LA TEORÍA DE JUEGOS Y LA MATEMÁTICA

Alejandra María Serpa Jiménez
Universidad Francisco de Paula Santander Cúcuta, Colombia
Magister Práctica Pedagógica
Correo electrónico: alejandramariaserpa@ufps.edu.co

Sonia Maritza Mendoza Lizcano
Universidad Francisco de Paula Santander Cúcuta, Colombia
Doctora en Educación,
Correo electrónico: soniamaritza@ufps.edu.co

Pastor Ramírez Leal
Universidad Francisco de Paula Santander Cúcuta, Colombia
Magister en educación Matemática,
Correo electrónico: pastorramirez@ufps.edu.co

Resumen

Realizada la consulta bibliográfica se encuentra amplia aplicación e investigación en las áreas económicas en comparación con la cantidad de trabajos en otras áreas, esto llama altamente la atención debido a que la teoría de juegos puede ser aplica por ejemplo, subastas y licitaciones, mecanismos de decisión pública, y economía laboral, Aguado, Juan C. (2015) considera que las aplicaciones son muy variadas y abarcan desde el Comportamiento de los individuos hasta Iteraciones en Oligopolios, de igual manera Monsalve, S., Arévalo J. (2005) consideran que las aplicaciones de la teoría de juegos van más allá del área económica, siendo posible su aplicación en el estudio del comportamiento estratégico de los individuos en diferentes ambientes, influencia de las expectativas, toma de decisiones distribución de la información, tensión entre equilibrio y eficiencia, diseño de contratos, etc.El objetivo de este artículo es presentar los conceptos básicos de la teoría de juegos y como esta apoya a la matemática. Guzman, M de. (1984) Opina que “el sabor a juego puede impregnar de tal modo el trabajo, que lo haga mucho más motivado, estimulante, incluso agradable y, para algunos, aún apasionante”, el empleo de juegos podría ayudar a disminuir el temor de los jóvenes hacia la matemática sin olvidar lo que el mismo Guzman, M de. (1984) dice: “la matemática no es sólo diversión, sino ciencia e instrumento de exploración de su realidad propia mental y externa y así ha de plantearse”. “Teoría de Juegos y Emprendimiento” trabajo realizado por Moreira, Rodas y Contreras en la Universidad de Guayaquil y “Pensamiento Estratégico, Teoría de Juegos y Comportamiento Humano” trabajo realizado por Herrero y Pinedo en el 2005 son algunos de los antecedentes encontrados.

Palabras Clave: Didáctica, Matemática, Teoría de Juegos

Introducción

La teoría de juegos orienta para la toma de decisiones ganadoras o exitosas en un ambiente competitivo permitiendo detallar las situaciones, acciones y reacciones de oponentes inteligentes. Se evidencian las investigaciones realizadas en el área de empresariales, mas sin embargo no en ingeniería. En todos los procesos de la ingeniería se están tomando decisiones que deben tener en cuenta a otros participantes inteligentes y afectan al entorno.

Conceptos de la teoría de juegos.

Un juego es una determinada situación en que los individuos (jugadores) hacen elecciones en un contexto de interacción y en un marco definido previamente. Por lo tanto, la teoría de juegos es el área de la matemática que examina el comportamiento de individuos que interactúan dentro de una estructura formalizada de incentivos. Se pueden diferenciar distintos tipos de juegos dependiendo del contexto en donde interactúan los individuos. Dentro de los juegos más conocidos se encuentran:

Juegos de suma cero: Son aquellos en que la ganancia del ganador es la pérdida del jugador rival.
Juegos cooperativos: Son aquellos en que los participantes pueden firmar contratos para actuar en forma coludida.
Juegos con información completa: Son aquellos en donde los participantes conocen todas las características del juego, por ejemplo, tienen información acerca de la recompensa que podrían obtener el resto de los jugadores.
Juegos secuenciales: Son aquellos en donde los distintos agentes van realizando su jugada una vez realizada la acción del jugador rival.

Obviamente, cada uno de estos tipos de juego tiene su antónimo, es decir, existen los juegos de no-suma cero, juegos no-cooperativos, juegos con información incompleta y juegos simultáneos.

La teoría de juegos estudia las acciones que realizan los jugadores y como los resultados dependen de las acciones que otros realizan. Aguado, Juan C. (2015) considera que las aplicaciones son muy variadas y abarcan desde el Comportamiento de los individuos hasta Iteraciones en Oligopolios, de igual manera Monsalve, S., Arévalo J. (2005) consideran que las aplicaciones de la teoría de juegos van más allá del área económica, siendo posible su aplicación en el estudio del comportamiento estratégico de los individuos en diferentes ambientes, influencia de las expectativas, toma de decisiones distribución de la información, tensión entre equilibrio y eficiencia, diseño de contratos, etc.

