Optimalisering in financiering, economie en wiskunde: welke toepassingen zijn overtuigend?

Jan Brinkhuis, Econometrisch Instituut, Erasmus Universiteit Rotterdam

1 Toepassingen die door de mand vallen

Provocerende tentamenopgave. Ik heb gisteren mijn laatste college niet-lineaire optimalisering voor tweedejaars econometriestudenten gegeven. Eindelijk tijd om aan mijn tekst voor de zomercursus te beginnen. De titel van mijn lezing is bijna identiek aan die van een opgave uit het tentamen na afloop van mijn vorige cursus. Mijn college gisteren stond uiteraard in het teken van het komende tentamen en ik heb de studenten beloofd dezelfde vraag weer te zullen stellen. De precieze vraag is: welke toepassing van optimalisering vind je het meest overtuigend en welke het minst, en waarom? Dat ik wilde weten welke toepassingen het minst overtuigde, trok vooral de aandacht. "Dat is zeker voor de tweede druk van uw boek[1]; dan gaat u die toepassingen zeker weglaten." Daar zat wel wat in. Bij het vorige tentamen hadden een paar toepassingen het zwaar te verduren en daar heb ik toen consequenties uit getrokken.

Het huwelijksfeest van de sultan. Zo dacht ik bijvoorbeeld een mooie toepassing te hebben over het huwelijksfeest van de sultan. Deze wil het aantal dagen dat het feest zal duren en de dagelijkse hoeveelheden vaten wijn, die voor de onlesbare gasten uit de wijnkelder worden gehaald, zo kiezen dat het succes van het feest zo groot mogelijk is. In die wijnkelder bevinden zich bij het begin van het feest honderd vaten, en de sultan neemt aan dat het product van de gekozen dagelijkse aantallen wijnvaten een goede maat is voor het succes van het feest. Uiteraard is hier de bedoeling dat hoe groter dit product is, hoe beter het feest. Dus een feest van vier dagen met tien, twintig, dertig en veertig vaten is beter dan een feest van twee dagen met iedere dag vijftig vaten, want het product $10 \times 20 \times 30 \times 40$ is groter dan het product 50×50. Is het misschien zo dat hoe langer het feest duurt, hoe beter het is? Zo eenvoudig is het niet want een feest van honderd dagen met op elke dag een vat leidt tot het magere product een. Iedereen die houdt van een eenvoudige breinbreker op zijn tijd, zal plezier kunnen beleven aan het vinden van de optimale afweging tussen een lang feest en veel wijn per dag.

Kritiek op 'Het huwelijksfeest van de sultan'. En nu de pijlen die de studenten bij het vorige tentamen op deze opgave hebben afgeschoten. Het meest pijnlijke schot betrof mijn culturele blunder wat betreft de combinatie wijn en sultan. Ik heb snel een kroonprins van de sultan gemaakt. Een andere pijl die doel trof was het vraagteken dat je kunt plaatsen bij de gekozen maat voor het succes van het feest: het product van de dagelijkse hoeveelheden wijnvaten. In economische termen is dat een keuze van een *nutsfunctie*. Deze nutsfunctie heeft wat dubieuze eigenschappen. Een dag zonder wijn verknoeit blijkbaar het hele feest, en een extra dag met maar een vat geeft geen extra plezier. Nog drie succesvolle pijlen:

[1] J. Brinkhuis, V. Tikhomirov, *Optimization: Insights and Applications*, Princeton University Press, 2005

1. hoe kun je de uitkomst van dit probleem in de praktijk gebruiken ('pragmatisch nut'),
2. wat voor economisch of ander nieuw inzicht illustreert het ('wetmatigheid'),
3. leidt het tot de essentie van een wiskundig verschijnsel ('wiskunde')?

Een leuke puzzel is nog geen overtuigende toepassing. Een moment dacht ik nog dat in ieder geval de laatste pijl zou afketsen. Want als je de franje weglaat, blijft er dan niet een leuke wiskundige puzzel over? Dat is zo, maar diepgaande discussies met mijn coauteur Prof. V. Tikhomirov uit Moskou, hebben mij tot het inzicht gebracht dat zulke puzzels, hoe leuk en uitdagend ook, niet aan de hoogste eisen van echt overtuigende toepassingen voldoen. De oplossing leidt niet tot het doordringen tot de essentie van wat dan ook. Dat neemt overigens niet weg dat het oplossen van puzzels een boeiende bezigheid kan zijn.

Vergelijking van e^π en π^e. Hier is nog een aardige puzzel: welk getal is groter, e^π of π^e? Met een rekenapparaat zie je dit zo—het scheelt overigens maar weinig, die getallen zijn bijna gelijk—maar de uitdaging is om dit te bewijzen en het blijkt dat je dit het eenvoudigst kunt doen met optimaliseringsmethoden, hoewel de puzzel niets met optimalisering te maken lijkt te hebben. De clou is dat je het probleem kunt vervangen door het probleem welk getal groter is, $e^{e^{-1}}$ of $\pi^{\pi^{-1}}$; dit brengt je dan op het idee om de functie $f(x) = x^{x^{-1}}$ te maximaliseren. Overigens gebruikt Matlab deze puzzel om grafische mogelijkheden te demonstreren: aan de grafiek van de functie $x^y - y^x$ kun je duidelijk zien wat de oplossing is van deze puzzel. Maar een echt bewijs is dat natuurlijk niet.

Gearrangeerd huwelijk. Een andere toepassing die het bij het vorige tentamen moest ontgelden betrof het verschijnsel gearrangeerd huwelijk. Het ging hier om een situatie met een beperkt vetorecht: de vraag is wat het optimale gebruik van dit vetorecht is. Hier zijn de details.

