 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

S - 2

INFERENSI PARAMETER SIMPANGAN BAKU POPULASI NORMAL DENGAN METODE BAYESIAN OBYEKTIF

Adi Setiawan

Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Kristen Satya Wacana, Jl. Diponegoro 52-60 Salatiga 50711
E-mail : adi_setia_03@yahoo.com

Abstrak

Inferensi statistik terdiri dari estimasi (estimasi titik dan estimasi interval) dan pengujian hipotesis. Dalam makalah ini dijelaskan bagaimana melakukan inferensi parameter simpangan baku populasi normal dengan metode bayesian obyektif. Dalam metode ini, digunakan prior Jefry sebagai prior referensi dan berdasarkan data diperoleh posterior, selanjutnya dipilih titik yang dapat digunakan sebagai estimasi titik dan interval sebagai estimasi interval dengan sifat tertentu. Hipotesis nol akan ditolak jika statistik intrinsiknya cenderung bernilai besar, secara praktis biasanya digunakan batas 5. Studi simulasi digunakan untuk menjelaskan sifat-sifatnya.

Kata kunci : estimasi titik, estimasi interval, uji hipotesis, metode bayesian obyektif

A. PENDAHULUAN

Estimasi titik dengan menggunakan metode bayesian obyektif berserta studi simulasinya telah dibahas dalam makalah Setiawan (2009a, 2009b). Demikian juga, estimasi interval dengan menggunakan metode bayesian obyektif untuk beberapa distribusi yang penting yaitu distribusi Poisson dan Eksponensial telah dijelaskan dalam makalah Setiawan (2009c, 2010a). Selanjutnya pengujian hipotesis tentang parameter populasi berdistribusi eksponensial dengan menggunakan metode bayesian obyektif telah dibahas dalam makalah Setiawan (2010b, 2011a). Di samping itu, inferensi dengan menggunakan metode bayesian obyektif tentang parameter mean populasi normal telah dijelaskan dalam makalah Setiawan (2011b) dan untuk parameter populasi seragam dibahas dalam Setiawan (2011c). Dalam makalah ini, akan dijelaskan tentang inferensi parameter simpangan baku populasi dengan metode bayesian obyektif dalam kasus mean populasi diketahui.

B. DASAR TEORI

Estimasi Titik

Dalam pandangan Bayesian, hasil dari sembarang masalah inferensi yang dinyatakan dalam distribusi posterior merupakan gabungan dari informasi yang disediakan oleh data dan informasi prior relevan yang tersedia. Akan tetapi apabila tidak tersedia informasi prior, akan dipilih fungsi prior yang relatif *uninformative* artinya fungsi prior yang memberikan pengaruh minimum pada inferensi fungsi posterior. Secara lebih formal, misalkan bahwa mekanisme probabilitas yang membangkitkan data yang tersedia $\boldsymbol{x}$ dianggap sebagai $p(\boldsymbol{x}|\theta)$ untuk suatu $\theta \in \Theta$ dan kuantitas yang menjadi perhatian adalah fungsi yang bernilai real $\phi(\theta)$ dari θ. Tanpa menghilangkan keumuman, hal itu juga dapat dijelaskan berikut ini. Misalkan model probabilitas yang digunakan berbentuk $\{\, p(x\,|\,\theta,\lambda)\}$ dengan λ adalah parameter *nuisance* yang dipilih. Dalam hal ini diperlukan untuk mengidentifikasi fungsi prior bersama $\pi(\phi,\lambda)$ yang akan mempunyai pengaruh minimal pada distribusi posterior marginal dengan kuantitas yang menjadi perhatian ϕ yaitu

$$\pi(\phi|x) \propto \int_{\Lambda} p(x|\phi,\lambda)\,\pi(\phi,\lambda)\,d\lambda\,.$$

Reference prior digunakan sebagai prior yang dapat memberikan pengaruh minimal pada distribusi posterior. Dalam kasus dimensi satu, *reference prior* merupakan prior Jeffry. Dengan menggunakan prior ini maka penyelesaian masalah estimasi hanya tergantung pada model anggapan dan data pengamatan sehingga estimasi titik yang menggunakan metode ini dinamakan sebagai estimasi titik Bayesian obyektif (Bernardo dan Juarez, 2003).

