MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN | DAVID HILBERT
OTTO BLUMENTHAL | ERICH HECKE

127. Band · 1. Heft

(ABGESCHLOSSEN AM 12. JANUAR 1954)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1954

Inhalt des 127. Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Aubert, K. E., Über Bewertungen mit halbgeordneter Wertgruppe 8
(Anschrift: 11, Rue Pierre Curie, Paris 5e, Institut Henri Poincaré)

Behnert-Smirnov, K. N., Über eine notwendige und hinreichende Bedingung der gleichgradigen Stetigkeit von Funktionenmengen 424
(Anschrift: Köln, Hohe Straße 114)

Behrens, E.-A., Nichtassoziative Ringe 441
(Anschrift: Frankfurt a. M., Schumannstr. 58)

Bremermann, H. J., Die Holomorphiehüllen der Tuben- und Halbtubengebiete . 406
(Anschrift: Institute for Applied Mathematics, University, Stanford, Cal., USA)

Capon, R. S., A Unified Formalism in Mechanics 305
(Anschrift: 45 York Street, Surrey Hills, Melbourne, Australia)

Carlitz, L., The Coefficients of Singular Elliptic Functions 162
(Anschrift: Duke University, Dep. of Mathematics, Durham, N. C., USA)

Cassels, J. W. S., Über $\varliminf_{x \to +\infty} x|\vartheta x + \alpha - y$ 288
(Anschrift: Trinity College, Cambridge, England)

Hadwiger, H., Zum Problem der Zerlegungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder . 170
(Anschrift: Bern/Schweiz, Hochfeldstr. 31)

Heinz, E., Über die Existenz einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung bei vorgegebener Berandung 258
(Anschrift: Göttingen, Bunsenstr. 3—5, Math. Institut der Universität)

Herrmann, O., Über HILBERTsche Modulfunktionen und die DIRICHLETschen Reihen mit EULERscher Produktentwicklung 357
(Anschrift: Münster i. Westf., Math. Institut der Universität, Schloßplatz 2)

Jörgens, K., Über die Lösungen der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$ 130
(Anschrift: Göttingen, Math. Institut, Bunsenstr. 3—5)

Karzel, H., Erzeugbare Ordnungsfunktionen 228
(Anschrift: Bonn, Math. Seminar d. Universität)

Kasch, F., Grundlagen einer Theorie der Frobeniuserweiterungen 453
(Anschrift: Göttingen, Math. Institut d. Universität, Bunsenstr. 3—5)

Klingenberg, W., Eine Begründung der hyperbolischen Geometrie 340
(Anschrift: Hamburg, Math. Seminar der Universität, Harvestehuder Weg 10)

Kneser, M., Zur Theorie der Kristallgitter 105
(Anschrift: Heidelberg, Werderstr. 80)

Macintyre, A. J., and R. Wilson, Operational Methods and the Coefficients of Certain Power Series 243
(Anschrift: University College of Swansea, Dep. of Mathematics, Singleton Park, Swansea/England)

Magnus, W., und R. Moufang, MAX DEHN zum Gedächtnis 215
(Anschrift: Frankfurt a. M., Math. Institut der Universität)

Markwald, W., Zur Theorie der konstruktiven Wohlordnungen 135
(Anschrift: Münster i. Westf., Institut für math. Grundlagenforschung, Schloßplatz 2)

Meschkowski, H., Beiträge zur Theorie der Orthonormalsysteme 107
(Anschrift: Berlin-Friedenau, Bundesallee 83)

Moufang, R., siehe Magnus, W.

Ohmann, D., Ungleichungen zwischen den Quermaßintegralen beschränkter Punktmengen II. 1
(Anschrift: Frankfurt a. M., Arnsburgerstr. 22)

Seite

Petersson, H., Über automorphe Orthogonalfunktionen und die Konstruktion der automorphen Formen von positiver reeller Dimension 33
(Anschrift: Münster i. Westf., Tannenbergstr. 25)

Rembs, E., Verbiegbarkeit konvexer Kalotten 251
(Anschrift: Berlin-Friedenau, Begasstraße 7)

Ringel, G., Bestimmung der Maximalzahl der Nachbargebiete auf nichtorientierbaren Flächen 181
(Anschrift: Kirchhoven 208 a bei Heinsberg/Rhld.)

Rose, A., A Formalisation of the 2-Valued Propositional Calculus with Self-dual Primitives 255
(Anschrift: Dep. of Mathematics, The University, Nottingham, England)

Rund, H., On the Analytical Properties of Curvature Tensors in FINSLER Spaces . . 82
(Anschrift: Bonn, Math. Seminar der Universität, Meckenheimer Allee 172)

Schütte, K., Kennzeichnung von Ordnungszahlen durch rekursiv erklärte Funktionen 15
(Anschrift: Marburg/Lahn, Lutherstr. 4)

Strebel, K., Asymptotische Entwicklung einer Summe, die beim Problem der zwei Stichproben auftritt 401
(Anschrift: Institute of Advanced Study, Princeton, N. J., USA)

Thimm, W., Untersuchungen über ausgeartete meromorphe Abbildungen 150
(Anschrift: Bonn, Luisenstr. 138)

Weier, J., Fixpunktmindestzahlen in unendlichen Polyedern 319
(Anschrift: Fulda, Marienstr. 9)

Will, H., Zur Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen. Über den Satz von HAMMERSTEIN 175
(Anschrift: Münster i. Westf., Math. Institut, Schloßplatz 2)

Wilson, R., siehe Macintyre, A. J.

Wittich, H., Zur Theorie der Riccatischen Differentialgleichung 433
(Anschrift: Karlsruhe-Rüppurr, Kleiststr. 9)

KASCH, F.
Math. Annalen, Bd. 127, S. 453—474 (1954).

Grundlagen einer Theorie der Frobeniuserweiterungen.

Von

FRIEDRICH KASCH in Göttingen.

Inhalt

Einleitung 453

Kapitel I. Skalare Produkte.
1. Voraussetzungen 455
2. Orthogonalisierungsverfahren 456

Kapitel II. Definition und Eigenschaften von Frobeniuserweiterungen.
1. Definition 461
2. Charakterisierung 462
3. Beispiele 463
4. Der Endomorphismenring einer Frobeniuserweiterung 464
5. Vektorielle Ideale 466
6. Frobeniuserweiterungen von Frobeniusringen 468

Kapitel III. Reguläre Modulerweiterungen.
1. Definition und Eigenschaften 468
2. M_o- und M_u-Moduln 471

Einleitung

Eine Algebra $\mathfrak{S}$ über einem Körper A, bei der die 1. und 2. reguläre Darstellung von $\mathfrak{S}$ in A äquivalent sind, nennt man *Frobeniusalgebra*. Die Bezeichnung erinnert an die Tatsache, das G. FROBENIUS die Grundlage für eine Theorie derartiger Algebren gegeben hat.

Als Ausgangspunkt für die neueren Untersuchungen über Frobeniusalgebren kann ein Kriterium von R. BRAUER und C. NESBITT angesehen werden [1, 12]. Es besagt, daß eine Algebra $\mathfrak{S}/A$ dann und nur dann Frobeniusalgebra ist, wenn $\mathfrak{S}$, aufgefaßt als Vektorraum über A, eine Hyperebene besitzt, die kein von Null verschiedenes Rechts- oder Linksideal von $\mathfrak{S}$ enthält (d. h. eine nichtsinguläre Hyperebene). Diese Bedingung erlaubt auch eine abbildungstheoretische Fassung, die für das folgende wesentlich ist. Jede Hyperebene von $\mathfrak{S}$ kann als Kern einer operatorhomomorphen Abbildung von $\mathfrak{S}$ auf A gedeutet werden, wobei $\mathfrak{S}$ als Modul mit A als zweiseitigem Operatorenbereich zu betrachten ist. Dann besagt die Bedingung des Kriteriums, daß es eine zweiseitig A-operatorhomomorphe Abbildung von $\mathfrak{S}$ auf A gibt, bei der kein von Null verschiedenes Rechts- oder Linksideal von $\mathfrak{S}$ auf Null abgebildet wird[1]. Bei dieser Fassung geht nicht mehr ein, daß $\mathfrak{S}/A$

[1]) Auf diese Fassung und die Verallgemeinerungsmöglichkeit des angegebenen Kriteriums für den Fall eines Schiefkörpers A machte mich F. K. SCHMIDT aufmerksam. Für das Interesse am Fortgang dieser Arbeit und einige Hinweise möchte ich ihm sowie T. NAKAYAMA, der eine erste Fassung der Arbeit durchsah, vielmals danken.

eine Algebra ist. Es liegt dann nahe, beliebige Ringe $\mathfrak{S}$ zu untersuchen, die einen derartigen Operatorhomomorphismus auf einen Unterring A besitzen. Solche Ringerweiterungen $\mathfrak{S}/A$ sollen hier als *Frobeniuserweiterungen* bezeichnet werden, falls A noch gewissen Voraussetzungen genügt[2]). Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Grundlagen für eine Theorie der Frobeniuserweiterungen zu geben.

Mit Hilfe der abbildungstheoretischen Fassung des Kriteriums lassen sich eine Reihe von Sätzen über Frobeniusalgebren fast unmittelbar auf den Fall ausdehnen, daß $\mathfrak{S}$ eine Frobeniuserweiterung eines Schiefkörpers A ist. Das beruht auf der Tatsache, daß dann $\mathfrak{S}/A$, ebenso wie bei einem kommutativen Skalarenkörper, einen Vektorraum im üblichen Sinne darstellt. Hier soll die Theorie ohne diese Beschränkung entwickelt werden und dies ist unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über A möglich. Es wird nur gefordert, daß der Ring A ein 1-Element besitze, der Minimalbedingung für Links- und Rechtsideale genüge und daß der Rechtsannullator $\Lambda_r(\mathfrak{J}_l)$, bzw. der Linksannullator $\Lambda_l(\mathfrak{J}_r)$ eines jeden echt in A enthaltenen Linksideals $\mathfrak{J}_l$ bzw. Rechtsideals $\mathfrak{J}_r$ von Null verschieden sei:

$$\Lambda_r(\mathfrak{J}_l) \neq 0, \quad \Lambda_l(\mathfrak{J}_r) \neq 0.$$

Diese Voraussetzungen sind z. B. bei halbeinfachen Ringen oder — allgemeiner — bei quasi-Frobeniusringen erfüllt. Der Rang von $\mathfrak{S}/A$ wird nicht als endlich vorausgesetzt, doch wird auf den endlichen Fall das Hauptgewicht gelegt. Die Eigenschaften von Frobeniuserweiterungen unendlichen Ranges werden hier nur soweit berücksichtigt, als sie sich mit den für den endlichen Fall entwickelten Methoden herleiten lassen.

Wir beginnen im ersten Kapitel damit, eine Theorie der skalaren Produkte in Vektorräumen über derartigen Skalarenringen A zu entwickeln. Dies erfolgt im Anschluß an E. WITT und F. K. SCHMIDT [14, 13], wo entsprechende Überlegungen für Skalarenkörper bzw. Schiefkörper durchgeführt werden. Hier wird gezeigt, daß ein Links- und ein Rechtsvektorraum über A, die durch ein „reguläres" skalares Produkt miteinander verknüpft sind, stets zueinander orthogonale Basen enthalten. Dieses Ergebnis und die daraus fließenden Folgerungen bilden die Grundlage für alle weiteren Überlegungen.

Darauf aufbauend können im zweiten Kapitel die Eigenschaften von Frobeniuserweiterungen untersucht werden. Wir wollen hier nur auf einige der dabei gewonnenen Ergebnisse hinweisen. Wesentlich ist die Tatsache, daß auch jetzt ein Kriterium besteht, welches dem anfangs angegebenen für Frobeniusalgebren entspricht. Auf Grund dieses Kriteriums kann u. a. gezeigt werden, daß eine Ringerweiterung endlichen Ranges $\mathfrak{S}/A$ dann und nur dann Frobeniuserweiterung ist, wenn der Endomorphismenring des als A-Linksmodul betrachteten Ringes $\mathfrak{S}$ Frobeniuserweiterung von $\mathfrak{S}^r$ ist[3]).