Conformación de los juegos.

Para Gutiérrez-Montoya (2012) los juegos están conformados por los siguientes tres elementos: Jugadores, Estrategias y rendimientos.

Jugadores: individuos que toman las decisiones que buscan maximizar su utilidad
Estrategias: Según Ferguson (1978), una estrategia es “una especificación completa de las acciones que ejecutará un jugador en cualquier contingencia que pueda presentarse en el desarrollo del juego”. Mientras para Nupia (2017) “Es un plan de acciones completo y contingente para un jugador en el juego”, y para (Pindyck, 2003) “la estrategia del juego es una regla o plan para jugar”. Por lo tanto la estrategia está conformada por el conjunto de acciones que un jugador puede realizar.
Rendimientos: es la recompensa, utilidad o pagos obtenidos por el jugador al finalizar el juego. para gutiérrez-montoya (2012) “son los resultados que obtienen los participantes al final del juego”
a continuación se puede observar cómo se representan matemáticamente de los juegos (g)

$$g\ [s_a,\ s_b,\ u_a\ (a,b),\ u_b\ (a,b)]$$

Donde s_a y s_b representan el conjunto de estrategias para los jugadores a y b
u_a y u_b representan la utilidad obtenida por los jugadores cuando a y b eligen estrategias concretas ($a \subset s_a$, $b \subset s_b$).

a la conformación de los juegos aguado (2015) adiciona los siguientes tres elementos:

Acciones: posibles alternativas que un jugador puede adoptar cuando le toca decidir teniendo presentes las posibles intervenciones de la naturaleza y las acciones que puedan tomar los otros jugadores para lograr los mejores resultados posibles, también conocido como interdependencia estratégica
Información: grado de conocimiento del que se dispone a cada momento de las distintas variables, gracias a que el jugador aprende las reglas, observa y estudia atentamente las jugadas fundamentales de otros jugadores aprendiendo sus teoremas y procedimientos para usarlos en condiciones similares
Equilibrios: también se conoce como espacio de estrategias. S_i es el conjunto de estrategias que se realiza un jugador i al participar en el juego

Representació de los juegos.

Para una mejor comprensión e interpretación de los juegos, Aguado (2015) reconoce la existencia de dos formas de representación matemática de los juegos:

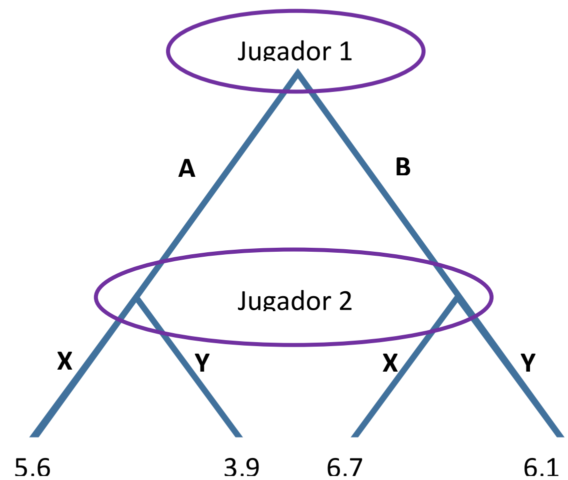
Normal también conocida como matricial o estratégica. Esta representación se emplea (no de manera exclusiva) cuando existen dos jugadores.

		Jugador 2	
		X	**Y**
Jugador 1	**A**	**5, 6**	**3, 9**
	B	**6, 7**	**6, 1**

En este ejemplo el jugador uno puede escoger entre las estrategias A y B que se han ubicado en filas, y el jugador dos puede escoger entre las estrategias X y Y que se han ubicado en columnas

Al interior de las casillas de la matriz se ubican los pagos teniendo en cuenta que el primer dato corresponde a el jugador uno y el segundo al jugador dos.

Extensiva o de árbol.
Esta representación muestra la misma información que la representación normal pero ordenada de una manera más grafica
Un árbol está compuesto por nodos y ramas donde los nodos representan lugares donde alguien debe tomar una decisión y las ramas indican las diferentes acciones que un jugador puede escoger.
Las elipses reciben el nombre de Conjunto de información e indican que un jugador puede elegir una estrategia desconociendo la elección del otro jugador (ocurre cuando la decisión es simultanea)



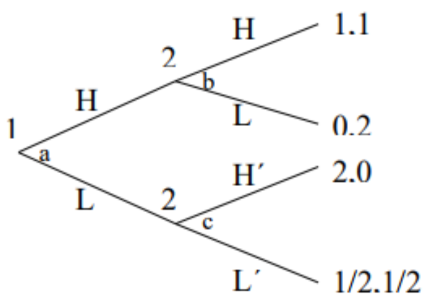
Toda representación en forma extensiva tiene exactamente un nodo inicial.
Cada nodo es sucesor del nodo inicial y el nodo inicial es el único con esta propiedad.
Los otros nodos son llamados nodos de decisión y nodos terminales. Cada nodo, excepto el inicial, tiene exactamente un nodo inmediatamente predecesor. El nodo inicial no tiene predecesor. Cada nodo terminal corresponde a una única senda en el árbol, es decir, existe una relación uno a uno entre sendas y nodos terminales.
Conjunto de Información.