Diskrepansi intrinsik (*intrínsic discrepancy*) $\delta(p_1, p_2)$ antara dua fungsi densitas $p_1(\boldsymbol{x})$ dengan $\boldsymbol{x} \in X_1$ dan $p_2(\boldsymbol{x})$ dengan $\boldsymbol{x} \in X_2$ didefinisikan sebagai

$$\delta\,(p_1, p_2) = \min\,\{K(\,p_2(x)|\,p_1(x)),\; K(\,p_1(x)|\,p_2(x))\}$$

dengan

$$K(p_1(x)|\,p_2(x)) = \int_X p_1(x)\log\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\,dx\,.$$

Untuk dua keluarga fungsi densitas

$$M_1 = \{p_1(x|\phi),\, x \in \mathrm{X}_1(\phi),\, \phi \in \Phi\}$$

dan

$$M_2 = \{p_2(x|\psi),\, x \in \mathrm{X}_2(\psi),\, \psi \in \Psi\}$$

dapat didefinisikan diskrepansi intrinsik

$$\delta^*(M_1, M_2) = \inf_{\phi\in\Phi,\,\psi\in\Psi} \delta\big(p_1(x|\phi),\, p_2(x|\psi)\big).$$

Fungsi kerugian (*loss function*) dalam kasus ini adalah diskrepansi intrinsik. Misalkan bahwa deskripsi yang sesuai dari tingkah laku probabilistik dari kuantitas random $\boldsymbol{x}$ diberikan oleh model

$$\{\,p(x\,|\,\theta,\lambda),\, x \in \mathrm{X}, \theta \in \Theta, \lambda \in \Lambda\,\}\,.$$

Diskrepansi intrinsik antara $p(x\,|\,\theta,\lambda)$ dan keluarga densitas

$$\{\,p(x\,|\,\theta_0,\lambda),\; \lambda \in \Lambda\}$$

adalah

$$\delta^*(\theta,\lambda;\theta_0) = \inf_{\lambda_0\in\Lambda} \delta(\theta,\lambda;\theta_0,\lambda_0)$$

dengan

$$\delta(\theta,\lambda;\theta_0,\lambda_0) = \min\{K(\theta_0,\lambda_0|\theta,\lambda)\;,\; K(\theta,\lambda|\theta_0,\lambda_0)\}.$$

Misalkan $\{\,p(x\,|\,\theta,\lambda), x \in \mathrm{X}, \theta \in \Theta, \lambda \in \Lambda\}$ adalah model parametrik yang dapat digunakan untuk menggambarkan tingkah laku kuantitas random $\boldsymbol{x}$. Didefinisikan intrinsik statistik (*intrinsic statistic*) sebagai

$$d(\theta_0\,|\,x) = E_{\pi_{\delta^*}}[\,\delta^*\,|\,x] = \int_\Lambda\int_\Theta \delta^*(\theta,\lambda;\theta_0)\,\pi_{\delta^*}(\theta,\lambda\,|\,x)\,d\theta\,d\lambda \qquad (1)$$

dengan $\pi_{\delta^*}(\theta,\lambda|x)$ adalah posterior referensi untuk parameter dari model $p(x\,|\,\theta,\lambda)$ bila $\delta^*(\theta,\lambda;\theta_0)$ adalah parameter yang menjadi perhatian.

Estimator intrinsik (*intrinsic estimator*) atau estimasi titik Bayesian obyektif didefinisikan sebagai yaitu parameter θ yang meminimalkan statistik intrinsik

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

$$\theta^* = \theta^*(x) = \arg\min_{\tilde{\theta}\in\Theta} d(\tilde{\theta}\,|\,x).$$

Estimasi interval kredibel

Interval kredibel intrinsik 100q% (*q-credible region intrinsic*) adalah himpunan bagian $R^*_q = R^*_q(x, \Theta) \subseteq \Theta$ dari ruang parameter Θ sehingga memenuhi

(i) $\int_{R^*_q} \pi(\theta, \theta_0 \,|\, x)\, d\theta = q$

(ii) Untuk setiap $\theta_i \in R^*_q$, $\theta_j \notin R^*_q$ dan untuk setiap berlaku $d(\theta_i \,|\, x) \leq d(\theta_j \,|\, x)$.

dengan $d(\theta_i \,|\, x)$ adalah harapan fungsi kerugian *reference posterior* sebagai *proxy* untuk nilai dari parameter yang diberikan pada persamaan (1).

