



## Open Archive TOULOUSE Archive Ouverte (OATAO)

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in : <http://oatao.univ-toulouse.fr/>  
Eprints ID : 10426

**To cite this version** : Masbernat, Lucien and Soualmia, Amel and Dartus, Denis. *Solution analytique pour le calcul de la ligne d'eau dans des écoulements à surface libre à travers des enrochements*. (2013) In: 3ème Conférence Internationale sur l'Eau (CIEAU 2013), 18 November 2013 - 20 November 2013 (Alger, Algeria).

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator: [staff-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr](mailto:staff-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr)

# SOLUTION ANALYTIQUE POUR LE CALCUL DE LA LIGNE D'EAU DANS DES ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE A TRAVERS DES ENROCHEMENTS

## ANALYTIC SOLUTION FOR CALCULATING THE WATER LEVEL IN FREE SURFACE FLOWS THROUGH STONES

L.Masbernat<sup>1</sup>, A.Soualmia<sup>2</sup>, D.Dartus<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, INP Toulouse, France*

<sup>2</sup> *Laboratoire Sciences et Techniques de l'Eau de l'Institut National Agronomique de Tunis (INAT)*  
[Amel.soualmia@ipeim.rnu.tn](mailto:Amel.soualmia@ipeim.rnu.tn), [Lucien.masbernat@imft.fr](mailto:Lucien.masbernat@imft.fr), [Denis.dartus@imft.fr](mailto:Denis.dartus@imft.fr)

### Résumé

Dans cette étude est développée une solution analytique pour le calcul de la ligne d'eau dans des écoulements à surface libre à travers des enrochements. Cette solution est basée sur la résolution de l'équation de la ligne d'eau, en utilisant la relation de Stephenson pour les pertes de charge. L'objectif est de déterminer les pertes de charge pour différentes configurations d'écoulement afin de vérifier la formule de Stephenson, et de voir sa capacité à reproduire la ligne d'eau. Cette solution analytique a été appliquée à une première série de nos essais réalisés dans un nouveau canal rectangulaire, construit à l'INAT en collaboration avec Mecater, et des experts de l'INP Toulouse. Mecater s'intéressait à ces écoulements, dans le cadre de projet avec la Nouvelle Calédonie, concernant la protection des stériles miniers contre les écoulements d'eau, dans les hautes montagnes. Ces applications nous ont permis d'avoir une analyse préliminaire. Les valeurs des hauteurs d'eau à l'entrée de la mèche étant des données obtenues pour chaque essai, et les premiers calculs à l'aide de cette solution analytique ont montré que le calcul de la courbe de remous (avec un calage du coefficient d'angularité  $K_t$ ), a donné des résultats acceptables.

**Mots clés :** Solution analytique, écoulements dans les enrochements, relation de Stephenson, canal expérimental, simulations

### Abstract

In this study, was developed an analytic solution to calculate the water level in free surface flows, through large porous media. This solution is based on the resolution of the water level equation, by using the Stephenson relation for the hit losses. The purpose is to determine the hit losses for different flow configurations in order to verify the Stephenson formulation, and to see its capability to reproduce the water level. This analytic solution was applied to our first experimental series, realized in a new rectangular channel built at INAT, in collaboration with Mecater, and with INP Toulouse experts. Mecater was interested at these flows, within the framework of project with Nouvelle Caledonia, concerning the protection of mining sterols against water flows, at high mountains. These applications had allowed us to have a preliminary analysis. The water level values at the wick entrance were data obtained for each run, and the first calculation with this analytic solution had showed that the eddy curves calculations, had given acceptable results.

