



## Open Archive TOULOUSE Archive Ouverte (OATAO)

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in : <http://oatao.univ-toulouse.fr/>  
Eprints ID : 10216

**To cite this version** : Izard, Edouard and Lacaze, Laurent and Bonometti, Thomas *Couplage IBM/DEM pour la modélisation des milieux granulaires dans un fluide*. (2013) In: 21ème Congrès Français de Mécanique - CFM 2013, 26 August 2013 - 30 August 2013 (Bordeaux, France).

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator: [staff-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr](mailto:staff-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr)

# Couplage IBM/DEM pour la modélisation des milieux granulaires dans un fluide

E. IZARD<sup>a</sup>, L. LACAZE<sup>a</sup>, T. BONOMETTI<sup>a</sup>

a. IMFT, Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, UMR 5502 Université de Toulouse/INPT/UPS/CNRS, Allée Camille Soula, 31400 Toulouse, France

## Résumé :

*La physique des milieux granulaires denses immergés est à l'heure actuelle un domaine privilégié de la mécanique des fluides en raison des enjeux environnementaux et industriels importants associés. La dynamique d'un système dense d'objets solides en mouvement dans un fluide est particulièrement complexe car elle résulte d'interactions particule-fluide et particule-particule à petite échelle (fraction de la taille des particules), donnant lieu à des phénomènes de plus grande échelle (allant jusqu'au système complet). L'objectif ici est d'améliorer la compréhension de ces milieux via une modélisation à petite échelle, allant d'un grain à quelques milliers de grains, via le développement d'une méthode aux éléments discrets (DEM) couplée à une méthode de type frontières immergées (IBM), la première reproduisant les interactions solide-solide, la seconde les interactions solide-fluide. L'étude du rebond d'une particule sur une paroi montre que l'ajout d'une force de lubrification au voisinage du contact est nécessaire pour reproduire les cas réels. L'outil numérique ainsi validé est utilisé pour simuler un écoulement granulaire sur plan incliné dans un fluide.*

## Abstract :

*Understanding the dynamics of dense immersed granular media is of considerable interest due to the environmental and industrial stakes. The large scale dynamics of these flows is complex to describe since interactions between particles and the fluid and particle-particle occur at a small scale (fraction of the size of grains) and are nevertheless responsible for large scale phenomena (up to the global system size). Our aim is to give a better understanding using a small scale approach coupling a discrete element method (DEM), describing solid interaction, with an immersed boundary method (IBM) which takes into account the solid-fluid interaction. The rebound of a sphere on a wall is presented and highlights the importance of the lubrication force during the rebound which is therefore needed in the model to reproduce experiments. The numerical tool is then used to simulate a three-dimensional granular flow down an inclined plane in a viscous fluid.*

**Mots clefs :** milieu granulaire immergé, frontières immergées, éléments discrets, simulations numériques

## 1 Introduction

Les mécanismes de transport de grains dans des fluides, rencontrés dans diverses applications (géophysique, chimie, biomécanique, transports), restent mal connus de par la difficulté de simuler numériquement et de mesurer expérimentalement ces mouvements collectifs complexes issus des interactions entre solides ainsi que des interactions fluide-solide.

Une méthode possible de simulation de la dynamique de ces milieux est de définir des maillages curvilignes épousant la forme des objets immergés. Elle nécessite cependant l'adaptation du maillage à chaque pas de temps, opération complexe limitant le calcul à quelques grains. D'autres méthodes utilisent un maillage fixe dont l'une d'entre elles, initiée par Peskin [2], est la méthode de frontières

immergées (IBM pour immersed boundary method) qui prend en compte la présence d'objets solides via un terme source dans l'équation de conservation de quantité du mouvement du liquide.

Dans le travail présenté ici, une méthode de type IBM est utilisée pour modéliser les interactions fluides-grains et les contacts solides sont calculés par une méthode aux éléments discrets DEM (modèle des sphères molles, [1]). Une fois ces méthodes présentées, nous comparerons nos simulations aux expériences de rebond normal d'un grain sur une paroi dans divers fluides. Des simulations d'écoulements granulaires sur plan incliné en milieu fluide seront enfin présentées.