Terlihat bahwa pernyataan pada persamaan (1) mempunyai bentuk yang sulit sehingga perhitungannya tidaklah mudah namun dengan menggunakan integrasi numerik, hal itu dengan mudah dapat dilakukan.

Pengujian Hipotesis

Apabila diinginkan untuk melakukan pengujian hipotesis $H_0 \equiv \{ \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \}$ maka statistik intrinsik pada persamaan (1) merupakan ukuran dari kekuatan bukti melawan penggunaan model M_0 dengan

$$M_0 = \{ p(x|\theta_0, \lambda),\ \lambda \in \Lambda \}.$$

Hal itu berarti H_0 akan ditolak jika dan hanya jika $d(\boldsymbol{\theta}_0 \,|\, \boldsymbol{x})$ untuk suatu batas d^*. Bernardo dan Rueda (2002) mengusulkan untuk menggunakan aturan sebagai berikut : jika $d^* \approx 1$ maka tidak ada bukti untuk menolak H_0, jika $d^* \approx 2{,}5$ maka terdapat bukti lemah (*mild*) untuk menolak dan jika $d^* > 5$ maka terdapat bukti kuat (*strong*) untuk menolak H_0.

Inferensi Parameter Simpangan Baku Populasi Normal Jika μ Diketahui

Misalkan $\boldsymbol{x} = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ adalah sampel random dari distribusi normal $N(x \,|\, \mu, \sigma^2)$ dengan mean μ diketahui. Misalkan s^2_x adalah variansi sampel yang bersesuaian sehingga

$$n\, s^2_x = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)^2 .$$

Deskrepansi intrinsik yang diinginkan adalah

$$n\delta\{ N(x|\mu, \sigma_1^2),\ N(x|\,\mu, \sigma_2^2 \}.$$

Misalkan $y = (x - \mu)/\sigma_2$ dan dengan menggunakan kenyataan bahwa deskrepansi intrinsik invarian di bawah transformasi satu-satu dari data, maka dapat ditulis sebagai

$$n\delta\{ N(y|\mu, \sigma_1^2/\sigma_2^2),\ N(y|\,0,1 \}.$$

Diskrepansi tersebut mempunyai bentuk sederhana dalam bentuk $\theta = \theta(\sigma_2) = \ln(\sigma/\sigma_2)$ khususnya

$$n\delta\{ N(x|\mu, \sigma_1^2),\ N(x|\,\mu, \sigma_2^2 \} = \delta(\theta) = 2|\theta| + 2\exp(-2|\theta|) - 1 .$$

yaitu fungsi simetris di sekitar 0 yang dinyatakan pada Gambar 1. Lebih jauh, δ merupakan fungsi dari θ yang *invertible* sehingga juga merupakan fungsi dari σ yang *invertible*. *Reference prior* untuk σ sama dengan *reference prior* untuk sehingga *prior* Jeffrey yang bersesuaian adalah $\pi(\sigma) = \sigma^{-1}$ dan dalam bentuk θ hal ini ditransformasikan menjadi $\pi_\delta(\theta) = 1$. Akibatnya, *reference posterior* dengan mudah dapat ditentukan sebagai

$$\pi(\theta|x, \sigma_2) = 2\exp(-2\theta)\ Gamma\left(\lambda \left| \frac{n}{s}, \frac{n s_y^2}{2} \right.\right)$$

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

dengan $n s_y^{2} = \dfrac{n s_x^{2}}{\sigma_2^{2}}$. Intrinsik estimator $\sigma^{*}(\boldsymbol{x})$ adalah nilai yang meminimalkan harapan *referensi posterior* :

$$\sigma^{*}(x) = \underset{\sigma_2 > 0}{\arg\min}\, d(\sigma_2 \,|x) = \underset{\sigma_2 > 0}{\arg\min} \int_R \delta(\theta)\, \pi(\theta|x, \sigma_2)\, d\theta$$

