Empresa

Universidad Pablo de Olavide

e-mail: iconrub@dee.upo.es, mahinram@dee.upo.es

Mármol Conde, Amparo Mª

Departamento de Economía Aplicada III

Universidad de Sevilla

e-mail: amarmol@us.es

Resumen.

En el presente trabajo se trata el problema de la evaluación de un conjunto finito de alternativas a partir de las valoraciones que de ellas hacen un conjunto de individuos en una escala ordinal.

Se propone un índice compuesto de evaluación, suponiendo que ofrece a cada alternativa la oportunidad de ser valorada de la forma más favorable suponiendo, únicamente, ciertas condiciones naturales sobre los pesos que representan la importancia relativa de cada categoría de la escala ordinal. En el modelo propuesto, esas condiciones establecen el carácter decreciente de los pesos asignados a cada categoría además de un supuesto de convexidad sobre éstos. Se analizan también ciertas propiedades del índice como regla de elección social, así como las conexiones con el método de las marcas de Borda. Para finalizar, se incluye una aplicación al problema de selección de personal para ilustrar los resultados presentados.

Palabras clave: Información Ordinal, Ranking, Índice de Valoración.

1. Introducción

La agregación de preferencias individuales ha sido objeto de estudio durante más de dos siglos. Un caso particular de esta formulación es el problema de agregación de preferencias en el que un grupo de evaluadores expresan sus preferencias sobre un conjunto finito de alternativas a través de posiciones en una escala ordinal, buscando una ordenación final de dicho conjunto de alternativas.

Las aplicaciones de este tipo de problema son abundantes debido, sin duda, a la escasa información que se requiere para su planteamiento. Únicamente se precisan las preferencias de unas alternativas sobre otras sin que se necesite el grado de preferencia asociado a cada posición de la escala ordinal. Es decir, solo se pide que se exprese qué alternativa se prefiere sobre otras, sin necesidad de expresar el grado de preferencia asociado a cada posición de la escala, necesario en otros planteamientos como, por ejemplo, los modelos de teoría de la utilidad.

El problema de agregación de preferencias individuales expresadas de manera ordinal ha sido tratado por un gran número de autores, con propuestas de solución que en la mayor parte de los casos se encuadran en la teoría de la elección y en los estudios de los sistemas de votación. Borda (Borda, 1781) estudia el problema en relación a la cuestión de la elección de candidatos, para el que propuso el método actualmente denominado de las *marcas de Borda*. Según este procedimiento los candidatos se ordenan en función del valor de la suma de las marcas, cuyo valor es igual a la posición del ranking[1] asignada por los electores a cada candidato. Kendall (Kendall, 1962) es el primero en estudiar el problema desde un punto de vista estadístico. Aborda el problema de ordenación de alternativas como un problema de estimación, buscando una ordenación de consenso que maximice el acuerdo entre los evaluadores. La solución ofrecida por Kendall ordena las alternativas de acuerdo con la suma de las posiciones que ocupa cada alternativa, por lo que coincide con el

[1] En la escala ordinal las categorías pueden plantearse de manera que las primeras categorías son preferidas a las posteriores o de manera inversa. En el presente trabajo optamos por la primera, es decir, cada categoría es preferida a las posteriores por lo que el valor numérico asignado a la *marca* es superior.

método de Borda. Frecuentemente, este método aparece referido como método de Borda-Kendall (B-K) y, debido a su simplicidad, es el método más extendido en las aplicaciones para la obtención de una ordenación consensuada.

El método de B-K ha sido reconsiderado en varios trabajos inspirando nuevos procedimientos de elección colectiva. Algunos ejemplos de este grupo de modelos son los propuestos, entre otros, en Copeland (1951), Black (1958), Sen (1977) o Dummett (1998).

Otro conjunto de métodos para obtener una ordenación de alternativas se basan en la definición de funciones de distancia que obtienen aquella evaluación de consenso que se encuentra tan próxima como sea posible de las evaluaciones individuales realizadas por los votantes, proximidad que se mide a través de diferentes funciones de distancia. Cook y Seiford (1982) muestran la equivalencia del método B-K con la ordenación que minimiza el error cuadrático entre las evaluaciones y la solución de consenso, es decir, la ordenación obtenida a partir de B-K coincide con la ordenación obtenida con un modelo basado en distancias cuando se aplica la métrica l_2. Con ello, se refuerza la base estadística sobre la que sustenta el método ya que aparece como una de las posibilidades cuando se plantea el problema de agregación de preferencias en términos de distancia a una solución de consenso. En Cook et al. (1996) se plantea un esquema general para la ordenación de alternativas a través de soluciones de consenso utilizando diferentes métricas.

