



II ENCUENTRO INTERNACIONAL EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA AÑO 2017



ESTADO DEL ARTE SOBRE EL CONCEPTO DE LÍMITE

Jhoana Alexandra Trujillo Castro

Universidad Francisco de Paula Santander Cúcuta, Colombia
Estudiante de Licenciatura en Matemáticas
Correo electrónico: jhoanaalexandratc@ufps.edu.co

Charen Lisset Vera Gutierrez

Universidad Francisco de Paula Santander Cúcuta, Colombia
Estudiante de Licenciatura en Matemáticas
Correo electrónico: charenlissetvg@ufps.edu.co

Raúl Prada Núñez

Universidad Francisco de Paula Santander Cúcuta, Colombia
Magister en Educación Matemática
Correo electrónico: raulprada@ufps.edu.co

Resumen

El cálculo diferencial es una de las asignaturas de matemáticas con un nivel de dificultad muy alto, puesto que, implica procesos mentales superiores y hace parte del análisis matemático; todo esto parece confirmarse en su objeto de estudio que consiste en saber cómo cambian las funciones cuando sus variables cambian. Además de lo descrito, abordar este tema requiere el dominio de los pre-saberes que le anteceden, siendo uno de ellos el concepto del límite, he aquí la importancia de estudiar en profundidad este tema; si los estudiantes no formalizan su saber cognitivo, difícilmente van a comprender los temas que le siguen, tales como continuidad, derivada e integral. En la actualidad existe una gran cantidad de elementos valorados en diferentes investigaciones como causante de la complejidad del límite, dichos elementos han sido hallados, descritos, caracterizados y evolucionado en pro del mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje, sin embargo, en la mayoría de las ocasiones, estos documentos no son tomados en cuenta por los docentes encargados del mejoramiento continuo de la educación. En consecuencia esta investigación de tipo documental, se enfoca en la descripción de los estudios realizados alrededor del tema de los límites, es decir se trata de una compilación de información sobre el estado y los avances que el concepto ha tenido en un periodo de tiempo comprendido entre el 2000-2017. Para el desarrollo de la investigación se tuvo en cuenta diferentes bases de datos, de los cuales se eligieron los documentos relacionados con el concepto del límite y en segunda instancia se analizan para formular sugerencias sobre la orientación pedagógica de las investigaciones.

Palabras claves: matemáticas, enseñanza, aprendizaje, límites.

Introducción

Las matemáticas, es una ciencia basada en el estudio de los números y sus relaciones con entes formales, que a diferencia de las demás ciencias empíricas tales como:

naturales y sociales; resulta ser la más compleja en procesos de enseñanza y aprendizaje, se afirma esta realidad, porque existen muchas maneras de abordar dichos conceptos, lo cual provoca dificultades que son producto de errores epistemológicos

presentes en el transcurso de periodos históricos. Además, la comprensión de esta ciencia supone la capacidad de desarrollar procesos mentales superiores, tales como: comprender, analizar, justificar, argumentar y crear secuencias de ejercicios estructurados, con el objetivo de dar solución a problemas de diferentes ciencias y contextos.

La enseñanza de las matemáticas es otra de las razones por las que se puede decir que es la ciencia más complejas de aprender y comprender, suena ilógico pero es cierto, esto resulta de cuestionar sobre las metodologías que los docentes de matemáticas constantemente aplican en el momento de explicar esta asignatura; primero hacen ver sus contenidos como una verdad exacta que supone el desarrollo de una asimilación matemática en vez de un pensamiento matemático, “la mayoría de los estudiantes piensan que la manera más segura para tratar satisfactoriamente con este dominio no es tratar de comprender, sino sólo funcionar mecánicamente” Artigue (2001). Además inducen a la memorización de diversos ejemplos, procesos técnicos y ejercicios algebraicos, que se olvidan fácilmente y se oponen al aprendizaje significativo, ya que los estudiantes se ven limitados en el momento de integrar los conocimientos y aplicarlos en diferentes contextos.