In grote delen van Afrika, Azië en het Midden Oosten is een aanzienlijk deel van alle huwelijken gearrangeerd. Het algemene idee achter dit gebruik is dat jonge mensen op plezier uit zijn en dat je er niet op kunt vertrouwen dat zij zelf een geschikte partner kunnen vinden. Daarom nemen ouders, vrienden en bemiddelaars de taak op zich om een geschikte bruid te vinden. We maken nu de volgende aannamen. De jongeman heeft een vetorecht: hij heeft de mogelijkheid om 'nee' te zeggen tegen een huwelijksvoorstel. Als hij dat doet, wordt er verder gezocht naar een nog betere kandidaat. Dus het weigeren van een voorstel is aantrekkelijk: het volgende voorstel zal beter zijn. Maar er is een probleem: altijd blijven weigeren is ook niet aantrekkelijk.

Laten we eens kijken naar het geval van een jongeman die wil trouwen voordat hij de leeftijd T bereikt. Hij besluit om alle voorstellen voor een poosje te weigeren, zeg tot moment w, en dan ja te zeggen tegen het eerste voorstel dat hij daarna krijgt. Welke w zou hij dan het best kunnen kiezen? Bij keuze van een kleine w is de kans hoog dat er na het voorstel waartegen hij ja zegt, nog een ander voorstel gedaan zou worden voordat hij de leeftijd T bereikt. Dan zou hij dus niet de best mogelijke kandidaat gekregen hebben. Aan de andere kant, als hij w groot kiest, dan is de kans hoog dat hij de leeftijd T bereikt zonder te trouwen. We nemen aan dat de huwelijksvoorstellen die hem gedaan worden een continue Poissonverdeling volgen met gegeven gemiddelde. Verder nemen we aan dat zijn doel is om de kans op succes te maximaliseren. Deze kans is gelijk aan de kans dat hij precies een voorstel zal krijgen in het tijdsinterval $[w, T]$. Als hij in dit interval nul voorstellen zou ontvangen, dan zou hij ongetrouwd blijven en als hij in dit interval meer dan een voorstel zou krijgen, dan zou hij trouwen met de verkeerde kandidaat. Daarom is hij alleen succesvol als hij precies een voorstel krijgt.

Kritiek op 'Gearrangeerd huwelijk'. Er zijn zelfs wetenschappelijke publicaties waarin geprobeerd wordt om het afwegingsprobleem tussen te snel accepteren en te lang wachten te modelleren en op te lossen. Leuke modellen, daar niet van, maar geen overtuigende toepassingen, want de uitkomsten hebben geen praktisch nut en leiden niet tot waardevolle nieuwe inzichten of wetmatigheden. Overigens heb ik gemerkt dat het onderwerp gearrangeerde huwelijken de emoties hoog kan doen oplaaien... Ik heb daarom nog overwogen een dating show van het gearrangeerde huwelijk te maken. Maar eerlijk gezegd zijn de aannamen zelfs niet erg realistisch voor een datingshow, dus, alles bij elkaar, weg met dit voorbeeld; gelukkig waren de drukproeven voor de eerste druk nog niet de deur uit.

Wie heeft gelijk, de econoom of de econometrist? Een toepassing die ik voorlopig ook maar heb geschrapt, heette: 'Wie heeft gelijk, de econoom of de econometrist?' Het behandelt een interessante kwestie, met een knipoog die duidelijk was, dacht ik, en aan de hand van een verhaal waar de lezer aan het eind op het verkeerde been wordt gezet.

Een econoom onderzoekt een kruispunt in New York City. Het is een druk kruispunt en iedere week gebeuren er meestal wel een paar auto-ongelukken. De econoom wil dit modelleren en hij wil een schatting geven van de kans dat er in een bepaalde week geen ongeluk zal zijn. Hij begint met het verzamelen van informatie en dan maakt hij een lijst van het aantal ongelukken in elk van de afgelopen honderd weken. Hij neemt aan dat het aantal ongelukken in een week verdeeld is als een discrete Poissonverdeling. Daarom schat de econoom het gemiddelde λ van die verdeling—die zoals gezegd de verdeling bepaalt—door gewoon het gemiddelde te nemen van de honderd getallen op zijn lijst. Dan vult hij deze waarde in in de bekende formule voor de Poissonverdeling om de gezochte modellering te krijgen en daarna vult hij 0 in om de kans dat er geen ongeluk is te schatten. Een paar dagen later komt de econoom een kennis tegen die econometrie studeert. De econoom vertelt over zijn oplossing voor het auto-ongelukkenprobleem, maar de econometrist zegt meteen dat de zaak niet zo eenvoudig ligt. "Je mag niet zomaar het gemiddelde aantal wekelijkse ongelukken schatten door het gemiddelde van de aantallen van de laatste honderd weken te nemen. Je moet eerst een schattingsmethode kiezen, bijvoorbeeld de Maximum Likelihood methode." Zij gaat aan de slag met die methode, en de schatting die zij dan vindt is gewoon het gemiddelde dat de econoom genomen heeft.

Kritiek op 'Wie heeft gelijk, de econoom of de econometrist?' Het verhaal werd niet afgesloten met een moraal, de conclusie werd met opzet aan de lezer overgelaten. Dit leidde tot zeer diverse, soms felle, reacties bij mijn onderwijs aan econometriestudenten en bij het onderwijs aan PhD-studenten economie. Zo werd hier door sommigen uit geconcludeerd dat dit weer eens illustreert dat 'al die statistische moeilijkdoenerij' nergens goed voor is, anderen wierpen mij voor de voeten dat het een vergissing is om hier een voorbeeld te kiezen waar een eenvoudige formule achteraf de beste blijkt te zijn. Zelf had ik eigenlijk verwacht dat de boodschap dat bewezen is dat een eenvoudige schattingsformule ook de beste is, in goede aarde zou vallen. Overigens, een ander voorbeeld van dit verschijnsel is de zeer populaire kleinste kwadraten methode; het is van belang om er bij het onderwijs op te wijzen dat deze schattingsmethode niet alleen de nu eenmaal gangbare is, maar ook de *beste* schatting geeft. Omdat, tegen mijn verwachting in, de tekst tot misverstanden bleek te leiden, heb ik de toepassing voorlopig geschrapt, maar binnenkort hoop ik een versie te schrijven waarbij de aandacht niet nodeloos van de essentie wordt afgeleid.

