MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

66. BAND

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER - VERLAG
1956/57

Inhalt des 66. Bandes

KASCH, F.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 164—172 (1956)

Abschätzung der Dichte von Summenmengen

(III. Mitteilung)

Von

FRIEDRICH KASCH

§ 1. Ergebnisse

1. In den zwei vorangehenden Mitteilungen mit dem gleichen Titel [*2*], [*3*][1]) habe ich Abschätzungen der Dichte von Summenmengen aufgestellt, wobei vorausgesetzt wurde, daß einer der Summanden eine positive Dichte besitze und der andere eine Basis endlicher Ordnung der natürlichen Zahlen sei. Inzwischen erschien eine Arbeit von A. BRAUER [*1*][2]), in der sich dieser mit demselben Problem beschäftigt und dabei zu folgendem Ergebnis gelangt:

Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge natürlicher Zahlen der Dichte

$$\alpha \leqq \tfrac{1}{2}, \tag{1}$$

und ist $\mathfrak{B}$ eine die 0 *enthaltende Basis der natürlichen Zahlen der mittleren Ordnung*

$$\lambda \geqq \tfrac{3}{2}, \tag{2}$$

dann gilt für die Dichte γ der Summenmenge[3]) $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ *die Abschätzung*

$$\gamma \geqq \alpha + \tfrac{1}{2}\left\{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 3\alpha(1-\alpha)}\right\}.$$

Es erhebt sich die Frage, in welcher Beziehung dieses Ergebnis und sein Beweis zu den Abschätzungen und der Schlußweise aus I und II stehen.

Wie im folgenden gezeigt werden soll, kann auf der Grundlage von I und II unter schwächeren Voraussetzungen — insbesondere unter Vermeidung von (1) und Abschwächung von (2) — ein schärferes Ergebnis bewiesen werden. Dabei stellt außerdem — wie ich glaube — der hier mitgeteilte Beweis eine Vereinfachung gegenüber dem Beweis in [*1*] dar und ist auch abgesehen von der dadurch erzielten Verbesserung von Interesse. Im einzelnen sollen hier die folgenden Sätze bewiesen werden.

Satz 1. *Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge natürlicher Zahlen der Dichte α, ist $\mathfrak{B}$ eine die* 0 *enthaltende Basis der natürlichen Zahlen der mittleren Ordnung λ und gilt*

$$\lambda \geqq \frac{3 + \alpha(1-\alpha)(3-2\alpha)^2}{2(3-2\alpha)}, \tag{3}$$

---

[1]) Wir zitieren im folgenden [*2*] bzw. [*3*] durch I bzw. II. Es werden die gleichen Bezeichnungen und Definitionen wie in I und II benutzt.

[2]) Diese Arbeit wurde ohne Kenntnis von I und II abgefaßt.

[3]) Bei A. BRAUER [*1*] wird nicht $0 \in \mathfrak{B}$ vorausgesetzt, jedoch die Summenmenge als Menge aller $a + e\,b$ mit $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$ und $e = 0$ oder 1 erklärt, was offenbar die gleiche Summenmenge $\mathfrak{C}$ liefert.

dann besteht für die Dichte γ der Summenmenge $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ die Abschätzung

$$\gamma \geqq \alpha + \tfrac{1}{2}\left\{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 3\alpha(1-\alpha)}\right\}. \tag{4}$$

Ersetzt man (3) durch eine stärkere Voraussetzung, dann kann (4) verschärft werden. Dies besagt

Satz 2. *Gilt in Satz 1 an Stelle von* (3)

$$\lambda \geqq \frac{6 + 39\alpha - 38\alpha^2 + 8\alpha^3}{2(3-2\alpha)(2+3\alpha-2\alpha^2)}, \tag{5}$$

dann besteht die Abschätzung

$$\gamma \geqq \alpha + \frac{1}{2}\left\{\lambda - \frac{\alpha}{4} - \sqrt{\left(\lambda - \frac{\alpha}{4}\right)^2 - 3\alpha(1-\alpha)}\right\}. \tag{6}$$

