 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

A-8

LOCALLY DAN GLOBALLY SMALL RIEMANN SUMS FUNGSI TERINTEGRAL HENSTOCK-DUNFORD PADA [*a*,*b*]

Solikhin[1], YD. Sumanto[2], Siti Khabibah[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro
[1]soli_erf@yahoo.com, [3]khabibah_ku@yahoo.co.id

Abstrak

Perluasan integral Dunford ke dalam integral tipe Riemann (Henstock) memberikan definisi integral baru, yaitu integral Henstock-Dunford. Pada makalah ini penulis mengkaji sifat-sifat lebih lanjut dari integral Henstock-Dunford pada [*a*,*b*], yaitu beberapa sifat-sifat small Riemann sumsnya. Akan ditunjukkan bahwa syarat perlu dan cukup suatu fungsi terintegral Henstock-Dunford pada [*a*,*b*] adalah fungsi tersebut mempunyai sifat locally small Riemann sums pada [*a*,*b*] atau mempunyai sifat globally small Riemann sums pada [*a*,*b*]. Penelitian ini memberikan hasil bahwa sifat-sifat small Riemann Sums yang berlaku dalam integral Henstock pada [*a*,*b*] juga berlaku pada integral Henstock-Dunford pada [*a*,*b*].

Kata kunci: integral Henstock-Dunford, Small Riemann Sums

A. PENDAHULUAN

Integral tipe Riemann khususnya integral Henstock digeneralisasi dari integral Riemann. Integral ini telah mengalami perkembangan baik dari segi teori maupun aplikasinya (Indrati, 2000). Banyak peneliti mengkaji sifat-sifatnya baik dalam ruang $\mathbb{R}$ (Lee, 1989), maupun ruang Euclide $\mathbb{R}^n$ (Indrati, 2002) . Pengkajian integral Henstock tidak hanya sebatas pada fungsi bernilai real tetapi juga pada fungsi yang bernilai Banach (Lee, 1989).

Lain halnya dengan Dunford, Dunford mendefinisikan integralnya dalam ruang dual kedua atas ruang Banach X (Schwabik, 2004). Integral ini kemudian diperluas ke dalam integral tipe Riemann (integral Henstock) dan menghasilkan integral Henstock-Dunford pada ruang $\mathbb{R}$ (Guoju, 2001). Selanjutnya, integral Henstock-Dunford digeneralisasi ke dalam ruang Euclide $\mathbb{R}^n$ (Saifullah, 2003). Bahkan penelitian selanjutnya, berhasil mendefinisikan integral Dunford-Henstock dalam ruang dual pertama atas ruang Banach X (Solikhin, 2011).

Berdasarkan uraian ini, penulis menyoroti integral Henstock-Dunford pada ruang $\mathbb{R}$. Akan dikaji sifat-sifat lebih jauh dari integral Henstock-Dunford, yaitu sifat-sifat small Riemann sumsnya, khususnya locally dan globally small Riemann sums. Sifat-sifat ini digeneralisasi dari integral Henstock bernilai real.

Penelitian ini secara umum diharapkan dapat memberikan sumbangan terhadap perkembangan ilmu pengetahuan dalam bidang matematika analisa, khususnya teori integral.

ISBN : 978-979-16353-9-4

Kemudian diharapkan dapat memberikan masukan bagi peneliti yang akan mengkaji lebih lanjut tentang integral Henstock-Dunford pada $\mathbb{R}$ dan aplikasinya terhadap ilmu bidang lain.\

B. PEMBAHASAN

Integral Henstock-Dunford pada $[a,b]$

Berikut ini diberikan definisi integral Henstock-Dunford, fungsi primitifnya, dan beberapa teorema yang terkait.

Definisi 1. *Diberikan* X *ruang Banach dan* X^* *ruang dualnya, serta interval tertutup* $[a,b]\subset\mathbb{R}$. *Fungsi* $f:[a,b]\to X$ *dikatakan terintegral Henstock-Dunford pada* $[a,b]$, ditulis $f\in HD[a,b]$, *jika untuk setiap* $x^*\in X^*$ *fungsi* $x^*f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *terintegral Henstock pada* $[a,b]$ *dan untuk setiap interval tertutup* $A\subset[a,b]$ *terdapat vektor* $x^{**}_{(f,A)}\in X^{**}$ *sehingga*

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*)=(H)\int_A x^*f\ .$$

Vektor $x^{**}_{(f,A)}\in X^{**}$ *di atas disebut nilai integral Henstock-Dunford pada* A *dan ditulis*

$$x^{**}_{(f,A)}=(HD)\int_A f\ .$$

Teorema 2. *Jika* f *terintegral Henstock-Dunford pada* $[a,b]$ *maka* f *terintegral Henstock-Dunford pada* A *untuk setiap interval tertutup* $A\subset[a,b]$.