[2]) Davon sind Frobeniusringe und quasi-Frobeniusringe zu unterscheiden, die von T. NAKAYAMA eingeführt und bisher vielfach untersucht worden sind. Im Falle einer Algebra $\mathfrak{S}/A$ fallen die Begriffe Frobeniusalgebra, Frobeniusring und Frobeniuserweiterung zusammen.

[3]) $\mathfrak{S}^r$ bezeichne den durch die Elemente von $\mathfrak{S}$ als Rechtsmultiplikatoren von $\mathfrak{S}$ erzeugten Endomorphismenring.

Dieses Ergebnis ermöglicht es, eine Beziehung zwischen Frobeniuserweiterungen und galoisschen Erweiterungen sehr allgemeiner Art herzustellen. Darunter fallen z. B. alle galoisschen Erweiterungen endlichen Ranges bei Schiefkörpern. So kann gezeigt werden, daß der Endomorphismenring einer galoisschen Erweiterung $\mathfrak{S}/A$ Frobeniuserweiterung über $\mathfrak{S}^r$ ist, und nach dem vorher erwähnten Ergebnis ist dann auch $\mathfrak{S}/A$ Frobeniuserweiterung. Dies schließt z. B. ein, daß die beiden regulären Darstellungen von $\mathfrak{S}$ in A äquivalent sind[4]).

Im dritten Kapitel werden schließlich die Eigenschaften von Frobeniuserweiterungen herangezogen, um einen Reduzibilitätssatz zu beweisen, der eine allgemeine Fassung des Satzes von MASCHKE über die vollständige Reduzibilität eines Gruppenrings darstellt. Es handelt sich um eine Weiterführung der Überlegungen von W. GASCHÜTZ aus [3]. Die Grundlage hierfür bildet eine neue Definition der von W. GASCHÜTZ in [3] eingeführten *regulären Erweiterungen.* Diese Definition ermöglicht es, die wesentlichen Eigenschaften der Frobeniuserweiterungen in sehr übersichtlicher Weise heranzuziehen und führt auch in dem von W. GASCHÜTZ behandelten Fall zu einer Vereinfachung des Beweises.

I. Skalare Produkte.

1. Voraussetzungen.

Es sei A ein Ring mit 1-Element und Minimalbedingung für Links- und Rechtsideale. Ist $\mathfrak{J}$ eine Menge von Elementen aus A, so bezeichne $\Lambda_r(\mathfrak{J})$ bzw. $\Lambda_l(\mathfrak{J})$ den Rechts- bzw. Linksannullator von $\mathfrak{J}$ in A. Gilt für jedes *echt* in A enthaltene Linksideal $\mathfrak{J}_l$ und jedes *echt* in A enthaltene Rechtsideal $\mathfrak{J}_r$

$$(1)\qquad \Lambda_r(\mathfrak{J}_l) \neq 0, \quad \Lambda_l(\mathfrak{J}_r) \neq 0,$$

so nennen wir A einen *S-Ring*[5]).

Wir weisen darauf hin, daß selbstverständlich nicht jeder Ring mit 1-Element und Minimalbedingung S-Ring ist[6]).

Genügt jedes Linksideal $\mathfrak{J}_l$ und jedes Rechtsideal $\mathfrak{J}_r$ von A einer Gleichung

$$(2)\qquad \Lambda_l(\Lambda_r(\mathfrak{J}_l)) = \mathfrak{J}_l, \quad \Lambda_r(\Lambda_l(\mathfrak{J}_r)) = \mathfrak{J}_r,$$

[4]) Von T. NAKAYAMA wurde ein Zusammenhang zwischen Frobeniusringen und galoisschen Erweiterungen vermutet. In dem Kongreßbericht [10] "On two topics in the structural theory of rings (Galois theory of rings and Frobenius algebras)" schreibt T. NAKAYAMA zu Beginn: "The topics are rather different from each other", schließt dann aber mit den Worten: "It seems to the writer that our topics possess a somewhat deeper connection with each other than was said in the beginning." Diese Vermutung hat durch unser Ergebnis ihre volle Bestätigung gefunden.

[5]) Diese Bezeichnung erfolgt im Hinblick auf die spätere Verwendung der S-Ringe als Skalarenringe.

[6]) Zum Beispiel ist der Ring M aller Matrizen $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ mit Elementen a, b, c aus einem festen Körper kein S-Ring. Das Rechtsideal $\mathfrak{J}_r = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ ist echt in M enthalten und genügt der Gleichung $\Lambda_l(\mathfrak{J}_r) = 0$.

so heißt A *quasi-Frobeniusring* [8]. Offensichtlich folgt (1) aus (2), d. h. jeder quasi-Frobeniusring ist S-Ring. Wir bemerken ferner, daß jeder halbeinfache Ring quasi-Frobeniusring ist.

Eine additive, abelsche Gruppe $\mathfrak{L}$ mit einem Ring A als Linksmultiplikatorenbereich bezeichnen wir als *Linksvektorraum* $\mathfrak{L}/A$, wenn $\mathfrak{L}/A$ eine abzählbare Basis besitzt und das 1-Element von A Einheitsoperator von $\mathfrak{L}$ ist. Für die Basis verlangen wir wie üblich eindeutige Darstellbarkeit eines jeden Elements mit Koeffizienten aus A. Der Ring A soll dann auch als *Skalarenring* von $\mathfrak{L}$ bezeichnet werden. Für die Dimension von $\mathfrak{L}/A$ wird $(\mathfrak{L}:A)_l$ geschrieben. Jeder in $\mathfrak{L}$ enthaltene Linksvektorraum $\mathfrak{L}'/A$ heißt *Unterraum* von $\mathfrak{L}$.

Hilfssatz 1: Die Dimension $(\mathfrak{L}:A)_l$ *ist unabhängig von der Basis eindeutig bestimmt. Ist* $\mathfrak{L}'$ *ein endlichdimensionaler, echter Unterraum von* $\mathfrak{L}$, *so gilt* $(\mathfrak{L}':A)_l < (\mathfrak{L}:A)_l$.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem Remak-Krullschen Satz[7]. Die zweite Behauptung besagt in matrizentheoretischer Fassung, daß es im Ring aller quadratischen n-zeiligen Matrizen mit Matrixelementen aus A nur Nullteiler oder Einheiten gibt. Daraus entnimmt man auch sofort die folgende bekannte Tatsache: Ist $(\mathfrak{L}:A)_l = n < \infty$, so ist jedes Erzeugendensystem der Länge n von $\mathfrak{L}/A$ eine Basis von $\mathfrak{L}/A$.

Die Vektoren $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots, \in \mathfrak{L}$ heißen linear unabhängig über A, wenn aus

$$\sum a_i \mathfrak{l}_i = 0, \quad a_i \in A$$

$a_1 = a_2 = \cdots = 0$ folgt. (Lin. unabh. also im strengen, nicht im modulth. Sinne.)

Ist $\mathfrak{L}'$ ein Unterraum von $\mathfrak{L}$ und ist $\mathfrak{L}'$ Summand in einer direkten Zerlegung von $\mathfrak{L}$ als A-Linksmodul, so bezeichnen wir $\mathfrak{L}'$ als *direkten Unterraum* von $\mathfrak{L}$.

Hilfssatz 2: Ist in der Zerlegung von $\mathfrak{L}$ *als* A*-Linksmodul*

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}' \oplus \mathfrak{L}''$$

$\mathfrak{L}'$ *ein endlichdimensionaler direkter Unterraum von* $\mathfrak{L}$, *so ist auch* $\mathfrak{L}''$ *Unterraum von* $\mathfrak{L}$.

Sei $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n$ eine Basis von $\mathfrak{L}'/A$ und $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots$ eine Basis von $\mathfrak{L}/A$. Bezeichnet man mit $\mathfrak{L}_n$ den durch $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_n$ aufgespannten Unterraum, so sind auf Grund der Zuordnung $\mathfrak{v}_i \leftrightarrow \mathfrak{l}_i$, $(i = 1, \ldots, n)$ die Unterräume $\mathfrak{L}'$ und $\mathfrak{L}_n$ isomorph. Zufolge des Remak-Krullschen Satzes sind dann auch $\mathfrak{L}''$ und der durch $\mathfrak{l}_{n+1}, \mathfrak{l}_{n+2}, \ldots$ aufgespannte Unterraum operatorisomorph und daher ist $\mathfrak{L}''$ Unterraum.

Alles, was bisher für Linksvektorräume ausgeführt wurde, gilt sinngemäß auch für Rechtsvektorräume $\mathfrak{R}/A$.

2. *Orthogonalisierungsverfahren.*

a) Seien nun $\mathfrak{L}/A$ ein Links- und $\mathfrak{R}/A$ ein Rechtsvektorraum und es gebe eine Abbildung der Menge aller Paare $\mathfrak{l}, \mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{l} \in \mathfrak{L}$ und $\mathfrak{r} \in \mathfrak{R}$ in A

$$\mathfrak{l}, \mathfrak{r} \to \langle \mathfrak{l}, \mathfrak{r} \rangle \in A$$

[7] Vgl. [2].

mit folgenden Eigenschaften:

$$\langle \mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2, \mathfrak{r}\rangle = \langle \mathfrak{l}_1, \mathfrak{r}\rangle + \langle \mathfrak{l}_2, \mathfrak{r}\rangle, \quad \langle \mathfrak{l}, \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2\rangle = \langle \mathfrak{l}, \mathfrak{r}_1\rangle + \langle \mathfrak{l}, \mathfrak{r}_2\rangle,$$
$$\langle a\,\mathfrak{l}, \mathfrak{r}\rangle = a\,\langle \mathfrak{l}, \mathfrak{r}\rangle, \quad \langle \mathfrak{l}, \mathfrak{r}\,a\rangle = \langle \mathfrak{l}, \mathfrak{r}\rangle\, a, \quad a \in A.$$

Eine solche Abbildung nennen wir ein *skalares Produkt* von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ in A.

Diejenigen Vektoren $\mathfrak{l} \in \mathfrak{L}$, für die $\langle \mathfrak{l}, \mathfrak{R}\rangle = 0$ ist, d. h. die auf ganz $\mathfrak{R}$ senkrecht stehen, bilden einen A-Untermodul von $\mathfrak{L}$, das Radikal $\mathfrak{L}^*$. Je nachdem, ob $\mathfrak{L}^* = 0$ ist oder nicht, heiße das skalare Produkt *linksregulär* oder *linkssingulär*. Ist das skalare Produkt linksregulär, so folgt also aus $\langle \mathfrak{l}, \mathfrak{R}\rangle = 0$ die Gleichung $\mathfrak{l} = 0$. Ein skalares Produkt, das sowohl links- als auch rechtsregulär ist, nennen wir *regulär*.

Ein einfaches Beispiel für reguläre skalare Produkte erhält man folgendermaßen: Seien $\mathfrak{L}$ ein Links- und $\mathfrak{R}$ ein Rechtsvektorraum gleicher Dimension über einem Ring A mit 1-Element. Es bezeichne $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots$ eine Basis von $\mathfrak{L}/A$ und $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots$ eine Basis von $\mathfrak{R}/A$. Dann setze man

$$\langle \mathfrak{l}_i, \mathfrak{r}_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq j \\ 1 \text{ für } i = j \end{cases}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

d. h., man fasse die gegebenen Basen als *Orthogonalbasen* auf[8]). Die Regularität des so definierten skalaren Produktes ist unmittelbar einzusehen.

Grundlegend für das weitere ist die Tatsache, daß es umgekehrt zu jedem regulären skalaren Produkt zweier Vektorräume über einem S-Ring als Skalarenring derartige Orthogonalbasen gibt.

Satz 1: *Es seien $\mathfrak{L}$ ein Links- und $\mathfrak{R}$ ein Rechtsvektorraum über dem S-Ring A und $\langle \mathfrak{l}, \mathfrak{r}\rangle$ ein linksreguläres skalares Produkt. Ist $\mathfrak{L}'$ ein beliebiger Unterraum von $\mathfrak{L}$, so gibt es einen Unterraum $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{R}$, so daß in $\mathfrak{L}'$ und $\mathfrak{R}'$ zueinander orthogonale Basen existieren; dann ist $(\mathfrak{L}' : A)_l = (\mathfrak{R}' : A)_r$.*

Beweis: Es seien $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots$ eine feste Basis von $\mathfrak{L}'/A$. Dann gilt für jedes $\mathfrak{v}_i$:

$$\langle \mathfrak{v}_i, \mathfrak{R}\rangle = A.$$

Jedenfalls ist $\langle \mathfrak{v}_i, \mathfrak{R}\rangle = \mathfrak{J}_r$ Rechtsideal von A. Nimmt man an, daß $\mathfrak{J}_r$ ein echtes Rechtsideal von A sei, so gibt es wegen (1) ein Element $0 \neq a \in A$ mit $a\,\mathfrak{J}_r = 0$, also gilt auch

$$a\,\langle \mathfrak{v}_i, \mathfrak{R}\rangle = \langle a\,\mathfrak{v}_i, \mathfrak{R}\rangle = 0.$$

Daraus folgt $a\,\mathfrak{v}_i = 0$ und dies ist für ein Basiselement $\mathfrak{v}_i$ nur mit $a = 0$ möglich.