Wie man leicht feststellt, sind die in (3) und (5) rechts stehenden Ausdrücke als Funktionen von α für $0 \leqq \alpha \leqq 1$ monoton wachsend. Daher ergibt sich sofort, daß für $0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$ Voraussetzung (3) überhaupt keine Beschränkung für λ bedeutet, während (5) $\lambda \geqq \frac{17}{12}$ nach sich zieht, was bereits günstiger als (2) ist. Für $0 \leqq \alpha \leqq 1$ liefert (3) im ungünstigsten Fall (für $\alpha = 1$) die Schranke $\lambda \geqq \frac{3}{2}$ und (5) $\lambda \geqq \frac{15}{6}$.

Ersetzt man die finiten durch die asymptotischen Begriffe (im Sinne von I und II), dann besteht der folgende Satz.

Satz 3. *Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge natürlicher Zahlen der asymptotischen Dichte α^*, und ist $\mathfrak{B}$ eine asymptotische Basis der asymptotischen mittleren Ordnung λ^*, dann gilt für die asymptotische Dichte γ^* der Summenmenge $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ die Abschätzung*

$$\gamma^* \geqq \alpha^* + \frac{1}{2}\left\{\lambda^* - \frac{\alpha^*}{4} - \sqrt{\left(\lambda^* - \frac{\alpha^*}{4}\right)^2 - 3\alpha^*(1-\alpha^*)}\right\}.$$

2. In I waren die Abschätzungen

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma \geqq \alpha\left(1 + c(\alpha)\dfrac{1-\alpha}{\lambda}\right), \qquad \gamma \geqq \alpha\left(1 + c(1-\alpha)\dfrac{1-\alpha}{\lambda}\right) \\ \text{mit} \\ \qquad\qquad\qquad c(\alpha) = \dfrac{1 + \sqrt{\alpha} + \alpha}{(1+\sqrt{\alpha})^2} \end{array}\right. \tag{7}$$

bewiesen worden. Dabei ist die erste Abschätzung für $0 \leqq \alpha < \frac{1}{2}$ und die zweite für $\frac{1}{2} < \alpha \leqq 1$ besser. Wie man leicht nachrechnet, ist (4) dann und nur dann besser als (7), wenn [außer (3)]

$$\lambda < 2\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(1 + \sqrt{\alpha} + \alpha\right) \qquad \text{für} \quad 0 \leqq \alpha \leqq \tfrac{1}{2}$$

bzw.

$$\lambda < 2\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left(1 + \sqrt{1-\alpha} + 1 - \alpha\right) \quad \text{für} \quad \tfrac{1}{2} \leqq \alpha \leqq 1$$

gilt. Da die rechts stehenden Funktionen von α monoton zunehmend bzw. abnehmend sind und für $\alpha = \frac{1}{2}$ den Wert $3 + \sqrt{2}$ annehmen, ist folglich (4) dann und nur dann besser als (7), wenn $\lambda < 3 + \sqrt{2} = 4{,}4\ldots$ gilt und α hinreichend dicht bei $\frac{1}{2}$ liegt. Entsprechend stellt man fest, daß (6) dann und nur dann besser als (7) ist, falls [außer (5)] $\lambda < 13{,}2\ldots$ gilt und α hinreichend dicht bei $\frac{1}{2}$ liegt.

3. Man wird sich fragen, ob die in dieser und den vorhergehenden Arbeiten aufgestellten Abschätzungen in der Nähe der bestmöglichen derartigen Abschätzung liegen. Es soll hier gezeigt werden, daß sie jedenfalls für mittlere Werte von α (d.h. α in der Nähe von $\frac{1}{2}$) nicht „wesentlich" von der bestmöglichen Abschätzung abweichen. Setzt man die Abschätzung in der Form

$$\gamma - \alpha \geqq c\,\frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda} \tag{8}$$

an, wobei $c = c(\alpha)$ eine stetige Funktion von α sei, dann gilt, wie sogleich gezeigt werden soll, notwendig

$$c \leqq \frac{1}{2\alpha(1-\alpha)} \qquad (0 < \alpha < 1). \tag{9}$$

Das liefert für $\alpha = \frac{1}{2}$ die Bedingung $c \leqq 2$, während die bisherigen Abschätzungen für $\alpha = \frac{1}{2}$ und beliebiges λ bereits $c > \frac{3}{4}$ ergeben.