Nupia (2017) define Un Conjunto de Información como "un conjunto formado por nodos ***entre los cuales*** un jugador no puede distinguir su posición en el juego cuando toma una decisión" esta situación se presenta cuando un jugador posee la misma información en más de un nodo (estos nodos se unen con una línea discontinua). Nupia (2017) señala que "todo nodo de decisión pertenece a un conjunto de información y algunos conjuntos de información poseen un solo nodo"

Características de los conjuntos de información:

- Cada conjunto de información contiene nodos de decisión para solamente uno de los jugadores.
- Todos los nodos que pertenecen al mismo conjunto de información poseen el mismo número de sucesores inmediatos y deben tener el mismo conjunto de acciones sobre las ramas que conducen a estos

Ejemplo:



El conjunto completo de estrategias del jugador 1 es: H, L.
Una estrategia para el jugador 2 es escoger H en el nodo b y L´ en el nodo c. Esta estrategia se escribe: H L´.
El conjunto completo de estrategias del jugador 2 es: HH´, HL´, LH´, LL´.
$\mathbf{S_i}$ es el conjunto de todas las posibles estrategias del jugador i en el juego.

Del ejemplo anterior: $S1 = \{H, L\}$, $S2 = \{HH´, HL´, LH´, LL´\}$.
Si $s_i \in \mathbf{S_i}$ es una estrategia del jugador i en el juego: $s_1 = L$, $s_2 = HL´$
$S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ es un vector de estrategias para cada jugador.

Tipos de juegos

En función de la estructura de los pagos se pueden diferenciar diferentes tipos de bipersonales, el dilema del Prisionero es un modelo matemático clásico para entender la toma de decisiones. Este Juego plantea la siguiente situación:

Dos personas son arrestadas, la policía sabe que ellos han cometido un crimen pero no tienen como probarlo, pero si tienen pruebas para incriminarlos por un delito menor. El fiscal del caso habla con cada prisionero por separado y les presenta una oferta:

Si confiesa contra el socio, todos los cargos en su contra serán retirados y la confesión será usada como evidencia para condenar al otro, quedará libre y su socio recibirá será de 10 años.
Si no confiesa y su socio lo hace, será condenado a 10 años y su socio quedará libre.
Si ambos confiesan, serán condenados a 5 años de prisión.
Si ninguno confiesa, serán condenados a 1 años de prisión.

El futuro de cada uno de los prisioneros depende de las acciones del otro. Individualmente, la mejor opción para cada prisionero es confesar el delito, pero si los dos prisioneros confiesan el castigo es peor a que si ambos callan.

Cada prisionero en su celda de forma individual piensa en las opciones planteadas por el fiscal:

1. Si los dos callamos el castigo será por el delito menor (1 año)

2. Si callo y el otro me delata tendré la pena más alta (10 años)
3. Si lo delato y el otro calla, seré libre (-5 años)
4. Si los dos confesamos el castigo será compartido (5 años)

A cada uno de las acciones corresponde un pago, y estos pagos están relacionados con el comportamiento de cada uno de los prisioneros para con las autoridades.

Tentación (T): un jugador traiciona y el otro calla (0,10)
Recompensa (R): los dos jugadores si tienen comportamiento cooperativo (5, 5)
Castigo (S): los dos jugadores tienen comportamiento no cooperativo (1, 1)
Pardillo (P): un jugador coopera (calla) y es traicionado (10,0)
Con la condición adicional que T + P < 2R, por lo tanto T > R > S > P

		Jugador 2	
		C	**NC**
Jugador 1	**C**	**R, R**	**P, T**
	NC	**T, P**	**S, S**

C= coopera NC= no coopera

		Jugador 2	
		C	**NC**
Jugador 1	**C**	**5, 5**	**-5,10**
	NC	**10, -5**	**1, 1**

C= coopera NC= no coopera

Historia de la Teoría de Juegos

Para Tenorio & Martín (2015) En los orígenes de la Teoría de Juegos se buscaba mejorar la comprensión del comportamiento en los fenómenos sociales. Por esta razón es tan útil en la toma de decisiones, aplicación en casi todos los ámbitos de las ciencias sociales y su desarrollo no se limita solo a la teoría.