## 2 Méthodes numériques

### 2.1 La méthode de frontières immergées (IBM)

La méthode de frontières immergées utilisée s'inspire de celle proposée par Yuki et al. [7]. Elle est notamment détaillée dans [10]. Les équations résolues sont l'équation de conservation de la masse et de quantité de mouvement pour un fluide incompressible,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla P + \mathbf{H} + \mathbf{f}, \quad (2)$$

où  $\mathbf{H} = -\mathbf{u}\nabla\mathbf{u} + \nu\nabla \cdot [\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]$ ,  $P = \frac{p}{\rho}$  et  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $\rho$  et  $\nu$  sont respectivement la vitesse, la pression, la masse volumique et la viscosité cinématique du fluide. Le terme de forçage  $\mathbf{f}$  permet de modifier le champ prédicteur de vitesse de sorte à prendre en compte la présence de l'objet solide. Une méthode de projection est appliquée pour assurer que le champ de vitesse est à divergence nulle. La force  $\mathbf{F}_{\text{hydro}}$  et le moment hydrodynamiques  $\tau_{\text{hydro}}$ , appliqués par le fluide sur un grain, sont alors calculés par intégration de  $\mathbf{f}$  sur le volume  $V$  de l'objet via :

$$\mathbf{F}_{\text{hydro}} = -\frac{\rho\rho_p}{\rho_p - \rho} \int_V \mathbf{f} dV; \tau_{\text{hydro}} = -\frac{\rho\rho_p}{\rho_p - \rho} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f} dV \quad (3)$$

où  $\rho_p$  est la masse volumique de l'objet solide.

### 2.2 La méthode des éléments discrets (DEM)

Cette méthode a été introduite par Cundall & Strack [1] et tient compte en particulier des interactions entre les particules par un modèle de contact, dans notre cas linéaire.

Soit un nombre  $n_p$  de particules, définies par leur centre  $r_i$ , leur rayon  $R_i$ , leur vitesse de rotation  $\omega_i$  et leur masse  $m_i$  (l'indice "i" désignant la ième particule), qui évoluent selon le second principe de Newton dans un domaine quelconque,

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{\text{murs}} + \mathbf{F}_{\text{hydro}} \quad \forall i = 1, \dots, n_p \quad (4)$$

$$I_i \frac{d\omega_i}{dt} = \sum_{j \neq i} \tau_{ij} + \tau_{\text{hydro}} \quad \forall i = 1, \dots, n_p \quad (5)$$

où  $\mathbf{F}_{ij}$  (resp.  $\mathbf{F}_{\text{murs}}$ ) sont les forces exercées par les autres particules (resp. murs) sur la particule i, et  $\mathbf{F}_{\text{hydro}}$  sont les forces hydrodynamiques appliquées au grain i.  $\tau_{ij}$  (resp.  $\tau_{\text{hydro}}$ ) sont les couples exercés par les autres particules (resp. le fluide) sur la particule i,  $I_i = \frac{2m_i R_i^2}{5}$  est le moment d'inertie

de la particule  $i$ .  $\mathbf{F}_{\text{hydro}}$  et  $\tau_{\text{hydro}}$  sont donnés par (3). Le moment est calculé via  $\tau_{\mathbf{ij}} = R_i \mathbf{n} \times F_t \mathbf{t}$ . Il reste à modéliser  $\mathbf{F}_{\mathbf{ij}}$ ,  $\mathbf{F}_{\text{murs}}$  de l'équation (4).