En cualquier caso, los procedimientos basados en distancias o del método B-K, implican que se asocia una interpretación numérica a la información ordinal. Es decir, existe un valor o utilidad asociado a cada posición de la escala ordinal. Esta es sin duda la crítica más frecuente a este tipo de aproximaciones, el que las posiciones dentro de una escala ordinal sean tratadas directamente como las utilidades asociadas a las propias posiciones.

El objetivo del presente trabajo es plantear un método de evaluación de alternativas en el que cada evaluador individual ordena a cada alternativa en una escala ordinal. En nuestra propuesta, la evaluación final de las alternativas se obtiene como suma ponderada de los votos recibidos en las diferentes categorías, pero existe flexibilidad en la elección de los pesos asociados a cada posición de la escala, es decir, considerando las ponderaciones como una variable que se determinará dentro del proceso de evaluación.

Solo se suponen dos condiciones sobre los pesos: son valores decrecientes, en tanto representan la importancia relativa de las categorías ordinales, y una condición de convexidad, las diferencias entre los pesos correspondientes a dos categorías sucesivas son decrecientes. Esta segunda condición aparece como natural en la mayor parte de las situaciones en las que puede aplicarse esta metodología, en tanto puede interpretarse como que la intensidad con la que se discriminan dos categorías sucesivas decrece conforme se consideran las categorías menos valoradas de la escala. En el presente trabajo construimos un modelo en el que se agregan las votaciones individuales considerando que las ponderaciones asociadas a cada categoría verifican estos supuestos, analizamos algunas propiedades de nuestro modelo, así como las conexiones con los métodos tradicionales de agregación de preferencias.

El resto del trabajo se estructura de la siguiente forma. El la siguiente Sección se describe el esquema general sobre el que se construye el índice propuesto así como los elementos teóricos necesarios para su obtención. En la tercera Sección se introduce el índice propuesto, las conexiones con el método de B-K y su inclusión en el esquema general descrito en la Sección 2. La Sección 4 se dedica al análisis gráfico de algunos aspectos del índice propuesto. La Sección 5 se dedica a una aplicación de la regla de decisión propuesta a un problema de selección de personal, en el que se comparan los resultados obtenidos con el índice propuesto con los que se obtendrían aplicando B-K, y mediante una evaluación de consenso que minimiza el disconsenso total cuando la norma l_1 es considerada. Por último, el trabajo concluye con una Sección dedicada a conclusiones.

2. Evaluación de alternativas a través de índices agregados

Consideramos el problema de ordenar mediante la construcción de un índice agregado un conjunto de N alternativas, $\{A_i\}$, $i=1,\ldots,N$, que han sido valoradas mediante votaciones en una escala ordinal con L posiciones o categorías. Denotamos por n_{il} el número de votos que la unidad i, $i=1,\ldots,N$, recibe en la categoría l, $l=1,\ldots,L$. El número total de votos que recibe cada alternativa se denota por M.

La valoración de cada alternativa se realiza mediante un índice consistente en una determinada ponderación del número o porcentaje de voto de cada categoría, n_{il}. Si denotamos por w_l el peso asociado a la categoría l, el valor del índice asociado a la alternativa A_i es

$$R(A_i) = \sum_{l=1}^{L} w_l n_{il} \ . \qquad (1)$$

En el caso de B-K, el valor de estas ponderaciones coincide con la posición en la escala[2] con lo que el problema se resuelve de manera inmediata y el índice está totalmente definido. En la práctica, puede que no siempre sea deseable conocer a priori el peso asignado a cada categoría. El procedimiento que se muestra permite flexibilidad en la elección de las ponderaciones y busca obtener el valor $R(A_i)$ más favorable para cada unidad considerada de manera individual.

Este tipo de valoraciones individuales en el que se optimizan las ponderaciones de cada alternativa, con un conjunto de restricciones comunes como veremos, es ampliamente utilizado en la metodología DEA (Charnes et al., 1978) y ha sido aplicado en Cook y Kress (1994, 1996) y Puerto (2000) para la construcción de índices con múltiples criterios.

Formalmente se busca determinan el conjunto de pesos que maximice $R(A_i)$. El problema de optimización con el que se obtiene la evaluación de A_i en la mejor situación posible es de la forma

[2] Considerando que las primeras categorías de la escala son las preferidas, a la primera se asigna un valor numérico L, $L-1$ para la segunda y así sucesivamente hasta asignar un valor igual a 1 para la posición L-ésima de la escala. Estos valores pueden aplicarse, igualmente, normalizados para que sumen la unidad, por lo que han de dividirse por $\frac{\quad}{L(L+1)}$.

$$R(A_i) = \begin{array}{ll} Max & \sum_{l=1}^{L} w_l n_{il} \\ s.a. & w_l \in \Omega \end{array} \qquad (2)$$

donde en el conjunto Ω se recoge la información respecto a los pesos asociados a las distintas categorías.