Wir können den Beweis nun in üblicher Weise durch vollständige Induktion führen. Den durch die Elemente $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n$ aufgespannten Unterraum von $\mathfrak{L}'$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{L}'_n$. Wegen $\langle \mathfrak{v}_1, \mathfrak{R}\rangle = A$ gibt es einen Vektor $\mathfrak{w}_1 \in \mathfrak{R}$ mit $\langle \mathfrak{v}_1, \mathfrak{w}_1\rangle = 1$. Wir nehmen nun an, daß wir bereits eine Basis $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}'_1, \mathfrak{v}'_2, \ldots, \mathfrak{v}'_{n-1}$ von $\mathfrak{L}'_{n-1}$ besitzen mögen, zu der es Elemente $\mathfrak{w}_1 = \mathfrak{w}'_1, \mathfrak{w}'_2, \ldots, \mathfrak{w}'_{n-1}$ mit

$$\langle \mathfrak{v}'_i, \mathfrak{w}'_j\rangle = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, \ldots, n-1) \tag{4}$$

gibt. Sei

$$\mathfrak{v}'_n = \mathfrak{v}_n - \langle \mathfrak{v}_n, \mathfrak{w}'_1\rangle\, \mathfrak{v}'_1 - \cdots - \langle \mathfrak{v}_n, \mathfrak{w}'_{n-1}\rangle\, \mathfrak{v}'_{n-1},$$

[8]) Die Bezeichnung „Orthogonalbasen" bedeute auch im folgenden stets, daß die Basen bezüglich eines gegebenen skalaren Produktes orthogonal seien. Wird diese Bezeichnung bei Ringen benutzt, so bezieht sie sich also nicht auf die im Ring gegebene Multiplikation.

dann bilden $\mathfrak{v}_1', \ldots, \mathfrak{v}_n'$ eine Basis von $\mathfrak{L}_n'$. Ist $\langle \mathfrak{v}_n', \mathfrak{w}_n \rangle = 1$, so gilt mit

$$\mathfrak{w}_n' = \mathfrak{w}_n - \mathfrak{w}_1' \langle \mathfrak{v}_1', \mathfrak{w}_n \rangle - \cdots - \mathfrak{w}_{n-1}' \langle \mathfrak{v}_{n-1}', \mathfrak{w}_n \rangle$$

Gleichung (4) für $i, j = 1, \ldots, n$. Die Elemente $\mathfrak{w}_1', \ldots, \mathfrak{w}_n'$ sind offenbar (rechts) linear unabhängig über A und spannen daher einen Unterraum der Dimension n von $\mathfrak{R}$ auf. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Ist $\mathfrak{L}'$ eine Menge von Elementen aus $\mathfrak{L}$, so sei $S_r(\mathfrak{L}')$ der zu $\mathfrak{L}'$ senkrechte A-Untermodul von $\mathfrak{R}$. Entsprechend werde der zu einer Menge von Elementen aus $\mathfrak{R}$ senkrechte Untermodul von $\mathfrak{L}$ bezeichnet.

Man erhält aus Satz 1 eine Reihe von Folgerungen:

Folgerung 1[9])**:** *Voraussetzungen wie in Satz 1. Ist $\mathfrak{L}'$ ein endlichdimensionaler Unterraum von $\mathfrak{L}$, so gilt:*

(5) $$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}' \oplus S_l(\mathfrak{R}'), \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}' \oplus S_r(\mathfrak{L}');$$

(6) $$(\mathfrak{L}' : A)_l + (S_l(\mathfrak{R}') : A)_l = (\mathfrak{L} : A)_l, \quad (\mathfrak{R}' : A)_r + (S_r(\mathfrak{L}') : A)_r = (\mathfrak{R} : A)_r;$$

(7) $$S_l(S_r(\mathfrak{L}')) = \mathfrak{L}'.$$

Beweis: Seien jetzt $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n$ und $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_n$ die zueinander orthogonalen Basen von $\mathfrak{L}'$ und $\mathfrak{R}'$. Dann besteht für jedes $\mathfrak{l} \in \mathfrak{L}$ die direkte Zerlegung

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}' + \mathfrak{l}''$$

mit

$$\mathfrak{l}' = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathfrak{l}, \mathfrak{w}_i \rangle \, \mathfrak{v}_i \in \mathfrak{L}', \quad \mathfrak{l}'' = \mathfrak{l} - \mathfrak{l}' \in S_l(\mathfrak{R}').$$

Eine entsprechende Zerlegung existiert für die Elemente aus $\mathfrak{R}$. Damit ist (5) bewiesen. Da nach (5) $\mathfrak{L}'$ direkter Unterraum von $\mathfrak{L}$ ist, ist nach Hilfssatz 2 auch $S_l(\mathfrak{R}')$ Unterraum von $\mathfrak{L}$ und dann folgt (6) aus (5). Sei nun

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}' + \mathfrak{l}'' \in S_l(S_r(\mathfrak{L}')),$$

so folgt $\mathfrak{l}'' \in S_l(S_r(\mathfrak{L}'))$. Außerdem ist aber $\mathfrak{l}''$ orthogonal zu $\mathfrak{R}'$ und somit nach (5) zu ganz $\mathfrak{R}$. Da nach Voraussetzung das skalare Produkt linksregulär ist, folgt $\mathfrak{l}'' = 0$, also gilt (7). Damit ist Folgerung 1 bewiesen.

Sei jetzt $\mathfrak{L}$ ein beliebiger Linksvektorraum über einem S-Ring A. Versteht man unter $\mathfrak{R}$ einen Rechts-Vektorraum gleicher Dimension über A, so kann man durch (3) ein linksreguläres skalares Produkt zwischen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ definieren. Ist nun $\mathfrak{L}'$ ein endlichdimensionaler Unterraum von $\mathfrak{L}$, so ist, wie eben festgestellt, $\mathfrak{L}'$ Summand in einer direkten Zerlegung $\mathfrak{L}$ in zwei Unterräume. Dieses Ergebnis, das auch an sich von Interesse ist, bezeichnen wir als

Folgerung 2: *Ist $\mathfrak{L}$ ein Vektorraum über einem S-Ring A, so ist jeder endlichdimensionale Unterraum $\mathfrak{L}'$ von $\mathfrak{L}$ Summand in einer direkten Zerlegung von $\mathfrak{L}$ in zwei Unterräume:*

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}' \oplus \mathfrak{L}'', \quad \mathfrak{L}'' \text{ Unterraum.}$$

---

[9]) Diese Folgerung kann als Verallgemeinerung eines Satzes von E. WITT ([14], Satz 1) aufgefaßt werden. Dieser Satz folgt aus unserem Ergebnis fast unmittelbar, wenn man sich auf den dort behandelten Fall beschränkt, daß nämlich $\mathfrak{L} = \mathfrak{R}$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper ist.

Mit anderen Worten: Jede Folge von endlich vielen, über A linearen unabhängigen Elementen aus $\mathfrak{L}$ kann zu einer Basis von $\mathfrak{L}/A$ verlängert werden[10]).

Wir erwähnen schließlich

Folgerung 3: *Es seien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ Vektorräume über einem S-Ring A und es sei $(\mathfrak{L}:A)_l < \infty$. Dann und nur dann ist jedes linksreguläre skalare Produkt von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ in A auch rechtsregulär (also regulär), wenn $(\mathfrak{L}:A)_l = (\mathfrak{R}:A)_r$ gilt.*

Beweis: Existiert ein linksreguläres skalares Produkt von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$, so hat man nach Satz 1 $(\mathfrak{L}:A)_l \leqq (\mathfrak{R}:A)_r$. Ist das skalare Produkt auch rechtsregulär, so gilt auch die umgekehrte Ungleichung und folglich ist $(\mathfrak{L}:A)_l = (\mathfrak{R}:A)_r$. Sei nun $(\mathfrak{L}:A)_l = (\mathfrak{R}:A)_r < \infty$ und das skalare Produkt linksregulär, so gibt es einen in $\mathfrak{R}$ enthaltenen Unterraum $\mathfrak{R}'$ mit $(\mathfrak{R}':A)_r = (\mathfrak{R}:A)_r$ und dann folgt nach Hilfssatz 1 $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}$. In $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ gibt es also zueinander orthogonale Basen und das bedingt, daß das skalare Produkt auch rechtsregulär ist.

Man wird sich fragen, ob auch in Vektorräumen nicht notwendig endlicher Dimension, die ein reguläres skalares Produkt besitzen, stets orthogonale Basen existieren. Daß dies tatsächlich der Fall ist, wird im folgenden Satz behauptet.

Satz 2: *Es seien $\mathfrak{L}$ ein Links- und $\mathfrak{R}$ ein Rechtsvektorraum über dem S-Ring A und es existiere ein reguläres skalares Produkt von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$. Dann gibt es in $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ orthogonale Basen.*

Zum *Beweis* dieses Satzes entnehmen wir zunächst dem Beweis von Satz 1 die folgende Tatsache: Bereits zueinander orthogonale Elemente werden bei der Weiterführung des Orthogonalisierungsverfahrens nicht geändert.

Es seien nun $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots$ eine feste Basis von $\mathfrak{L}/A$ und $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots$ eine solche von $\mathfrak{R}/A$. Dabei können wir $(\mathfrak{L}:A)_l = (\mathfrak{R}:A)_r = \infty$ annehmen. Den durch $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_n$ bzw. $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_n$ aufgespannten Unterraum bezeichnen wir wieder mit $\mathfrak{L}_n$ bzw. $\mathfrak{R}_n$. Der Beweis wird nun dadurch geführt, daß das Orthogonalisierungsverfahren abwechselnd auf gewisse Elemente von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ ausgeübt wird, derart, daß alle Basiselemente dabei erfaßt werden. Seien nach dem m-ten Schritt bereits zueinander orthogonale Vektoren $\mathfrak{l}_1', \ldots, \mathfrak{l}_s'$ und $\mathfrak{r}_1', \ldots, \mathfrak{r}_s'$ so bestimmt, daß in dem durch $\mathfrak{l}_1', \ldots, \mathfrak{l}_s'$ bzw. $\mathfrak{r}_1', \ldots, \mathfrak{r}_s'$ aufgespannten Unterraum der Unterraum $\mathfrak{L}_m$ bzw. $\mathfrak{R}_m$ enthalten ist. Dann bezeichne $\mathfrak{L}'$ den kleinsten der Unterräume $\mathfrak{L}_i$ mit $i > m$, der $\mathfrak{l}_1', \ldots, \mathfrak{l}_s'$ enthält. Nach Folgerung 2 gibt es eine Basis von $\mathfrak{L}'$, die mit $\mathfrak{l}_1', \ldots, \mathfrak{l}_s'$ beginnt. Auf diese Basis üben wir nun das Orthogonalisierungsverfahren aus, wobei $\mathfrak{l}_1', \ldots, \mathfrak{l}_s'$ und $\mathfrak{r}_1', \ldots, \mathfrak{r}_s'$ fest bleiben. Das Verfahren liefert dann eine Basis $\mathfrak{l}_1', \ldots, \mathfrak{l}_s', \mathfrak{l}_{s+1}', \ldots, \mathfrak{l}_t'$ von $\mathfrak{L}'$ und dazu orthogonale Elemente $\mathfrak{r}_1', \ldots, \mathfrak{r}_s', \mathfrak{r}_{s+1}', \ldots, \mathfrak{r}_t'$ aus $\mathfrak{R}$. Sei nun $\mathfrak{R}'$ der kleinste der Unterräume $\mathfrak{R}_i$ mit $i > m$, der $\mathfrak{r}_1', \ldots, \mathfrak{r}_t'$ enthält. Jetzt schließen wir entsprechend wie vorher und erhalten so eine Basis $\mathfrak{r}_1', \ldots, \mathfrak{r}_u'$ von $\mathfrak{R}'$ und