Plusieurs modèles de contact existent (voir [5] et [6]). En général, la force de contact  $\mathbf{F}_{\mathbf{ij}}$  est décomposée en une composante normale  $F_n$  et une tangentielle  $F_t$  :  $\mathbf{F}_{\mathbf{ij}} = F_n \mathbf{n} + F_t \mathbf{t}$ . On autorise ici un chevauchement  $\delta_n$  des grains afin de modéliser la déformation élastique des solides. Le modèle de force de contact normal utilisé ici est le modèle de type ressort linéaire amorti :  $F_n = \max(0, -k_n \delta_n - \gamma_n \frac{d\delta_n}{dt})$  avec  $\delta_n < 0$ . Le coefficient de dissipation  $\gamma_n = -\frac{2m_{eff}}{t_c} \ln(\epsilon_{max})$  ainsi que la raideur  $k_n = m_{eff} \frac{\pi^2}{t_c^2} + \frac{\gamma_n^2}{4m_{eff}}$  sont définis à partir du temps de contact  $t_c$ , de la restitution sèche  $\epsilon_{max}$  et de la masse effective  $m_{eff} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$ . Il est à noter ici que la définition de  $k_n$  à partir de  $t_c$  est non usuelle puisque  $k_n$  peut être estimé à partir des données du matériau. En revanche, il a été montré dans de nombreuses études que la valeur de  $k_n$  peut être sous-estimée tout en gardant une dynamique du système inchangée. Cela permet en particulier d'optimiser le temps de calcul. Pour des raisons pratiques de couplage avec le solveur fluide, nous avons préféré fixer  $t_c$ , la valeur de  $k_n$  induite étant toujours suffisamment grande pour se placer dans l'approximation de grains "durs". Le modèle de force tangentielle utilisé prend en compte l'élasticité tangentielle ainsi que la loi de Coulomb :  $F_t = -\min(|k_t \delta_t|, |\mu_c F_n|) \text{sign}(\delta_t)$ .  $\mu_c$  est le coefficient de friction microscopique des grains et  $k_t$  est un coefficient de raideur tangentielle défini de manière empirique par  $k_t = 0.2k_n$ . Cette modélisation donne des résultats proches des observations expérimentales ([5], [9]). Les paramètres d'entrée du modèle de contact sont le coefficient de restitution  $\epsilon_{max}$ , le temps de contact  $t_c$  et le coefficient de friction des grains  $\mu_c$ .

## 2.3 Couplage des méthodes

Le système d'équations à résoudre est (1)-(5). L'idée est de supposer ici que le temps caractéristique de l'écoulement fluide  $t_f$  est très supérieur à celui impliqué lors d'un choc, c'est-à-dire que  $t_f \gg t_c$ . Ceci nous permet de traiter séparément le calcul de l'écoulement fluide (1)-(2) de celui des contacts entre grains (4)-(5).

L'avancement du fluide et les forces  $\mathbf{F}_{\text{hydro}}$  et moments hydrodynamiques  $\tau_{\text{hydro}}$  appliqués sur les grains sont calculés par la méthode IBM. Ces éléments sont alors envoyés au code DEM qui met à jour les positions et les vitesses des grains en tenant compte de l'effet du fluide ainsi que des éventuels contacts. Les positions et les vitesses des grains sont alors envoyées au solveur fluide pour un nouveau calcul du champ de vitesse et de pression.

Lorsque la distance séparant deux objets mobiles est proche de la maille de résolution fluide, le drainage du film liquide est mal calculé par le solveur fluide qui sous-estime la pression générée. Comme il sera montré par la suite, il est nécessaire d'ajouter une force de lubrification  $\mathbf{F}_{\text{lubri}}$  à l'équation (4) pour compenser le manque de résolution, via [8]

$$\mathbf{F}_{\text{lubri}} = -\frac{6\pi\mu\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{\delta_n + \eta} R_i^2 \mathbf{n} \quad \text{si } \delta_n > 0 \quad (6)$$

où  $\delta_n$  la distance entre la particule  $i$  et un mur et  $v_n = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$  est la vitesse de la particule projetée sur la normale au mur  $\mathbf{n}$ . Afin d'éviter la divergence de cette force lorsque  $\delta_n$  tend vers 0, une rugosité microscopique  $\eta$  de la particule est prise en compte dans (6). De façon équivalente, une force de lubrification est appliquée lors des contacts entre grains.