Consideramos que los conjuntos son poliédricos y tales que $\Omega \subseteq \Lambda^+ = \left\{ w \in R^L : \sum_{l=1}^{L} w_l = 1, w \geq 0 \right\}$. Como se ve, en cualquier caso el conjunto de información de los pesos incluye la condición de no negatividad y una condición de normalización, la suma de ponderaciones ha de ser igual a la unidad. En este conjunto habrá de incluirse, además, el carácter ordinal de los pesos, es decir, ha de concretarse que el peso asociado a cada categoría ha de ser superior al de las categorías siguientes, $w_l \geq w_{l+1} \forall l = 1,\ldots,L-1$. Denotamos por Φ el conjunto que establece una ordenación simple de los pesos asociados a cada categoría, es decir $\Phi = \left\{ w \in R^L : w \geq 0, \sum_{l=1}^{L} w_l = 1; w_l \geq w_{l+1}, l = 1,\ldots,L-1 \right\}$.

Sea cual sea la forma concreta que adopte el conjunto Ω, el problema (2) es un problema lineal que, en general puede resolverse mediante procedimientos simpliciales o con los distintos programas informáticos existentes para este tipo de planteamientos. Sin embargo, para los conjuntos de información poliédricos, en muchos casos particulares interesantes es posible obtener la forma analítica de las soluciones de estos problemas sin necesidad de recurrir a métodos iterados, lo que permite construir los índices de valoración correspondientes.

La resolución de estos problemas se basa en la obtención de los puntos extremos de los conjuntos de información. Es sabido que si $w^j, j = 1,\ldots,J$, son los puntos extremos del conjunto de información Ω, la solución del problema (2) es

$$R(A_i) = Max_{\{j=1,\ldots,J\}} \sum_{l=1}^{L} w_l^j n_{il} \qquad (3)$$

Por tanto, si es posible determinar los puntos extremos del conjunto factible, la solución óptima puede obtenerse evaluando la función objetivo en cada uno de estos puntos.

Si la información sobre los pesos viene dada por relaciones homogéneas de la forma $Mx \geq 0$, con $M \in R_{L \times L}$, el conjunto factible para los pesos puede escribirse como $\Omega = \{w \in \Lambda^+, Mw \geq 0\}$. La facilidad de interpretación de las relaciones entre los pesos así como en la obtención de los puntos extremos hace que estos conjuntos tengan una amplia aplicación en los procesos decisionales.

En Carrizosa et al. (1995) se establece que si $M^{-1} \geq 0$, los puntos extremos del conjunto Ω son las columnas de M^{-1} normalizadas para sumar la unidad. Por lo que si las restricciones que definen la relación ordinal entre las ponderaciones pueden escribirse de esta forma, la resolución de (2) y, por tanto, la obtención de la expresión analítica del índice puede hacerse fácilmente (véase Mármol et al., 1998).

Utilizaremos este procedimiento a través de los puntos extremos del conjunto factible para desarrollar una regla de decisión que nos permita evaluar el conjunto de alternativas considerando la información disponible sobre los pesos asociados a cada posición de la escala.

3. Índice con elección flexible de pesos para la ordenación de alternativas

Si relacionamos las ideas subyacentes en las dos Secciones precedentes, asignación de un peso a cada categoría de la escala ordinal igual a su posición en la escala como en B-K y evaluación de cada alternativa con los pesos que hacen máximo el valor del índice agregado, puede plantearse un nuevo índice para la evaluación de alternativas.

La información ordinal que contiene el conjunto Φ generalmente no es suficiente para construir un índice que evalúe fielmente cada una de las alternativas. En esta Sección consideramos la inclusión de información adicional respecto a los pesos.

Consideramos que los pesos varían en una secuencia decreciente y constante, es decir las ponderaciones asociadas a cada categoría de la escala ordinal se ordenan a través de las diferencias entre la importancia asignada a dos posiciones consecutivas de manera que estas diferencias decrecen conforme se consideran categorías menos valoradas.

Formalmente, el conjunto de pesos admitidos es, en nuestro caso[3],

$$\Omega = \left\{ w \in R^L : w \geq 0, \sum_{l=1}^{L} w_l = 1, w_l - w_{l+1} \geq w_{l+1} - w_{l+2}, l = 1, \ldots, L-2; w_{L-1} - w_L \geq w_L \right\} \quad (4)$$

Nótese como el conjunto Ω está contenido en el conjunto Φ que define una ordenación simple de las ponderaciones asociadas a cada categoría.