En contraste con lo dicho en el apartado anterior, las metodologías de enseñanza durante el quehacer pedagógico, debe asegurar el aprendizaje significativo de los estudiantes, teniendo en cuenta aspectos fundamentales como los pre-saberes de los discentes, las nociones que se tienen sobre el tema, los procesos que se deben llevar a cabo para articular esos pre-saberes al nuevo conocimiento y así evitar errores cognitivos, las diferentes representaciones en la que se muestra un concepto, y las diversas interpretaciones que tiene un tema

dependiendo el contexto en el que se relaciona.

Las investigaciones sobre el proceso de enseñanza- aprendizaje del cálculo para mejorar el rendimiento académico y las didácticas implementadas por los docentes, tanto en el nivel medio superior (bachillerato) como a nivel superior (universidad) incrementan a través del tiempo. Algunas de estas son Radillo & González (2014), Vrancken, Gregorini, Engler, Müller, & Hecklein (2006), Buendía & Molfino (2010) y Irazoqui & Medina (2013) que se esfuerzan por elaborar un paradigma que facilite la comprensión de este tema.

La mayoría de las investigaciones coinciden en que una de las causas, por el cual resulta difícil la comprensión del cálculo diferencial radica en su pre-saber más importante que es el concepto de límite, los estudiantes inician el estudio del cálculo sin comprender cabalmente los límites, la falta de formalización del concepto se expone en diferentes razones:

Primero, la mayoría de los docentes, no tiene en cuenta las diferentes representaciones, en las que se puede mostrar el límite de una función, que se puede visualizar a partir de (graficas, tablas de datos, cálculos algorítmicos) según Duval (1993).

Segundo, la dificultad en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto se debe a las diferentes concepciones históricas que han surgido a través del tiempo, las concepciones erróneas son el resultado de obstáculos epistemológicos presentes en cada época, y que la comunidad científica ha intentado resolver. (Brousseau,1983)

Tercero, El conocimiento pedagógico del contenido (CPC) del concepto , Shulman (1986) enfatiza que para enseñar no basta con saber contenidos y tener un saber pedagógico general, sino que el docente

debe tener un conocimiento pedagógico específico acerca de dicho contenido, con el objetivo de disminuir las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Metodología

La presente investigación, tiene como objetivo general describir los enfoques teóricos, disciplinares, tendencias y perspectivas metodológicas dadas al concepto de *límite*, en un periodo comprendido entre el año 2000-2017. Para llevar a cabo el desarrollo de esta investigación en primer lugar se buscaron estudios en diferentes bases de datos (Dialnet, Google Académico, SciELO, REDALYC, SOAREM, ScienceDirect, TESEO, RACO y RUA), esto es: secciones de libros, revistas científicas y tesis que nos aportaran información válida acerca del límite; seguidamente se realizó una síntesis de la información de cada documento, donde se resaltaban datos como: fuente bibliográfica, año en que fue publicado, autor del texto, título del documento, objetivo general, referente teórico, características metodológicas y principales resultados de cada uno de ellos; posteriormente se determinó unas categorías específicas para los 30 artículos que se tomaron como objeto de estudio, con el fin de analizar e interpretar los objetivos que han perseguido las diversas comunidades científicas. Las categorías evaluadas fueron:

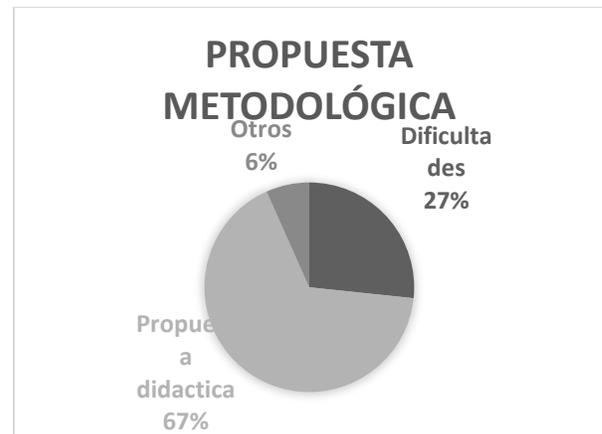
1. Según la propuesta metodológica, que a su vez se dividió en tres subcategorías:
 - a. La identificación de dificultades que presentan los estudiantes o docentes en la formalización del concepto de límite.
 - b. Propuesta didáctica, que busca dar solución o minimizar los errores presentes en el concepto.
 - c. La tercera subcategoría denominada como otros, hace referencia a investigaciones documentales.