yang dapat ditentukan dengan metode numerik. Bila digunakan pendekatan diperoleh

$$\sigma^{*}(x) \approx s_x \frac{n + (1/2)}{n}$$

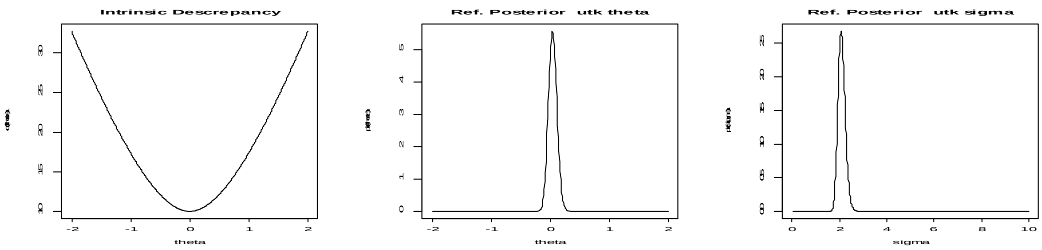
dengan

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)^2}{n}}\,.$$

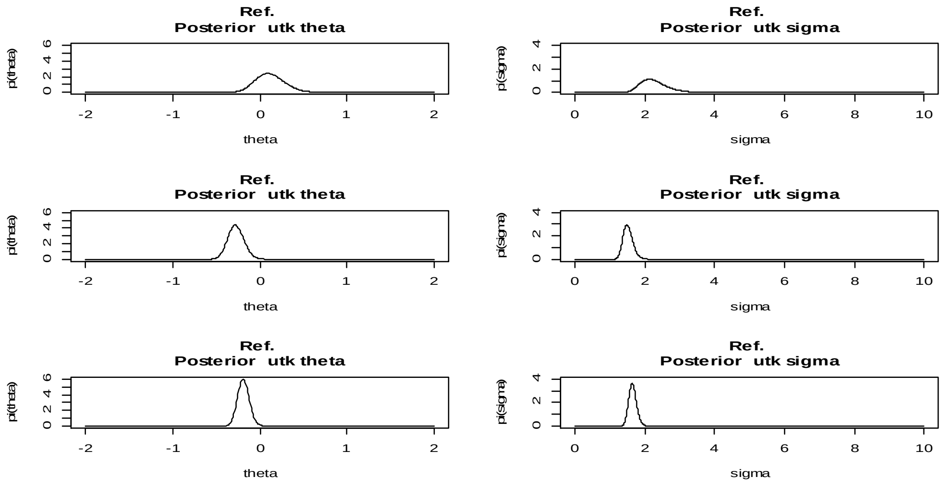
C. PEMBAHASAN

Perhitungan Statistik Intrinsik, Studi Simulasi dan Pembahasan

Misalkan diberikan sampel ukuran 10 yaitu $\boldsymbol{x}$ = { -2.23, -1.34, 0.93, 1.26, -0.74, 0.19, -3.59, 4.44, -2.10, 0.13 }, maka deskrepansi intrinsik dinyatakan pada Gambar 1 sebelah kiri, sedangkan tengah adalah posterior referensi untuk θ dan sebelah kanan adalah posterior referensi untuk σ. Apabila dibangkitkan sampel berturut-turut ukuran 20, 50 dan 100 dari distribusi normal dengan mean 0 dan simpangan baku 2 yaitu N(0,2^2) maka akan diperoleh hasil seperti pada Gambar 2. Terlihat bahwa distribusi posterior yang terbentuk makin sempit.

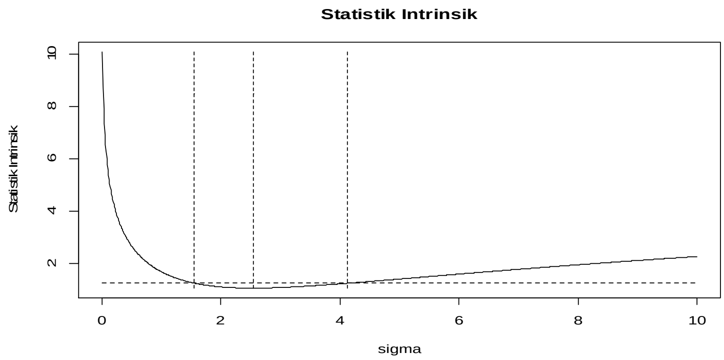


Gambar 1. Deskrepansi Intrinsik, posterior referensi untuk θ dan posterior referensi untuk σ.



Gambar 2. Posterior referensi untuk θ dan posterior referensi untuk σ dengan ukuran sampel berturut-turut 20 (atas), 50 (tengah) dan 100 (bawah).