En el método B-K las marcas asignadas a cada posición de la escala varían en progresión aritmética, por lo que la diferencia entre dos categorías sucesivas es siempre constante. En este nuevo planteamiento, se establece la posibilidad de que las diferencias entre pesos de dos categorías sucesivas sean decrecientes, lo que supone que el valor numérico de dichas ponderaciones se reduzca de manera más acusada que las marcas B-K.

El siguiente resultado establece la forma del índice inducido cuando se considera una ordenación de las diferencias para el conjunto de ponderaciones.

Proposición 3.1. *La evaluación de las alternativas inducidas por el conjunto de información* Ω *es*

$$R(A_i) = max_{\{r=1,\ldots,L\}} \left\{ \sum_{l=1}^{r} \frac{(r-l+1)}{\frac{r(r+1)}{2}} n_{il} \right\} \quad (5)$$

Demostración: El conjunto de información adicional Ω está construido a partir de L relaciones homogéneas por lo que $\Omega = \{ w \in \Lambda^+ : Mw \geq 0 \}$. La matriz M es, en este caso,

[3] Este tipo de conjuntos de información sobre las categorías ha sido utilizado recientemente en el contexto DEA en Hashimoto (1997).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

La matriz *M* es una matriz triangular superior ($m_{ij} = 0 \; \forall i > j$) en la que se verifica

$$mij = \begin{cases} 1 & i = j \\ -2 & i = 1,\ldots,L-1;\, j = i+1 \\ 1 & i = 1,\ldots,L-2;\, j = i+2 \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{7}$$

Puede comprobarse que la matriz $M^{-1} = B$ es una matriz no negativa igual a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & L-1 & L \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & L-2 & L-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & L-3 & L-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Es decir, B es la matriz triangular en la que

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & i > j \\ j - i + 1 & i \leq j. \end{cases} \tag{9}$$

A partir de M^{-1} los puntos extremos de Ω se obtienen normalizando las columnas de M^{-1} para sumar la unidad (Carrizosa et al. 1995). Es decir, la matriz que contiene los puntos extremos es

$$L=\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{3}{6} & \frac{4}{10} & \cdots & \frac{L-1}{\frac{L(L-1)}{2}} & \frac{L}{\frac{L(L+1)}{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{6} & \frac{3}{10} & \cdots & \frac{L-2}{\frac{L(L-1)}{2}} & \frac{L-1}{\frac{L(L+1)}{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{10} & \cdots & \frac{L-3}{\frac{L(L-1)}{2}} & \frac{L-2}{\frac{L(L+1)}{2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\frac{L(L-1)}{2}} & \frac{2}{\frac{L(L+1)}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\frac{L(L+1)}{2}} \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

De donde se obtiene directamente que la solución de $R(A_i)$ es la propuesta en (5), el máximo de los productos de estos puntos extremos por el número de votos recibidos en cada categoría.

Obsérvese que el índice consiste en agregar los votos de cada categoría con ponderaciones como las asignadas por B-K normalizadas a para sumar la unidad cuando las primeras categorías son preferidas a las posteriores, es decir $w_l = \frac{(r-l+1)}{\frac{r(r+1)}{2}}$, pero dando la oportunidad de que solo sean consideradas en la valoración los votos hasta una determinada categoría. Esto es, se elige la situación más favorable entre considerar por el procedimiento B-K todas las categorías o únicamente las r primeras, es decir, si solo se consideran como votos válidos las valoraciones hasta una determinada categoría.

A continuación analizamos el comportamiento del procedimiento propuesto como regla de decisión colectiva.

El siguiente resultado establece la propiedad de monotonicidad para el índice propuesto en el sentido de que si un votante mejora la evaluación de una alternativa, la evaluación total de dicha alternativa no empeora.

Proposición 3.2. *Si* $n_{js} = n_{is} + 1$ *y* $n_{jk} = n_{ik} - 1$ *con* $s<k$, *y* $n_{jl} = n_{il}, l \neq s,k$, *entonces* $R(A_j) \geq R(A_i)$.

Demostración. Sean w^j el vector de pesos óptimo para la evaluación de la alternativa A_j, i.e., $R(A_j) = \sum_{l=1}^{L} w_l^j n_{jl}$, y w^i el vector de pesos óptimo para la evaluación de la alternativa A_i, $R(A_i) = \sum_{l=1}^{L} w_l^i n_{il}$. Es fácil ver que $R(A_j) = \sum_{l=1}^{L} w_l^j n_{jl} \geq \sum_{l=1}^{L} w_l^i n_{jl}$.