Nieuwe pijlen? Ik ben benieuwd wat het tentamen over twee weken voor nieuwe interessante reacties op de huidige collectie toepassingen zal opleveren.

De rode draad. Toepassingen van optimalisering met continue variabelen kunnen alleen dan als echt overtuigend worden beschouwd als ze bestand zijn tegen een van de volgende drie kritische vragen: dienen ze een pragmatisch doel (dit is bijvoorbeeld het criterium in de financiering), geven ze een verhelderend inzicht in een wetmatigheid (dit is bijvoorbeeld het criterium in de economie) of leiden ze tot het doorgronden van een diepzinnig verschijnsel (het criterium in de wiskunde).

Voorlopige samenvatting. De boven gegeven voorbeelden vallen allemaal door de mand.

1. ‘Het huwelijksfeest van de kroonprins’ wekt door zijn vormgeving de indruk dat het een pragmatisch doel dient, een zo geslaagd mogelijk feest, maar het verhaal is onrealistisch en alleen bedoeld om een puzzel wat ‘op te leuken’.

   [Terzijde, alle wiskunde leerboeken voor het VWO staan vol van dit soort schijntoepassingen. De bedoeling is om de ‘droge stof’ aantrekkelijker te presenteren, maar de werkelijkheid is dat dit door bijna geen enkele leerling gewaardeerd wordt, en dat bestudering van deze schijntoepassingen bijdraagt aan een verkeerde en negatieve beeldvorming—wellicht voor het leven—bij middelbare scholieren over wat wiskunde is en wat je ermee kunt doen.]

   Op het tweede gezicht lijkt het probleem een overtuigende wiskundige toepassing, maar het is alleen een puzzel, die met veel plezier kan worden opgelost, maar die verder nergens toe leidt.

2. ‘Het gearrangeerde huwelijk’ is bedoeld om inzicht in een aspect van de werkelijkheid om ons heen te krijgen, maar slaagt daar niet in: het leidt tot geen enkel verhelderend inzicht. Dit soort problemen heeft wel zijn waarde, het zijn leuke vingeroefeningen met behulp waarvan je kunt proberen te leren om economische verschijnselen in een simpel model te vangen.

3. ‘Wie heeft gelijk de econometrist of de econoom?’ bevat impliciet verschillende boodschappen, maar de ervaring heeft mij geleerd dat een boodschap tegelijk tot een beter effect leidt.

Verder hebben we gezien dat ook problemen die op het eerste gezicht niets met optimalisering te maken hebben, soms toch met optimaliseringsmethoden kunnen worden aangepakt. Bijvoorbeeld het is een verrassing dat de puzzel 'Welk getal is groter, e^π of π^e?' kan worden opgelost door een functie van een variabele te maximaliseren. Verder realiseren niet alle gebruikers van populaire methoden (zoals de kleinste kwadraten methode) zich dat dit eigenlijk oplossingen van optimaliseringsproblemen zijn.

2 De drie gouden klassen van overtuigende toepassingen: nut, inzicht en diepte.

Mijn belangstelling voor wiskunde is voor een deel gewekt door het plezier dat ik op de middelbare school had in puzzels; dit werd verder gestimuleerd door wiskundeolympiades. Ik vind zulke puzzels nog steeds boeiend. Ik was bijvoorbeeld heel enthousiast over de toepassing van optimalisering op het probleem om e^π en π^e te vergelijken dat ik hierboven heb genoemd. Ik besloot het een prominente plaats te geven in het boek over optimalisering dat ik aan het schrijven was samen met Prof. Tikhomirov. Maar hier stuitte ik onverwacht op groot verzet bij mijn coauteur. Na lange en interessante discussies zijn wij tot de volgende lijst van drie gouden klassen van serieuze en overtuigende toepassingen gekomen. Allebei kwamen we verrijkt uit die discussie. Ik kreeg een helder inzicht in het onderscheid tussen puzzels en wiskundige toepassingen. Mijn coauteur was aangenaam verrast hoeveel overtuigende toepassingen er zijn van optimaliseringsmethoden op het gebied van economie en financiering. Dit zijn de drie gouden klassen die volgens ons alle overtuigende toepassingen bevatten. Sommige overtuigende toepassingen behoren tot meer dan een klasse.

1. **Pragmatische toepassingen ('nut').** Pragmatische overwegingen stimuleren een mens om het beste te doen dat hij kan, gegeven bestaande beperkingen. Het gaat hier vaak om een afweging tussen tegengestelde effecten. Bijvoorbeeld, hoe meer jaren onderwijs je volgt, hoe beter je baan zal zijn. Tegenover die baten staan ook kosten, je moet voor je opleiding betalen en in de tijd dat je studeert verdien je niets. Er zijn talloze voorbeelden van economische pragmatische problemen, bijvoorbeeld problemen van minimale kosten, maximale winst of maximaal sociaal welzijn.

   Deze klasse wordt hieronder geïllustreerd met een toepassing uit de financiering die een enorme impact heeft gehad: het probleem van het prijzen van opties. Het werk van Black en Scholes heeft dit probleem opgelost en dit heeft geleid tot meer stabiliteit in de financiële wereld.

2. **Wetmatigheden ('inzicht').** De meeste—of alle—natuurwetten kunnen worden gezien alsof de natuur optimaliseert. Bijvoorbeeld, licht gedraagt zich in wezen alsof het de snelste weg kiest. In de economie zijn er soortgelijke voorbeelden. Een ervan betreft het marktprincipe, een van de fundamenten van de economie. Dit laat zien dat markten in de volgende zin tot een optimale uitkomst leiden: de prijs waarvoor vraag gelijk is aan aanbod is de prijs waarvoor het sociale welzijn maximaal is. Veel van die economische toepassingen zijn belangrijk voor het bepalen van economisch beleid.