## 3 Etude du rebond normal d'un grain sur un mur

Le rebond d'une particule dans divers liquides a été étudié expérimentalement par Joseph et al.([3]) et par Gondret et al.([4]). Le coefficient de restitution effective est défini par  $\epsilon = \frac{v_T}{v_R}$  où la vitesse terminale  $v_T$  de la particule est la vitesse maximale avant le rebond et où  $v_R$  est la vitesse juste après le contact au mur. Ces expériences ont montré que  $\epsilon$  dépend du nombre de Stokes.

On compare ces résultats avec nos simulations avec et sans force de lubrification (6). Les simulations sont réalisées pour une résolution de  $D/\Delta x = 20$ , après avoir vérifié que la résolution spatiale n'influençait pas les résultats obtenus. Le grain est lâché depuis une hauteur suffisante pour atteindre une

vitesse terminale constante  $v_T$  avant le rebond qui témoigne de l'équilibre entre gravité et traînée. On impose des conditions de non glissement à toutes les parois, la friction  $\mu_c = 0.25$ , la restitution sèche  $\epsilon_{max} = 0.97$ , le temps de contact  $t_c = 10^{-4}$ s. Une rugosité  $\frac{\eta}{R} = 4 \times 10^{-4}$  est choisie dans le cas où l'on utilise la force de lubrification. Cette rugosité est de l'ordre des rugosités mesurées dans les expériences. On balaie enfin la gamme de paramètres :  $2 \leq \frac{\rho_p}{\rho} \leq 10^2$  ;  $0.1 \leq Re \leq O(10^3)$  et  $1 \leq St \leq 10^4$ . Le nombre de Stokes est défini par  $St = \frac{(\rho_p + C_M \rho)v_T D}{9\mu}$  où  $C_M = 1/2$  est le coefficient de masse ajoutée d'une sphère, et le nombre de Reynolds est ici  $Re = \frac{\rho v_T D}{\mu}$  où  $D$  est le diamètre du grain.

Pour un cas  $\frac{\rho_p}{\rho} = 8$ ,  $St = 53$  et  $Re = 60$ , l'évolution du champ de vorticité autour d'un grain pendant un rebond est tracée en figure 1. A  $t=19.74$ s, l'écoulement autour du grain n'est pas influencé par la présence du mur. A  $t=19.89$ s, le grain est proche du mur, à une distance de  $R_i/2$ , le fluide entre le grain et le mur est drainé et de la vorticité est cr e e le long du mur. Au moment de la collision ( $t=20.02$ s), la vorticité dans la région d'impact est maximum ce qui indique un fort cisaillement dans la direction parallèle au mur. Juste après la collision ( $20.07s \leq t \leq 20.25s$ ), une fine couche de vorticité de signe opposée se développe à la surface du grain et au mur alors que la vorticité dans le sillage tant à disparaître. A  $t=20.48$ s, la particule atteint sa hauteur maximale après le premier rebond et retombe. Pour ( $t \geq 21.06$ s), la vorticité autour du grain décroît à cause de la dissipation visqueuse.