Bukti: Jelas secara definisi. ■

Teorema 3. (Kriteria Cauchy) *Fungsi* $f\in HD[a,b]$ *jika dan hanya jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon>0$ *terdapat fungsi positif* δ *pada* $[a,b]$ *sehingga jika* $A\subset[a,b]$ *interval tertutup dan* $\mathbf{D}=\{(D,x)\}$ *dan* $\mathbf{P}=\{(P,y)\}$ *masing-masing partisi Perron* δ*-fine pada* A *berlaku*

$$\left|\mathbf{D}\sum x^*f(x)\alpha(D)-\mathbf{P}\sum x^*f(y)\alpha(P)\right|<\varepsilon$$

untuk setiap $x^*\in X^*$. ■

Simbol $\alpha(D)$ dimaksudkan sebagai panjang interval D. Jadi $D=[u,v]$ sehingga $\alpha(D)=v-u$.

Definisi 4. *Diberikan* X *ruang Banach,* $\mathbf{I}[a,b]$ *koleksi semua interval tertutup di dalam* $[a,b]$ *dan fungsi* $f:[a,b]\to X$. *Jika* f *terintegral Henstock-Dunford pada* $[a,b]$ *maka* $F:\mathbf{I}[a,b]\to X$ *dengan rumus:*

$$F(A)=x^{**}_{(f,A)}=(H)\int_A f$$

dan $F(\varnothing)=0$ *untuk setiap* $A\in\mathbf{I}[a,b]$ *disebut Primitif Henstock-Dunford fungsi* f *pada* $[a,b]$.

 ISBN : 978-979-16353-9-4

Selanjutnya berdasarkan Definisi 4 maka integral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ dapat dinyatakan seperti dalam teorema berikut.

Teorema 5. *Fungsi $f \in HD[a,b]$ jika dan hanya jika terdapat fungsi aditif F pada $[a,b]$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ dan jika $A \subset [a,b]$ interval tertutup dan $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ partisi Perron δ-fine pada A berlaku*

$$\left| \mathcal{D}\sum x^* \left(f(x)\alpha(D) - F(D) \right) \right| < \varepsilon \ . \quad \blacksquare$$

Teorema 6. (Lemma Henstock) *Jika $f \in HD[a,b]$ dengan primitif F, yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga jika $A \subset [a,b]$ interval tertutup dan $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ partisi Perron δ-fine pada A berlaku*

$$\left| \mathcal{D}\sum x^* \left(f(x)\alpha(D) - F(D) \right) \right| < \varepsilon$$

maka untuk setiap jumlahan bagian $\sum_1$ dari $\mathcal{D}\sum$ berlaku

$$\left| \mathcal{D}\sum\nolimits_1 x^* \left(f(x)\alpha(D) - F(D) \right) \right| < \varepsilon \ . \quad \blacksquare$$

Locally Small Riemann Sums (LSRS)

Akan ditunjukkan syarat perlu dan cukup suatu fungsi terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$, yaitu memenuhi sifat locally small Riemann sums pada $[a,b]$.

Definisi 7. *Fungsi terukur f dikatakan mempunyai sifat Locally Small Riemann Sums (LSRS) pada $[a,b]$, ditulis $f \in LSRS[a,b]$, jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, $x^* \in X^*$, dan interval tertutup $A \subset [a,b]$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga untuk setiap $y \in [a,b]$ berlaku*

$$\left| \mathcal{D}\sum x^* f(x)\alpha(D) \right| < \varepsilon$$

untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ pada interval tertutup $C \subset B(y,\delta(y))$ dan $y \in C$.