Con la publicación en 1944 del libro Teoría de los Juegos y Comportamiento Económico (titulo original Theory of Games and Economic Behavior) por el matemático austrohúngaro von y el economista alemán Morgenstern (1944) se considera que comienza La Teoría de Juegos tal y como la percibimos en la actualidad. La primera referencia a los juegos y la lógica que en ellos existente la realizo el matemático y filósofo alemán Leibniz (1704), en su obra titulaba Nouveaux Essais sur l'entendement humain. Según Leibniz (1765), la mente humana "se despliega más minuciosamente en los juegos que en actividades más serias".

Montmort, Bernoulli & Waldegrave (1713) los matemáticos intercambian correspondencia. En esa correspondencia se plantean el problema de encontrar una solución de equilibrio basado en la regla minimax de estrategia mixta para resolver una versión con dos jugadores de un juego de carta clásico denominado "Le Her". Montmort (1713) presenta el concepto de estrategia mixta y la regla minimax para la obtención de la hoy llamada solución minimax, por la que se minimiza la posible pérdida en el peor escenario y que coincide con el equilibrio de Nash del juego mencionado.

		Jugador 2	
		C	**NC**
Jugador 1	**C**	**5, 5**	**-5,10**
	NC	**10, -5**	**1, 1**

C= coopera NC= no coopera

En el siglo XVIII, años antes a la Revolución Francesa el matemático francés Marie-Jean Antoine Nicolas de Caritat, más conocido como Marqués de Condorcet, publica en 1785 por primera vez el Teorema del jurado; este teorema permite determinar la probabilidad relativa de un grupo de individuos alcanzando la decisión correcta y cómo dependiendo de esa probabilidad debe aumentar o disminuir el número de individuos para que se alcance dicha decisión. También es publicada la Paradoja de Condorcet que plantea la posibilidad de que las preferencias colectivas son cíclicas, aunque no lo sean las individuales y por tanto, el criterio de lo que prefiere la mayoría no da un vencedor claro. Posteriormente Cournot (1838) desarrolló un modelo de competición imperfecta en la que compiten dos empresas con la misma función de costo y productos de características y calidades iguales en un escenario estático. Dando origen al análisis teórico del comportamiento que podrían tener los empresarios en un duopolio y que se basaba en la toma simultánea de decisiones por ambos empresarios para obtener un equilibrio que optimice el precio de su producto en función de las cantidades producidas y que corresponde a un tipo particular de lo que posteriormente se denominará de manera general equilibrio de Nash dentro de la Teoría de Juegos.

En 1883 Joseph-Louis-François Bertrand expuso que parecía más lógico que las empresas en un duopolio se enfrentasen en términos de cambios en el precio en lugar de en las cantidades que se vendían. Por tanto, las empresas elegirían el precio de su producto en base a la siguiente lógica: si los precios de ambas empresas son el mismo, pero el costo marginal es menor que el precio, entonces las empresas estarían incentivadas a disminuir sus precios con el fin de conseguir una mayor parte del mercado. Por tanto, el equilibrio (también de tipo Nash) se alcanzaría cuando el precio coincidiese con el costo marginal. Sin embargo, el modelo planteado por Bertrand planteaba una paradoja (denominada la Paradoja de Bertrand) por la cual el duopolio acaba en un monopolio tanto si las dos empresas decidían aliarse como si decidían enfrentarse, ya que en un enfrentamiento, la que tiene un menor costo marginal se haría con todo el mercado.

Edgeworth (1897) plantea una modificación al modelo dado por Bertrand e introduce el modelo Bertrand Edgeworth que consistía en incluir restricciones en la capacidad de producción de las empresas con el fin de que dichas empresas tuviesen la opción potencial tanto de aliarse como de no hacerlo.

En 1871, El naturalista y geólogo inglés Charles Robert Darwin introdujo la Teoría de Juegos en el ámbito de la biología evolutiva y expuso la Teoría de Selección Sexual que, pese a ser rechazada en los tiempos de Darwin se ha vuelto central en la biología evolutiva moderna y en la ecología del comportamiento gracias a la teoría genética de la evolución natural propuesta por Fisher (1930) y que coincide en esencia con lo expuesto por Darwin.

Hacia la formalización de la Teoría de Juegos: de Zermelo a von Neumann.

Es en el s. XIX el matemático y lógico alemán Ferdinand (1913) establece en dos teoremas sobre el juego del ajedrez; debido a que permite analizar cualquier juego con dos jugadores sin movimientos de oportunidad y con intereses completamente enfrentados (juego no cooperativo de suma cero).