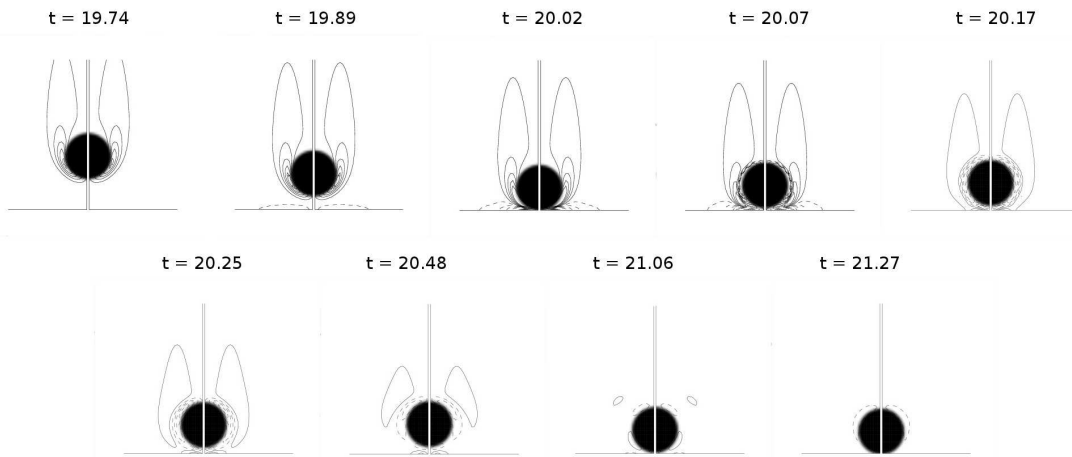


FIGURE 1 – Champ de vorticité autour d'une sphère lors d'un rebond sur mur ( $\frac{\rho_p}{\rho} = 8$ ,  $St = 53$  et  $Re = 60$ ). Les lignes de vorticités sont tracées entre  $-17.8$  et  $17.8$  avec un pas de  $3.9$ . Le temps et la vorticité sont normalisés respectivement par  $\sqrt{\frac{D}{g}}$  et  $\sqrt{\frac{g}{D}}$ .

Les résultats de restitution effective  $\epsilon/\epsilon_{max}(St)$  des différents rebonds sont tracés en figure 2.

Les points expérimentaux, tirés de [3] et [4], sont représentés en bleu et de petites tailles. Les autres points représentent les simulations numériques de rebond sans et avec ajout de force de lubrification. Pour de grands nombre de Stokes ( $St \geq 200$ ), toutes les simulations sont en accord avec les expériences. A ces nombre de Stokes, l'inertie est prépondérante devant la dissipation visqueuse et la force de lubrification est faible. Pour des nombres de Stokes plus petit, elle a un effet non négligeable et notre maillage n'est pas assez fin pour capturer la dissipation à l'échelle du film liquide qui est drainé.

Lorsqu'une force de lubrification  $\mathbf{F}_{lubri}$  est incluse dans (4), les résultats numériques sont en accord avec les résultats expérimentaux. La distance d'application de cette force a été testée et, nous retenons ici une distance fixe de  $R_i/2$ . Le coefficient de restitution  $\epsilon$  obtenu par nos simulations est en accord avec les expériences et ce, pour une large gamme de paramètres et notamment l'ensemble de la plage de nombre de Stokes considérée dans les expériences.

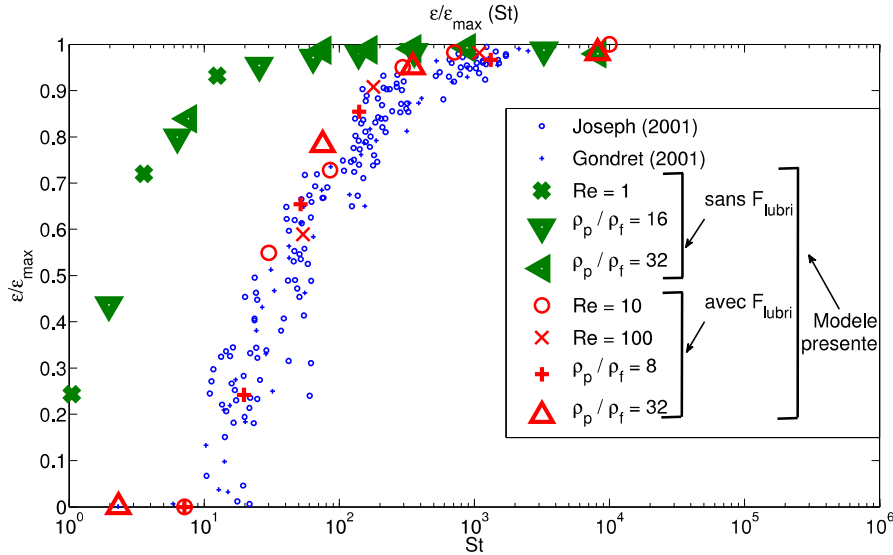


FIGURE 2 – Coefficient de restitution effectif normalisé en fonction du nombre de Stokes. Les points expérimentaux sont représentés en bleu et de petites tailles ([3], [4]), les points verts épais et les points rouges fins représentent les simulations sans et avec, respectivement, ajout de la force de lubrification (6).