Teorema 8. *Jika fungsi terukur $f \in HD[a,b]$ maka $f \in LSRS[a,b]$.*

Bukti : Karena $f \in HD[a,b]$ dengan primitif F, maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga jika $A \subset [a,b]$ interval tertutup dan $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ partisi Perron δ-fine pada A berlaku

$$\left| \mathcal{D}\sum x^* \left(f(x)\alpha(D) - F(A) \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Untuk setiap $y \in [a,b]$, dipilih interval tertutup $C \subset B(y,\delta(y))$ sehingga berlaku

$$\left| x^* F(C) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

 ISBN : 978-979-16353-9-4

Menurut Lemma Henstock, untuk setiap $y \in [a,b]$ dan partisi Perron δ-fine pada $C \subset B(y, \delta(y))$ berlaku

$$\left|\mathbf{D}\sum x^* f(x)\alpha(D)\right| \le \left|\mathbf{D}\sum x^*\left(f(x)\alpha(D) - F(C)\right)\right| + \left|x^* F(C)\right| < \varepsilon . \quad \blacksquare$$

Teorema 9. *Jika fungsi terukur* $f \in LSRS[a,b]$ *maka untuk setiap* $x^* \in X^*$ *terdapat fungsi positif* δ *pada* $[a,b]$ *sehingga*

$$\left\{\mathbf{D}\sum x^* f(x)\alpha(D)\right\}$$

dengan $\mathbf{D}$ *partisi Perron* δ*-fine pada* $[a,b]$ *adalah terbatas pada* $[a,b]$.

Bukti : Fungsi $f \in LSRS[a,b]$ berarti untuk setiap $x^* \in X^*$ dan $A \subset [a,b]$ interval tertutup terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga untuk setiap $y \in [a,b]$ berlaku

$$\left|\mathbf{D}\sum x^* f(x)\alpha(D)\right| < 1$$

untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathbf{D} = \{(D,x)\}$ pada interval tertutup $C \subset B(y, \delta(y))$ dan $y \in C$. Dibentuk $\mathbf{F} = \{B(x, \delta(x)) : x \in [a,b]\}$, maka $\mathbf{F}$ merupakan liput terbuka untuk $[a,b]$. Karena $[a,b]$ kompak maka terdapat liput bagian berhingga $\mathbf{G}$ untuk $[a,b]$, katakan $\{B(x_i, \delta(x_i)) : i = 1,2,...,p\} \subset \mathbf{F}$. Untuk setiap $x \in [a,b]$ terdapat $k, 1 \le k \le p$ dengan $x \in B(x_k, \delta(x_k))$.

Dibentuk fungsi positif δ^* pada $[a,b]$ dengan rumus

$$\delta^*(x) = \frac{1}{2}\min\left\{d\left(x, \partial\left(B\left(x_k, \delta(x_k)\right)\right)\right) : x \text{ titik interior } B\left(x_k, \delta(x_k)\right), 1 \le k \le p\right\}.$$

Akibatnya untuk setiap $x \in [a,b]$ terdapat $j, 1 \le j \le p$ dengan sifat $B(y, \delta(y)) \subseteq B(x_j, \delta(y_j))$ dan

$$\left|\mathbf{D}_j\sum x^* f(x)\alpha(D)\right| < 1$$

untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathbf{D}_j$ pada interval tertutup $C \subset B(y, \delta(y))$ dan $x_j \in C$.

Dengan demikian untuk partisi $\mathbf{D} = \bigcup_{j=1}^{p}\mathbf{D}_j$ diperoleh

$$\left|\mathbf{D}\sum x^* f(x)\alpha(D)\right| \le \sum_{j=1}^{p}\left|\mathbf{D}_j\sum x^* f(x)\alpha(D)\right| < p . \quad \blacksquare$$

Teorema 10. *Jika fungsi terukur* $f \in LSRS[a,b]$ *maka* $f \in HD(C)$ *untuk setiap interval tertutup* $C \subset [a,b]$.

 ISBN : 978-979-16353-9-4

Bukti : Fungsi terukur $f \in LSRS[a,b]$ berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, $x^* \in X^*$, dan interval tertutup $A \subset [a,b]$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum x^* f(x)\alpha(D)\right| < \varepsilon$$

untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ pada interval $D \subset B(y,\delta(y))$ dan $y \in D$.