---

[10]) Bei beliebigen Skalarenringen A mit 1-Element und Minimalbedingung ist selbstverständlich nicht notwendig jeder Unterraum eines Vektorraums direkter Unterraum. Betrachtet man z. B. einen Vektorraum der Dimension 2 mit den Basisvektoren x und y über dem in Fußnote [6]) angegebenen Ring M, so spannt der Vektor $z = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} y$ einen eindimensionalen Unterraum auf, der nicht direkt ist.

dazu orthogonale Elemente $\mathfrak{l}_1', \ldots, \mathfrak{l}_u'$ aus $\mathfrak{L}$. In den durch diese Elemente aufgespannten Unterräumen sind offenbar $\mathfrak{L}_{m+1}$ bzw. $\mathfrak{R}_{m+1}$ enthalten. Dieser Schluß ist auch für $m = 0$ gültig, wenn man $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{R}_0 = 0$ setzt. Durch vollständige Induktion erhält man damit je einen Unterraum von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ mit zueinander orthogonalen Basen. Da nach Konstruktion jedes Basiselement von $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{R}$ darin enthalten ist, stimmen sie mit $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ überein.

b) Es seien wieder $\mathfrak{L}$ ein Links- und $\mathfrak{R}$ ein Rechtsvektorraum über dem Ring A. Zusätzlich sei nun noch ein gemeinsamer Operatorenring Ω von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ gegeben, der folgende Eigenschaften besitzen möge: Es sei Ω Rechtsoperatorenring von $\mathfrak{L}$ und Linksoperatorenring von $\mathfrak{R}$ und die Operatoren aus Ω seien lineare Abbildungen von $\mathfrak{L}/A$ und $\mathfrak{R}/A$, d. h. es gelte

$$(a\mathfrak{l})\omega = a(\mathfrak{l}\omega), \quad \omega(\mathfrak{r}a) = (\omega\mathfrak{r})a, \quad a \in A, \quad \omega \in \Omega.$$

Wir nennen dann Ω einen *zulässigen Operatorenring* von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$. Ist ein skalares Produkt $\langle \mathfrak{l}, \mathfrak{r} \rangle$ von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ gegeben, so wird außerdem vorausgesetzt, daß die Operatoren aus Ω *selbstadjungiert* in bezug auf dieses skalare Produkt seien:

$$\langle \mathfrak{l}\,\omega, \mathfrak{r} \rangle = \langle \mathfrak{l}, \omega\,\mathfrak{r} \rangle, \quad \omega \in \Omega.$$

Existieren in $\mathfrak{L}/A$ eine Links- und in $\mathfrak{R}/A$ eine Rechtsbasis, so daß die durch diese Basen erzeugten Darstellungen von Ω in A gleich sind, so bezeichnen wir $\mathfrak{L}, \mathfrak{R}$ als *Frobeniuspaar* bezüglich Ω.

Bemerkung: Definiert man im Falle $(\mathfrak{L} : A)_l < \infty$ ein Frobeniuspaar dadurch, daß man verlangt, daß die Darstellungen von Ω mittels $\mathfrak{L}/A$ und $\mathfrak{R}/A$ äquivalent sind, so ist dies mit unserer Definition gleichbedeutend, da man dann durch eine geeignete Basistransformation zu gleichen Darstellungen übergehen kann. Unsere Definition stimmt also im Falle, daß $\mathfrak{L} = \mathfrak{R} = \Omega$ eine Algebra endlichen Ranges über einem Körper A ist, mit der bekannten Definition für Frobeniusalgebren überein.

Unmittelbar einzusehen ist jetzt

Hilfssatz 3: Dann und nur dann ist $\mathfrak{L}, \mathfrak{R}$ ein Frobeniuspaar über A bezüglich Ω, wenn ein reguläres skalares Produkt von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ in A existiert, zu dem es orthogonale Basen von $\mathfrak{L}/A$ und $\mathfrak{R}/A$ gibt.

Daraus folgt zusammen mit den Sätzen 1 und 2

Satz 3: *Sind $\mathfrak{L}$ ein Links- und $\mathfrak{R}$ ein Rechtsvektorraum über dem S-Ring A mit dem zulässigen Operatorenring Ω, so ist $\mathfrak{L}, \mathfrak{R}$ dann und nur dann Frobeniuspaar über A bezüglich Ω, wenn ein reguläres skalares Produkt von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ in A existiert.*

c) Es soll nun eine von T. NAKAYAMA aufgestellte Verallgemeinerung eines Satzes von M. HALL formuliert werden[11]). Dazu haben wir zuerst eine Bezeichnung einzuführen. Sei A ein Ring mit Minimalbedingung für Links- und Rechtsideale und $\mathfrak{M}$ ein einfacher A-Linksmodul, dann bezeichne $d_l(\mathfrak{M})$ den Rang von $\mathfrak{M}$ über seinem Automorphismenschiefkörper. Ist $\mathfrak{M}$ nicht einfach und ist

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \supset \mathfrak{M}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{M}_s = 0$$

[11]) Siehe [4], theorem 5.2; [8], theorem 12.

eine Kompositionsreihe von $\mathfrak{M}$, so sei

$$d_l(\mathfrak{M}) = \sum_{i=1}^{s} d_l(\mathfrak{M}_{i-1}/\mathfrak{M}_i).$$

Für einen A-Rechtsmodul gelte die entsprechende Bezeichnung.

Ein quasi-Frobeniusring A, bei dem jedes Linksideal $\mathfrak{J}_l$ und jedes Rechtsideal $\mathfrak{J}_r$ der Bedingung

$$d_l(\mathfrak{J}_l) = d_r(A/A_r(\mathfrak{J}_l)) \text{ bzw. } d_r(\mathfrak{J}_r) = d_l(A/A_l(\mathfrak{J}_r))$$

genügt, heißt *Frobeniusring* [8].

Seien jetzt $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots$ eine feste Basis von $\mathfrak{L}/A$ und $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots$ eine solche von $\mathfrak{R}/A$, so bezeichnen wir mit $(\mathfrak{l}, \mathfrak{r})$ das durch

$$\langle \mathfrak{l}_i, \mathfrak{r}_j \rangle = \delta_{ij}$$

definierte spezielle skalare Produkt. Dann besagt der Satz von M. Hall in der Fassung von T. Nakayama:

Ist $(\mathfrak{L} : A)_l = (\mathfrak{R} : A)_r < \infty$, *sind* $\mathfrak{V}$ *bzw.* $\mathfrak{W}$ *A-Untermoduln von* $\mathfrak{L}$ *bzw.* $\mathfrak{R}$ *und ist A ein quasi-Frobeniusring, dann gilt in bezug auf das skalare Produkt* $(\mathfrak{l}, \mathfrak{r})$

$$S_l(S_r(\mathfrak{V})) = \mathfrak{V}, \quad S_r(S_l(\mathfrak{W})) = \mathfrak{W}.$$

Ist A Frobeniusring, so gilt außerdem

$$d_l(\mathfrak{V}) = d_r(\mathfrak{R}/S_r(\mathfrak{V})), \quad d_r(\mathfrak{W}) = d_l(\mathfrak{L}/S_l(\mathfrak{W})).$$

Auf Grund von Satz 1 erhält man die

Folgerung: *Der Satz von* M. Hall *gilt bei jedem regulären skalaren Produkt von* $\mathfrak{L}$ *und* $\mathfrak{R}$.

II. Frobeniuserweiterungen.

1. Definition. Wir betrachten jetzt einen Ring $\mathfrak{S}$ mit 1-Element, der *gleichzeitig Links- und Rechtsvektorraum über dem Ring A ist.* Ist $\langle \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \rangle$ ein skalares Produkt von $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}$ in A mit $\mathfrak{S}$ selbst als zulässigem Operatorenbereich, so wird durch

$$\mathfrak{s} \to \langle \mathfrak{s}, 1 \rangle = \langle 1, \mathfrak{s} \rangle$$

ein Operatorhomomorphismus von $\mathfrak{S}$ auf A mit A als zweiseitigem Operatorenbereich gegeben. Ist das skalare Produkt regulär, so bedeutet dies wegen

$$\langle \mathfrak{s}, \mathfrak{S} \rangle = \langle 1, \mathfrak{s}\,\mathfrak{S} \rangle \text{ und } \langle \mathfrak{S}, \mathfrak{s} \rangle = \langle \mathfrak{S}\,\mathfrak{s}, 1 \rangle,$$

daß kein von Null verschiedenes Rechts- oder Linksideal auf Null abgebildet wird. Ist umgekehrt ein Operatorhomomorphismus von $\mathfrak{S}$ auf A mit A als zweiseitigem Operatorenbereich gegeben:

$$\mathfrak{s} \to \langle \mathfrak{s} \rangle \in A$$

mit

$$a \langle \mathfrak{s} \rangle = \langle a\,\mathfrak{s} \rangle, \quad \langle \mathfrak{s} \rangle a = \langle \mathfrak{s}\,a \rangle,$$

so stellt die Zuordnung

$$\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \to \langle \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \rangle$$

ein skalares Produkt von $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}$ in A mit $\mathfrak{S}$ als zulässigem Operatorenbereich dar. Wird bei dem Homomorphismus kein von Null verschiedenes Links-und Rechtsideal auf Null abgebildet, dann ist das so erklärte skalare Produkt regulär. *Die regulären skalaren Produkte und die zweiseitigen Aoperatorhomomorphen Abbildungen von $\mathfrak{S}$ auf A, bei denen kein von Null verschiedenes Ideal im Kern enthalten ist, bedingen sich also gegenseitig.*

Einen solchen Homomorphismus bezeichnen wir als *Frobeniushomomorphismus.*

Besitzt $\mathfrak{S}$ einen Frobeniushomomorphismus in A und ist A S-Ring, so nennen wir $\mathfrak{S}/A$ eine *Frobeniuserweiterung.* In diese Definition nehmen wir also die Voraussetzung mit hinein, daß A S-Ring ist. Dies erfolgt in Hinblick auf die weiteren Überlegungen, wo diese Voraussetzung doch stets herangezogen werden muß. Nicht vorausgesetzt wird, daß die Dimension von $\mathfrak{S}/A$ endlich sei[12]).

Liegen alle Kommutatoren $\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 - \mathfrak{s}_2 \mathfrak{s}_1$ von Elementen aus $\mathfrak{S}$ im Kern des Frobeniushomomorphismus, so heiße die Frobeniuserweiterung in Analogie zu den symmetrischen Frobeniusalgebren ebenfalls *symmetrisch.*

2. Charakterisierung. Der folgende Satz, der sich unmittelbar aus Satz 3 ergibt, stellt eine Verallgemeinerung des anfangs angegebenen Kriteriums für Frobeniusalgebren dar.

Satz 4: *Der Ring $\mathfrak{S}$ besitze ein 1-Element und es sei $\mathfrak{S}$ zweiseitiger Vektorraum über einem S-Ring A. Unter diesen Voraussetzungen ist $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}$ dann und nur dann Frobeniuspaar über A bezüglich $\mathfrak{S}$ als zulässigem Operatorenbereich, wenn $\mathfrak{S}/A$ Frobeniuserweiterung ist.*

Daraus erhält man unmittelbar die

Folgerung 1: *Ist $\mathfrak{S}/A$ Frobeniuserweiterung, so gibt es gleiche reguläre Links- und Rechtsdarstellungen von $\mathfrak{S}$ in A.*

Nach Voraussetzung besitzt $\mathfrak{S}$ ein 1-Element. Folgerung 2 von Satz 1 besagt dann, daß es eine Linksbasis und eine Rechtsbasis von $\mathfrak{S}/A$ gibt, die beide mit dem 1-Element beginnen. Sei etwa $\mathfrak{l}_1 = 1, \mathfrak{l}_2, \ldots$ eine solche Linksbasis. Beginnt man das Orthogonalisierungsverfahren von Satz 2 mit $\mathfrak{l}_1$, so erhält man orthogonale Basen, wobei das erste Element der Linksbasis wieder gleich $\mathfrak{l}_1 = 1$ ist. Seien also bereits $\mathfrak{l}_1 = 1, \mathfrak{l}_2, \ldots$ und $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots$ orthogonale Basen, so folgt

$$\langle \mathfrak{r}_1 \rangle = 1, \quad \langle \mathfrak{r}_i \rangle = 0 \text{ für } i > 1.$$

Das bedeutet aber, daß auch jetzt, wie im Falle von Frobeniusalgebren, der Kern des Frobeniushomomorphismus ein zweiseitig A-zulässiger Rechtsunterraum der Dimension $n - 1$ (mit $n = (\mathfrak{S} : A)$) über A ist. Das gleiche gilt auch für die linke Seite. Man hat daher

Folgerung 2: *Der Kern des Frobeniushomomorphismus von $\mathfrak{S}$ auf A ist ein zweiseitig A-zulässiger, zweiseitiger Unterraum der Dimension $n - 1$.*

An diesen Sachverhalt kann man die Frage knüpfen, unter welchen Voraussetzungen der Kern einer Frobeniuserweiterung direkter zweiseitiger A-Unterraum ist. Darauf soll hier jedoch nicht eingegangen werden.