## 4 Écoulement granulaire sur un plan incliné en milieu fluide

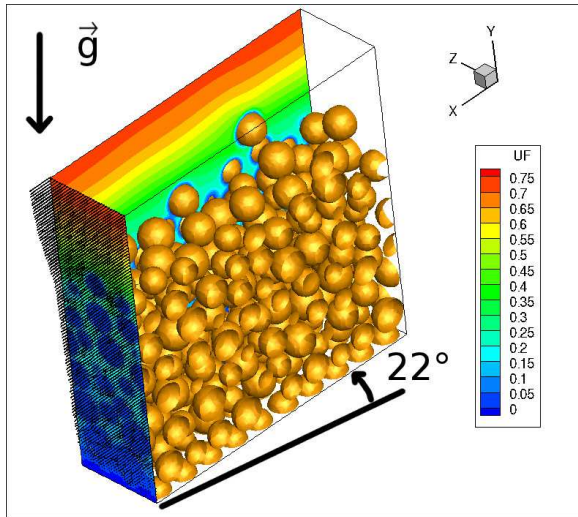
On présente dans cette section un cas multi-grains (250 grains) d'écoulement granulaire en milieu fluide sur un plan incliné à  $22^\circ$ . La simulation est réalisée dans un domaine  $(x, y, z)$  tridimensionnel de taille  $10D_{moy} \times 10D_{moy} \times 3D_{moy}$  où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont respectivement les directions longitudinale, verticale et transverse de l'écoulement et  $D_{moy}$  est le diamètre moyen des grains. Les frontières de normales  $\pm x$  et  $\pm z$  sont périodiques et des conditions de glissement et de non-glissement sont respectivement imposées aux frontières de normales  $+y$  et  $-y$ . La discrétisation est la même dans chaque direction avec  $D_{moy}/\Delta x = 10$ . Des grains de diamètre  $D_{moy} = 5mm$  sont fixés sur le fond (mur de direction normale entrante  $+y$ ). Les grandeurs associées à la phase granulaire sont :  $\rho_p = 8000kg/m^3$ ,  $D_{moy} = 5mm$ ,  $\mu_c = 0.25$ ,  $\epsilon_{max} = 0.87$ ,  $t_c = 10^{-4}s$  et  $\frac{\eta}{R} = 4 \times 10^{-4}$ . Une répartition autour d'un diamètre moyen ( $\pm 20\%$ ) est imposée afin que le milieu ne cristallise pas. Le fluide a pour propriétés  $\rho = 1000kg/m^3$  et  $\mu = 1.0kg.m^{-1}.s^{-1}$ . Le rapport de densité est de  $\frac{\rho_p}{\rho} = 8$ . Le nombre de Reynolds associé au fluide (resp. aux grains) basé sur la vitesse maximale est de 100 (resp. 2).

L'écoulement est représenté sur la figure 3a. A cet instant, l'écoulement est quasi-stationnaire. Les profils verticaux de vitesse (pour la phase fluide et solide) sont tracés en figure 3b. Sur une hauteur de  $7D_{moy}$ , les vitesses locales du lit de grains et du fluide sont très semblables. Ces grains sont charriés par le fluide. Au-dessus, quelques grains sont transportés par le fluide et se détachent du lit (mécanisme de transport en saltation et de reptation), et le fluide suit un profil de Poiseuille. La même configuration sans fluide n'engendre aucun mouvement de grains, le lit est statique. Dans le cas du couplage avec le fluide, les grains sont transportés par l'inertie du fluide environnant. On compare cette simulation avec un profil de Poiseuille obtenu pour un fluide Newtonien sans grains (courbe rouge - - figure 3b). On remarque que la présence des grains ralentit le débit de l'écoulement obtenu sans grains. Leur présence engendre une plus grande dissipation du système.