Por otro lado, como $w_s^i \geq w_k^i$ se cumple que $w_s^i n_{js} + w_k^i n_{jk} = w_s^i n_{js} + w_s^i + w_k^i n_{jk} - w_k^i \geq w_s^i n_{is} + w_k^i n_{ik}$, por tanto,

$$\sum_{l=1}^{L} w_l^i n_{jl} \geq \sum_{l=1}^{L} w_l^i n_{il} = R(A_i) \tag{11}$$

con lo que se demuestra el resultado.

La siguiente propiedad es una condición de optimalidad paretiana, que también aparece en la literatura como axioma de unanimidad en problemas de elección colectiva. Esta propiedad establece que si todos los votantes prefieren la alternativa A_i a la alternativa A_j, entonces la evaluación final de A_j no puede ser superior a la de A_i.

Proposición 3.3 *Si todos los votantes ordenan a la alternativa A_i en la misma posición de la escala o en una posición mejor que A_j, entonces* $R(A_i) \geq R(A_j)$.

Demostración. En esta situación, cada votante individual sitúa a la alternativa A_i en la categoría s y el voto correspondiente a la alternativa A_j en la categoría k, donde necesariamente $s \leq k$.

Denotamos por m_{il}^{jk} el número de votantes que han situado a la alternativa A_i en la categoría l-ésima y a la alternativa A_j en la posición k-ésima. Si todos los votantes prefieren la alternativa A_i a la A_j, la sitúan en una posición anterior, por lo que necesariamente $l \leq k$. Un votante que sitúe a A_j en la una posición cualquiera de la escala necesariamente ha de situar a A_i en esa misma posición o en una posición anterior.

El número de votos que recibe A_j en cada categoría puede escribirse como

$$\begin{aligned} n_{j1} &= m_{i1}^{j1} \\ n_{j2} &= m_{i1}^{j2} + m_{i2}^{j2} \\ &\vdots \\ n_{jL} &= m_{i1}^{jL} + m_{i2}^{jL} + \ldots + m_{iL}^{jL} \end{aligned} \tag{12}$$

El número de votos que recibe A_i en la categoría r-ésima puede escribirse usando (12) como

$$n_{ir} = m_{ir}^{jr} + m_{ir}^{jr+1} + \ldots + m_{ir}^{jL} . \tag{13}$$

El número total de votos que A_j recibe hasta la posición r-ésima es igual a

$$\sum_{l=1}^{r} n_{jl} = n_{j1} + n_{j2} + \ldots + n_{jr} = m_{i1}^{j1} + (m_{i1}^{j2} + m_{i2}^{j2}) + \ldots + (m_{i1}^{jr} + m_{i2}^{jr} + \ldots + m_{ir}^{jr}) , \tag{14}$$

y reordenando los sumandos se tiene que

$$\sum_{l=1}^{r} n_{jl} = (m_{i1}^{j1} + m_{i1}^{j2} + \ldots + m_{i1}^{jr}) + (m_{i2}^{j2} + m_{i2}^{j3} + \ldots + m_{i2}^{jr}) + \ldots + m_{ir}^{jr} . \tag{15}$$

De donde se sigue que

$$\sum_{l=1}^{r} n_{jl} \le (m_{i1}^{j1} + \ldots + m_{i1}^{jL}) + (m_{i2}^{j2} + \ldots + m_{i2}^{jL}) + \ldots + (m_{ir}^{jr} + \ldots + m_{ir}^{jL}) = \sum_{l=1}^{r} n_{il} . \tag{16}$$

Bajo las anteriores condiciones, por tanto, los votos de cada categoría verifican que,

$$\sum_{l=1}^{r} n_{jl} \le \sum_{l=1}^{r} n_{il} \ \forall r = 1,\ldots,L . \tag{17}$$

Denotamos por w^i y w^j los vectores de pesos óptimos para A_i y A_j respectivamente.

En este caso consideramos

$$R(A_i) - R(A_j) = \sum_{l=1}^{L} w_l^i n_{il} - \sum_{l=1}^{L} w_l^j n_{jl} = \sum_{l=1}^{L} (w_l^i n_{il} - w_l^j n_{jl}) \ge \sum w_l^j (n_{il} - n_{jl}). \tag{18}$$

Si el vector de pesos óptimos para la alternativa A_j es el k-ésimo punto extremo del conjunto Ω,

$$w^j = \left(\frac{k}{\frac{k(k+1)}{2}}, \frac{k-1}{\frac{k(k+1)}{2}}, \ldots, \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}, 0, \ldots, 0 \right)^t, \tag{19}$$

la expresión (18) queda, según (17), como

$$\sum_{l=1}^{L} w_l^j (n_{il} - n_{jl}) = \frac{k}{\frac{k(k+1)}{2}} \sum_{l=1}^{L} (k-l+1)(n_{il} - n_{jl}) = \frac{k}{\frac{k(k+1)}{2}} \sum_{r=1}^{k} \left(\sum_{l=1}^{r} n_{il} - \sum_{l=1}^{r} n_{jl} \right) \geq 0 \tag{20}$$

Por tanto, $R(A_i) \geq R(A_j)$, como queríamos demostrar.

