Abstract

In this thesis minimizers of the functional $F(u) := \int_\Omega |Du(x)|\mathrm{d}x + \frac{1}{p}\int_\Omega |Du(x)|^p\mathrm{d}x - \int_\Omega au(x)\mathrm{d}x$ on a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ are studied. It is shown how subsolutions and supersolutions of the corresponding equation $-\Delta_1 u - \Delta_p u = a$ can be defined, that with this definition the comparison principle and other properties known from nonlinear potential theory are valid, and that these notions can be used as a characterization of minimizers with respect to local perturbations. Examples of such minimizers are given, and a Lipschitz regularity statement is shown. Finally, two boundary value problems are investigated in more detail: zero boundary values on a convex domain (simple problem) and constant inner and outer boundary values on a domain that is the difference of two convex sets (ring problem) with $a = 0$. Several properties of minimizers of these problems in two dimensions are shown: For the simple problem, minimizers assume their maximum in a set of positive measure (a plateau), and this set is simply connected. For the ring problem, minimizers are quasiconcave, and outside of a possibly existing set that touches the outer boundary and where the minimizers are constant, they are smooth.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Minimierer des Funktionals $F(u) := \int_\Omega |Du(x)|\mathrm{d}x + \frac{1}{p}\int_\Omega |Du(x)|^p\mathrm{d}x - \int_\Omega au(x)\mathrm{d}x$ auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ studiert. Es wird gezeigt, wie Unter- und Oberlösungen der zugehörigen Gleichung $-\Delta_1 u - \Delta_p u = a$ definiert werden können, dass mit dieser Definition das Vergleichsprinzip und weitere aus der nichtlinearen Potentialtheorie bekannte Eigenschaften gelten, und dass diese Begriffe als Charakterisierung von Minimierern bezüglich lokalen Störungen verwendet werden können. Beispiele von solchen Minimierern werden gegeben, und eine Aussage zu Lipschitz-Regularität wird gezeigt. Schließlich werden zwei Randwertprobleme genauer untersucht: Null-Randwerte auf einem konvexen Gebiet (einfaches Problem) und konstante Werte auf dem inneren und auf dem äußeren Rand auf einem Gebiet, das die Differenz zweier konvexer Mengen ist (Ringproblem), mit $a = 0$. Mehrere Eigenschaften von Minimieren dieser Probleme in zwei Dimensionen werden gezeigt: Für das einfache Problem nehmen Minimierer ihr Maximum in einer Menge positiven Maßes an (ein Plateau), und diese Menge ist einfach zusammenhängend. Für das Ringproblem sind Minimierer quasikonkav, und außerhalb einer möglicherweise existierenden Menge, die den äußeren Rand berührt und wo die Minimierer konstant sind, sind sie glatt.