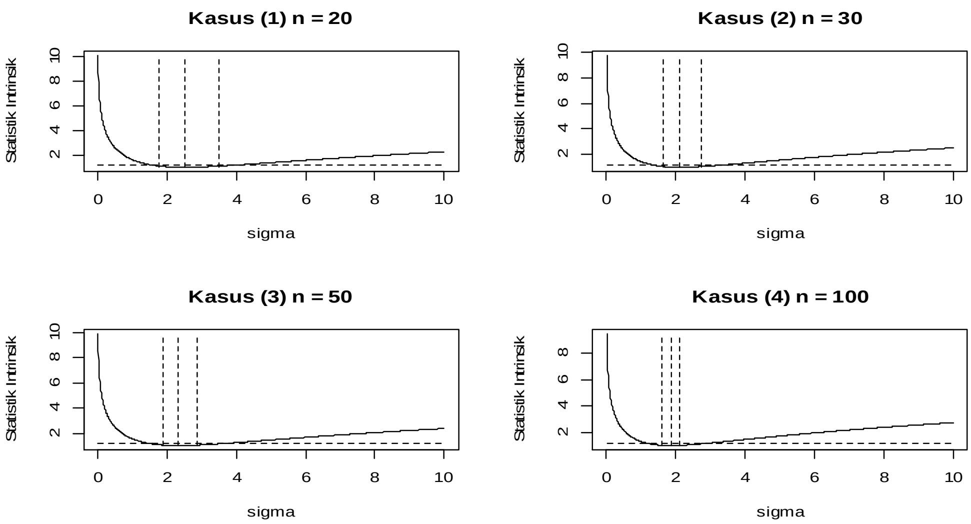
ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4



Gambar 3. Nilai statistik intrinsik, estimasi titik dan estimasi interval.

Berdasarkan sampel ukuran 10 di atas, diperoleh nilai statistik intrinsik, estimasi titik (yaitu nilai σ yang menyebabkan nilai statistik intrinsik minimum) adalah 2,54 yang ditunjukkan oleh garis tegak di tengah. Dalam hal ini, nilai statistik intrinsik yang minimum adalah 1,05. Estimasi interval kredibel 95 % adalah (1,55 , 4,12) yang ditunjukkan oleh garis tegak di sebelah kiri dan di sebelah kanan. Interval yang terbentuk mempunyai nilai statistik intrinsik lebih kecil dari 1,24. Dalam hal ini, MLE untuk parameter σ adalah 2,14.

Apabila dibangkitkan sampel berturut-turut ukuran n = 20, 30, 50 dan 100 dari distribusi $N(0,2^2)$, maka akan diperoleh estimasi titik dan estimasi interval untuk simpangan baku populasi seperti dinyatakan pada Gambar 4. Diperoleh estimasi titik untuk masing-masing adalah 2,51; 2,12; 2,34 dan 1,86 dan interval untuk masing-masing adalah sebagai berikut (1,78 , 3,51), (1,62, 2,75), (1,90 , 2,87) dan (1,61 , 2,13). Terlihat bahwa, seperti yang diharapkan, makin besar ukuran sampel n makin kecil lebar interval kredibel 95 % yang diperoleh. Apabila dibandingkan dengan estimator MLE untuk σ berturut-turut adalah 2,22, 2,02, 2,18 dan 1,89.

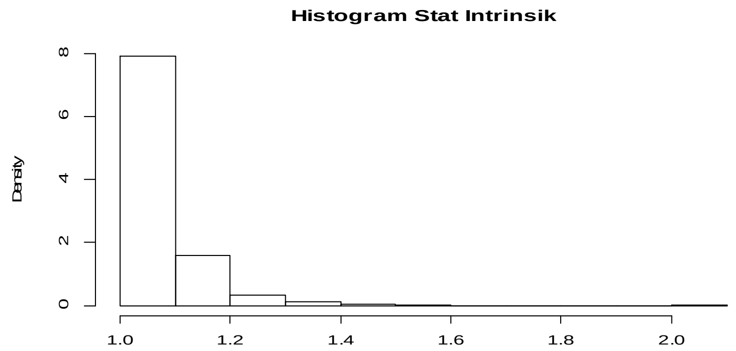


Gambar 4. Statistik Intrinsik, estimasi titik dan estimasi interval kredibel 95 % untuk ukuran sampel n = 20, 30, 50 dan 100.