4. Análisis gráfico.

Analizamos gráficamente el anterior modelo para el caso particular de una escala ordinal con tres categorías. Estas representaciones gráficas nos permitirán ilustrar algunas características destacadas del índice.

Si consideramos el caso de una escala ordinal de 3 categorías, $L=3$, el conjunto de información Ω puede representarse sobre el hiperplano $e^t w = 1$, donde $e^t = (1, \ldots, 1)$. En la Figura 1, se representan el conjunto de información Φ, que establece una ordenación simple de los pesos, $\Phi = \left\{ w \in R^3 : \sum_{l=1}^{3} w_l = 1; w_1 \geq w_2 \geq w_3 \geq 0 \right\}$, y el conjunto $\Omega = \left\{ w \in R^3 : w \geq 0, \sum_{l=1}^{3} w_l = 1, w_1 - w_2 \geq w_2 - w_3; w_2 - w_3 \geq w_3 \right\}$, que induce el índice propuesto.

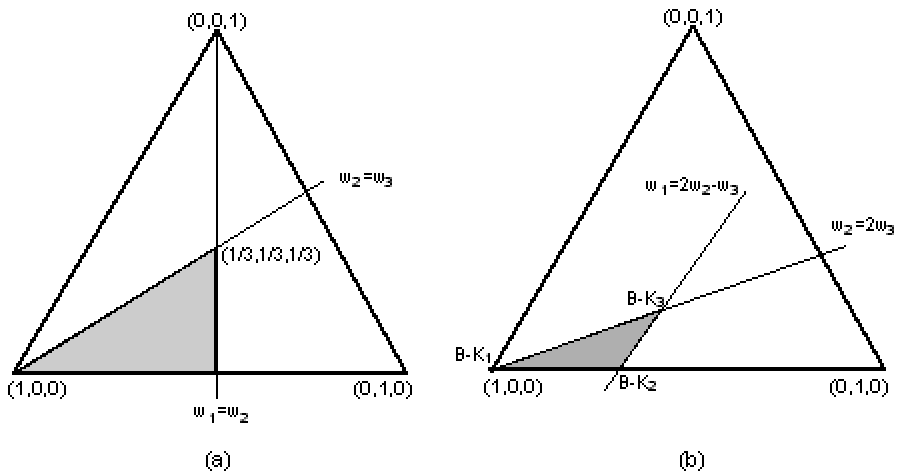

Figura 1.- Conjunto Φ y Ω para una escala ordinal con tres categorías

Puede verse como el conjunto de información $\Omega = \left\{ w \in R^3 : w \geq 0, \sum_{l=1}^{L} w_l = 1, w_1 - w_2 \geq w_2 - w_3; w_2 - w_3 \geq w_3 \right\}$ (Fig. 1(b)), está contenido en el conjunto que representa una ordenación simple de las ponderaciones que, para el caso particular de tres categorías, es $\Phi = \left\{ w \in R^3 : w \geq 0, \sum_{l=1}^{L} w_l = 1; w_1 \geq w_2 \geq w_3 \right\}$ (Fig. 1(a)). En la Figura 1(b), los puntos $B\text{-}K_i$ representan las valoraciones por el método B-K para las primeras i categorías, $i \in \{1,2,3\}$. El punto $B\text{-}K_3=(1/2,1/3,1/6)$ representa, por tanto, la valoración tradicional B-K. El índice propuesto consiste en elegir la mejor valoración entre las inducidas por $B\text{-}K_3$, $B\text{-}K_2$, $(2/3,1/3,0)$, y $(1,0,0)$ que coincide con $B\text{-}K_1$.

Para una escala de tres categorías, pueden también representarse las relaciones que han de verificar el número de votos en cada posición, para que una determinada alternativa o unidad sea valorada incluyendo una, dos o tres categorías, es decir, para que la valoración sea inducida por cada uno de los puntos extremos $B\text{-}K_i$ (Figura 2).

Si denotamos por M al número total de votantes que evalúa a cada una de las alternativas y por n_j, $j=1,2,3$; al número de votos que recibe una determinada alternativa en la posición j, la región i, $i=1,2,3$; de la Figura 2 representa todas los posibles distribuciones de votos en una alternativa que serían valorados de manera óptima mediante las marcas de Borda $B\text{-}K_i$.