2. Según el tipo de enfoque metodológico, aplicada en cada una de las investigaciones, se tomaron en cuenta las siguientes, subcategorías: cuantitativo, cualitativo y mixta.

3. Según la población objeto de estudio, se establecieron dos categorías: estudiantes y docentes. Además se anexo una tercera subcategoría, nombrada como otros, que aborda las investigaciones, cuyo objeto de estudio eran concepciones históricas del concepto.

Resultados

a) Propuesta Metodológica



Al realizar la sistematización de las investigaciones, se consideró como criterio de clasificación la identificación de las dificultades que presentan los estudiantes o docentes alrededor del concepto de límite y la aplicación de una propuesta didáctica con el objetivo de dar solución a estas dificultades.

Se identificaron varios marcos referenciales dentro de los que se destacan, el trabajo de Duval, Shulman, Thompson, Weierstrass y Blázquez. En el caso de Duval bajo la teoría de las representaciones semióticas, se desarrollaron investigaciones tales como: Páez (2005), Valls, Pons & Linares, (2011)

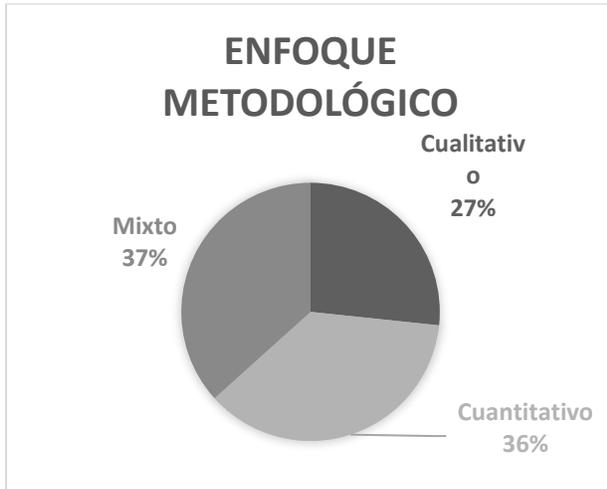
y Morales, Reyes & Hernández (2013). En la investigación de Medina (2001) se tuvo en cuenta el marco referencial de Shulman que hace énfasis en el conocimiento pedagógico que debe tener el docente, como herramienta que le permite comprender los objetivos generales y específicos sobre el contenido de la materia o disciplina. En el caso de Thompson, con respecto a la concepción sobre las estructuras mentales (significado, regla, imagen mental, preferencia, consciencia o inconsciente) de carácter general que tienen los estudiantes en base a un concepto, se orientó la investigación de Sierra, González & López (2000). Por último la investigación de Blázquez, Ortega, Gatica & Benegas (2006), hace alusión al marco referencial de Weierstrass en la conceptualización métrica de límite y Blázquez sobre la conceptualización como aproximación óptima de límite. Estas investigaciones identificaron las dificultades que presentan los estudiantes o docentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

También se encontraron marcos referenciales dentro de los que se destacan, los trabajos de Brousseau, Sierpinski y Von Glasersfeld. En el caso de Brousseau bajo la teoría de las situaciones didácticas, la cual hace referencia a la hipótesis de que los conocimientos no se construyen de manera espontánea sino que necesitan una construcción colaborativa (comunidad educativa) y el aprendizaje de los estudiantes depende de dicha interacción, se desarrollaron investigaciones tales como: Aquere, y otros (2009), Barrantes & Mora (2013) y Espinoza & Azcárate (2000). En las investigaciones de Blázquez & Ortega (2001), Vrancken, Gregorini, Engler, Müller & Hecklein (2006) y Engler y otros (2008) se identificó un marco referencial que hace alusión al modelo de comprensión Sierpinski. En el caso de la investigación de Fernández, Ruíz & Rico (2015) se tuvo en cuenta el marco referencial sobre los dos puntos de vista de Von Glasersfeld para

prescribir la pertinencia de la noción de concepción: el primero de ellos desde el punto de vista del estudiante, como la descripción interna e individual del concepto y desde el punto de vista del investigador, la concepción del estudiante se define como el conjunto de respuestas (verbal, gráfico, simbólico, gestual, entre otros). Por último, en la de investigación de (Contreras de la Fuente, García Armenteros & Font Moll, (2012) se utilizó el marco referencial sobre el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. En estas investigaciones se trabajó un marco referencial para identificar las dificultades de los estudiantes en la conceptualización del límite y proponer una secuencia didáctica que permite mejorar la enseñanza y aprendizaje.