(i) Jika terdapat $y \in [a,b]$ dengan $C \subset B(y,\delta(y))$ diperoleh :

Jika $y \in C$ maka untuk setiap $x^* \in X^*$ dan dua partisi Perron δ-fine $\mathcal{D}_1 = \{(D,x)\}$ dan $\mathcal{D}_2 = \{(D,x)\}$ pada $[a,b]$ berlaku

$$\left|\mathcal{D}_1\sum x^* f(x)\alpha(D) - \mathcal{D}_2\sum x^* f(x)\alpha(D)\right| < \varepsilon .$$

Menurut kriteria Cauchy, $f \in HD(C)$.

Jika $y \not\subset C$ maka ada interval tertutup $E \subset B(y,\delta(y))$, sehingga $y \in E$ dan $C \subset E$. Akibatnya untuk setiap $x^* \in X^*$ dan dua partisi Perron δ-fine $\mathcal{D}_1 = \{(D,x)\}$ dan $\mathcal{D}_2 = \{(D,x)\}$ pada E berlaku

$$\left|\mathcal{D}_1\sum x^* f(x)\alpha(D) - \mathcal{D}_2\sum x^* f(x)\alpha(D)\right| < \varepsilon .$$

Menurut kriteria Cauchy, $f \in HD(E)$. Karena $C \subset E$ dan $f \in HD(E)$ maka $f \in HD(C)$.

(ii) Jika $C \not\subset B(y,\delta(y))$ maka ada fungsi positif δ pada $[a,b]$ yang berakibat adanya partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(C_i, y_i) : i = 1,2,...,k\}$ pada interval C. Jadi $f \in HD(C_i), \forall i = 1,2,...,k$. Jadi $f \in HD(C)$. ■

Akibat 11. *Jika fungsi terukur* $f \in LSRS[a,b]$ *maka* $f \in HD(C)$ *untuk setiap himpunan sederhana* $C \subset \operatorname{int}([a,b])$. ■

Teorema 12. *Jika fungsi terukur* $f \in LSRS[a,b]$ *maka* $f \in HD[a,b]$.

Bukti : Fungsi terukur $f \in LSRS[a,b]$ maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, $x^* \in X^*$, dan interval tertutup $A \subset [a,b]$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga untuk setiap $y \in [a,b]$ berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum x^* f(x)\alpha(D)\right| < \varepsilon$$

untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ pada interval tertutup $C \subset B(y,\delta(y))$ dan $y \in C$. Menurut Akibat 11, $f \in HD(C)$ untuk setiap himpunan sederhana $C \subset \operatorname{int}([a,b])$.

Barisan himpunan $\{E_i\}, E_i \cap E_j = \varnothing, \forall\, i \neq j$ dengan sifat $\operatorname{int}([a,b]) = \bigcup E_i$.

Dengan demikian untuk bilangan $\varepsilon > 0$ di atas terdapat bilangan positif n_0 dengan sifat

$$\alpha\left(\overline{[a,b] - \bigcup_{i \ge n_0} E_i}\right) < \varepsilon .$$

 ISBN : 978-979-16353-9-4

Untuk $\forall i$ terdapat fungsi positif δ_i sehingga untuk setiap partisi Perron δ_i-fine pada $[a,b]$ berlaku

$$\left|\mathbf{D}\sum x^* f(x)\alpha(D)-(H)\int_{E_i} x^* f\right|<\varepsilon .$$

Didefinisikan fungsi positif δ dengan rumus

$$\delta(x)=\begin{cases}\min\left\{\delta^*(x),\delta_i(x),\frac{1}{2}d\left(x,\partial[a,b]\right)\right\}, x\in\bigcup\limits_{i<n_0}E_i\\ \min\left\{\delta^*(x),\delta_i(x)\right\}, x\in\bigcup\limits_{i\geq n_0}E_i\end{cases}$$

Untuk setiap $\mathbf{C}=\{C\}=\{C_1,C_2,...,C_k\}$ dengan $C_j=E_i\cap D$ untuk suatu $i\geq n_0$ dan suatu D dengan $\{(D,x)\}$ δ-fine dan $x\in\operatorname{int}([a,b])$ berlaku

(i) Jika $C_j=E_i$, untuk setiap $i\geq n_0$.

Karena $f\in HD(E_i)$ dan $f\in HD(C_j)$ akibatnya $f\in HD\left(\bigcup\limits_{j=1}^{k}C_j\right)$.