---

[12]) Bei einer Frobeniuserweiterung sind nach Satz 1 bzw. 2 die links- und rechtsseitige Dimension gleich. Wir schreiben dafür im folgenden $(\mathfrak{S} : A)$ und sprechen dann auch vom Rang von $\mathfrak{S}/A$.

Ist $\mathfrak{S}/A$ eine symmetrische Frobeniuserweiterung, so gilt für die nach Satz 4 existierenden Orthogonalbasen $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots$ und $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots$ $\langle \mathfrak{l}_i \mathfrak{r}_j \rangle = \langle \mathfrak{r}_j \mathfrak{l}_i \rangle = \delta_{ij}$. Daraus folgt, daß die Elemente $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots$ auch rechts und die Elemente $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots$ auch links linear unabhängig über A sind. Im Falle $(\mathfrak{S} : A) < \infty$ erhält man dann nach Hilfssatz 1, daß $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots$ eine Rechtsbasis und $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots$ eine dazu orthogonale Linksbasis von $\mathfrak{S}/A$ bilden.

3. Beispiele. a) Sei A jetzt ein beliebiger Ring mit 1-Element und $\mathfrak{G}$ eine Gruppe. $\mathfrak{S}$ bezeichne den Gruppenring von $\mathfrak{G}$ in A, d. h. die Gesamtheit aller endlichen Summen

$$\sum a_i G_i \text{ mit } a_i \in A,\ G_i \in \mathfrak{G}.$$

Dann existiert ein Frobeniushomomorphismus von $\mathfrak{S}$ auf A. Man erhält ihn durch die Abbildung

$$I \to 1,\ G \to 0 \text{ für } G \neq I = \text{Einselement von } \mathfrak{G}.$$

Ist $\Sigma\, a_i G_i$ irgendein Element aus $\mathfrak{S}$ und ist etwa $a_k \neq 0$, so ist das Bild von $(\Sigma\, a_i G_i)\, G_k^{-1}$ bei dieser Abbildung gleich a_k, d. h. diese Abbildung ist ein rechtsregulärer Homomorphismus von $\mathfrak{S}$ auf A. Analog gilt dies für die linke Seite, es handelt sich also um einen Frobeniushomomorphismus. Ist A ein kommutativer Ring, so ist dieser Frobeniushomomorphismus symmetrisch.

b) Es seien jetzt A und K S-Ringe, $\mathfrak{S}/K$ sei eine Frobeniuserweiterung und K im Zentrum von A und $\mathfrak{S}$ enthalten. Dann ist das über K gebildete direkte Produkt $\mathfrak{S} \times A$ Frobeniuserweiterung über A. Zum Beweis seien wieder $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots$ und $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots$ zwei nach Satz 4 existierende orthogonale Basen bei dem Frobeniushomomorphismus

$$\mathfrak{s} \to \langle \mathfrak{s} \rangle \in K$$

von $\mathfrak{S}$ auf K. Diese Basen sind dann auch Basen von $\mathfrak{S} \times A/A$. Den angegebenen Frobeniushomomorphismus setzen wir durch

$$\Sigma\, \mathfrak{s}_i a_i \to \Sigma \langle \mathfrak{s}_i \rangle\, a_i,\ \mathfrak{s}_i \in \mathfrak{S},\ a_i \in A$$

zu einem zweiseitig A-zulässigen Homomorphismus von $\mathfrak{S} \times A$ auf A fort. Um festzustellen, daß dieser Homomorphismus regulär ist, stellen wir die Elemente von $\mathfrak{S} \times A$ mittels der gegebenen Basen dar. Nimmt man an, daß das durch ein Element $\Sigma\, a_i \mathfrak{l}_i$ erzeugte Rechtsideal auf Null abgebildet wird, so muß wegen der Orthogonalität der Basen

$$\langle (\Sigma\, a_i \mathfrak{l}_i)\, (\Sigma\, \mathfrak{r}_j b_j) \rangle = \Sigma\, a_i b_i = 0$$

für beliebige $b_i \in A$ gelten. Da A ein 1-Element besitzt, ist dies nur für $a_1 = a_2 = \cdots = 0$ möglich. Ebenso sieht man ein, daß der Homomorphismus auch links regulär ist.

c) Es sei $\mathfrak{S}$ ein einfacher Ring und A ein *galoisscher Unterring* von $\mathfrak{S}$. Darunter verstehen wir hier einen Unterring von $\mathfrak{S}$, der im Sinne von T. NAKAYAMA [9] Fixring einer *halbregulären* (semi-regular) Automorphismengruppe von $\mathfrak{S}$ ist. Wir bemerken dazu, daß damit eine recht allgemeine Klasse von galoisschen Erweiterungen erfaßt wird, konnte doch die galoissche Theorie im Sinne einer reinen Automorphismentheorie bisher nur für reguläre Automorphismengruppen in befriedigender Weise entwickelt werden [9].

Faßt man $\mathfrak{S}$ als Linksvektorraum über A auf, so werde mit $\mathfrak{E}$ der Ring aller linearen Abbildungen von $\mathfrak{S}/A$ bezeichnet. Die Abbildungen aus $\mathfrak{E}$ denken wir uns durch Multiplikation von rechts auf die Elemente von $\mathfrak{S}$ ausgeübt. Ist $\mathfrak{S}^r$ der Ring der Rechtsmultiplikatoren $\mathfrak{s}^r$ mit $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$, so ist $\mathfrak{S}^r$ in $\mathfrak{E}$ enthalten und ebenso der Ring T^l, wenn T der Zentralisator von A in $\mathfrak{S}$ ist. $\mathfrak{S}^r$ ist zu $\mathfrak{S}$ isomorph und T^l zu T inversisomorph. T^l ist nach Voraussetzung eine halbeinfache Algebra über dem Zentrum Z $(= Z^l)$ von $\mathfrak{S}$ und daher Frobeniuserweiterung von Z, d. h. es gibt einen Frobeniushomomorphismus $\langle t^l \rangle$ von T^l auf Z. Diesen Frobeniushomomorphismus setzen wir nun zu einem solchen von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{S}^r$ fort. Dazu benutzen wir eine zweiseitige Basis von $\mathfrak{E}/\mathfrak{S}^r$ der Gestalt

$$t_i^l\, G_j, \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{pmatrix}, \; G_1 = I, \; t_i^l \in T^l,$$

wobei die G_j ein Repräsentantensystem der Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{S}/A$ nach der Untergruppe der inneren Automorphismen durchläuft und $t_1^l, \ldots, t_m^l$ eine Basis von T^l/Z ist. Eine solche Basis von $\mathfrak{E}/\mathfrak{S}^r$ existiert nach [6]. Wir definieren nun für diese Basiselemente

$$\langle t_i^l\, G_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } j > 1 \\ \langle t_i^l \rangle & \text{für } j = 1\,. \end{cases}$$

Daß dieser Homomorphismus zweiseitig $\mathfrak{S}^r$-zulässig ist, folgt aus der Vertauschungsregel

$$\mathfrak{s}^r\, t_i^l\, G_j = t_i^l\, \mathfrak{s}^r\, G_j = t_i^l\, G_j\, (\mathfrak{s}\, G_j)^r.$$

Um zu beweisen, daß dieser Homomorphismus zweiseitig regulär ist, genügt es, wegen der Ranggleichheit für beide Seiten von $\mathfrak{E}/\mathfrak{S}^r$ nach Folgerung 3 aus Satz 1 zu zeigen, daß kein von Null verschiedenes Rechtsideal auf Null abgebildet wird. Angenommen, es wäre $\mathfrak{J} \neq 0$ ein solches Rechtsideal, so würde auch der durch $\mathfrak{J}$ erzeugte $\mathfrak{S}^r$-Linksmodul $\mathfrak{S}^r\mathfrak{J}$ auf Null abgebildet. $\mathfrak{S}^r\mathfrak{J}$ ist insbesondere ein zweiseitiger $\mathfrak{S}^r$-Modul. Jeder zweiseitige $\mathfrak{S}^r$-Modul aus $\mathfrak{E}$ wird aber nach [6] über $\mathfrak{S}^r$ durch Abbildungen der Gestalt $t^l G$, $(t^l \in T^l$, $G \in \mathfrak{G})$ erzeugt. Dann liegt auch $t^l G_1$ und damit $t^l T^l G_1$ in $\mathfrak{S}^r\mathfrak{J}$. Das Rechtsideal $t^l T^l$ wird aber nach Voraussetzung bei dem angegebenen Homomorphismus nicht auf Null abgebildet und damit ist die Annahme zum Widerspruch geführt. $\mathfrak{E}$ ist tatsächlich Frobeniuserweiterung von $\mathfrak{S}^r$. Wir weisen darauf hin, daß diese Überlegung bei sonst gleichen Voraussetzungen richtig bleibt, wenn der Zentralisator T von A in $\mathfrak{S}$ nicht notwendig eine halbeinfache Algebra, sondern nur Frobeniuserweiterung endlicher Dimension über Z ist.

4. Der Endomorphismenring einer Frobeniuserweiterung. Es sei jetzt $\mathfrak{S}$ ein Ring mit 1-Element von endlichem Links- und Rechtsrang über dem Ring A. Wir betrachten $\mathfrak{S}$ zunächst als Linksvektorraum über A und bezeichnen wieder mit $\mathfrak{E}$ den Ring aller linearen Abbildungen von $\mathfrak{S}/A$. In $\mathfrak{E}$ ist dann der Ring der Rechtsmultiplikatoren $\mathfrak{S}^r$ enthalten. Ist $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_n$ eine feste Linksbasis von $\mathfrak{S}/A$, so sei d_{ij} die Abbildung, die $\mathfrak{l}_i$ auf $\mathfrak{l}_j$ und alle anderen Basiselemente auf Null abbildet. Unter d_i verstehen wir die Abbildung, die $\mathfrak{l}_i$ auf 1 und alle anderen Basiselemente auf Null abbildet. Dann ist offenbar

$$\mathfrak{E} = d_1\mathfrak{S}^r + \cdots + d_n\mathfrak{S}^r$$

eine Basisdarstellung von $\mathfrak{E}/\mathfrak{S}^r$.