**Keywords:** Analytic solution, Flows throw stones, Stephenson relation, Experimental channel, simulations.

## 1. Introduction

Cette étude est motivée par le problème de stockage hors d'eau, des stériles miniers. Ce stockage est protégé des crues, en assurant l'écoulement d'eau, à travers des drains en enrochements, appelés « mèches ». Ce travail a été conduit à l'Institut National Agronomique de Tunis (INAT), en collaboration avec le bureau d'études international MECATER en contrat avec la Société du Nickel de Nouvelle Calédonie, et dans le cadre d'un partenariat avec l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (Jouini, 2012 ; Soualmia et al., 2012).

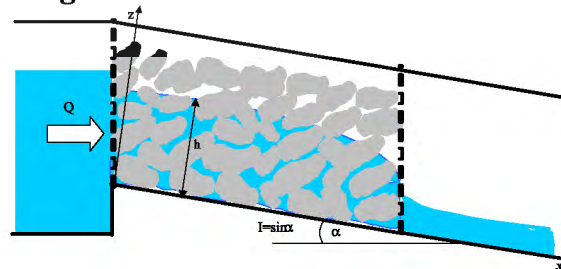
L'objectif des travaux expérimentaux et de simulations réalisés est de tester un modèle de perte de charge adapté aux écoulements dans des milieux poreux de grande perméabilité où les effets inertiels sont dominants (Stephenson, 1979 ; Michioku and al., 2005 ; Bari, 2002 ; Prasad, 1970 ; Chow, 1959).



**Figure 1** : Le canal construit à l'INAT : de longueur 10 m, de largeur 0.8 m, et de hauteur 0.6 m

## 2. Matériels et méthodes

### 2.1 Les équations de la ligne d'eau



**Figure 2** : Schéma de l'écoulement à travers les enrochements en canal

En adoptant les hypothèses d'écoulement à surface libre graduellement varié, l'équation de la ligne d'eau s'écrit :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{I - J}{1 - F_{rp}^2} \quad (1)$$

Dans (1), I est la pente du canal, J le gradient hydraulique, pente de la ligne d'énergie, et le nombre de Froude de l'écoulement à travers les pores est défini par :

$$F_{rp} = \frac{Q}{nS} \sqrt{\frac{B}{gS}} \quad (2)$$

n est la porosité de la mèche

Pour un canal de section rectangulaire, de largeur B et tirant d'eau h le nombre de Froude s'exprime sous la forme :

$$F_{rp} = \frac{q}{ngh^{3/2}} \quad (3)$$

où  $q = \frac{Q}{B}$  est le débit par unité de largeur (en  $m^2s^{-2}$ )

Par la suite nous ne considérons que le cas de canaux et de mèches de largeur rectangulaire.

Dans l'approche mise en œuvre, le gradient hydraulique est exprimé par la formule de Stephenson (Stephenson, 1979) :

$$J = \frac{K_{st} V^2}{gdn^2} \quad (4)$$

Le paramètre  $K_{st}$  est calculé par la formule empirique :

$$K_{st} = \frac{\alpha_0}{R_{ep}} + K_t \quad (5)$$

Le nombre de Reynolds de l'écoulement moyen interstitiel est défini par :

$$R_{ep} = \frac{V_p d}{\nu} = \frac{Vd}{nv} \quad (6)$$

La longueur d est caractéristique de la taille moyenne des enrochements qui constitue la mèche.

La constante  $\alpha_0$  est en général prise égale à 800.

Introduisons des grandeurs sans dimension en prenant comme longueur de référence la hauteur critique  $h_c$  donnée par :

$$h_c = \left(\frac{q^2}{n^2 g}\right)^{1/3} \quad (7)$$

Le tirant d'eau h, l'abscisse longitudinale x, la longueur d sont ainsi exprimés sous forme sans dimension par :

$$h^* = \frac{h}{h_c}, \quad x^* = \frac{x}{h_c}, \quad d^* = \frac{d}{h_c} \quad (8)$$

L'équation de la ligne d'eau s'écrit ainsi :

$$\frac{dh^*}{dx^*} = \frac{Ih^*}{(h^{*3} - 1)}(h^{*2} - \gamma h^* - m) \quad (9)$$