Die Schranke (9) wird durch das folgende Beispiel geliefert. Es seien

$$\mathfrak{A} = \{1, 2, \ldots, rn, sn+1, sn+2, sn+3, \ldots\},$$
$$\mathfrak{B} = \{0, 1, sn+1, sn+2, sn+3, \ldots,$$

wobei n, r, s beliebige natürliche Zahlen mir $r < s$ sind; dann gilt

$$\alpha = \frac{r}{s}, \quad \gamma = \frac{rn+1}{sn} = \alpha + \frac{1}{sn}, \quad \lambda = \frac{sn+1}{2}.$$

Aus (8) ergibt sich damit

$$c \leqq \frac{sn+1}{2sn\alpha(1-\alpha)} = \frac{1}{2\alpha(1-\alpha)} + \frac{1}{2sn\alpha(1-\alpha)},$$

und da diese Beziehung für jedes natürliche n gilt, folgt (9).

Eine entsprechende Aussage besteht auch für die asymptotischen Begriffe, wie das folgende Beispiel zeigt: Es seien mit natürlichen Zahlen $r < s$ und $n \geqq 2$

$$\mathfrak{A} = \left\{sn^{3^i}+1,\ sn^{3^i}+2, \ldots, rn^{3^{i+1}};\ i = i_0, i_0+1, \ldots\right\}^{4)},$$
$$\mathfrak{B} = \left\{sn^{3^i}+1,\ sn^{3^i}+2, \ldots, sn^{3^{i+1}-1};\ i = 0, 1, \ldots\right\};$$

dann gilt, wie man leicht nachrechnet

$$\alpha^* = \frac{r}{s}, \quad \gamma^* = \alpha^* + \frac{1}{n}, \quad \lambda^* = \frac{n+1}{2}.$$

Daraus folgt wieder $c(\alpha^*) \leqq \dfrac{1}{2\alpha^*(1-\alpha^*)}$, wenn $c(\alpha^*)$ stetig vorausgesetzt wird und der Ungleichung $\gamma^* - \alpha^* \geqq c(\alpha^*)\,\dfrac{\alpha^*(1-\alpha^*)}{\lambda^*}$ genügen soll.

---

[4]) i_0 ist in Abhängigkeit von r und s so groß zu wählen, daß diese Kennzeichnung von $\mathfrak{A}$ sinnvoll ist.

§ 2. Beweise

1. Da die Beweise von Satz 1 und Satz 2 nahezu analog verlaufen, soll nur der Beweis von Satz 2 vollständig ausgeführt werden. Auf den Beweis von Satz 1 geben wir lediglich einige Hinweise. Statt Satz 2 beweisen wir sogleich die folgende Aussage:

Satz 2a. *Ist* $\mathfrak{A}$ *eine Menge natürlicher Zahlen der Dichte* α *mit* $0<\alpha<1$, *ist* $\mathfrak{B}$ *eine die* 0 *enthaltende Basis der endlichen mittleren Ordnung* λ *und gilt* (5), *dann genügt die Anzahlfunktion* $C(n)$ *der Summenmenge* $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ *für jede natürliche Zahl* n *der Abschätzung*

$$\frac{C(n)}{n} \geqq \alpha + \frac{1}{2}\left\{\lambda - \frac{\alpha}{4} - \sqrt{\left(\lambda - \frac{\alpha}{4}\right)^2 - 3\alpha(1-\alpha)}\right\}.$$

Darin wird das Gleichheitszeichen höchstens dann angenommen, wenn dies in (5) *gilt.*

Daß aus dieser Aussage Satz 2 folgt, ist unmittelbar klar, wenn man noch beachtet, daß Satz 2 für $\alpha=0$ und $\alpha=1$ trivialer Weise gültig ist.