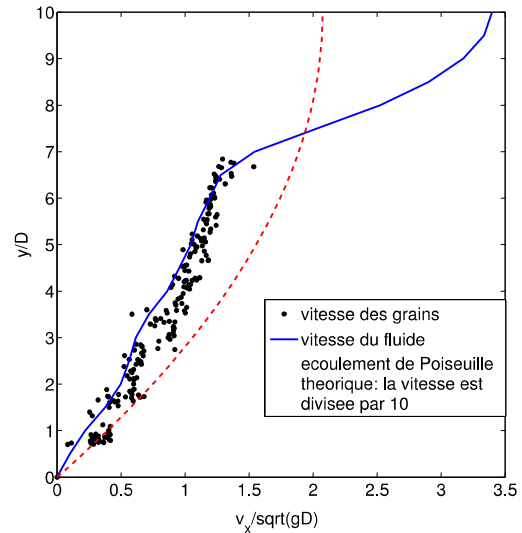
Une étude paramétrique est actuellement en cours consistant en la simulation de l'effondrement d'une colonne de grains immergés.

## 5 Conclusion

Une méthode numérique couplée IBM/DEM est présentée et est utilisée pour deux configurations distinctes : le rebond d'une particule sur une paroi et l'écoulement grains-fluide sur plan incliné.



(a) Visualisation de l'écoulement à l'instant  $t=4s$ ;  $UF$ , m/s, est la vitesse du fluide dans la direction  $x$ .



(b) Profils verticaux de vitesse normalisée; vitesse du fluide —, des grains • et du fluide sans grains divisée pas 10 - - .

FIGURE 3 – Ecoulement granulaire sur plan incliné à  $22^\circ$ .

L'étude du rebond dans des fluides a permis de mettre en évidence l'importance de la force de lubrification sur le coefficient de restitution effectif. En particulier, il a été montré que l'implémentation de cette force dans notre modèle à une distance fixe de  $R_i/2$  et tenant compte d'une rugosité  $\eta$  du grain permet de reproduire quantitativement les observations expérimentales.

Les résultats d'écoulements tridimensionnels de milieu granulaire dense dans un fluide sur un plan incliné sont encourageants et des études paramétriques sur la caractérisation du milieu diphasique sont en cours.

## 6 Remerciements

Nous remercions Annaig Pedrono pour son soutien dans le développement de la méthode IBM et de la méthode DEM. Les ressources scientifiques du groupe CALMIP (projet P1027) ont été utilisées.

## Références

- [1] P.D. Cundall, O.D.L. Struck 1979 A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique* 29, 47
- [2] C. S. Peskin 2002 The immersed boundary method *Acta Numerica*, pp. 479-517
- [3] G. Joseph, R. Zenit, L. Hunt and M. Rosenwinkel 2001 Particule-wall collisions in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, 433, 329-346
- [4] P. Gondret, M. Lance and L. Petit 2002 Bouncing motion of spherical particules in fluid. *Phys. Fluids*, 14, 643-652
- [5] J. Schafer, S. Dippl and D. E. Wolf 1996 Force Schemes in Simulations of Granular Materials *J. Phys.*, I France, Volume 6, Number 1, 5-20
- [6] F. Radjai and F. Dubois 1996 Discrete-element Modeling of Granular Materials *Wiley*
- [7] Y. Yuki, S. Takeuchi, T. Kajishima 2006 Efficient Immersed Boundary Method for strang interaction problem of arbitrary shape object with self-induced flow *Journal of Fluid Science and Technology*, Vol.2-1, pp.1-11
- [8] H. Brenner 1961 The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface *Chem. Eng. Sci.*, 16, 242-251
- [9] S. S. Foerster, M. Y. Louge, H. Chang, and K. Allia 1994 Measurement of the collision properties of small spheres *Phys. Fluids*, 6, 1108
- [10] B. Bigot, T. Bonometti, L. Lacaze, O. Thual 2013 A simple immersed-boundary method for solid-fluid interaction in constant and stratified-density flows *submitted*
- [11] I. Goldirsch & C. Goldenberg 2002 On the microscipic foundations of the elasticity *Eur. Phys. J. E.*, 9, 245-251