Deze klasse illustreren we hieronder met behulp van het werk van Kydland en Prescott, winnaars van de Nobelprijs Economie 2004: aan hun ontdekking heeft de wereld een lange periode van lage inflatie te danken.

3. **Wiskundige toepassingen ('diepte').** De rechtvaardiging voor wiskundige toepassingen is minder recht toe recht aan. Het is het nobele streven om tot de essentie van alles door te dringen: wetenschappelijke nieuwsgierigheid drijft sommige mensen ertoe om kwesties tot op de bodem uit te zoeken. Bijvoorbeeld, als je al een boven- of benedengrens hebt die voldoet voor praktische doeleinden, dan kan je toch doorgaan om de scherpste grens te vinden.

   Deze klasse zullen we illustreren met de hoofdstelling van de algebra, een veelgebruikt resultaat dat in principe bekend is aan iedere middelbare scholier: ieder polynoom van een variabele is volledig te ontbinden in lineaire en kwadratische factoren. Voor praktische doeleinden is het niet nodig om te begrijpen waarom dit zo is. Als je dit toch wilt weten, merk je dat dit niet zo eenvoudig is: bekende bewijzen vereisen of kennis van Galoistheorie of kennis van de theorie van de analytische functies. Hier bieden we een bewijs met behulp van optimaliseringsmethoden aan. Hiermee dring je door tot de essentie van de zaak, en het bewijs kan de vergelijking met de bestaande bewijzen goed doorstaan.

3 Financiering: de juiste prijs voor opties

De formule van Black en Scholes. Nog niet zo heel lang geleden was de handel in opties van weinig betekenis, omdat de juiste prijs voor een optie niet bepaald kon worden. Dankzij het baanbrekende werk van Black en Scholes kan dit nu wel. Dit werk heeft voor een revolutie gezorgd in de *praktijk* van de financiering. Opties spelen een essentiële rol in de economie omdat zij bedrijven in staat stellen om zich te beschermen tegen risico's die zij zelf niet kunnen dragen. Opties bestaan al duizenden jaren maar het leek altijd een kwestie van smaak hoe je ze zou moeten prijzen. Dit leek namelijk af te hangen van je eigen voorspelling van de toekomstige waarde van het onderliggende aandeel, en bovendien van je bereidheid om risico's te nemen. Een verrassend inzicht van Black en Scholes is dat de waarde van een optie voor iedereen precies dezelfde is. De spectaculaire ontwikkeling van de optiemarkten zou niet mogelijk zijn geweest zonder het werk van Black en Scholes.

Opties in het nieuws. Bijna iedereen heeft wel eens gehoord over opties, heeft ze zelf misschien wel eens gekocht, of kent iemand die dat gedaan heeft. Het onderwerp heeft de laatste jaren vaak de kranten gehaald in verband met de beloning van topmanagers in de vorm van opties. Het idee hierachter is dat zulke beloningen een bedrijf weinig kosten, dat ze aantrekkelijk zijn voor de topmanager mede omdat de eventuele winst bij verkoop niet belast is, en dat het de topmanager zou aanzetten tot een betere 'performance' omdat de waarde van zijn optiepakket stijgt als het beter gaat met het bedrijf.

De pech van Michael. Mijn eerste ervaring met opties was via een studentassistent, laten we hem Michael noemen. Op een dag kwam Michael naar mij toe met een geheimzinnig gezicht, hij had van iemand van de afdeling Financiering en Belegging een gouden tip gekregen: de jaarcijfers van Akzo die binnenkort bekend gemaakt zouden worden, zouden veel beter zijn dan verwacht. Dus had hij onmiddellijk voor een relatief klein bedrag opties gekocht, die het recht

gaven om voor de huidige koers aandelen te kopen na bekendmaking van de jaarcijfers. Dan zou de koers naar verwachting omhoog gaan en dan zou hij het koersverschil kunnen incasseren. Een enorme winst voor Michael zou het gevolg zijn. Verder dacht hij geen risico's te lopen, want hij had de bank opdracht gegeven om de opties onmiddellijk te verkopen als de prijs van de aandelen onverhoopt omlaag zou gaan. Spannende weken braken aan, op de grote dag zag ik in het nieuws dat de jaarcijfers inderdaad hoger waren dan verwacht. Ik hoopte al op een feest, maar daarna verscheen Michael een poos niet op de universiteit. Later hoorde ik van hem wat er was gebeurd: de halve financiële wereld had de gouden tip ook gekregen, en deze kennis was al verwerkt in de prijs van de aandelen op het moment dat Michael zijn opties kocht. Er was zelfs een overenthousiasme en daardoor zakte na het bekend maken van de goede jaarcijfers de prijs van de aandelen enigszins. Maar als dat gebeurt zijn de opties ineens niets meer waard, en dus kelderde de prijs van de opties binnen een paar minuten, lang voordat de bank de opties van Michael probeerde te verkopen.
Waar zijn opties (niet) goed voor? Deze anekdote illustreert een elementair feit: als individu kan je voor weinig geld met opties speculeren en zo soms een grote slag slaan, maar je kunt niet systematisch geld verdienen met opties. Dat is ook niet de bedoeling van opties; hun nuttige rol in de financiële wereld is dat ze door bedrijven gebruikt kunnen worden om bepaalde risico's af te dekken; zo leiden ze tot grotere stabiliteit.

Uitleg van de formule van Black en Scholes. De oorspronkelijke methode van Black en Scholes is niet zo eenvoudig uit te leggen. Die methode maakt gebruik van het oplossen van een partiële differentiaalvergelijking. Inmiddels is er een eenvoudig alternatief beschikbaar voor het volgende karaktistieke speciale geval (de formule voor het algemene geval kan hieruit worden afgeleid 'door het nemen van een limiet'): drie assets—een aandeel, een staatsobligatie en een optie—en twee scenario's—het aandeel gaat omlaag of het aandeel gaat omhoog, en een korte periode.