Dénes König aplicaba un resultado de la teoría de conjuntos para demostrar una conjetura que previamente le había propuesto. Entre 1921 y 1927, Félix Édouard Justin Émile Borel estudia los juegos de estrategia, generando la primera formulación matemática moderna de una estrategia mixta y estudiando la búsqueda de la solución minimax para juegos simétricos de dos jugadores con intereses completamente opuestos; demostrándolo para jugadores con 3 y 5 estrategias.

Steinhaus (1925) publica un artículo en el que incluía la primera definición formal de estrategia y se realizaba un estudio en profundidad del concepto. Von (1928) demuestra el teorema minimax independientemente del número de estrategias que pueda tener cada jugador (que ha de ser una cantidad finita) y asumiendo que los intereses son completamente puestos. En este trabajo aparece la definición formal de estrategia que se utiliza actualmente.

En el libro Teoría de los Juegos y Comportamiento Económico publicado en 1944 por von Neumann se da primer tratamiento riguroso y exhaustivo del concepto de juego, estrategia y resolución del mismo, así como sobre la forma de representar las preferencias de los jugadores. Además, no solo estudiaron los juegos en los que los intereses de los jugadores son completamente contrapuestos (los denominados juegos no cooperativos de suma cero), sino que consideraron también aquellos juegos en los que la ganancia de un jugador no necesariamente significa pérdidas para el otro (y que se corresponden con los juegos cooperativos de suma nula con recompensa transferible). Todo ello desde una perspectiva puramente económica y con el objetivo de modelizar el comportamiento económico mediante la Teoría de Juegos. De hecho, en esta obra se usó la Teoría de Juegos para desarrollar una teoría axiomática de la utilidad.

La década prodigiosa: 1950–1960.

La obra de von Neumann y Morgenstern causó tal impacto entre los matemáticos y economistas de su época que no solo conllevó que la Teoría de Juegos comenzase a considerarse como una disciplina científica, sino que fue el comienzo de una investigación intensa y exhaustiva en este campo. Precisamente, es la década de 1950 junto con el comienzo de la de 1960, en la que se desarrollan numerosos artículos teóricos sobre esta disciplina y sobre sus aplicaciones a distintos problemas y situaciones económicas. Como muestra de la actividad en la investigación relativa a este campo, habría que resaltar los cuatro volúmenes de la colección Annals of Mathematics Studies que se dedicaron monográficamente a la Teoría de Juegos bajo el título Contributions to the Theory of Games (el primer volumen data de 1950 y el cuarto de 1959).

Pero el hecho clave de la Teoría de Juegos en la década de 1950 y que sustenta toda la investigación posterior en relación al estudio de los juegos denominados no cooperativos, se debe al matemático estadounidense (Nash, 1928). En 1950, Nash presenta su tesis doctoral titulada Noncooperative games (Tucker, 1995) y en la que se establecen las bases generales de este tipo de juegos. En dicha memoria se introducía el concepto de punto de equilibrio (o equilibrio de Nash como es conocido actualmente) y probaba su existencia. Los resultados esenciales de esta memoria aparecerían publicados en artículos fechados en 1950 y 1951 en los que también se propone el denominado "Programa Nash" por el que se sugiere el estudio de los juegos cooperativos mediante su reducción a juegos no cooperativos. Como puesta en práctica de su programa, Nash (1959) estableció la teoría axiomática del regateo, probando la existencia y unicidad de la denominada solución de regateo de Nash. Precisamente, estas referencias se consideran claves en la literatura relacionada con los problemas de negociación.

Tras introducir Nash la noción de punto de equilibrio, éste junto con el matemático canadiense John Patterson Mayberry y el economista estadounidense Martin Shubik publicarían un artículo en 1953 en el que demostraban que el equilibrio de Nash generalizaba el equilibrio clásico en un duopolio de Cournot.
Por su parte, Shapley sería también el artífice de lo que se viene a denominar el valor de Shapley en los juegos cooperativos (valor que mide la importancia de cada jugador en un juego cooperativo para que la cooperación global funcione y el nivel de recompensa que se podría esperar), concepto que introduce en su artículo de

(Kuhn, 1953) sobre juegos con n jugadores. Ese mismo año, Shapley (1953) también publicaría su artículo Stochastic Games, en el que demostraba la existencia de estrategias estacionarias (i.e., que dependen única y exclusivamente del juego y no de factores externos) óptimas para juegos estrictamente competitivos con beneficios futuros descontados a una tasa fija. En esta misma época, el economista y matemático Debreu (1952) introdujo el primer modelo de equilibrio competitivo con su teorema de existencia en un artículo en el que permitía la actuación de economías externas. Este artículo sería precursor del que se publicaría dos años más tarde en por el economista americano Arrow (1954) y el propio Debreu en el que establecerían la existencia de un equilibrio competitivo, usando los resultados de 1952 sin permitir economías externas. Este modelo pasó a denominarse modelo de Arrow-Debreu y se ha vuelto esencial ya que asegura que, bajo ciertos supuestos económicos, existe un conjunto de precios para el que la oferta agregada se iguala con la demanda agregada para cualquier mercancía considerada.