2. Abweichend von der bisherigen Schreibweise, verstehen wir jetzt unter α eine feste reelle Zahl mit $0<\alpha<1$. Ferner sei $(A+B)(n)$ die Anzahlfunktion der Summenmenge $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$. In Abänderung des Reduktionssatzes aus II[5]) gilt der folgende

Reduktionssatz. *Es sei* $\mathfrak{B}$ *eine die* 0 *enthaltende fest vorgegebene Menge*[6]), *und es seien* α *und* $\varkappa$ *reelle Zahlen. Besteht dann für alle Mengen* $\mathfrak{A}$ *und alle natürlichen Zahlen* n, *die*

$$\frac{A(i)}{i} \geqq \alpha, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{11}$$

und

$$\operatorname*{Min}_{i=1,\ldots,n} \frac{A(i)}{i} = \frac{A(n)}{n}, \tag{12}$$

$$\operatorname*{Min}_{i=1,\ldots,n} \frac{(A+B)(i)}{i} = \frac{(A+B)(n)}{n} \tag{13}$$

genügen, die Ungleichung

$$\frac{(A+B)(n)}{n} > \varkappa, \tag{14}$$

dann gilt diese für alle Mengen $\mathfrak{A}$ *und natürliche Zahlen* n, *die nur* (11) *allein genügen. Diese Aussage bleibt richtig, wenn in* (14) *an Stelle von* $>$ *das Zeichen* $\geqq$ *steht.*

Beweis. Induktion nach n. Für $n=1$ gilt die Behauptung nach Voraussetzung, denn dann folgen (12) und (13) aus (11). Sie sei bis $n-1$ bewiesen [und zwar für alle Mengen $\mathfrak{A}$, die $A(i)\geqq \alpha i$, $i=1,\ldots,n-1$ genügen]. Sei $\mathfrak{A}$

[5]) Der Reduktionssatz aus II ist zum Beweis der vorliegenden Behauptung nicht zu verwenden, weil die behauptete Abschätzung (6) bei festem λ wegen (5) nicht für alle Mengen $\mathfrak{A}$ bewiesen werden kann.

[6]) Unter einer Menge wollen wir im folgenden stets eine Menge nichtnegativer ganzer Zahlen verstehen.

eine beliebige Menge, die (11) erfüllt; gelten dafür die Bedingungen (12) und (13), so ist nichts zu beweisen. Sei zunächst (13) nicht erfüllt, d.h. sei

$$\operatorname*{Min}_{i=1,\ldots,n} \frac{(A+B)(i)}{i} = \frac{(A+B)(m)}{m} < \frac{(A+B)(n)}{n};$$

dann folgt die Behauptung auf Grund der Tatsache, daß sie für m bereits gilt. Sei nun (12) nicht erfüllt, d.h. sei

$$\operatorname*{Min}_{i=1,\ldots,n} \frac{A(i)}{i} = \frac{A(m)}{m} < \frac{A(n)}{n};$$

dann betrachten wir die Menge

$$\mathfrak{A}_m = \{a - m;\ a \in \mathfrak{A},\ a > m\}.$$

Für diese gilt offenbar

$$A_m(r) = A(r+m) - A(m) \geqq A(m)\left\{\frac{r+m}{m} - 1\right\} \geqq \alpha r, \qquad r = 1, \ldots, n-m.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist daher

$$(15) \qquad (A_m + B)(n-m) > \varkappa(n-m),$$

bzw.

$$(A_m + B)(n-m) \geqq \varkappa(n-m),$$

falls in (14) das Zeichen $\geqq$ steht. Liegt eine natürliche Zahl $r \leqq n-m$ in $\mathfrak{A}_m + \mathfrak{B}$, so liegt $r+m$ in $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, und zwar im Intervall $m < r+m \leqq n$, also gilt

$$(16) \qquad (A_m + B)(n-m) \leqq (A+B)(n) - (A+B)(m).$$

Aus (15) und (16) folgt unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung für $\mathfrak{A}$ und m die Behauptung.