- **Aandeel.** Een aandeel heeft huidige prijs p; in het eerste scenario gaat de waarde naar beneden naar $v^{(1)}$, in het tweede scenario gaat de waarde naar boven naar $v^{(2)}$.

- **Staatsobligatie.** Bovendien is er een staatsobligatie, dat risicoloos is; we zetten de huidige prijs op 1, en we kunnen bereiken, door een normalisatie, dat de waarde 1 blijft. Dit schaadt de algemeenheid niet en vereenvoudigt de formules. In financiële termen komt die normalisatie neer op de aanname dat de rente gelijk is aan 0. Daardoor verandert de prijs van de obligatie niet, en maakt het niets uit dat je de optie-payoff pas na afloop van de periode krijgt terwijl je er nu al voor betaalt.

- **Optie.** Verder is er een Europese call optie op het aandeel, met uitoefenprijs w. Dit is het recht—maar niet de plicht—om het aandeel te kopen na afloop van de investeringsperiode voor de prijs w.

- **Formule van Black en Scholes**. De prijs van de optie blijkt precies vast te liggen onder een plausibele aanname, de afwezigheid van *arbitragemogelijkheden*, waarover later meer, en wordt gegeven door de volgende formule, zoals we zullen zien:

$$p_o = (v^{(2)} - v^{(1)})^{-1}(p - v^{(1)})(v^{(2)} - w). \tag{$*$}$$

Deze optieprijsformule is de formule van Black en Scholes in ons speciale geval.

We illustreren de formule met een numeriek voorbeeld. Daarna beginnen we met de afleiding van de formule.

Voorbeeld. We bekijken een aandeel en een staatsobligatie die allebei nu 100 euro waard zijn. De waarde van het aandeel na een maand zal of 50 euro of 200 euro zijn; de kansen van deze scenario's zijn niet noodzakelijk gelijk, in feite zijn die kansen niet bekend. De waarde van de staatsobligatie na een maand zal nog steeds 100 euro zijn. Nu bekijken we een optie die het recht geeft om het aandeel na een maand te kopen voor 110 euro, wat zijn waarde op dat moment ook is.

Welke prijs moet de bank voor deze optie vragen?

De juiste prijs in euros kan worden berekend met de formule van Black en Scholes:

$$(200 - 50)^{-1}(100 - 50)(200 - 110) = 30.$$

We zien dus dat we aan het begin van de investeringsperiode met de formule van Black en Scholes en met de beschikbare informatie de prijs van een optie kunnen bepalen.

Kansinterpretatie van de formule van Black en Scholes. We geven nu een mooie interpretatie van de formule van Black en Scholes ($*$) in termen van kansen.

Er is een unieke kansverdeling voor de twee mogelijke scenario's waarvoor de prijs van het aandeel en de staatsobligatie gelijk zijn aan hun verwachte waarde na de investerings periode. De juiste prijs voor de optie is de verwachte waarde na afloop van de investeringsperiode ten opzichte van deze kansverdeling.

Die unieke kansverdeling is: kans $\frac{v^{(2)}-p}{v^{(2)}-v^{(1)}}$ voor scenario 1 en kans $\frac{p-v^{(1)}}{v^{(2)}-v^{(1)}}$ voor scenario 2.

Voor alle duidelijkheid: die kansverdeling heeft niets te maken met de werkelijke kansverdeling voor de scenario's. Die is onbekend, en het mooie van de formule van Black en Scholes is onder andere dat deze laat zien dat de correcte prijs voor een optie helemaal niet afhangt van deze onbekende kansverdeling.

Het doel van deze paragraaf is om deze formule te begrijpen met behulp van optimaliseringsmethoden. We zullen zelfs meer doen en een algemene schattingsmethode voor derivaten—een algemene term voor optie-achtige financiële producten—presenteren die de formule van Black en Scholes als een bijzonder geval bevat.

- **Waarde optie na de periode.** In de eerste plaats, wat heb je eigenlijk aan het bezit van een optie? Laten we eerst eens kijken naar het tweede scenario. In het tweede scenario kan de eigenaar van de optie het aandeel kopen voor het bedrag w en het daarna onmiddellijk doorverkopen voor de marktwaarde $v^{(2)}$, die hoger is. Zo maakt hij een winst van $v^{(2)} - w$. Die winst kan worden gezien als de waarde van de optie in het tweede scenario. In het eerste scenario heeft de optie geen waarde, want de optie geeft het recht om het aandeel te kopen voor de prijs w, maar dat recht is in het tweede scenario niets waard, want w is meer dan de prijs $v^{(1)}$ waarvoor iedereen het aandeel op dat moment zou kunnen kopen.

- **Hoe waarschijnlijk is een scenario?** Bij het begin van de investeringsperiode is er niets bekend over de waarschijnlijkheid van de scenario's.

- **Het probleem van de juiste prijs voor opties.** Het probleem is voor welke prijs p_o de optie nu verkocht moet worden.

  Je kunt onmiddellijk een boven- en een ondergrens geven voor de waarde van een optie nu (= aan het begin van de investeringsperiode): die waarde is niet meer dan $v^{(2)} - w$, want dit is de waarde na afloop van de investeringsperiode in het tweede scenario, terwijl de waarde in het andere scenario nul is; aan de andere kant is de optie uiteraard wel *iets* waard. We gaan nu het begrip 'arbitragemogelijkheid' invoeren. Dit leidt tot een spectaculaire verfijning van de methode om boven- en ondergrenzen voor de prijs van een optie te geven: boven- en ondergrenzen blijken dan samen te vallen, en de waarde van een optie nu ligt dus vast.