Les deux paramètres sans dimension,  $m$  et  $\gamma$  sont donnés par les expressions :

$$m = \frac{K_t}{Id^*} \quad (10-a)$$

$$\gamma = \frac{\alpha_0 v n}{Id^{*2} q} \quad (10-b)$$

Ils traduisent l'effet de la perte de charge : le paramètre  $m$  traduit la dissipation d'énergie à grand nombre de Reynolds, l'écoulement pouvant être turbulent dans la mèche ; le paramètre  $\gamma$  correspond à une perte de charge linéaire, d'autant plus faible que le nombre de Reynolds est grand.

### 3. Résultats et discussion

#### 3.1 Résolution de l'équation de la ligne d'eau

Il faut résoudre l'équation (9) avec les conditions aux limites :

$$- \text{ soit condition amont : } x^* = 0, h^* = h_0^* \quad (11-a)$$

$$- \text{ soit condition aval : } x^* = L_m^*, h^* = h_1^* \quad (11-b)$$

L'équation (9) se résout facilement sous la forme  $x^* = x^*(h^*)$  en l'écrivant :

$$Idx^* = \frac{(h^{*3} - 1)dh^*}{h^*(h^{*2} - \gamma h^* - m)} \quad (12)$$

Pour intégrer (12) décomposons la fraction rationnelle du second membre en éléments simples, soit :

$$Idx^* = \frac{(h^{*3} - 1)dh^*}{h^*(h^{*2} - \gamma h^* - m)} = \frac{(h^{*3} - 1)dh^*}{h^*(h^* - h_a^*)(h^* - h_b^*)} = \left[ 1 + \frac{A}{h^*} + \frac{B}{h^* - h_a^*} + \frac{C}{h^* - h_b^*} \right] dh^* \quad (13)$$

où l'on a posé :

$$h_a^* = \frac{1}{2}(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4m}) \quad h_b^* = \frac{1}{2}(\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4m}) \quad (14)$$

et où  $A, B, C$ , sont données par :

$$A = \frac{1}{m} \quad B = \frac{1}{(h_a^* - h_b^*)} \left[ h_a^* \left( \gamma - \frac{1}{m} \right) + \left( m + \frac{\gamma}{m} \right) \right] \quad C = \frac{1}{(h_b^* - h_a^*)} \left[ h_b^* \left( \gamma - \frac{1}{m} \right) + \left( m + \frac{\gamma}{m} \right) \right] \quad (15)$$

L'intégration de l'équation (13) avec la condition aux limites amont (11-a) conduit au résultat :

$$Ix^* = h^* - h_0^* + ALn \frac{h^*}{h_0^*} + BLn \left| \frac{h^* - h_a^*}{h_0^* - h_a^*} \right| + CLn \left| \frac{h^* - h_b^*}{h_0^* - h_b^*} \right| \quad (16)$$

En adoptant la condition aval, (11-b), la solution s'écrit :

$$I_x^* = II_m^* + h^* - h_1^* + A \ln \frac{h^*}{h_1^*} + B \ln \left| \frac{h^* - h_a^*}{h_1^* - h_a^*} \right| + C \ln \left| \frac{h^* - h_b^*}{h_1^* - h_b^*} \right| \quad (17)$$

Dans la représentation graphique des solutions, l'abscisse  $x$  sera normalisée par la longueur de la mèche  $L_m$ , et calculée par l'une des expressions (16) ou (17), soit :

$$\xi = \frac{x}{L_m} = \left( \frac{h_C}{II_m} \right) I_x^* \quad (18)$$

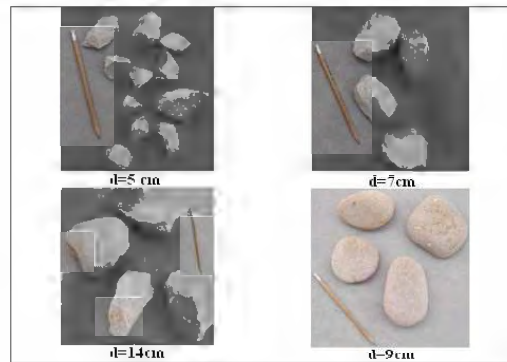
L'on a regroupé dans le tableau 1 l'ensemble des résultats permettant le calcul de la ligne d'eau.