Consolidación y aplicación.

Desde finales de la década de los 1950 y durante toda la década de 1960 el desarrollo de la Teoría de Juegos fue emparejado con aplicaciones de éstos a distintos campos de conocimientos y a la resolución de problemas que surgían en el mundo real. En este sentido, Shapley & Shubik (1954) usaron el valor de Shapley para determinar cuál era el poder de los miembros del Consejo de Seguridad de la ONU (que modelizaban mediante un juego cooperativo) en un artículo que se acepta como pionero en la aplicación de la Teoría de Juegos a las Ciencias Políticas. También, el matemático estadounidense Robert Duncan Luce y el psicoanalista y politólogo estadounidense

El politólogo Harrison (1959) desarrolló un índice para determinar el poder de un político y estudió cómo podría maximizarse esta medida.por esta razón la Teoría de Juegos se considera parte inseparable de las Ciencias Políticas como disciplina.

Como había pasado desde sus orígenes, la Teoría de Juegos siguió avanzando gracias a su aplicación a las Ciencias Económicas. Así el matemático israelí-estadounidense Aumann (1959) publicó un trabajo en el que, además de introducir el concepto de equilibrio fuerte, daba la versión del Teorema de Tradición Oral para este tipo de equilibrios. El Teorema de Tradición Oral (Folk Theorem en inglés) establece que el conjunto de equilibrios de Nash para un juego repetido se puede expresar en base a los resultados factibles del juego de una tirada asociado. El resultado era ampliamente conocido a finales de la década de 1950, pero sin publicar y con autoría desconocida. Su no publicación, según Luce & Raiffa (1957), podría bien deberse a la simplicidad de dicho resultado o a la complejidad para poder escribirlo rigurosamente. Posteriormente, el propio Aumann, conjuntamente con Shapley (1976), dio la versión de este resultado para juegos repetidos y en relación a los equilibrios perfectos de Nash de dichos juegos. Resultado al que, de manera independiente, llegó el economista y matemático israelí (Rubinstein, 1976).

Precisamente Shubik (1959) publica su monografía sobre oligopolios, en la que por primera vez se modelizaban explícitamente los oligopolios mediante la teoría de juegos no cooperativos y que contiene uno de los primeros enunciados del Teorema de la Tradición Oral.

El economista estadounidense Schelling (1960) publica el libro The Strategy of Conflict iniciando la investigación en el comportamiento estratégico y enfatizó la importancia de la información y compromiso en las dinámicas de estrategias, siendo fundamental el análisis de los juegos no cooperativos con múltiples equilibrios. Este libro ha sido considerado por Times Literary Suplement en 1995 y 2008 como uno de los cien libros más influyentes en Occidente desde 1945.

En este sentido, tampoco se debe obviar la importancia que tuvo la Teoría de Juegos en la década de 1960 durante la Guerra Fría. Como ejemplo, se indican los trabajos que, entre 1965 y 1968, llevaron a cabo el ya mencionado Aumann, el matemático israelí Michael Bahir Maschler y el matemático americano Richard Edwin Stearns para la Agencia de Desarme y Control de Armas de los Estados Unidos relativos a la aplicación de la Teoría de Juegos a la dinámica en las negociaciones de control armamentístico.

Sin embargo, el reconocimiento mundial y público de la gran relevancia que ha tenido la Teoría de Juegos en el campo del Análisis Económico tuvo lugar
Con la concesión del Premio Nobel de Economía en 1994 al economista húngaro John Charles Harsanyi, se da reconocimiento mundial y público de la gran relevancia que ha tenido la Teoría de Juegos en el campo del Análisis Económico