- **Econometriestudenten ontdekken in Polen een arbitragemogelijkheid.** Een aantal jaren geleden ging de jaarlijkse studiereis van het Econometrisch Dispuut naar Polen. De geldmarkt was nog niet gereguleerd en ieder wisselkantoortje had zijn eigen wisselkoersen. Sommige studenten ontdekten dat ze zomaar geld konden verdienen aan die verschillen in wisselkoersen door een rondje te maken langs de wisselkantoren en op de juiste manier valuta te wisselen. Dit is een voorbeeld van een arbitragemogelijkheid. In principe hadden de studenten schatrijk naar Nederland terug kunnen komen, door steeds maar zulke lucratieve rondjes te maken. In werkelijkheid was dit natuurlijk nooit gelukt, want hun frequente bezoeken hadden er zeker toe geleid dat de wisselkoersen zo aangepast zouden worden dat de gevonden arbitragemogelijkheid verdwenen zou zijn.

- **Definitie van het begrip arbitragemogelijkheid.** Deze anecdote illustreert het begrip arbitragemogelijkheid en het feit dat zo'n mogelijkheid nooit lang kan bestaan. Het is in feite een goede benadering van de werkelijkheid om aan te nemen dat arbitragemogelijkheden helemaal niet voorkomen. Deze aanname wordt meestal gemaakt bij analyses van financiële markten. De arbitragemogelijkheden die we hier bekijken kunnen ruwweg worden gedefinieerd als investeringsstrategieën waarbij we nu geld krijgen maar nooit iets hoeven te betalen. De precieze definitie is dat een arbitragemogelijkheid een vector (x_1, x_2, x_3) is waarvoor de volgende ongelijkheden gelden:

  – $px_1 + x_2 + p_o x_3 < 0$,

- $v^{(1)}x_1 + x_2 \geq 0$,
- $v^{(2)}x_1 + x_2 + (v^{(2)} - w)x_3 \geq 0$.

Hier is x_1 het aantal gekochte aandelen, x_2 het aantal gekochte staatsobligaties, en x_3 het aantal gekochte opties. De getallen x_1, x_2, x_3 kunnen positief, nul of negatief zijn ('going short'). 'Negatief zijn' heeft de voor de hand liggende interpretatie, en 'going short' is vaak toegestaan.

- **Betekenis van de drie ongelijkheden: arbitrage.** Wat betekenen die drie ongelijkheden boven nu precies? De eerste betekent dat je geld krijgt als je bereid bent om deze investering in bezit te hebben (met de eventuele hierbij behorende betalingsverplichtingen aan het einde van de investeringsperiode). De tweede en de derde ongelijkheid betekenen dat je helemaal geen geld hoeft te betalen (dat wil zeggen minstens evenveel krijgt als je moet betalen) aan het eind van de investeringsperiode in het eerste en tweede scenario, respectievelijk. Dit maakt duidelijk dat een oplossing van die drie ongelijkheden de naam 'arbitragemogelijkheid' verdient.

Voor een volledig begrip bekijken we vanaf nu een meer algemene context: n assets en m scenario's. Na afloop zullen we dit toepassen op drie assets—aandeel, staatsobligatie, optie—en twee scenario's—'aandeel gaat omlaag' en 'aandeel gaat omhoog'.

We bekijken de volgende situatie:

- m assets en een investeringsperiode,
- $p_1, \ldots, p_m$, de prijzen bij het begin van de investeringsperiode (die willen we bepalen of we willen er op zijn minst boven- en ondergrenzen voor vinden),
- $x_1, \ldots, x_m$, de grootte van de investeringen aan het begin van de periode (hier is short-selling, dat wil zeggen, negatieve x_i, toegestaan),
- de kosten van de investeringen $p^T \cdot x$.

Nu modelleren we ook het risico:

- we bekijken n scenario's,
- $v_1^{(j)}, \ldots, v_m^{(j)}$, zijn de waarden in scenario j (we nemen aan dat de waarde van $v_i^{(j)}$ precies bekend is voor ieder asset i en ieder scenario j),
- de uiteindelijke waarde van de investeringen in scenario j is de j-de coordinaat van de vector $V^T x$, waarbij V de $m \times n$-matrix $(v_i^{(j)})_{ij}$ is en $V^T x$ het matrix product van de matrix V^T en de vector x is.

We nemen wel aan dat de $v_i^{(j)}$ bekend zijn, maar niet dat de waarschijnlijkheidsverdeling van de scenario's dat is. Het is misschien verrassend op het eerste gezicht dat de prijzen $p_1, \ldots, p_m$ bij het begin van de investeringsperiode niet willekeurig zijn. De reden dat dit niet zo is, is dat het redelijk is om aan te nemen dat er geen arbitragemogelijkheden zijn. Arbitragemogelijkheden kunnen ruwweg gedefinieerd worden als investeringsstrategieën, waarbij we nu geld krijgen maar nooit iets hoeven te betalen. Dit idee kan worden omgezet in een precieze definitie. Een arbitragemogelijkheid is een vector x waarvoor

$$p^T \cdot x < 0, \quad V^T x \geq 0.$$

Stelling *Als er geen arbitrage mogelijkheden zijn, dan is er een vector $y \geq 0$ waarvoor*

$$p = Vy.$$

Bewijs.

1. Het optimaliseringsprobleem $f(x) = p^T \cdot x \to \min$, $V^T x \geq 0$ is oplosbaar wegens de aanname dat er geen arbitrage mogelijkheden zijn.

2. Toepassing van de standaard noodzakelijke voorwaarden voor convexe optimaliseringsproblemen van Karush-Kuhn-Tucker geeft: er is een vector $y \geq 0$ waarvoor $p = Vy$

Q.E.D.