**Tableau 1** : Expressions permettant le calcul de la ligne d'eau dans la mèche

$h_c = \left( \frac{q^2}{n^2 g} \right)^{1/3} \quad m = \frac{K_t h_c}{I_d} = \frac{K_t}{I_d^*} \quad \gamma = \frac{\alpha_0 v n}{I_{qd}^{*2}}$
$h_a^* = \frac{1}{2} (\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4m}) \quad h_b^* = \frac{1}{2} (\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4m})$
$A = \frac{1}{m} \quad B = \frac{1}{(h_a^* - h_b^*)} \left[ h_a^* \left( \gamma - \frac{1}{m} \right) + \left( m + \frac{\gamma}{m} \right) \right]$ $C = \frac{1}{(h_b^* - h_a^*)} \left[ h_b^* \left( \gamma - \frac{1}{m} \right) + \left( m + \frac{\gamma}{m} \right) \right]$
<p>Condition amont : <math>I_x^* = h^* - h_0^* + A \ln \frac{h^*}{h_0^*} + B \ln \left  \frac{h^* - h_a^*}{h_0^* - h_a^*} \right  + C \ln \left  \frac{h^* - h_b^*}{h_0^* - h_b^*} \right  \quad (A)</math></p>
<p>Condition aval : <math>I_x^* = II_m^* + h^* - h_1^* + A \ln \frac{h^*}{h_1^*} + B \ln \left  \frac{h^* - h_a^*}{h_1^* - h_a^*} \right  + C \ln \left  \frac{h^* - h_b^*}{h_1^* - h_b^*} \right  \quad (B)</math></p>
$\xi = \frac{x}{L_m} = \left( \frac{h_C}{II_m} \right) I_x^*$

### 3.2 Simulations des expériences dans le canal de l'INAT (pente 5%) , Discussion

Nous avons appliqué la solution précédente à la première série d'essais réalisés à l'INAT, le canal ayant une pente de 5%.



**Figure 3 : Les différents types de cailloux utilisés**

Nous indiquons ci-dessous des résultats de simulations relatifs aux essais I et II, définis dans le tableau 2. Ces essais constituent une partie de la première série de nos essais réalisés dans le canal rectangulaire, construit au laboratoire science et technique de l'eau de l'INAT en collaboration avec Mecater, et des experts de l'INP Toulouse (professeurs L.Masbernat et D.Dartus). Ce canal a une longueur de 10m, une largeur de 0.8m, et une hauteur de 0.6m ; il est à pente variable (dans ces essais la pente est de 5%).

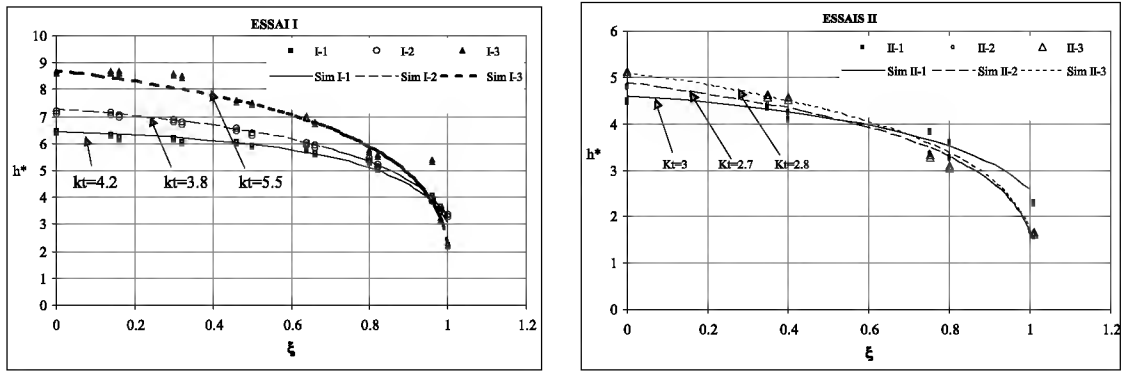
Les valeurs des hauteurs d'entrée  $h_0$  ou de sortie  $h_1$  de la mèche sont des données obtenues pour chaque essai.