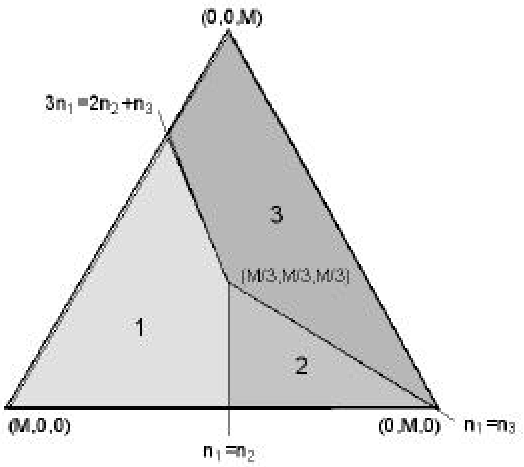

Figura 2.- Distribución de votos asociados a los diferentes puntos extremos de Ω

Las combinaciones de votos para las que la valoración óptima se obtiene considerando únicamente la primera categoría, región 1, está determinada por los puntos en los que $n_1 \geq \frac{2}{3}n_1 + \frac{1}{3}n_2$, es decir, $n_1 \geq n_2$ y $n_1 \geq \frac{2}{3}n_2 + \frac{1}{3}n_3$. Análogamente, las combinaciones de votos contenidas en la región 2 obtienen su evaluación con el vector de pesos $B\text{-}K_2$. En esta segunda región solo se consideran las dos primeras categorías en la evaluación y las restricciones que limitan la distribución de votos son $n_1 \leq n_2$ y $n_1 \geq n_3$.

Por último, la tercera región está definida por las expresiones y $n_1 \leq \frac{2}{3}n_2 + \frac{1}{3}n_3$. En esta tercera región, como se vio, la valoración óptima coincide con la que ofrece el método B-K y las tres categorías se consideran en la evaluación final de la alternativa.

A la vista de esta representación, en la Figura 2, pueden apuntarse algunos resultados interesantes. Cuando todas las categorías reciben el mismo número de votos, para el punto *(M/3,M/3,M/3)*, la valoración coincide para todos los puntos extremos. Es decir, es indiferente considerar una, dos o tres categorías en la valoración de la unidad.

Si $n_1 = n_2 \geq \frac{M}{3}$ las valoraciones óptimas son, indistintamente, inducidas por $B\text{-}K_1$ y por $B\text{-}K_2$. De igual manera si $n_1 = n_3 \leq \frac{M}{3}$ las evaluaciones óptimas son las inducidas por $B\text{-}K_2$ o $B\text{-}K_3$ y en el caso en que $n_1 = \frac{2}{3}n_2 + \frac{1}{3}n_3 \leq \frac{M}{3}$ las valoraciones óptimas son las inducidas, indistintamente, por $B\text{-}K_1$ y $B\text{-}K_3$.

5. Aplicación a un problema de selección de nuevos empleados.

A continuación ilustramos el índice propuesto con una aplicación al problema en el que una determinada empresa quiere seleccionar nuevos empleados dentro de un conjunto de ocho posibles candidatos. Un comité con diez miembros ha evaluado cada una de los ocho candidatos en una escala ordinal de cinco categorías, en la que las primeras categorías son preferidas a las últimas. Los votos agregados por categoría que ha obtenido cada uno de los candidatos se recoge en la Tabla 1.

CANDIDATO	**CATEGORÍA**				
	1	**2**	**3**	**4**	**4**
A	5	2	1	1	1
B	6	2	2	0	0
C	4	3	3	0	0
D	1	6	0	0	3
E	3	3	3	0	1
F	3	4	3	0	0
G	2	3	3	1	1
H	1	2	2	3	2

Tabla 1.- Número de votos agregados por categoría

Para llevar a cabo su decisión final, el comité evaluará cada alternativa en la situación más favorable posible en función de los votos obtenidos en cada categoría.

Las ordenaciones inducidas por el índice propuesto, el método B-K y por la evaluación de consenso que minimiza el disconsenso total medido a través de la norma l_1 se recogen en la Tabla 2. Ha de precisarse que la evaluación de consenso a través de la l_1 puede no ser única por lo que mostramos una de las ordenaciones inducidas por una de las posibles evaluaciones que se obtiene con este modelo.

CANDIDATO	Índice propuesto	Método B-K	Mínimo disconsenso
A	2	4	2
B	1	1	1
C	3	2	3
D	6	7	5
E	5	5	6
F	4	3	4
G	7	6	7
H	8	8	8

Tabla 2.- Ordenaciones inducidas por el índice propuesto, método B-K y mínimo disconsenso

De los resultados que se muestran en la Tabla 2 pueden hacerse las siguientes observaciones.