Satz 5: *Der S-Ring $\mathfrak{S}$ sei Rechts- und Linksvektorraum gleicher endlicher Dimension über dem S-Ring A. Dann und nur dann ist $\mathfrak{S}/A$ Frobeniuserweiterung, wenn $\mathfrak{E}/\mathfrak{S}^r$ Frobeniuserweiterung ist.*

Zum Beweis des Satzes sei zunächst $\mathfrak{E}/\mathfrak{S}^r$ Frobeniuserweiterung und $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_n$ eine beliebige Linksbasis von $\mathfrak{S}/A$. Sind $\mathfrak{r}_1^r, \ldots, \mathfrak{r}_n^r$ die Bilder von $d_1, \ldots, d_n$ bei dem Frobeniushomomorphismus von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{S}^r$, so soll gezeigt werden, daß $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_n$ eine Rechtsbasis von $\mathfrak{S}/A$ ist, die eine zu der durch $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_n$ erzeugten regulären Linksdarstellung gleiche Rechtsdarstellung von $\mathfrak{S}$ liefert. Daß die letzte Behauptung richtig ist, daß also mit $\mathfrak{l}_i\mathfrak{s} = \sum\limits_{j=1}^{n} s_{ij}\mathfrak{l}_j$ auch $\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{r}_i s_{ij}$ gilt, folgt unmittelbar aus der Gleichung

$$\mathfrak{s}^r d_j = \sum_{i=1}^{n} d_i s_{ij}^r ,$$

wenn man berücksichtigt, daß der Frobeniushomomorphismus zweiseitig $\mathfrak{S}^r$-zulässig ist. Es bleibt zu überlegen, daß $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_n$ eine Rechtsbasis bilden. Für beliebiges $\mathfrak{e} \in \mathfrak{E}$ ist

$$\mathfrak{e}\, d_1 = \sum_{i=1}^{n} d_i a_i^r \text{ mit } a_i \in A .$$

Daraus folgt bei dem Frobeniushomomorphismus $\langle\mathfrak{c}\rangle$ von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{S}^r$

$$\langle \mathfrak{e}\, d_1\rangle = \sum_{i=1}^{u} \mathfrak{r}_i^r a_i^r,\ \ a_i \in A.$$

Da bei dem Frobeniushomomorphismus kein Linksideal auf Null abgebildet wird, d_1 rechts linear unabhängig über A^r ist und $\mathfrak{S}$ S-Ring ist, gilt ferner

$$\langle \mathfrak{E}\, d_1\rangle = \mathfrak{S}^r.$$

Daraus ergibt sich bereits, daß $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_n$ ein Rechtserzeugendensystem von $\mathfrak{S}/A$ ist. Wegen $(\mathfrak{S} : A)_r = n$ folgt dann aus der im Anschluß in Hilfssatz 1 gemachten Bemerkung, daß $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_n$ eine Rechtsbasis von $\mathfrak{S}/A$ bilden. Nach Satz 4 ist dann also $\mathfrak{S}/A$ Frobeniuserweiterung.

Sei nun umgekehrt $\mathfrak{S}/A$ Frobeniuserweiterung. Es bezeichne $\mathfrak{r}_1 = 1$, $\mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_n$ eine Rechtsbasis und $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_n$ eine dazu orthogonale Linksbasis von $\mathfrak{S}/A$. Man erhält dann durch die Zuordnung

$$\mathfrak{e} = d_1 \mathfrak{s}_1^r + \cdots + d_n \mathfrak{s}_n^r \to \mathfrak{r}_1^r \mathfrak{s}_1^r + \cdots + \mathfrak{r}_n^r \mathfrak{s}_n^r \tag{8}$$

einen zweiseitigen $\mathfrak{S}^r$-Operatorhomomorphismus von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{S}^r$. Zunächst ist diese Abbildung rechtsseitig $\mathfrak{S}^r$-operatorhomomorph. Ist $\mathfrak{l}_i\mathfrak{s} = \sum\limits_{j=1}^{n} s_{ij}\mathfrak{l}_j$, so gilt nach Voraussetzung $\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{r}_i s_{ij}$ und folglich

$$\mathfrak{s}^r d_j = \sum_{i=1}^{n} d_i s_{ij}^r .$$

Daher ist die Abbildung (8) auch linksseitig $\mathfrak{S}^r$-operatorhomomorph. Ist in $\mathfrak{e} = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i \mathfrak{s}_i^r$ etwa $\mathfrak{s}_k^r \neq 0$, so ist das Bild von $d_{ik}\mathfrak{e} = d_i \mathfrak{s}_k^r$ gleich $\mathfrak{r}_1^r \mathfrak{s}_k^r = \mathfrak{s}_k^r \neq 0$.

Also wird bei (8) kein von Null verschiedenes Linksideal auf Null abgebildet. Um dies auch für die Rechtsideale zu zeigen, sei wieder $\mathfrak{c} = \sum_{i=1}^{n} d_i \mathfrak{s}_i^r$ mit $\mathfrak{s}^k \neq 0$. Besitzt $\mathfrak{s}_i$ die Basisdarstellung

$$\mathfrak{s}_i = s_1^{(i)} \mathfrak{l}_1 + \cdots + s_n^{(i)} \mathfrak{l}_n, \quad s_j^{(i)} \in A,$$

so können wir wegen $\mathfrak{s}_k \neq 0$ etwa $s_m^{(k)} \neq 0$ annehmen. Nun ist

$$\mathfrak{c}\, d_m = \sum_{i=1}^{n} d_i (s_m^{(i)})^r$$

und dieses Element geht bei (8) in $(\mathfrak{r}_1 s_m^{(1)} + \cdots + \mathfrak{r}_k s_m^{(k)} + \cdots + \mathfrak{r}_n s_m^{(n)})^r \neq 0$ über. Also wird bei (8) auch kein Rechtsideal $\neq 0$ auf Null abgebildet. Damit ist der Beweis vollständig.

Im zuvor angegebenen letzten Beispiel für Frobeniuserweiterungen hatten wir festgestellt, daß der Endomorphismenring $\mathfrak{E}$ einer galoisschen Erweiterung $\mathfrak{S}/A$ Frobeniuserweiterung über $\mathfrak{S}^r$ ist. Es folgt dann aus Satz 5 unter Berücksichtigung von Satz 4 unmittelbar

Satz 6: *Ist $\mathfrak{S}$ ein einfacher Ring und A ein galoisscher Unterring von $\mathfrak{S}$ (im zuvor angegebenen Sinne), so ist $\mathfrak{S}/A$ Frobeniuserweiterung. Folglich sind die regulären Links- und Rechtsdarstellungen von $\mathfrak{S}$ in A äquivalent und der Kern des Frobeniushomomorphismus von $\mathfrak{S}$ auf A ist ein zweiseitig A-zulässiger, zweiseitig $(n-1)$-dimensionaler Unterraum von $\mathfrak{S}$ $(n = (\mathfrak{S} : A))$.*

5. Vektorielle Ideale. a) Wir setzen jetzt voraus, daß $(\mathfrak{S} : A) < \infty$ sei. Ein Linksideal $\mathfrak{J}_l$ aus einer Frobeniuserweiterung $\mathfrak{S}/A$ nennen wir *vektoriell*, kurz v-Linksideal, wenn $\mathfrak{J}_l$ ein Linksunterraum von $\mathfrak{S}/A$ ist. Entsprechend werden vektorielle Rechts- und zweiseitige Ideale erklärt. Ist z. B. A ein Schiefkörper, so ist offenbar jedes Ideal aus $\mathfrak{S}$ v-Ideal.

Wenn man sich auf v-Ideale beschränkt, lassen sich eine Reihe von Ergebnissen, die von T. NAKAYAMA in [7, 8] aufgestellt wurden, auch unter unseren Voraussetzungen beweisen.

Wir übernehmen zunächst einen Hilfssatz aus [7], der noch für beliebige Ideale gültig ist[13]).

Hilfssatz 4: *Es sei $\mathfrak{S}/A$ Frobeniuserweiterung. Dann genügt jedes Linksideal $\mathfrak{J}_l$ bzw. jedes Rechtsideal $\mathfrak{J}_r$ aus $\mathfrak{S}$ der Gleichung*

$$A_r(\mathfrak{J}_l) = S_r(\mathfrak{J}_l) \text{ bzw. } A_l(\mathfrak{J}_r) = S_l(\mathfrak{J}_r).$$

Der kurze Beweis, der unmittelbar aus [7] übernommen werden kann, sei der Vollständigkeit halber angegeben. Offenbar gilt $A_r(\mathfrak{J}_l) \subseteq S_r(\mathfrak{J}_l)$. Sei nun $\mathfrak{s} \in S_r(\mathfrak{J}_l)$, also $\langle \mathfrak{J}_l \mathfrak{s} \rangle = 0$ bei dem Frobeniushomomorphismus von $\mathfrak{S}$ auf A. Da nach Voraussetzung kein von Null verschiedenes Rechtsideal auf Null abgebildet wird, folgt $\mathfrak{J}_l \mathfrak{s} = 0$, also $\mathfrak{s} \in A_r(\mathfrak{J}_l)$. Entsprechend beweist man die zweite Gleichung.

[13]) Siehe [7], lemma 4.

Satz 7: *Ist $\mathfrak{S}/A$ Frobeniuserweiterung, sind $\mathfrak{J}_l$ ein v-Links- und $\mathfrak{J}_r$ ein v-Rechtsideal aus $\mathfrak{S}$, dann gilt*

$$A_l(A_r(\mathfrak{J}_l)) = \mathfrak{J}_l, \quad (\mathfrak{J}_l : A)_l + (A_r(\mathfrak{J}_l) : A)_r = (\mathfrak{S} : A),$$
$$A_r(A_l(\mathfrak{J}_r)) = \mathfrak{J}_r, \quad (\mathfrak{J}_r : A)_r + (A_l(\mathfrak{J}_r) : A)_l = (\mathfrak{S} : A)^{14)}.$$

Auf Grund von Hilfssatz 4 ergeben sich diese Behauptungen sofort aus der Folgerung 1 von Satz 1.

Satz 8: *Sei $\mathfrak{S}/A$ Frobeniuserweiterung und $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ ein Element, so daß $\mathfrak{S}\mathfrak{s}$ ein v-Linksideal ist. Dann ist $\mathfrak{s}\mathfrak{S}$ v-Rechtsideal und es gilt $(\mathfrak{S}\mathfrak{s} : A)_l = (\mathfrak{s}\mathfrak{S} : A)_r$*[15].

Beweis: Offenbar gilt

$$\mathfrak{S}/A_r(\mathfrak{S}\,\mathfrak{s}) \cong \mathfrak{s}\,\mathfrak{S}$$

als $\mathfrak{S}$-Rechtsmoduln und auf Grund von Hilfssatz 4 folgt daraus

$$\mathfrak{S}/S_r(\mathfrak{S}\,\mathfrak{s}) \cong \mathfrak{s}\,\mathfrak{S}.$$

Auf Grund der ersten Folgerung aus Satz 1 gilt ferner

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{R}' \oplus S_r(\mathfrak{S}\,\mathfrak{s})$$

mit einem Rechtsunterraum $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{S}$, also auch

$$\mathfrak{S}/S_r(\mathfrak{S}\,\mathfrak{s}) \cong \mathfrak{R}'$$

und folglich ist auch $\mathfrak{s}\,\mathfrak{S}$ Rechtsunterraum gleicher Dimension wie $\mathfrak{S}\,\mathfrak{s}$.

b) Es soll jetzt untersucht werden, unter welchen Voraussetzungen der Restklassenring einer Frobeniuserweiterung $\mathfrak{S}/A$ wieder Frobeniuserweiterung über A ist.

Im Anschluß an T. NAKAYAMA beweisen wir zunächst einen Hilfssatz[16].

Hilfssatz 5: Sei $\mathfrak{r}$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{S}$. In $S_l(\mathfrak{r})$ ist das Rechtsideal $S_l(\mathfrak{S}\,\mathfrak{r})$ enthalten und dies ist das größte Rechtsideal, welches in $S_l(\mathfrak{r})$ enthalten ist.

Beweis: Unmittelbar sieht man ein, daß $S_l(\mathfrak{S}\,\mathfrak{r})$ ein Rechtsideal ist und daß $S_l(\mathfrak{S}\,\mathfrak{r}) \subseteqq S_l(\mathfrak{r})$ gilt. Ist $\mathfrak{J}_r$ ein beliebiges Rechtsideal aus $S_l(\mathfrak{r})$, so gilt

$$\langle \mathfrak{J}_r \mathfrak{S}\,\mathfrak{r} \rangle = \langle \mathfrak{J}_r \mathfrak{r} \rangle = 0,$$

also

$$\mathfrak{J}_r \subseteqq S_l(\mathfrak{S}\,\mathfrak{r}).$$

Beim Beweis des folgenden Satzes haben wir den Satz von HALL heranzuziehen. Wir müssen daher jetzt die Voraussetzung machen, daß A quasi-Frobeniusring ist.

Satz 9: *Es sei $\mathfrak{S}$ Frobeniuserweiterung über dem quasi-Frobeniusring A und $\mathfrak{J}$ ein zweiseitiges v-Ideal aus $\mathfrak{S}$. Dann und nur dann ist $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}/\mathfrak{J}$ Frobeniuserweiterung über A, wenn $A_r(\mathfrak{J}) = \mathfrak{S}\,\mathfrak{r}\,A$ gilt mit einem Element $\mathfrak{r}$, das über A rechts linear unabhängig ist und der Gleichung $S_r(\mathfrak{r}) = S_r(\mathfrak{r}\,A)$ genügt*[17].