La grafica sobre propuesta metodológica nos muestra que el 6% de las investigaciones abordaron la conceptualización e historia del límite, el 27% identificaron las dificultades que presentan los estudiantes o docentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje y el 67% además de identificar dificultades, aplicaron una propuesta didáctica con el objetivo de disminuir los errores que se presentan en la comprensión del concepto de límite.

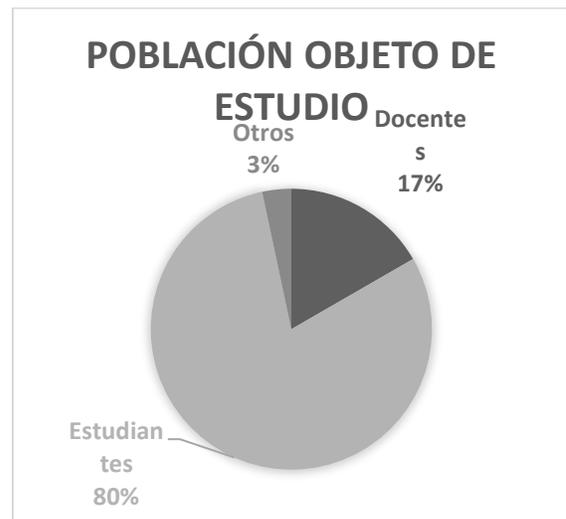
b) De acuerdo a su Enfoque Metodológico



Se realizó una clasificación, teniendo en cuenta el enfoque metodológico (cualitativo, cuantitativo y mixto), en base al criterio aplicado a las investigaciones se obtuvo que Irazoqui & Medina (2013), Morales, Reyes & Hernández (2013), Morales, Reyes, & Hernández (2013), García, Chew, & González (2007) y Sierra, González & López (2000) utilizaron un enfoque cualitativo y aplicaron entrevistas como técnica de recolección de información. Las investigaciones de Engler, y otros (2008), Valls, Pons, & Llinares (2011) Fernández, Ruíz & Rico (2015), Barrantes & Mora (2013), Dal y otros (2008), Mira, Valls, & Llinares (2013) y Bustos (2013) aplicaron test, cuestionarios e ítems con un enfoque metodológico a nivel cuantitativo. También se hallaron investigaciones, tales como : Casuso (2000), mormez & Basturk (2010), Aquere y otros (2009), Torroba, Reid, & Etcheverry (2006) y Engler, Vrancken, Hecklein, Müller & Gregorini (2007) con un enfoque mixto (cualitativo y cuantitativo) que incluía: pruebas diagnósticas ,videos, observaciones de campo, evaluaciones ,cuestionario, análisis de textos, apuntes del profesor y entrevistas, estas técnicas e instrumentos se emplearon con el objetivo de recolectar información y hacerles un análisis a nivel cualitativo y cuantitativo.

En la gráfica de diagrama circular se observa que el enfoque a nivel cualitativo tuvo un porcentaje de 27 % a diferencia del enfoque a nivel cuantitativo y mixto que obtuvieron un porcentaje de 36 % y 37 % respectivamente.

c) *En función de la población objeto de estudio*



En las investigaciones de Blázquez , Ortega , Gatic & Benegas (2006), Torroba, Reid, & Etcheverry, (2006) y Radillo & González (2014) participaron estudiantes de educación superior, a nivel de pregrado que cursaban carreras de: licenciatura en matemáticas, física, economía, estadística e ingeniera; de la misma manera Aquere, y otros (2009), Engler, Vrancken, Hecklein, Müller, & Gregorini (2007), Engler, y otros (2008) trabajaron con estudiantes que hacían parte de la facultad de ciencias agrarias. A diferencia de las investigaciones Morales, Reyes, & Hernández (2013), Blázquez & Ortega (2000), Casuso (2000), Palomino (2012) y Blázquez, Ortega, Gatica & Benegas (2006) tuvieron en cuenta a estudiantes de bachillerato de entre 15 y 17 años de edad.