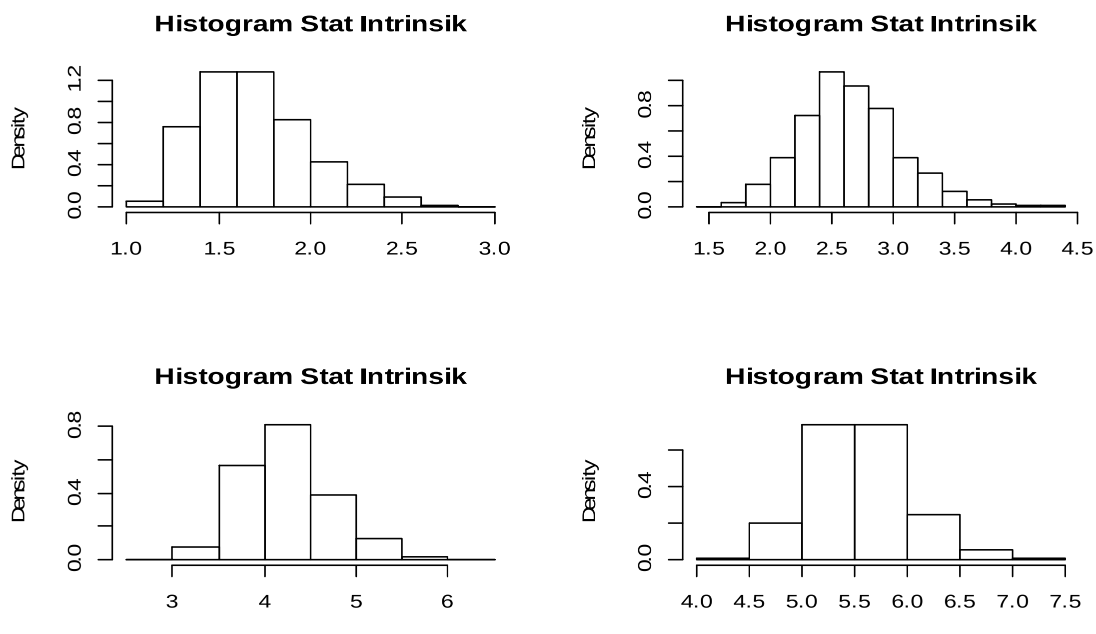
Studi simulasi dilakukan dengan membangkitkan sampel ukuran n = 20 dari distribusi normal $N(0,2^2)$ dan kemudian dihitung nilai statistik intrinsik terhadap σ =2 dan apabila prosedur di atas diulang sampai bilangan besar B = 1000 (dipilih B = 1000) maka akan diperoleh histogram

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

nilai-nilai statistik intrinsik yang cenderung kecil (sebagian besar lebih kecil dari 2,5) artinya tidak ada alasan yang kuat untuk menolak hipotesis $\sigma = 2$. Hasil tersebut dinyatakan pada Gambar 5. Studi simulasi berikutnya adalah membangkitkan sampel ukuran $n = 20$ dari distribusi normal $N(0,2^2)$ dan kemudian dihitung nilai statistik intrinsik terhadap $\sigma = 5, 10, 25$ dan 50 dan prosedur di atas diulang sampai sebanyak bilangan besar B kali dengan B dipilih 1000. Hasil yang diperoleh dinyatakan pada Gambar 6. Terlihat bahwa untuk σ yang makin jauh dari $\sigma = 2$, nilai-nilai statistik intrinsik makin besar. Studi simulasi berikutnya adalah membangkitkan sampel ukuran $n = 50$ dari distribusi normal $N(0,2^2)$ dan kemudian dihitung nilai statistik intrinsik terhadap $\sigma = 5, 10, 25$ dan 50 dan prosedur di atas diulang sampai sebanyak bilangan besar B kali dengan B dipilih 1000. Hasil yang diperoleh dinyatakan pada Gambar 7. Terlihat bahwa untuk ukuran sampel besar, persebaran nilai-nilai statistik intrinsik makin kecil.