Posteriormente, esto se vería reforzado cuando en 2005, les otorgaron a Schelling y Aumann el Premio Nobel de Economía. El primero fue galardonado por trabajar con modelos dinámicos para el análisis de la cooperación y conflicto, instaurando los primeros ejemplos de la Teoría de Juegos evolutiva; mientras que el segundo fue premiado por sus aportaciones al estudio de los equilibrios, lo cual llevó a cabo utilizando la Teoría de Juegos. También las ediciones de 2007 y 2012 de dichos premios fueron concedidas a avances en el estudio de la Teoría de Juegos. En el caso del año 2007, el matemático y economista Leonid Hurwicz y el matemático y economista estadounidense Roger Bruce Myerson fueron los galardonados junto con el economista estadounidense Eric Stark Maskin por establecer los fundamentos de la teoría de diseño de mecanismos, una rama de la Teoría de Juegos que trabaja con información privada. Por su parte, en 2012, el trabajo L.S. Shapley fue el galardonado junto con el investigador operativo y economista Alvin Elliot Roth por sus aportaciones a la Economía en el ámbito de la Teoría de Juegos y, en particular, por la teoría de localizaciones estables y la práctica de diseño de mercados, basada en el uso de herramientas de juegos cooperativos y no cooperativos.

Bibliografía

Aguado, Juan C. (2015) Introducción a la Teoría de Juegos. Universidad Rey Juan Carlos

Ferguson, C.E. y Gould J.P. (1978) Teoría Microeconómica. México: Fondo de Cultura Económica.

Gutiérrez-Montoya, Guillermo Antonio (2012). "Un acercamiento a la Teoría de los Juegos" en Científica, Vol. 1, Nº 1, época 2, pp. 7-26

Guzman, M De. (1984). Juegos Matemáticos En La Enseñanza. Actas de las IV Jornadas Sobre Aprendizaje y Enseñanza de Las Matemáticas. IV JAEM 1984, Sociedad Canaria De Profesores De Matemática "Issaac Newton", pp. 49-85.

Nupia, Oscar (2017). Apuntes de la asignatura Teoría de Juegos Código ECON-2105. Universidad de Los Andes. Tomado el día 20 de agosto de 2017 de https://economia.uniandes.edu.co/files/profesores/oskar_nupia/docs/Teoria%20de%20Juegos/Apuntes/02_Representacion.pdf

Monsalve, S., Arévalo J. (2005).Un curso de teoría de juegos clásica. https://ideas.repec.org/b/ext/public/47.html

Pindyck, R. S. y L. D. Rubinfield (2003). Microeconomía. Madrid: Prentice Hall.

Aumann, R. & Shapley, L. (1976). Theoretic Analysis, Essays in Game Theory in Honor of Michael Maschler. Uniersity of Jerusalem, (1), 1-15.

Steinhaus, H. (1960). Definicje potrzebne do teorji gry i poscigu. Naval Research Logistics Quaterly, 7, 105–108.

Auday, M. (2012). Preferencias, normas sociales y teoría de juegos. Epistemología e historia de la Ciencia, 1(18).

Aumann, R. (1959). Acceptable Points in General Cooperative n-Person Games, Contributions to the Theory of Games. Annals in Mathematics Studies. Princeton University Press, 4 (40), 287–324.

Balarezo, G. (2016). Entender la teoría de juegos es más fácil de lo que parece. Recuperado de: http://www.elcomercio.com/afull/teoriadejuegos-matematica-economia-explicacion-johnnash.html

Basurto, C., Hidalgo, F. & Caicedo, B. (2017). Teoría de Juegos y Emprendimiento. Revista Publicando, 4(10), 211-219.

Cournot, A. (2015). Recherches sur les principes mathématiques de la théorie desrichesses. Boletín de Matemáticas, 22(1) 77–95.

Debreu, G. (1952). Social Equilibrium Existence Theorem. Academy of Science of the United States of America 38, 886–893.

Donald, B. (1959). Solutions to general non-zero-sum games, Contributions to the Theory of Games, Annals in Mathematics Studies. Princeton University Press, 4 (40) 47–85.

Dresher, M. (1961). The mathematics of games of strategy: Theory and applications. New Jersey: Prentice-Hall.

Dresher, M., Tucker, A. & Wolfe, P. (1957). Contributions to the Theory of Games. Annals in Mathematics Studies. Princeton University Press 3(39)

Edgeworth, F. (1897). La teoría pura del monopolio. Giornale Degli Economisti, 40, 13–31.

Fisher, R. (1930). The Genetical Theory of Natural Selection. New York: Oxford Universoty Press.

Fisher, R. (2000). Apuntes del curso organización industrial. Santiago: Universidad de Chile.

Flood, M. (1952). Some experimental games. Management Science, 1(5), 5-26.

Fudenberg, D. & Tirole, J. (1991). Game Theory, the MIT Press. Massachusetts: Cambridge.

Gillies, D. (2015). Location of Solutions, Report of an Informal Conference on the Theory of n-Person Games (H. W. Kuhn, ed.), Department of Mathematics, Princeton University. Boletín de Matemáticas 22(1) 77–95.