---

14) Vgl. [7], theorem 1; [8], theorem 6.
15) Vgl. [7], theorem 4; [8], theorem 8.
16) Vgl. [7], lemma 5.
17) Vgl. [7], theorem 9; [8], theorem 15.

Beweis: Sei zunächst $\mathfrak{S}'$ Frobeniuserweiterung mit dem Frobeniushomomorphismus $\mathfrak{s}' \to \langle \mathfrak{s}' \rangle$. Betrachtet man $\mathfrak{S}$ als A-Linksmodul, so gilt nach Voraussetzung $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^* \oplus \mathfrak{J}$ und folglich $\mathfrak{S}/\mathfrak{J} \cong \mathfrak{S}^*$. Wie wir wissen, gibt es eine Linksbasis $\mathfrak{l}'_1, \ldots, \mathfrak{l}'_m$ von $\mathfrak{S}'/A$ mit

$$\langle \mathfrak{l}'_1 \rangle = 1\,, \quad \langle \mathfrak{l}'_i \rangle = 0 \text{ für } i > 1\,.$$

Dann ist $\mathfrak{R}' = A\,\mathfrak{l}'_2 + \cdots + A\,\mathfrak{l}'_m$ der Kern bei dem Frobeniushomomorphismus von $\mathfrak{S}'$ auf A. Es sei $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_m$ ein festes Repräsentantensystem von $\mathfrak{l}'_1, \ldots, \mathfrak{l}'_m$ in $\mathfrak{S}^*$. Dann bilden diese Elemente eine Linksbasis von $\mathfrak{S}^*/A$. Die Urbildmenge von $\mathfrak{R}'$ bei der Abbildung $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}'$ ist der Linksunterraum $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{S}$, der durch $\mathfrak{l}_2, \ldots, \mathfrak{l}_m$ und $\mathfrak{J}$ aufgespannt wird. Es gibt daher eine Rechtsbasis $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_n$ von $\mathfrak{S}/A$, so daß mit $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}$ die Gleichung $S_l(\mathfrak{r}) = \mathfrak{R}$ gilt, wobei sich jetzt die Orthogonalität auf den Frobeniushomomorphismus von $\mathfrak{S}$ auf A bezieht. Nach Hilfssatz 5 ist $S_l(\mathfrak{S}\,\mathfrak{r})$ das größte in $\mathfrak{R}$ enthaltene Rechtsideal. Andererseits muß aber $\mathfrak{J}$ das größte in $\mathfrak{R}$ enthaltene Rechtsideal sein, da sonst $\mathfrak{R}'$ ein von Null verschiedenes Rechtsideal enthalten würde. Folglich ist $\mathfrak{J} = S_l(\mathfrak{S}\,\mathfrak{r})$ und nach Hilfssatz 4 folgt daraus

$$S_r(\mathfrak{J}) = A_r(\mathfrak{J}) = S_r(S_l(\mathfrak{S}\,\mathfrak{r}))\,.$$

Nun ist $S_l(\mathfrak{S}\,\mathfrak{r}) = S_l(\mathfrak{S}\,\mathfrak{r}\,A)$ und auf Grund der Folgerung aus dem Satz von HALL erhält man dann

$$A_r(\mathfrak{J}) = S_r(S_l(\mathfrak{S}\,\mathfrak{r}\,A)) = \mathfrak{S}\,\mathfrak{r}\,A\,.$$

Nach Voraussetzung sind $\mathfrak{R}'$ und damit auch $\mathfrak{R}$ A-Rechtsmoduln. Daraus folgt schließlich $S_r(\mathfrak{r}) = S_r(\mathfrak{r}\,A)$. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Die Umkehrung folgt leicht, wenn man diese Überlegung in umgekehrter Richtung durchläuft.

6. Frobeniuserweiterungen von Frobeniusringen. Es kann jetzt die Frage beantwortet werden, ob eine Frobeniuserweiterung eines quasi-Frobenius- oder Frobeniusringes wieder einen solchen Ring liefert.

Auf Grund von Hilfssatz 4 und der Folgerung aus dem Satz von M. HALL gilt

Satz 10: *Ist A ein quasi-Frobenius- bzw. ein Frobeniusring und $\mathfrak{S}$ eine Frobeniuserweiterung endlichen Ranges über A, so ist auch $\mathfrak{S}$ ein quasi-Frobenius- bzw. Frobeniusring.*

III. Reguläre Modulerweiterungen.

1. Definition und Eigenschaften. a) Unter einem A-Ω-Modul $\mathfrak{M}$ verstehen wir einen beliebigen Modul $\mathfrak{M}$ mit einem Linksoperatorenring A und einem Rechtsoperatorenbereich Ω. Es wird vorausgesetzt, daß A ein Einselement besitzt, welches zugleich Einheitsoperator von $\mathfrak{M}$ sei und daß die Anwendung der Operatoren aus A und Ω auf $\mathfrak{M}$ miteinander vertauschbar sei:

$$a\,(\mathfrak{m}\,\omega) = (a\,\mathfrak{m})\,\omega;\ a \in A,\ \mathfrak{m} \in \mathfrak{M},\ \omega \in \Omega.$$

Zu einem beliebigen Unterring B von A definieren wir nun einen A-Ω-Modul $\mathfrak{M}_B$ in folgender Weise: $\mathfrak{M}_B$ bestehe aus allen Summen

$$\Sigma\, a_i \circ \mathfrak{m}_i\,,$$

summiert über endlich viele der formal gebildeten Symbole

$$a \circ \mathfrak{m} \text{ mit } a \in A,\ \mathfrak{m} \in \mathfrak{M},$$

für die die Anwendung der Operatoren durch

$$a\,(\Sigma\, a_i \circ \mathfrak{m}_i) = \Sigma\, a a_i \circ \mathfrak{m}_i$$
$$(\Sigma\, a_i \circ \mathfrak{m}_i)\,\omega = \Sigma\, a_i \circ \mathfrak{m}_i \omega$$

erklärt sei und die folgenden Rechenregeln genügen mögen:

$$ab \circ \mathfrak{m} = a \circ b\mathfrak{m} \qquad \text{für } b \in B,$$
$$(a_1 + a_2) \circ \mathfrak{m} = a_1 \circ \mathfrak{m} + a_2 \circ \mathfrak{m},$$
$$a \circ (\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2) = a \circ \mathfrak{m}_1 + a \circ \mathfrak{m}_2.$$

Den so gebildeten A-Ω-Modul $\mathfrak{M}_B$ nennen wir die *reguläre Modulerweiterung* des A-Ω-Moduls $\mathfrak{M}$ bezüglich B. (M. a. W.: $\mathfrak{M}_B$ ist das dir. Modulprodukt von A und $\mathfrak{M}$ über B.)

$\mathfrak{M}_B$ kann offenbar durch die Zuordnung

$$\Sigma\, a_i \circ \mathfrak{m}_i \to \Sigma\, a_i \mathfrak{m}_i$$

A-Ω-operatorhomomorph auf $\mathfrak{M}$ abgebildet werden und für $B = A$ ist diese Abbildung ein Isomorphismus. Bezeichnet $\mathfrak{M}'_B$ den Kern dieses Homomorphismus, so ist $\mathfrak{M}'_B$ ein A-Ω-Untermodul von $\mathfrak{M}_B$ und es gilt die A-Ω-Operatorisomorphie

$$\mathfrak{M}_B/\mathfrak{M}'_B \cong \mathfrak{M}.$$

Der B-Ω-Untermodul

$$1 \circ \mathfrak{M} = \mathfrak{M}''_B$$

von $\mathfrak{M}_B$ wird bei dem angegebenen Isomorphismus B-Ω-isomorph auf $\mathfrak{M}$ abgebildet. Betrachtet man $\mathfrak{M}_B$ als B-Ω-Modul, so besteht folglich die direkte Zerlegung

$$\mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}'_B + \mathfrak{M}''_B,$$

wobei also $\mathfrak{M}'_B$ ein A-Ω-Modul und $\mathfrak{M}''_B$ ein zu $\mathfrak{M}$ B-Ω-isomorpher B-Ω-Modul ist. Von dieser Zerlegung machen wir später noch Gebrauch.

b) Wir nehmen nun die Voraussetzung hinzu, daß A/B Frobeniuserweiterung endlichen Ranges ist und bezeichnen mit $q_1, \ldots, q_n$ und $r_1, \ldots, r_n$ orthogonale Basen bei dem Frobeniushomomorphismus $\langle a \rangle$ von A auf B, d. h. es gelte

(9) $$\langle q_i r_j \rangle = \delta_{ij}$$

und

(10) $$q_i a = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} q_j, \qquad a r_j = \sum_{i=1}^{n} r_i b_{ij}.$$

Auf Grund der Rechengesetze von $\mathfrak{M}_B$ kann man die Elemente von $\mathfrak{M}_B$ eindeutig in der Form

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \circ \mathfrak{m}_i, \quad \mathfrak{m}_i \in \mathfrak{M}$$

darstellen, man kann also $r_1, \ldots, r_n$ auch als Rechtsbasis von $\mathfrak{M}_B$ über $\mathfrak{M}$ (bezügl. der Multiplikation $\circ$) betrachten.

Unter diesen Voraussetzungen besitzt $\mathfrak{M}_B$ einen zu $\mathfrak{M}$ A-Ω-operatorisomorphen Untermodul. Um dies einzusehen, betrachtet man die Zuordnung

$$\mathfrak{m} \to \Sigma r_i \circ q_i \mathfrak{m}. \tag{11}$$

Damit das Element $\sum_{i=1}^{n} r_i \circ q_i \mathfrak{m}$ verschwindet, muß

$$q_i \mathfrak{m} = 0, \ (i = 1, \ldots, n) \tag{12}$$

gelten. Da $q_1, \ldots, q_n$ eine Linksbasis von A/B ist, gibt es Elemente $b_1, \ldots b_n$, mit

$$b_1 q_1 + \cdots + b_n q_n = 1.$$

Dann folgt aus (12)

$$\sum_{i=1}^{n} b_i (q_i \mathfrak{m}) = (\sum_{i=1}^{n} b_i q_i)\, \mathfrak{m} = \mathfrak{m} = 0.$$

Damit haben wir bisher erhalten, daß (11) eine Ω-operatorisomorphe Abbildung des Moduls $\mathfrak{M}$ auf einen Ω-Untermodul $\mathfrak{M}_B^*$ von $\mathfrak{M}_B$ definiert. Auf Grund von (10) gilt schließlich

$$\begin{aligned} a\,\mathfrak{m} \to \sum_{i=1}^{n} r_i \circ q_i\, a\, \mathfrak{m} &= \sum_{i,j=1}^{n} r_i \circ b_{ij} (q_j\, \mathfrak{m}) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} r_i\, b_{ij} \circ q_j \mathfrak{m} = a \sum_{i=1}^{n} r_i \circ q_i\, \mathfrak{m}, \end{aligned}$$

also ist der Isomorphismus (11) auch A-zulässig.