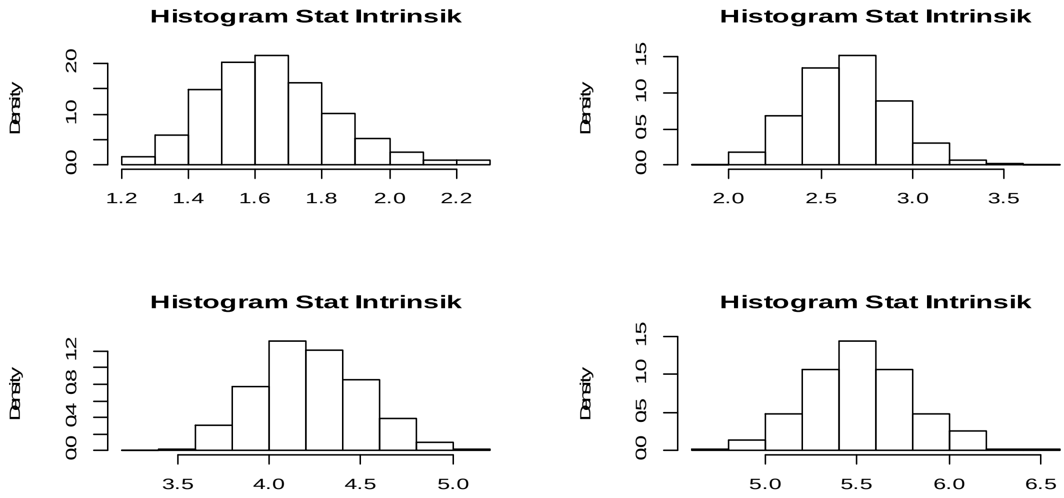


Gambar 5. Histogram nilai-nilai statistik intrinsik untuk sampel ukuran $n = 20$ dan terhadap $\sigma = 2$.



Gambar 6. Histogram nilai-nilai statistik intrinsik untuk sampel ukuran $n = 20$ dan terhadap $\sigma = 5$, 10, 25 dan 50.

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4



Gambar 7. Histogram nilai-nilai statistik intrinsik untuk sampel ukuran n = 50 dan terhadap σ =5, 10, 25 dan 50.

D. KESIMPULAN DAN SARAN

Dalam makalah ini telah dijelaskan bagaimana melakukan inferensi untuk parameter simpangan baku populasi normal dengan mean populasi diketahui dengan metode bayesian obyektif. Penelitian dapat dikembangkan untuk melakukan inferensi untuk parameter variansi populasi normal dengan mean tidak diketahui.

E. DAFTAR PUSTAKA

Bernardo, J. dan R. Rueda, 2002, Bayesian Hypotesis Testing : A Reference Approach, *International Statistical Review* 70, 351-372.

Juarez, M. A., 2004, *Objective Bayesian Methods for Estimation and Hypothesis Testing*, Valencia : University of Valencia.

Setiawan, A. , 2009a, Estimasi Titik Bayesian Obyektif, *Prosiding Seminar Sains dan Pendidikan Sains* IV FSM UKSW, Salatiga.

Setiawan, A. , 2009b, Studi Simulasi dalam Estimasi Bayesian Obyektif, *Prosiding Seminar Nasional Matematika*

Setiawan, A. , 2009c, *Credible Interval* Bayesian Obyektif, *Prosiding Seminar Nasional Matematika*, Universitas Katolik Parahyangan, Bandung.

Setiawan, A. ,2010a, Interval Kredibel Bayesian Obyektif dari Parameter Populasi Berdistribusi Poisson dan Eksponensial, *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Pendidikan Sains V UKSW Salatiga*

Setiawan, A. , 2010b, Pengujian Hipotesis dengan Metode Bayesian Obyektif, *disampaikan dalam Konferensi Nasional Matematika XV 30 Juni – 3 Juli 2010*, UNIMA, Tondano.

Setiawan, A. , 2011a, Pengujian Hipotesis tentang Parameter Populasi Berdistribusi Eksponensial dengan Metode Bayesian Obyektif, *Prosiding Seminar Nasional Statistika Universitas Diponegoro 2011*.

Setiawan, A. , 2011b, Inferensi Parameter Mean Populasi Normal dengan Metode Bayesian Obyektif, *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Pendidikan Sains VI, UKSW Salatiga*.

Setiawan, A. , 2011c, Penggunaan Metode Bayesian Obyektif dalam Inferensi Parameter Populasi Seragam, *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNS Surakarta*.

Setiawan, A. , 2013, Pengujian Hipotesis Tentang Parameter Populasi Berdistribusi Poisson Berdasarkan Metode Bayesian Obyektif, *Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA FMIPA UNY Yogyakarta*.