Se destacan las investigaciones de Espinoza & Azcárate (2000), Páez (2005), Irazoqui & Medina (2013) y Donmez &

Basturk (2010) en las que se trabajó con docentes de bachillerato, educación superior a nivel de pregrado y posgrado como población objeto de estudio. Por último encontramos la investigación Medina (2001) que no tuvo población objeto de estudio sino que hizo un estudio sobre los obstáculos epistemológicos.

En la gráfica de diagrama circular se observa que las poblaciones objeto de estudio (estudiantes, docentes y otros) obtuvieron un porcentaje de 80%, 17% y 3% respectivamente.

Conclusión

Finalizada la descripción de resultados, podemos decir que la mayoría de las investigaciones referentes al tema de límites tiene en cuenta la aplicación de secuencias didácticas en base a diferentes teorías como la de Duval (teoría de representaciones semióticas), Brousseau (teoría de los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemática), Sierpinski (teoría de los actos de comprensión), además, (la concepción de estructura mental) de Thompson, (la conceptualización métrica de límite) de Weierstrass y (la conceptualización como aproximación óptima de límite) de Blázquez; sin embargo, en el momento de abordar el tema lo hacen desde una perspectiva abstracta, es decir desde la presentación del contenido de manera algebraica y gráfica, y no su aplicación en el contexto. Por tal motivo, se sugiere que en las futuras investigaciones se enfoquen más en el carácter significativo del tema, ya que este factor incide en la formalización del concepto y en la actitud de disposición e interés del estudiante por aprender el tema.

De acuerdo con el criterio de enfoque metodológico, se observó que predomina la investigación cuantitativa y mixta sobre el nivel cualitativo; aunque se destaca el esfuerzo dedicado por la comunidad de

investigadores por lograr la asimilación del tema al utilizar diversas herramientas en las que se puede comunicar el tema, también es importante que los docentes conozcan a nivel cualitativo las aproximaciones que los estudiantes tienen sobre los conceptos, en relación con las diferentes ámbitos en lo que se aplica.

De acuerdo con los resultados, se observó que en la mayoría de las investigaciones predomina la comunidad de estudiantes a nivel universitario, como objeto de estudio, en comparación con los estudiantes de bachillerato. En cuanto a esta situación se sugiere realizar un mayor énfasis en investigación a nivel de preparatoria, con el objetivo de abordar adecuadamente el concepto y disminuir los errores epistemológicos en los discentes que inician sus estudios universitarios. Además, también se mostró, que las investigaciones se inclinan más por los estudiantes que por los docentes, es decir, se enfocan más en el aprendizaje que en la enseñanza, este hecho nos permite sugerir un equilibrio en estos dos aspectos ya que van de la mano.

Referencias Bibliográficas

Aquere, S., Engler, A., Vrancken, S., Müller, D., Hecklein, M., Gregorini, M. I., & Henzenn, N. (2009). Una propuesta didáctica para la enseñanza de límite. Premisa, 14-24.

Artigue, M. (2001). What can we learn from educational research at the university level? En D. Holton, *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (págs. 207-220). Kluwer Academic Publishers.

B, M., & Casuso, F. (2000). Perfeccionamiento de La enseñanza-aprendizaje del tema límite de funciones con el uso de un asistente matemático. *Latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 171-188.

Barrantes Gutiérrez, J., & Mora Soto, A. (2013). Propuesta Didáctica de la enseñanza de Límites.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., & Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad latinoamericana de investigación en matemática educativa, 189-209.

Blázquez, S., & Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En En El futuro del cálculo infinitesimal (págs. 1-13). Iberoamericana.

Blázquez, S., & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. Latinoamericana de investigación en matemática educativa, 219-236.