**Tableau 2 : Résultats des expériences (définition des deux essais utilisés) et des simulations correspondantes (valeurs de  $K_t$ )**

Essai	d(m)	n	I	Lm(m)	N° essai	Q l/s	$h_0$	$K_t$
I	0.07	0.496	0.05	5	I-1	8.27	0.2215	4.0000
					I-2	18.04	0.442	4.0000
					I-3	22.6	0.58	5.5000
II	0.09	0.426	0.05	2	II-1	8.151	0.175	2.8500
					II-2	17.8	0.320	2.7200
					II-3	24.58	0.412	2.7800

Un premier calcul a montré que le calcul de la courbe de remous à partir de la condition aval, solution (B) dans le tableau 1, n'était pas réaliste, car à l'aval l'hypothèse d'écoulement graduellement varié peut être limitée, à cause de la courbure de la ligne d'eau (expérimentale) ; ce qui confirme le diagnostic de Denis Dartus.

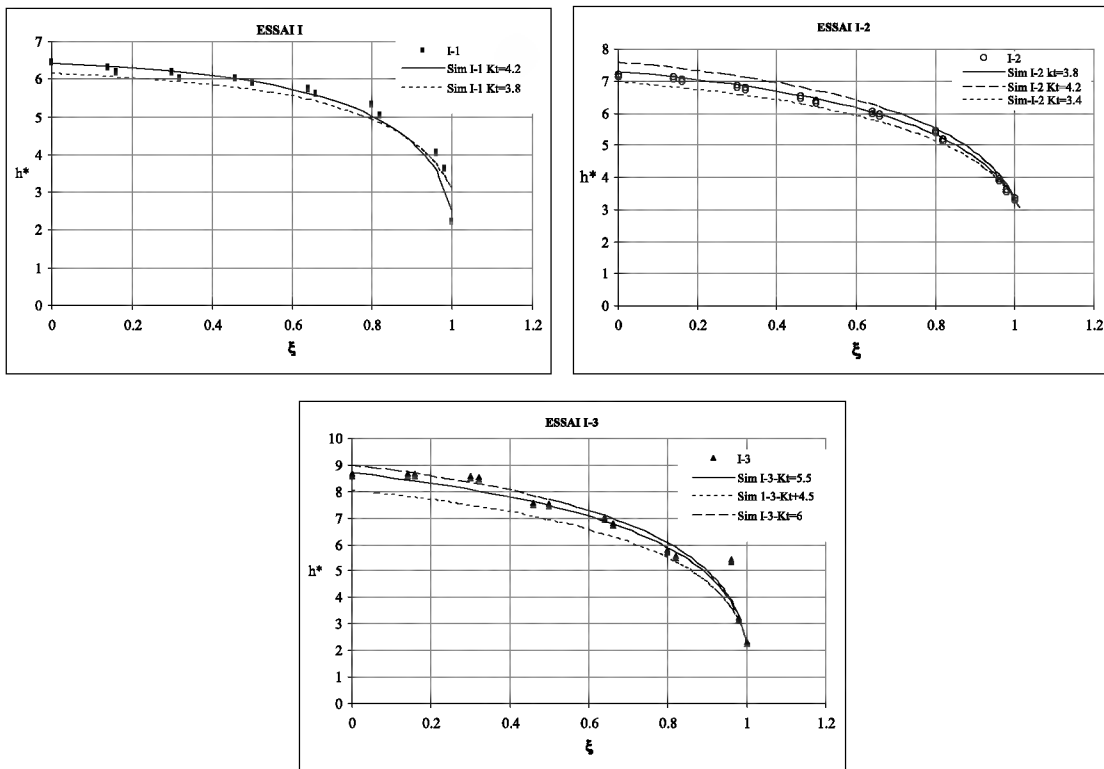
Le calcul est alors considéré avec la condition limite amont. Les résultats sont présentés sur la figure 4.