Kansinterpretatie. Een risicoloos asset kan worden gedefinieerd als een waarvoor de waarde in ieder scenario gelijk is aan de prijs aan het begin van de investeringsperiode. Het bekendste voorbeeld hiervan is een staatsobligatie. Als de collectie van de n assets een risicoloos asset bevat, dan kan y geïnterpreteerd worden als een kansverdeling op de collectie van scenario's: inderdaad geldt dan

$$y_1 + \cdots + y_m = 1,\ y_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq m.$$

Dan hebben de overige vergelijkingen van het systeem $p = Vy$ de volgende interpretatie in termen van kansen: voor ieder asset i is de prijs p_i aan het begin van de periode gelijk aan de verwachting van de waarde aan het einde van de periode ten opzichte van de kansverdeling y:

$$p_i = y_1 v_i^{(1)} + \cdots + y_m v_i^{(m)}.$$

Relatie met optimalisering. Bijvoorbeeld, als de prijzen aan het begin van de periode van alle assets op een na bekend zijn, dan geeft de bovenstaande stelling informatie over de prijs bij het begin van de periode van het overgebleven asset: die prijs ligt tussen de extreme waarden van het volgende optimalisatie probleem met gegeven $m \times n$-matrix V en met gegeven prijzen $p_1, \ldots, p_{m-1}$:

$$f(p, y) = p_m \to \text{extr},\ p = Vy,\ y \geq 0.$$

In het bijzonder, als de extreme waarden van dit probleem samenvallen, dan is de prijs van het overgebleven asset bepaald. Dit is zo in het hierboven gepresenteerde speciale geval (een aandeel, een staatsobligatie, een optie; twee scenario's: 'het aandeel gaat omlaag' en 'het aandeel gaat omhoog'). Dan krijgen we een stelsel van drie lineaire vergelijkingen in drie onbekenden $y_1,\ y_2$ en p_o,

$$p = y_1 v^{(1)} + y_2 v^{(2)},$$

$$1 = y_1 + y_2,$$

$$p_o = y_2(v^{(2)} - w).$$

Zonder veel moeite kan worden vastgesteld dat dit stelsel precies een oplossing heeft, en dat voor die oplossing y_1 en y_2 niet-negatief zijn. Dit stelsel legt dus in het bijzonder p_o, de prijs van de optie, vast. Oplossen van dit stelsel geeft

- $y_1 = \frac{v^{(2)}-p}{v^{(2)}-v^{(1)}}$
- $y_2 = \frac{p-v^{(1)}}{v^{(2)}-v^{(1)}}$
- $p_0 = (v^{(2)} - v^{(1)})^{-1}(p - v^{(1)})(v^{(2)} - w)$.

De laatste formule is de boven gegeven optieprijsformule $(*)$ van Black en Scholes; de eerste twee geven de unieke kansverdeling uit de boven gegeven kansinterpretatie van de optieprijsformule.

4 Economie: de waarde van commitment

De wereld economie heeft lang te kampen gehad met een hoge inflatie en de ongunstige effecten hiervan. Het beleid van centrale banken dat er op was gericht om de inflatie terug te dringen mislukte keer op keer. Het werk van Kydland en Prescott over de waarde van commitment—beloond met de Nobelprijs Economie in 2004—heeft duidelijk gemaakt waarom. Dit *inzicht* heeft er toe geleid dat het nu al vele jaren gelukt is om de inflatie laag te houden.

Het basis idee zal duidelijk worden gemaakt aan de hand van de beslissingsboom in de figuur 1.

Nu geven we een beschrijving in woorden van dit model. Op tijdstip $t = 0$ beslist een investeerder om te investeren in een land of niet. Een jaar later, op tijdstip $t = 1$ beslist de regering over het belastingtarief voor kapitaal. We nemen aan dat de pay off structuur als volgt is. Als de investeerder niet investeert in het land, dan krijgen zowel de investeerder als de regering pay offs die we normaliseren tot nul. Als de investeerder investeert in het land en de regering tot een laag belastingtarief besluit, dan krijgen zowel de investeerder als de regering een pay off die gelijk is aan 5. Maar als de investeerder investeert en de regering op tijdstip $t = 1$ een hoog belastingtarief kiest dan verliest de investeerder en krijgt hij -1 terwijl de regering een hoge belastingopbrengst krijgt: een pay off gelijk aan 10.

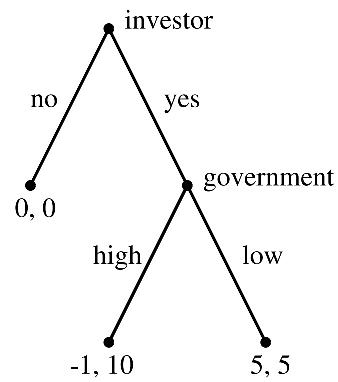

Figure 1: Payoff structure.

Als de regering zich kan vastleggen ('commitment') op tijdstip $t = 0$ op de beslissing die zij neemt op $t = 1$ dan zou ze zich vastleggen op een laag belastingtarief. Dit kan door een wet te maken die bepaalt dat het belastingtarief laag is (dat wil zeggen, veranderen van de wet leidt tot kosten groter dan 5, wat switchen naar een hoger belastingtarief later niet rendabel maakt). Of de regering kan proberen om een reputatie te krijgen voor lage belastingtarieven. In geval van een regering die probeert om inflatie te bestrijden, komt de commitment van het instellen van een centrale onafhankelijke bank.

Als de regering zich niet kan vastleggen, kiest zij een optimaal plan op elk moment dat zij een beslissing moet nemen. Dat impliceert dat zodra de investeerder geïnvesteerd heeft, de regering het hoge belastingtarief kiest omdat een pay off van 10 meer is dan een pay off van 5. De investeerder ziet dit van tevoren aankomen en kiest ervoor om niet te investeren omdat een pay off van 0 meer is dan een pay off van -1.