Wie unmittelbar zu sehen, folgt auf Grund dieses Reduktionssatzes Satz 2a aus

Satz 2b. *Es seien $\mathfrak{B}$ eine die 0 enthaltende Basis der mittleren Ordnung $\lambda < \infty$ und α eine (5) genügende reelle Zahl mit $0 < \alpha < 1$. Dann gilt für jede Menge $\mathfrak{A}$ und jede natürliche Zahl n mit*

$$(17) \qquad \operatorname*{Min}_{i=1,\ldots,n} \frac{A(i)}{i} = \frac{A(n)}{n} \geqq \alpha, \qquad \operatorname*{Min}_{i=1,\ldots,n} \frac{(A+B)(i)}{i} = \frac{(A+B)(n)}{n}$$

die Ungleichung

$$(18) \qquad \frac{(A+B)(n)}{n} \geqq \alpha + \frac{1}{2}\left\{\lambda - \frac{\alpha}{4} - \sqrt{\left(\lambda - \frac{\alpha}{4}\right)^2 - 3\alpha(1-\alpha)}\right\}$$

Darin wird das Gleichheitszeichen höchstens dann angenommen, wenn dies in (5) gilt.

3. Dieser Satz wird nun bewiesen. In I und II hatten wir zwei Funktionen benutzt, die in bezug auf eine feste natürliche Zahl n und eine feste Menge

$\mathfrak{P}$ folgendermaßen definiert waren:

$D(m)$ ist die Anzahl der von 0 verschiedenen Elemente $p \in \mathfrak{P}$ mit $p+m \in \overline{\mathfrak{P}}(n)$;

$E(m)$ ist die Anzahl der von 0 verschiedenen Elemente $p \in \mathfrak{P}$ mit $p+m \in \mathfrak{P}(n)$.

Diese Funktionen werden im folgenden (bei festem n) für verschiedene Mengen $\mathfrak{P}$ benutzt; zur Unterscheidung wird jeweils die zugrunde gelegte Menge als Index angehängt, also z.B. $D_{\mathfrak{A}}(m)$, $E_{\mathfrak{R}}(m)$. Seien ferner $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{R} = \mathfrak{C} \cap \overline{\mathfrak{A}}$; dann gilt wegen $0 \in \mathfrak{B}$, d.h. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$ offenbar $R(m) = C(m) - A(m)$, $(m = 1, 2, \ldots)$.

Von A. BRAUER[7]) übernehmen wir den folgenden

Hilfssatz. Ist $\mathfrak{B}$ *eine die* 0 *enthaltende Basis der mittleren Ordnung* λ, *dann gilt für jede natürliche Zahl* $k \leqq n$:

$$\lambda k R(n) - \sum_{m=1}^{k} \left(E_{\mathfrak{R}}(m) + R(m)\right) \geqq \sum_{m=1}^{k} D_{\mathfrak{A}}(m). \tag{19}$$

In I (und II) hatten wir die Beziehung

$$\sum_{m=1}^{k} E_{\mathfrak{R}}(m) = \binom{R(n)}{2} - \sum_{m=1}^{n-k-1} R(m)\left\{R(m+k+1) - R(m+k)\right\}$$

bewiesen[8]). Wir setzen nun

$$2k \geqq n-1 \tag{20}$$

voraus. Dann gilt

$$\sum_{m=1}^{k} R(m) - \sum_{m=1}^{n-k-1} R(m)\left\{C(m+k+1) - C(m+k)\right\} \geqq 0,$$

womit aus (19) folgt:

$$\lambda k R(n) - \binom{R(n)}{2} - \sum_{m=1}^{n-k-1} R(m)\left\{A(m+k+1) - A(m+k)\right\} \geqq \sum_{m=1}^{k} D_{\mathfrak{A}}(m).$$

Wie bereits in I gezeigt, gilt als Abschätzung nach unten

$$\sum_{m=1}^{k} D_{\mathfrak{A}}(m) \geqq \sum_{m=1}^{k} A(n-m) - \binom{A(n)}{2} + \sum_{m=1}^{n-k-1} A(m)\left\{A(m+k+1) - A(m+k)\right\}.$$