- Puede verse cómo los candidatos situados en la primera y última posición coinciden para las tres valoraciones estudiadas. La ordenación que se obtiene aplicando minimizando el disconsenso es más semejante a la obtenida con el índice propuesto, que la que ofrece B-K. Únicamente los candidatos D y E aparecen en distintas posiciones de la ordenación.

- Los candidatos ordenados en las primeras posiciones con el índice propuesto se caracterizan por despreciar los votos de gran parte de las categorías. Los tres primeros candidatos de la ordenación, candidatos B, A y C, únicamente incluyen en la valoración los votos de la primera categoría, y el candidato situada en la cuarta posición, candidato E, únicamente considera los votos de las dos primeras.

- El único candidato en el que se incluyen todas las categorías en el cálculo del índice es H, situada en la última posición en la ordenación final y en la que el valor del índice coincide con el calculado por B-K.

- Ganan posiciones respecto a B-K, aquellos candidatos en las que el número de votos de las primeras categorías es alto, por ejemplo el candidato A que gana dos puestos en la ordenación inducida por el nuevo índice, o el candidato D que gana uno. Por contra, aquellas alternativas en las que los votos de últimas categorías son altos pierden posiciones dentro de la ordenación respecto de B-K, como, por ejemplo, es el caso del candidato C.

6. Conclusiones

El método presentado en este trabajo para la agregación de preferencias individuales está basado en el principio de máxima utilidad aplicado uniformemente a todas las alternativas. La idea básica es que se ofrece a cada alternativa la oportunidad de ser evaluada en la mejor situación posible, de ser situada en la ordenación final tan alto como sea posible asumiendo únicamente ciertas condiciones sobre los pesos asignados a cada categoría de la escala. Se obtiene así, un índice para la evaluación muy próximo a la formulación del método de las marcas de Borda y se demuestran que cumple los axiomas de racionalidad básicos que son deseables en cualquier regla de elección social.

La regla de decisión propuesta es fácilmente implementable pues los cálculos que conlleva consisten en aplicar el método de las marcas de Borda sucesivamente, considerando en cada ocasión un número diferente de categorías, y tomar el máximo valor de los obtenidos para cada alternativa. Es un método especialmente adecuado, por ejemplo, para problemas de investigación de mercado, por ejemplo, o cualquier otro problema en el que la información que se solicita a los votantes individuales no es especialmente detallada y se desea favorecer igualmente a todas las alternativas.

Referencias

Black, D. (1958). “The theory of Committees and elections", Cambridge University Press, London.

Borda, J.C., (1784). ‘’Mémoire sur les élections au scrutin’’. Histoire de l'Académie Royale des Sciences.

Carrizosa, E., Conde, E., Fernández, F.R. y Puerto, J. (1995). ‘’Multicriteria analysis with partial information about weighting coefficients", *European Journal of Operational Research* **81 (2)**, pp. 391-401.

Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E. (1978). ``Measuring efficiency of decision making units", *European Journal of Operational Research* **2**, pp. 429-444.

Cook, W. D., Seiford, L. M. (1982). ``On the Borda-Kendall consensus method for priority ranking problems", *Management Science* **28 (6)**, pp. 621-637.

Cook W.D., Kress M. (1994). ``A multiple criteria composite index model for quantitative and qualitative data", *European Journal of Operational Research* vol. **78**, pp. 367-379.

Cook W.D., Kress M. (1996). ``An extreme-point approach for obtaining weighted ratings in qualitative multicriteria decision making", *Naval Research Logistics* vol. **43**, pp. 519-531.

Cook W.D., Kress M., Seiford, L. M. (1996). ``A general framework for distance-based consensus in ordinal ranking models", *European Journal of Operational Research* vol. **96**, pp. 392-397.

Copeland, A.H. (1951). ``A reasonable social welfare function", Notes from a seminar of applications of mathematics to the social sciences, University of Michigan.

Dummett, M. (1998). ``The Borda count and agenda manipulation", *Social Choice and Welfare* **15**, pp. 289-296.

Hashimoto, A. (1997). ``A ranked voting system using DEA/AR exclusion model: A note", *European Journal of Operational Research* **97**, pp. 600-604.

Mármol, A.M., Puerto, J., Fernández, F.R., (1998). ``The use of partial information on weights in multicriteria decision problems". *Journal of Multicriteria Decision Analysis* **7**, pp. 322-329.

Puerto J., Mármol A.M., Monroy L., Fernández F.R. (2000). ``Decision criteria with partial information", *International Transactions in Operational Research* n.**7**, pp.51-65.

Sen, A. (1977). ``Social Choice Theory: A re-examination", *Econometrica* **45**, pp. 53-89.