González, J., Martínez G. & Bordallo, A. (2013). Del número de autores en las publicaciones científicas: reflexiones pedagógicas desde el capital social y la teoría de juegos. Revista Docencia e Investigación, 36(21), 131-150.

Harsanyi, J. (1967). Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players. Management Science, 14, 159-182.

Herrero, M. & Pinedo, J. (2005). Pensamiento Estratégico, Teoría de Juegos y comportamiento Humano. Indivisa: Boletín de estudios e investigación, (6), 37-68.

Kuhn, H. (1950). Extensive Games. National Academy of Science of the United States of America, 36, 570–576.

Kuhn, W. & Tucker, A. (1950). Contributions to the Theory of Games, Annals in Mathematics Studies. Princeton University Press, 1(24).

Kuhn, W. & Tucker, A. (1953). A Value for n Person Games, Contributions to the Theory of Games, Mathematics Studies. Princeton University Press, 2(28), 307-317.

Kuhn, W. & Tucker, A. (1953). Contributions to the Theory of Games, Annals in Mathematics Studies. Princeton University Press, 2.

Luce, R. & Raiffa, H. (1957). Games and Decisions: Introduction and Critical Survey. New York: John Wiley & Sons.

Matus, M. & Rodríguez, P. (2012). Pensamiento económico y valores: un experimento docente de teoría de juegos. Revista de Investigación en Educación, 2(10), 119-128. Recuperado de: http://webs.uvigo.es/reined/

Moreno, V. (2005). Licitaciones de energía eléctrica. Maestría en Ciencias de la Ingeniería. Pontificia Universidad Catolica de Chile. Santiago, Chile.

Nash, J. (1950) The bargaining problem. Econometrica 18, 155–162.

Nash, J. (1950). Equilibrium Points in N-Person Games. Proceedings of the National Academy of Science, 36, 48-49.

Pérez-Sánchez, R. & Víquez-Calderón, D. (2010). Los grupos de discusión como metodología adecuada para estudiar las cogniciones sociales. Actualidades en psicología, 23-24(10-111), 87-101. Recuperado em 26 de julho de 2017, de http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0258-64442010000100004&lng=pt&tlng=es.

Reeves, D. y Wellman, M. (2004). Computing Best-Response Strategies in Infinite Games of Incomplete Information. University of Michigan Artificial Intelligence Lab, 5(24), 1-10.

Riker, W. (1959). A test of the adequacy of the power index. Behavioral Science, 4, 120–131.

Rubinstein, A. (1979). Equilibrium in Supergames with the Overtaking Criterion. Journal of Economic Theory, 21, 1–9.

Schelling, T. (1960). The strategy of conflict. Cambridge: Harvard University Press.

Schettini, P. & Cortazzo, I. (2015). Análisis de datos cualitativos en la investigación social. Trabajo Social. Universidad Nacional de la Plata. La Plata, Argentina.

Shapley, L. (1953). Stochastic Games. National Academy of Sciences of the United States of America, 39, 1095–1100.

Shapley, L. & Shubik, M. (1954). A Method for Evaluating The Distribution of Power in a Committee System. American Political Science Review, 48, 787-792.

Shubik, M. (1959). Edgeworth Market Games, Contributions to the Theory of Games, Annals in Mathematics Studies. Princeton University Press, 4(40), 267-278.

Shubik, M. (1959). Strategy and Market Structure: Competition, Oligopoly, and the Theory of Games. New York: John Wiley & Sons.

Springer, V. (1976). Equilibrium in Supergames, Essays in Game Theory in Honor of Michael Maschler (N. Megiddo, ed.). Berlín: Nimeod Megiddo.

Springer, V. (1976). Some Theorems on n-Person Games, Ph.D. thesis, Department of Mathematics. Princeton University. Nueva Jersey, U.S.

Tenorio, A. & Martín, A. (2015). Un paseo por la historia de la Teoría de Juegos. Boletín de Matemáticas, 22(1), 77–95.

Tucker, A. (1980). On Jargon: The Prisoner's Dilemma. A Two Person Dilemma. UAMP Journal 1, 101.

Tucker, A. & Luce, R. (1959). Contributions to the Theory of Games. Princeton: Princeton University Press.

Von, J. & Morgenstern, O. (1944). Theory of Games and Economic Behavior. Princeton: Princeton University Press.

Wittrock, M. (1986) Análisis de datos y redacción del informe. La investigación en la enseñanza II. Métodos cualitativos y de observación. Barcelona: Paidós Educador.

Wittrock, M. (1986). Handbook of research on teaching. Nueva York: Mc Millan.

Zermelo, E. (1913). Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie Schachspiels, Proceedings of the Fifth Congress of Mathematicians. Cambridge University Press, 2, 501–504.