Dipilih fungsi positif δ_* dengan $\delta_*(x)=\min\{\delta_j(x): j=1,2,...,k\}$ maka untuk setiap partisi Perron δ_*-fine $\mathbf{D}=\{(D,x)\}$ pada $\bigcup\limits_{j=1}^{k}C_j$ berlaku

$$\left|(H)\int_{\bigcup_{j=1}^{k}C_j} x^* f-\mathbf{D}\sum x^* f(x)\alpha(D)\right|<\varepsilon .$$

Dengan demikian diperoleh

$$\left|\mathbf{C}\sum(H)\int_C x^* f\right|\leq\left|(H)\int_{\bigcup_{j=1}^{k}C_j} x^* f-\mathbf{D}\sum x^* f(x)\alpha(D)\right|+\sum_{j=1}^{k}\mathbf{D}\left|\sum x^* f(x)\alpha(D)\right|<\varepsilon+k\varepsilon .$$

Menurut sifat Cauchy, $f\in HD[a,b]$.

(ii) Jika $C_j=E_i\cap D$, untuk $i\geq n_0$ dan suatu D dengan $\{(D,x)\}$ δ-fine dan $x\in\operatorname{int}([a,b])$ maka $C_j\subset B(x,\delta(x))$. Menurut Teorema 10. maka $f\in HD(C_j)$. Akibatnya $f\in HD\left(\bigcup\limits_{j=1}^{k}C_j\right)$. Dipilih fungsi positif δ_1 dengan sifat $\delta_1(x)\leq\delta(x)$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ_*-fine $\mathbf{D}=\{(D,x)\}$ pada $\bigcup\limits_{j=1}^{k}C_j$ berlaku

 ISBN : 978-979-16353-9-4

$$\left|(H)\int_{\bigcup_{j=1}^{k} C_j} x^* f - \mathcal{D}\sum x^* f(x)\alpha(D)\right| < \varepsilon \, .$$

Dengan demikian diperoleh

$$\left|\mathcal{C}\sum (H)\int_C x^* f\right| \le \left|(H)\int_{\bigcup_{j=1}^{k} C_j} x^* f - \mathcal{D}\sum x^* f(x)\alpha(D)\right| + \sum_{j=1}^{k} \mathcal{D}\left|\sum x^* f(x)\alpha(D)\right| < \varepsilon + k\varepsilon$$

Menurut sifat Cauchy, $f \in HD[a,b]$. ■

Akibat 13. *Fungsi terukur* $f \in LSRS[a,b]$ *jika dan hanya jika* $f \in HD[a,b]$. ■

Globally Small Riemann Sums (GSRS)

Syarat perlu dan cukup suatu fungsi terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ adalah barisan fungsi $\{x^* F_n\}$ konvergen ke $x^* F$ dan fungsi terukur f bersifat globally small Riemann sums pada $[a,b]$. Berikut ini definisi dan teoremanya yang terkait.

Definisi 14. *Fungsi terukur* $f:[a,b] \to X$ *dikatakan mempunyai sifat Globally Small Rieman Sums (GSRS) pada* $[a,b]$, *ditulis singkat* $f \in GSRS[a,b]$, *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$, $x^* \in X^*$, *dan interval tertutup* $A \subset [a,b]$ *ada bilangan asli* n_0 *sehingga untuk setiap* $n \ge n_0$ *ada fungsi positif* δ_n *pada* $[a,b]$ *dan jika* $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ *partisi Perron* δ_n*-fine pada* A *berlaku*

$$\left|\mathcal{D}\sum_{|x^* f(x)|>n} x^* f(x)\alpha(D)\right| < \varepsilon \, .$$

Teorema 15. *Jika fungsi terukur* $f \in GSRS[a,b]$ *maka* $f \in HD[a,b]$.