Die beiden letzten Ungleichungen zusammen liefern

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda k R(n) - \binom{R(n)}{2} \\ &\geqq \sum_{m=1}^{k} A(n-m) - \binom{A(n)}{2} + \sum_{m=1}^{n-k-1} C(m)\left\{A(m+k+1) - A(m+k)\right\}. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Zum Beweis von Satz 1 benutzt man stattdessen die Ungleichung, die man hieraus erhält, wenn man rechts in der Summe $C(m)$ durch $A(m)$ ersetzt.

---

[7]) Siehe [*1*], Formel (23).

[8]) Siehe I, Hilfssatz 2; daß hier $\mathfrak{R}$ an Stelle von $\mathfrak{A}$ in I steht, spielt beim Beweis von Hilfssatz 2 keine Rolle; dieser gilt für beliebige Mengen.

Wir setzen jetzt (17) voraus und schreiben im folgenden zur Abkürzung

$$\operatorname*{Min}_{i=1,\ldots,n}\frac{A(i)}{i}=\frac{A(n)}{n}=\alpha', \qquad \operatorname*{Min}_{i=1,\ldots,n}\frac{C(i)}{i}=\frac{C(n)}{n}=\gamma,\quad \gamma-\alpha'=\varrho',\quad \gamma-\alpha=\varrho,$$

so daß insbesondere $R(n)=\varrho' n$ ist.

Aus (21) folgt nach dem Vorbild in I, indem man auf der rechten Seite $C(m)$ durch γm abschätzt und dann auf die Summe Abelsche Summation ausübt:

$$\text{(22)}\quad \lambda k R(n)-\binom{R(n)}{2}\geq\sum_{m=n-k}^{n-1}A(m)-\binom{A(m)}{2}+\gamma\Big\{(n-k-1)A(n)-\sum_{m=k+1}^{n-1}A(m)\Big\}.$$

4. Wir setzen jetzt im Einklang mit (20) $k=[n/2]$ und unterscheiden die Fälle n gerade und n ungerade.

n gerade: Jetzt ist $k=\frac{n}{2}$, $n-k=\frac{n}{2}$, $k+1=\frac{n}{2}+1$.

Daher folgt aus (22)

$$\text{(23)}\quad \lambda\frac{n}{2}R(n)-\binom{R(n)}{2}\geq(1-\gamma)\sum_{m=n/2}^{n-1}A(m)-\binom{A(n)}{2}+\gamma\Big(\frac{n}{2}-1\Big)A(n)+\gamma A\Big(\frac{n}{2}\Big).$$

Setzt man

$$\delta_m=\begin{cases}0 & \text{falls}\quad m+1\in\mathfrak{A}\\ 1 & \text{falls}\quad m+1\in\overline{\mathfrak{A}},\end{cases}$$

dann gilt offenbar

$$A(m)=A(m+\delta_m),\qquad \sum_{m=l}^{n-1}\delta_m=\bar{A}(n)-\bar{A}(l).$$

Daraus folgt

$$\sum_{m=n/2}^{n-1}A(m)\geq\alpha'\sum_{m=n/2}^{n-1}(m+\delta_m)\geq\alpha'\Big(\frac{3}{2}n-1\Big)\frac{n}{4}+\alpha'(1-\alpha')\frac{n}{2}.$$

Geht man damit in (23) ein, so ergibt sich

$$\text{(24)}\quad \lambda\varrho'-\varrho'^2-\frac{\alpha'}{4}\varrho'\geq\frac{3}{4}\alpha'(1-\alpha')+\frac{1}{2n}\{\alpha'(1-\alpha')(3-2\alpha')-\varrho'(2+3\alpha'-2\alpha'^2)\}.$$

Beim Beweis von Satz 1 hat man statt dessen die Ungleichung

$$\text{(25)}\qquad \lambda\varrho'-\varrho'^2\geq\frac{3}{4}\alpha'(1-\alpha')+\frac{1}{2n}\{\alpha'(1-\alpha')(3-2\alpha')-2\varrho'\}.$$