Het is duidelijk dat de commitment oplossing nooit slechter is dan de niet commitment oplossing en in het geval boven is het zelfs duidelijk beter. Dat wil zeggen, commitment heeft waarde. Een voorbeeld dat vaak gebruikt wordt is Odysseus die zich aan de mast heeft laten vastbinden om naar de Syrenen te luisteren. Op die manier had hij zich vastgelegd om niet naar ze toe te gaan terwijl hij toch kon luisteren.

We merken ook op dat in een deterministische wereld commitment altijd beter is dan geen commitment. In een wereld met onzekerheid, is er een afweging. Met commitment kan men niet reageren op onverwachte gebeurtenissen. In het voorbeeld boven, zou je je gecommitteerd kunnen hebben aan een laag belastingtarief, maar het land zou in een belastingcrisis terecht kunnen komen en dan kun je niet reageren door de belastingtarieven te verhogen.

Relatie met optimalisering. Een van de ideeën van Kydland en Prescott kan uitgelegd worden in termen van het verschil tussen oplossingen van dynamische optimaliseringsproblemen met de volgende twee methoden: Pontryagin's Maximum Principe en de Bellman vergelijking. De eerste geeft een *'open loop'-oplossing*: dit legt alle beslissingen vast die genomen moeten worden gedurende de planningperiode (in technische termen: een stuurfunctie $u(t)$ van de tijd t). De laatste geeft een *'closed loop'* of *feedback* oplossing: deze oplossing geeft een strategie om beslissingen te nemen gedurende de planningsperiode afhankelijk van hoe de situatie in de toekomst zal zijn (in technische termen: een stuurfunctie $u(t,x)$ van de tijd t en de huidige toestand x). Op het eerste gezicht zou het kunnen lijken dat een 'closed loop' oplossing altijd de voorkeur verdient, wegens de grotere flexibiliteit. Maar dat is niet altijd het geval zoals het model van Kydland en Prescott dat boven gegeven is, laat zien. Als een beslisser het commitment kan maken om een Pontryagin oplossing uit te voeren, dan is hij in een sterke positie. Een beslisser die een Bellman oplossing gebruikt, is kwetsbaar voor manipulaties.

Specifiek, in het model boven, komt de commitment oplossing ('om op $t = 1$ een laag belastingtarief te kiezen') overeen met de open loop oplossing of de Pontryagin oplossing van een dynamisch optimaliseringsprobleem; de geen-commitment oplossing ('om op $t = 1$ een hoog belastingtarief te kiezen') komt overeen met de Bellman oplossing of gesloten loop oplossing: op elk moment in de tijd kun je je optimale actie kiezen.

5 Wiskunde: fundamentaalstelling van de algebra

Iedere middelbare scholier leert een vorm van de fundamentaalstelling van de algebra: elk polynoom in een variabele is te ontbinden in lineaire en kwadratische factoren. Wie precies wil weten hoe de vork in de steel steekt ("het bewijs"), heeft een probleem. Ieder van de bekende bewijzen vereist gespecialiseerde voorkennis. Dit illustreert de *diepte* van deze stelling.

Fundamentaalstelling van de algebra. *Iedere polynomiaal vergelijking*

$$p(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n = 0$$

in een complexe variabele x—van graad $n \geq 1$ heeft ten minste een oplossing.

Dit resultaat heeft op het eerste gezicht niets te maken met optimalisering.

Bewijs.

1. We bekijken het probleem

   $$f(x) = |p(x)| \to \min, \ x \in \mathbb{C}.$$

   Dit twee-variabelen-probleem ($x = x_1 + ix_2$ met $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$) heeft een oplossing $\widehat{x}$, omdat $x \to |p(x)|$ coercief is:

   $$|p(x)| = |x|^n |a_n + \cdots + a_0 \frac{1}{x^n}|;$$

   de eerste factor gaat naar $+\infty$ en de tweede naar $|a_n|$ voor $|x| \to +\infty$.

2. Laat $\tilde{x}$ een complex getal zijn waarvoor $p(\tilde{x}) \neq 0$. We drukken p uit als polynoom in de nieuwe variabele $y = x - \tilde{x}$:

   $$p(x) = b_0 + b_k y^k + \cdots + b_n y^n$$

   met $b_k \neq 0$. Merk op dat $b_0 = p(\tilde{x}) \neq 0$. Laat u een oplossing zijn van $b_0 + b_k y^k = 0$: dit is een van de k k-de wortels van het getal $-\frac{b_0}{b_k}$. Definieer de kromme lijn $y_\alpha = \alpha u, \ \alpha \geq 0$. Er geldt dat

   $$f(\tilde{x} + y_\alpha) = |b_0 + (\alpha u)^k + o(\alpha^k)| = |(1 - \alpha^k) b_0 + o(\alpha^k)| < |b_0|$$

voor $\alpha > 0$ voldoende klein. Dit bewijst dat $\tilde{x}$ geen locaal minimum kan zijn, laat staan een globaal minimum.

3. Weglaten van de complexe getallen waarvoor we zojuist hebben uitgesloten dat ze minimaal zijn, leidt tot de conclusie dat alle locale oplossingen van het optimaliseringsprobleem wortels zijn van de vergelijking $p(x) = 0$.

4. De stelling is bewezen omdat $p(\widehat{x}) = 0$.

6 Conclusies lezing.

- Vele problemen die op het eerste gezicht niets met optimalisatie te maken hebben, kunnen toch met optimaliseringsmethoden worden aangepakt.

- Er is een systematische methode beschikbaar om alle analytisch oplosbare optimaliseringsproblemen aan te pakken.

- Hoe overtuigend toepassingen van optimaliseringsmethoden in de financiering, economie en wiskunde zijn, hangt af van de impact op de *praktijk*, het toegevoegd *inzicht* in de economische werkelijkheid en de *diepte* van de verkregen resultaten, respectievelijk.

Dankbetuiging. Ik heb geprofiteerd van discussies over het materiaal in deze lezing met Jan Boone, Jan van de Craats, Marielle Non, Vladimir Protassov, Vladimir Tikhomirov, Shuzhong Zhang.