**Figure 4** : Calcul des lignes d'eau pour la série d'essais I (diamètre cailloux  $d=7\text{cm}$ ), et la série d'essais II ( $d=9\text{cm}$ )

Nous observons que dans toutes les expériences il est possible de réaliser un lissage satisfaisant des lignes d'eau à condition d'adapter la valeur du paramètre d'angularité  $K_t$ .

Sur la figure suivante, on présente également des tests de sensibilité au paramètre  $K_t$  (pour les essais I), indiquant la sensibilité des résultats aux variations de ce paramètre.



**Figure 5** : Test de sensibilité aux valeurs de  $K_t$ , pour le calcul des lignes d'eau (essais I)

#### 4. Conclusion générale

L'objectif général de cette approche d'écoulements à grand nombre de Reynolds dans des milieux poreux constitués de cailloux de grande dimension est atteint.



En effet, Des simulations numériques, par cette solution analytique, des résultats expérimentaux ont permis de tester le modèle de Stephenson pour le calcul de la perte de charge.

Nous avons montré que dans toutes les expériences il est possible de réaliser un lissage satisfaisant des lignes d'eau à condition d'adapter la valeur du paramètre d'angularité  $K_t$ .

La variation relativement importante, notamment suivant la dimension  $d$  des matériaux constitutifs du milieu indique que des efforts doivent être mis en œuvre pour déterminer les propriétés caractéristiques du milieu.

En fin, ces formulations analytiques peuvent être considérées comme des simulations utiles pour guider les modèles correspondant à ces écoulements complexes.

Par ailleurs la simulation numérique directe d'écoulements dans des milieux modèles, de structure périodique, devrait apporter de nouvelles idées de paramétrisation de la structure des milieux réels.

## **Remerciements**

Nous tenons à remercier vivement les responsables de Mecater, en particulier Messieurs Samir Ennour, Okba Boughanmi ; nous remercions également Professeur Elies Hamza (directeur de l'INAT) pour ses encouragements et pour l'attention qu'il a accordé concernant la réalisation du canal expérimental ; enfin nous remercions nos brillants doctorants Manel Jouini et Karem Saad pour l'expérimentation.

## **Références**

Jouini, M., 2012. *Étude des écoulements dans une mèche en pierres en canal* Thèse de Master, Institut National Agronomique de Tunis (INAT).

Stephenson, D., 1979. *Rock fill in Hydraulic Engineering* Elsevier Science Publishers, New York, USA

Prasad, R., 1970. *Numerical method of computing flow profiles* ASCE Journal of the Hydraulics Division, 96 (HY1):75-86.

Chow, V.T., 1959. *Open Channel Hydraulics*. McGraw-Hill Book Co., New York, pp. 217-296

Michioku, K., Maeno, S., Furusawa, T., Haneda, M., 2005. *Discharge through a permeable rubble mound weir* Journal of Hydraulic Engineering, pp.1-10.

Bari, Hansen, D., 2002. *Application of gradually-varied flow algorithms to simulate buried streams* Journal of Hydraulic Research, pp. 673-374.

Soualmia, A., Jouini, M., Dartus, D., *Etude des écoulements dans une mèche en canal* à paraître dans International Journal of PCN, vol 68.