5. Wir wollen jetzt feststellen, daß man in (24) überall α' durch α ersetzen kann, wobei nach Voraussetzung $\alpha'\geq\alpha$ gilt. Das ist erlaubt, falls die Ableitung der linken Seite nach α' kleiner oder gleich der der rechten Seite ist, d.h. falls

$$\text{(26)}\quad -\lambda+\frac{7}{4}\gamma-\frac{3}{2}\alpha'\leq\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\alpha'+\frac{1}{2n}\{5-7\alpha'+4\alpha'^2-\varrho'(3-4\alpha')\}$$

gilt. Nun ist aber wegen $\lambda\geq 1$

$$\frac{7}{4}\gamma\leq\lambda+\frac{3}{4}$$

und

$$5-7\alpha'+4\alpha'^2-\varrho'(3-4\alpha')\geqq\begin{cases}2-3\alpha'+4\alpha'^2>0 & \text{für}\quad \alpha'\leqq\frac{3}{4}\\ 5-7\alpha'+4\alpha'^2>0 & \text{für}\quad \alpha'\geqq\frac{3}{4},\end{cases}$$

woraus (26) folgt. Aus (24) erhält man also

$$\lambda\varrho-\varrho^2-\frac{\alpha}{4}\varrho\geqq\frac{3}{4}\alpha(1-\alpha)+\frac{1}{2n}\{\alpha(1-\alpha)(3-2\alpha)-\varrho(2+3\alpha-2\alpha^2)\}. \tag{27}$$

Beim Beweis von Satz 1 hat man statt (26)

$$-\lambda+2(\gamma-\alpha')\leqq\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\alpha'+\frac{1}{2n}\{5-10\alpha'+6\alpha'^2\}$$

zu beweisen. Wegen $5-10\alpha'+6\alpha'^2>0$ ist dies richtig, falls

$$2\gamma\leqq\lambda+\frac{3}{4}+\frac{\alpha'}{2}$$

gilt. Für $\gamma\leqq\frac{7}{8}$ ist dies unmittelbar klar. Ist $\gamma-\alpha\geqq\frac{1}{4}$, so gilt wegen

$$\frac{1}{4}\geqq\frac{1}{2}\{\lambda-\sqrt{\lambda^2-3\alpha(1-\alpha)}\}$$

die Behauptung $\gamma-\alpha\geqq\frac{1}{2}\{\lambda-\sqrt{\lambda^2-3\alpha(1-\alpha)}\}$. Sei also $\gamma>\frac{7}{8}$ und $\gamma<\frac{1}{4}+\alpha$, d.h. $\frac{5}{8}<\alpha$. Dann gilt

$$2\gamma\leqq 2\leqq\lambda+\frac{3}{4}+\frac{\alpha}{2}\leqq\lambda+\frac{3}{4}+\frac{\alpha'}{2}$$

für alle $\alpha'\geqq\alpha$. Aus (25) folgt daher

$$\lambda\varrho-\varrho^2\geqq\frac{3}{4}\alpha(1-\alpha)+\frac{1}{2n}\{\alpha(1-\alpha)(3-2\alpha)-2\varrho\}. \tag{28}$$

6. Jetzt wird die Voraussetzung (5) benutzt, um zu zeigen, daß die in (27) rechts stehende geschweifte Klammer positiv ist oder aber (18) gilt. Angenommen, diese Klammer wäre nicht positiv, d.h. es gelte

$$\varrho\geqq\frac{\alpha(1-\alpha)(3-2\alpha)}{2+3\alpha-2\alpha^2};$$

dann folgt (18) sofort aus der Tatsache, daß (5) äquivalent mit

$$\frac{\alpha(1-\alpha)(3-2\alpha)}{2+3\alpha-2\alpha^2}\geqq\frac{1}{2}\left\{\lambda-\frac{\alpha}{4}-\sqrt{\left(\lambda-\frac{\alpha}{4}\right)^2-3\alpha(1-\alpha)}\right\}$$

ist, was man leicht nachrechnet. Aus (28) folgt also

$$\lambda\varrho-\varrho^2-\frac{\alpha}{2}\varrho>\frac{3}{4}\alpha(1-\alpha), \tag{29}$$

oder (18) ist erfüllt. Aus (29) folgt aber ebenfalls wieder (18) (mit dem Zeichen $>$), so daß (18) für jedes gerade n gilt.