Blázquez, S., & Ortega, T. (2001). Rupturas en la comprensión del concepto de límite. Ediciones Universidad de Salamanca, 119-135.

Blázquez, S., Gatica, S. N., & Ortega, T. (2008). Concepto de límite funcional: Aprendizaje y memoria. Contextos Educativos, 7-21.

Brousseau. (1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. En Recherches en didactique des mathématiques (págs. 165-198). México : Cinvestav.

Buendía Abalos, G., & Molfino Vigo, V. (2010). El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institucionalización. Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 27-41.

Bustos, I (2013). Propuesta didáctica: la enseñanza del concepto de límite en el grado undécimo, haciendo uso de Geogebra (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia sede de Manizales.

Contreras de la Fuente, Á., & García Armenteros, M. (2011). Significados pretendidos y personales. Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 277-310.

Contreras de la Fuente, Á., García Armenteros, M., & Font Moll, V. (2012). Análisis de un Proceso de Estudio sobre la

enseñanza del límite de una función. BOLEMA, 667-690.

Dal Blanco, N., Botta Gioda, R., Castro, N., Yi Lee, M., Martínez, S., Pia Salvadori, A., & Prieto, F. (2008). Diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza del concepto de límite. Memorias, 315-322.

Donmez, G., & Basturk, S. (2010). Pre-service mathematical teachers' knowledge of different teaching methods of the limit and continuity concept. ELSEVIER, 462-465.

Duval. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. En annales de Didactique et de sciences cognitives (págs. 37-56). IREM.

Engler, A., Gregorini, M. I., Vrancken, S., Müller, D., Hecklein, M., & Henzenn, N. (2008). El Límite Infinito: Una Situación Didáctica. Premisa, 11-21.

Engler, Vrancken, Hecklein, Müller, & Gregorini. (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita. Iberoamericana de educación matemática, 113-132.

Espinoza, L., & Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de <<Límite de función>>: Una propuesta metodológica para el análisis. Enseñanza de las ciencias, 355-368.

Fernandez, J. A., Ruíz, J. F., & Rico, L. (2015). Razonamientos basados en el concepto del límite finito de una función en un punto. Enseñanza de las Ciencias, 211-229.

García, F., Chew, H., & González. (2007). Problemas de aprendizaje del concepto de límite en el contexto de la Cultura Científica y Tecnología, 26-36.

Irazoqui Becerra, E., & Medina Rivilla, A. (2013). Estudio preliminar de aproximación al concepto de límite de una función. Theoria, 21-31.

Medina, A. C. (2001). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. Tecné, Episteme y Didaxis.

Mira López, M., Valls González, J., & Llinares, S. (2013). Un experimento de enseñanza sobre el límite de una función. *Iberoamericana de educación Matemática*, 89-107.

Morales Carballo, A., Reyes García, L. E., & Hernández Gómez, J. C. (2013). El límite al infinito. *Análisis preliminar para la elaboración de una estrategia metodológica de su enseñanza-aprendizaje*. Premisa.

Páez Murillo, R. E. (2005). Construcción del concepto de límite: un estudio de caso. *Respuestas*, 42-50.

Palomino, W. A. (2012). Impacto de herramientas Moodle en el aprendizaje de límites de funciones. *Virtual Universidad Católica del Norte*, 75-103.

Radillo Enríquez, M., & González Rendón, L. (2014). Enseñanza del concepto de límite de una función mediante sus diversas representaciones semióticas, a nivel licenciatura. En *Propuestas para la enseñanza de las matemáticas* (págs. 853-861). Mexico: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Salinas, P., & Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo. *Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 355-382.

Shulman, L. (1986). *Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching*. American Educational Research Association, 4-14.

Sierra Vázquez, M., González Astudillo, M. T., & López Esteban, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 71-86.

Torroba, E., Reid, M., & Etcheverry, N. (2006). Enseñanza-Aprendizaje del concepto de límite de funciones con el uso de Tic's. *Memorias*, 160-168.

Valls, J., Pons, J., & Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de

una función. *Enseñanza de las ciencias*, 325-338.

Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Müller, D., & Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite. *Premisa*, 9-19.