Bukti : Karena $f \in GSRS[a,b]$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, $x^* \in X^*$, dan interval tertutup $A \subset [a,b]$ ada bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap $n \ge n_0$ ada fungsi positif δ_n pada $[a,b]$ dan jika $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ partisi Perron δ_n-fine pada A berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum_{|x^* f(x)|>n} x^* f(x)\alpha(D)\right| < \varepsilon \, .$$

Untuk setiap $\mathcal{D}_1$ dan $\mathcal{D}_2$ dua partisi Perron δ_n-fine pada A berlaku

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{D}_1\sum x^* f(x)\alpha(D) - \mathcal{D}_2\sum x^* f(x)\alpha(D)\right| &\le \left|\mathcal{D}_1\sum x^* f(x)\alpha(D)\right| + \left|\mathcal{D}_2\sum x^* f(x)\alpha(D)\right| \\ &\le \left|\mathcal{D}_1\sum_{|x^* f(x)|>n} x^* f(x)\alpha(D)\right| + \left|\mathcal{D}_1\sum_{|x^* f(x)|\le n} x^* f(x)\alpha(D)\right| + \left|\mathcal{D}_2\sum_{|x^* f(x)|>n} x^* f(x)\alpha(D)\right| \\ &\quad + \left|\mathcal{D}_2\sum_{|x^* f(x)|\le n} x^* f(x)\alpha(D)\right| < 4\varepsilon \, .\end{aligned}$$

 ISBN : 978-979-16353-9-4

Menurut kriteria Cauchy, $f \in HD[a,b]$. ■

Teorema 16. *Diberikan fungsi bernilai real f pada $[a,b]$. Untuk setiap $x^* \in X^*$ didefinisikan fungsi $x^* f_n$ dengan*

$$x^* f_n(x) = \begin{cases} x^* f(x), & x \in [a,b], \left|x^* f(x)\right| \le n \\ 0 & , x \text{ yang lain} \end{cases}.$$

Fungsi $f \in HD[a,b]$ ke $F([a,b])$ dan $F_n([a,b]) \to F([a,b])$ untuk $n \to \infty$ jika dan hanya jika fungsi terukur $f \in GSRS[a,b]$.

Bukti : (Syarat Perlu) Karena $f \in HD[a,b]$ maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, $x^* \in X^*$, dan interval tertutup $A \subset [a,b]$ terdapat fungsi positif δ^* pada $[a,b]$ sehingga jika $\mathbf{D}^* = \{(D,x)\}$ sebarang partisi Perron δ^*-fine pada A berlaku

$$\left|\mathbf{D}^* \sum x^* \left(f(x)\alpha(D) - F(A)\right)\right| < \varepsilon .$$

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, ada fungsi positif δ_n pada $[a,b]$ sehingga untuk setiap $\mathbf{D}_n$ partisi Peron δ_n -fine pada A berlaku

$$\left|\mathbf{D}_n \sum x^* \left(f(x)\alpha(D) - F_n(A)\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Karena $\{F_n(A)\}$ konvergen ke $F(A)$ pada $[a,b]$ maka ada bilangan asli n_0 sehingga jika $n \ge n_0$ berlaku

$$\left|x^* F_n(A) - x^* F(A)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Untuk $n \ge n_0$, didefinisikan fungsi positif δ pada $[a,b]$ dengan rumus

$$\delta(x) = \min\left\{\delta^*(x), \delta_n(x)\right\}.$$

Dengan demikian, untuk setiap $\mathbf{D} = \{(D,x)\}$ partisi Perron δ -fine pada A berlaku

$$\left|\mathbf{D} \sum_{|x^* f(x)| > n} x^* f(x)\alpha(D)\right| = \left|\mathbf{D} \sum x^* f(x)\alpha(D) - x^* f_n(x)\alpha(D)\right|$$

$$\le \left|\mathbf{D} \sum x^* \left(f(x)\alpha(D) - F(A)\right)\right| + \left|x^* F_n(A) - x^* F(A)\right| + \left|x^* F(A) - \mathbf{D} \sum x^* f_n(x)\alpha(D)\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Jadi $f \in GSRS[a,b]$.

(Syarat Cukup) Diketahui $f \in GSRS[a,b]$ maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, $x^* \in X^*$, dan interval tertutup $A \subset [a,b]$ ada bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap $n \ge n_0$ ada fungsi positif δ_n pada $[a,b]$ dan jika $\mathbf{D} = \{(D,x)\}$ partisi Perron δ_n -fine pada A berlaku

 ISBN : 978-979-16353-9-4

$$\left| \mathcal{D} \sum_{|x^* f(x)|>n} x^* f(x)\alpha(D) \right| < \varepsilon .$$