Analog schließt man unter Verwendung von (3) beim Beweis von Satz 1.

7. *n ungerade.* Jetzt ist $k = \frac{n-1}{2}$, $n - k = k + 1 = \frac{n+1}{2}$. Daher folgt jetzt aus (22)

$$\lambda \frac{n-1}{2} R(n) - \binom{R(n)}{2} \geq (1-\gamma) \sum_{m=\frac{n+1}{2}}^{n-1} A(m) - \binom{A(n)}{2} + \gamma \frac{n-1}{2} A(n).$$

Durch die gleiche Schlußweise wie bei geradem n erhält man hieraus

$$(30)\quad \lambda \varrho' - \varrho'^2 - \frac{\alpha'}{4} \varrho' \geq \frac{3}{4} \alpha'(1-\alpha') + \frac{1}{n} \left\{(\lambda - 1)\varrho + \alpha'(1-\gamma)\left(1 - \alpha - \frac{1}{n}\left(\frac{3}{4} - \alpha\right)\right)\right\}.$$

Ist $\lambda = 1$, so ist $\gamma = 1$; ferner gilt dann wegen (5) $\alpha < \frac{1}{4}$ und folglich ist Ungleichung (18) erfüllt.

Ist $\lambda > 1$, so ist die in (30) rechts stehende Klammer positiv und aus (30) folgt

$$(31)\qquad \lambda \varrho' - \varrho'^2 - \frac{\alpha'}{4} \varrho' > \frac{3}{4} \alpha'(1-\alpha').$$

Diese Ungleichung bleibt erhalten, wenn man darin α' durch α ersetzt, denn für die Ableitungen beider Seiten nach α' gilt

$$-\lambda + 2(\gamma - \alpha') + \frac{\alpha'}{2} - \frac{\gamma}{4} \leq \frac{3}{4}(1 - 2\alpha'),$$

was mit $7\gamma \leq 4\lambda + 3$ äquivalent ist. Man hat also jetzt wieder (29) erhalten, woraus die behauptete Ungleichung (18) folgt.

Beim Beweis von Satz 1 erhält man in analoger Weise statt (31)

$$\lambda \varrho' - \varrho'^2 > \tfrac{3}{4} \alpha'(1-\alpha').$$

Man unterscheidet nun zwei Fälle. Ist $\gamma \leq 2\alpha$, dann gilt für die Ableitungen beider Seiten nach α' und für alle $\alpha' \geq \alpha$

$$-\lambda + 2(\gamma - \alpha') \leq \tfrac{3}{4}(1 - 2\alpha'),$$

so daß die zu beweisende Ungleichung

$$\gamma > \alpha + \tfrac{1}{2}\left\{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 3\alpha(1-\alpha)}\right\}$$

folgt. Ist aber $\gamma > 2\alpha$, so ist diese Ungleichung unmittelbar zu verifizieren.

8. Der Beweis von Satz 3 soll nicht ausgeführt werden. Er kann leicht nach dem Vorbild in II erfolgen, indem man von der (21) entsprechenden asymptotischen Formel ausgeht und diese für eine solche Folge von n abschätzt, für die $\frac{C(n)}{n} \to \gamma^*$ gilt.

Literatur

[1] BRAUER, A.: On the Schnirelmann density of the sum of two sequences. Math. Z. **63**, 529—541 (1956). — [2] KASCH, F.: Abschätzung der Dichte von Summenmengen. Math. Z. **62**, 368—387 (1955). — [3] KASCH, F.: Abschätzung der Dichte von Summenmengen (II. Mitt.). Math. Z. **64**, 243—257 (1956).

Mainz, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 31. Mai 1956)