Fungsi $f_n \in HD[a,b]$ untuk setiap n. Untuk setiap $m,n \geq n_0$ terdapat fungsi positif δ_m dan δ_n pada $[a,b]$ dengan sifat untuk sebarang $\mathcal{D}_m$ partisi Perron δ_m-fine dan $\mathcal{D}_n$ partisi Perron δ_n-fine masing-masing pada A maka berlaku

$$\begin{aligned} \left| x^* F_n(A) - x^* F_m(A) \right| &\leq \left| x^* F_n(A) - \mathcal{D}_n \sum_{|x^* f(x)|\leq n} x^* f(x)\alpha(D) \right| + \left| \mathcal{D}_n \sum_{|x^* f(x)|>n} x^* f(x)\alpha(D) \right| + \\ &\quad \left| \mathcal{D}_m \sum_{|x^* f(x)|>m} x^* f(x)\alpha(D) \right| + \left| \mathcal{D}_m \sum_{|x^* f(x)|\leq m} x^* f(x)\alpha(D) - x^* F_m(A) \right| \\ &< 4\varepsilon . \end{aligned}$$

Hal ini berarti $\{x^* F_n(A)\}$ barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ lengkap maka $\{x^* F_n(A)\}$ konvergen, katakan ke $x^* F(A)$. Dengan demikian terdapat bilangan asli k_0 sehingga jika $k \geq k_0$ berlaku

$$\left| x^* F_k(A) - x^* F(A) \right| < \varepsilon .$$

Diambil $N = \text{maks}\{n_0, k_0\}$ dan dipilih $\delta(x) = \delta_n(x)$. Untuk setiap partisi Perron δ-fine pada A berlaku

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{D} \sum x^* \left(f(x)\alpha(D) - F(A) \right) \right| &\leq \left| \mathcal{D} \sum x^* \left(f(x)\alpha(D) - F_N(A) \right) \right| + \left| x^* F_N(A) - x^* F(A) \right| \\ &\leq \left| \mathcal{D} \sum_{|x^* f(x)|\leq N} x^* \left(f(x)\alpha(D) - F_N(A) \right) \right| + \left| \mathcal{D} \sum_{|x^* f(x)|>N} x^* f(x)\alpha(D) \right| + \left| x^* F_N(A) - x^* F(A) \right| \\ &< 3\varepsilon . \end{aligned}$$

Jadi $x^* f$ terintegral Henstock pada $[a,b]$. Untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$ terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = (H)\int_A x^* f .$$

Jadi $f \in HD[a,b]$. ∎

Syarat $F_n(A)$ konvergen ke $F(A)$ tidak dapat dihilangkan dalam teorema di atas, sebab fungsi f terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ tidak menjamin $F_n(A)$ konvergen ke $F(A)$.

C. SIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan di atas, disimpulkan bahwa syarat perlu dan cukup suatu fungsi f terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ adalah fungsi terukur f mempunyai sifat locally small Riemann sums pada $[a,b]$ atau fungsi terukur f mempunyai sifat globally small Riemann sums pada $[a,b]$ dan $F_n(A)$ konvergen ke $F(A)$ untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$.

ISBN : 978-979-16353-9-4

D. DAFTAR PUSTAKA

Bartle, G.R., Sherbert, D.R. 1982. *Introduction to Real Analysis*. Canada: John Willey and Sons

Farikhin & Solichin. 2003. *Analisis Fungsi Riil I*. Semarang: Laboratorium Matematika UNDIP

Gordon, R.A. 1994. *The Integral of lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*. USA: Mathematical Society

Guoju, Ye., Tianqing, An. 2001. *On Henstock-Dunford and Henstock-Pettis Integrals*, IJMMS, 25(7): 467-478

Indrati, Ch. R. 2002. *Integral Henstock-Kurzweil di dalam Ruang Euclide Berdimensi-n, Disertasi*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada

Kreyszig, E. 1989. *Introductory Funtional Analysis with Applications*. USA: John Willey & Sons

Lee P.Y. 1989. *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*. Singapore: World Scientific

Lee P.Y. & Vyborny, R. 2000. *Integral: An Easy Approach after Kurzweil and Henstock*. New York: Cambridge University Press

Pfeffer, W.F. 1993. *The Riemann Approach to Integration*. New York: Cambridge University Press

Royden, H.L. 1989. *Real Analysis, Third Edition*. New York: Macmillan Publishing Company

Schwabik, S., Guoju, Ye. 2004. *Topics in Banach Space Integration*, Manuscrip in Preparation.