Wir betrachten nun die B-Ω-operatorhomomorphe Abbildung

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \circ \mathfrak{m}_i \to \sum_{i=1}^{n} \langle r_i \rangle\, \mathfrak{m}_i \tag{13}$$

von $\mathfrak{M}_B$ auf $\mathfrak{M}$. Den Kern dieses Homomorphismus bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_B^{**}$. Aus der Gleichung $\sum_{j=1}^{n} b_j q_j = 1$ folgt wegen (9)

$$\langle r_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} b_j \langle q_j r_i \rangle = b_i.$$

Betrachten wir nun das Bild eines Elementes aus $\mathfrak{M}_B^*$ bei der Abbildung (13), so folgt damit

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \circ q_i \mathfrak{m} \to \sum_{i=1}^{n} \langle r_i \rangle\, q_i \mathfrak{m} = (\sum_{i=1}^{n} b_i q_i)\, \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$$

d. h. diese Abbildung stellt für $\mathfrak{M}_B^*$ einen Isomorphismus dar. Dann besteht die direkte Zerlegung von $\mathfrak{M}_B$ als B-Ω-Modul

$$\mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}_B^* + \mathfrak{M}_B^{**},$$

wobei also $\mathfrak{M}_B^*$ ein zu $\mathfrak{M}$ A-Ω-isomorpher A-Ω-Modul und $\mathfrak{M}_B^{**}$ ein B-Ω-Modul ist. Die bisherigen Überlegungen fassen wir in folgendem Satz zusammen:

Satz 11: *Es sei $\mathfrak{M}$ ein A-Ω-Modul und A/B eine Frobeniuserweiterung endlichen Ranges. Betrachtet man die reguläre Modulerweiterung $\mathfrak{M}_B$ von $\mathfrak{M}$ als B-Ω-Modul, so bestehen die beiden direkten Zerlegungen*

$$\mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}'_B + \mathfrak{M}''_B, \quad \mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}_B^* + \mathfrak{M}_B^{**},$$

wobei $\mathfrak{M}'_B$ und $\mathfrak{M}_B^*$ sogar A-Ω-Moduln sind, $\mathfrak{M}''_B$ zu $\mathfrak{M}$ B-Ω-isomorph und $\mathfrak{M}_B^*$ zu $\mathfrak{M}$ A-Ω-isomorph sind.

c) Die Abbildung (13) ist ein B-Ω-Homomorphismus von $\mathfrak{M}_B$ auf $\mathfrak{M}$. Sie kann offenbar auch als B-Ω-homomorphe Abbildung von $\mathfrak{M}_B$ in sich gedeutet werden, wenn man

$$(14)\qquad \sum_{i=1}^{n} r_i \circ \mathfrak{m}_i \to \sum_{i=1}^{n} \langle r_i \rangle \circ \mathfrak{m}_i = 1 \circ \sum_{i=1}^{n} \langle r_i \rangle\, \mathfrak{m}_i$$

setzt. Diese Abbildung soll im folgenden mit h bezeichnet werden. Die Anwendung von h auf $\mathfrak{M}_B$ schreiben wir als Multiplikation von links. Die Elemente aus A als Operatoren von $\mathfrak{M}_B$ stellen ebenso wie h Endomorphismen von $\mathfrak{M}_B$ dar und können in diesem Sinne mit h multipliziert werden. Wir üben nun den Endomorphismus $\sum_{i=1}^{n} r_i h q_i$ auf ein beliebiges Element aus $\mathfrak{M}_B$ aus und berücksichtigen dabei (9)

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} r_i h q_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} r_j \circ \mathfrak{m}_j\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} r_i \langle q_i r_j \rangle \circ \mathfrak{m}_j = \sum_{j=1}^{n} r_j \circ \mathfrak{m}_j\,,$$

folglich ist $\sum_{i=1}^{n} r_i h q_i$ *der identische Endomorphismus von* $\mathfrak{M}_B$.

2. M_o- und M_u-Moduln. a) Auf Grund unserer Ergebnisse über reguläre Modulerweiterungen kann nun ein Satz bewiesen werden, durch den ein Ergebnis von W. Gaschütz verallgemeinert wird ([3], Satz 1). Eine Verallgemeinerung auf Frobeniusalgebren wurde bereits von M. Ikeda [5] gegeben. Dort wird die Schlußweise von Gaschütz unmittelbar übertragen, was unter unseren allgemeinen Voraussetzungen nicht möglich ist. Die Abweichung gegenüber Gaschütz und Ikeda besteht hier in der allgemeingültigen Einführung der regulären Erweiterung, während der dort benutzte Begriff der regulären Erweiterung nur für Algebren sinnvoll ist.

In diesem Zusammenhang muß noch auf eine Arbeit von T. Nakayama und H. Nagao hingewiesen werden [11], in der ebenfalls M_o- und M_u-Moduln untersucht werden. Sie werden dort jedoch in einer Weise gekennzeichnet, die mit unseren Überlegungen keinen unmittelbaren Zusammenhang besitzt.

b) Im Anschluß an Gaschütz führen wir M_o- und *M_u-Moduln* ein. Es sei dabei B zunächst ein beliebiger Unterring von A. Ist $\mathfrak{N}$ ein A-Ω-Modul und besitzt $\mathfrak{N}$ — jetzt nur als B-Ω-Modul betrachtet — eine direkte Zerlegung in zwei B-Ω-Moduln $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$, so schreiben wir dafür wie bisher das normale Summenzeichen

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''.$$

Für eine direkte Zerlegung von $\mathfrak{N}$ in zwei A-Ω-Moduln $\mathfrak{M}^*$ und $\mathfrak{M}^{**}$ benutzen wir die Schreibweise

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{M}^* \oplus \mathfrak{M}^{**}.$$

Schließlich bedeute

$$\mathfrak{M}^* \cong \mathfrak{M}\,,$$

daß die Moduln $\mathfrak{M}^*$ und $\mathfrak{M}$ als A-Ω-Moduln operatorisomorph sind.

Ein A-Ω-Modul $\mathfrak{M}$ heiße nun *M_o-Modul*, wenn für jeden A-Ω-Modul $\mathfrak{N}$, der einen A-Ω-Untermodul $\mathfrak{M}'$ mit

$$\mathfrak{N}/\mathfrak{M}' \cong \mathfrak{M}$$

besitzt, die Existenz einer Zerlegung

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$$

auch eine Zerlegung

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{M}' \oplus \mathfrak{N}'$$

zur Folge hat.

Bemerkung: Dann ist offenbar $\mathfrak{N}' \cong \mathfrak{M}$.

Entsprechend heißt $\mathfrak{M}$ ein *M_u-Modul*, wenn für jeden A-Ω-Modul $\mathfrak{N}$, der eine Zerlegung

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{M}^* + \mathfrak{M}^{**} \text{ mit } \mathfrak{M}^* \cong \mathfrak{M}$$

besitzt, auch eine Zerlegung

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{M}^* \oplus \mathfrak{N}^*$$

existiert.

Es folgt jetzt der angekündigte Satz.

Satz 12: *Es sei A/B eine Frobeniuserweiterung endlichen Ranges und es seien $q_1, \ldots, q_n$ und $r_1, \ldots, r_n$ zueinander orthogonale Links- und Rechtsbasen von A/B. Unter dieser Voraussetzung ist ein A-Ω-Modul $\mathfrak{M}$ dann und nur dann M_o- oder M_u-Modul, wenn ein B-Ω-Endomorphismus g von $\mathfrak{M}$ existiert, so daß*

$$\sum_{i=1}^{n} r_i g q_i$$

der identische Endomorphismus von $\mathfrak{M}$ ist.

Wir beweisen zuerst, daß die Behauptung notwendig ist. Sei also $\mathfrak{M}$ M_o- oder M_u-Modul. Auf Grund der Definition der M_o- und M_u-Moduln folgt aus Satz 11, daß in jedem Fall eine Zerlegung

$$\mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \tag{15}$$

mit

$$\mathfrak{M}_1 \cong \mathfrak{M} \tag{16}$$

existiert. Mit Hilfe des durch (14) gegebenen Endomorphismus h von $\mathfrak{M}_B$ läßt sich nun sofort der gewünschte Endomorphismus g von $\mathfrak{M}$ konstruieren. Es sei

$$\mathfrak{m} = k\,\mathfrak{m} + (1 - k)\,\mathfrak{m}$$

die (15) entsprechende Komponentenzerlegung von $\mathfrak{M}_B$. Dann stellt die Einschränkung von kh auf $\mathfrak{M}_1$ offenbar einen B-Ω-Endomorphismus g_1 von $\mathfrak{M}_1$ dar, für den $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i\, g_1 q_i$ die identische Abbildung von $\mathfrak{M}_1$ ist und wegen (16) gibt es dann auch einen B-Ω-Endomorphismus g von $\mathfrak{M}$ mit den gewünschten Eigenschaften.

Es soll nun gezeigt werden, daß die Bedingung des Satzes hinreichend ist. Der Beweis dieses Teils stellt eine naheliegende Verallgemeinerung des Beweises von GASCHÜTZ dar, doch soll er der Vollständigkeit halber ausgeführt werden.

Es sei $\mathfrak{N}$ ein A-Ω-Modul und es bestehe die direkte Zerlegung von $\mathfrak{N}$ als B-Ω-Modul

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'',$$

wobei $\mathfrak{M}'$ A-Ω-Modul sei und

$$\mathfrak{N}/\mathfrak{M}' \cong \mathfrak{M}.$$

Dann sind $\mathfrak{M}''$ und $\mathfrak{M}$ als B-Ω-Moduln isomorph. Folglich kann der Endomorphismus g von $\mathfrak{M}$ auch als B-Ω-Endomorphismus g' von $\mathfrak{N}/\mathfrak{M}'$ betrachtet und durch

$$g^* = \begin{cases} g' & \text{für } \mathfrak{M}'' \\ 0 & \text{für } \mathfrak{M}' \end{cases}$$

auf $\mathfrak{N}$ fortgesetzt werden. Dann gilt mit der Bezeichnung $\sum_{i=1}^{n} r_i g^* q_i = I^*$:

$$I^* \mathfrak{n} \equiv \mathfrak{n} \bmod \mathfrak{M}', \quad (\mathfrak{n} \in \mathfrak{N})$$

und, da $\mathfrak{M}'$ A-Ω-Modul ist,

$$I^* \mathfrak{m}' = 0, \quad (\mathfrak{m}' \in \mathfrak{M}').$$

Bezeichnet man mit I den identischen Endomorphismus, so folgt

$$(I - I^*)\, \mathfrak{m}' = \mathfrak{m}', \quad (\mathfrak{m}' \in \mathfrak{M}') \qquad (I - I^*)\, \mathfrak{n} \in \mathfrak{M}', \quad (\mathfrak{n} \in \mathfrak{N})$$

also auch

$$(I - I^*)^2 = I - I^*.$$

Dann ist

$$\mathfrak{N} = (I - I^*)\, \mathfrak{N} + I^* \mathfrak{N} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{N}' \tag{17}$$

eine direkte Zerlegung von $\mathfrak{N}$ als Ω-Modul. Da g^* ein B-Ω-Endomorphismus ist, gilt schließlich

$$a \sum_{j=1}^{n} r_j g^* q_j = \sum_{i,j=1}^{n} r_i b_{ij} g^* q_j = \sum_{i,j=1}^{n} r_i g^* b_{ij} q_j = \Big(\sum_{i=1}^{n} r_i g^* q_i\Big)\, a.$$

Folglich ist (17) bereits eine direkte Zerlegung von $\mathfrak{N}$ als A-Ω-Modul. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{M}$ tatsächlich M_o-Modul ist. Der Nachweis, daß $\mathfrak{M}$ auch M_u-Modul ist, kann ganz entsprechend geführt werden.

c) Unter den Voraussetzungen von Satz 12 ist jeder M_o-Modul auch M_u-Modul und umgekehrt. Man kann daher (im Anschluß an Gaschütz [3]) einfach von *Maschke-Moduln* sprechen. Bei gleichen Voraussetzungen über A und Ω als Operatorenbereiche wie in Satz 12 erhält man die

Folgerungen:

1. *Sind die A-Ω-Moduln $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$ Maschke-Moduln, so auch*

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{M}' \oplus \mathfrak{M}'' \tag{18}$$

Ist der A-Ω-Modul $\mathfrak{N}$ Maschke-Modul und besteht eine direkte Zerlegung (18), *so sind auch $\mathfrak{M}'$* und *$\mathfrak{M}''$ Maschke-Moduln.*

2. Der A-Ω-Modul $\mathfrak{M}$ ist dann und nur dann Maschke-Modul, wenn ein zu $\mathfrak{M}$ A-Ω-isomorpher direkter A-Ω-Summand des regulären Erweiterungsmoduls $\mathfrak{M}_B$ existiert.

3. Der Rang von A/B sei n. Ist die Abbildung

$$\mathfrak{m} \rightarrow n\,\mathfrak{m}$$

ein Automorphismus des A-Ω-Moduls $\mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{M}$ Maschke-Modul.

4. Betrachtet man A selbst als A-B-Modul, so ist A Maschke-Modul.

Durch die drei ersten Folgerungen werden Ergebnisse aus [3] verallgemeinert. Die einfachen Beweise können unmittelbar aus [3] übernommen werden. Zum Beweis der letzten Folgerung hat man einen B-B-Endomorphismus anzugeben, wie er in Satz 12 vorausgesetzt wird. Man überzeugt sich sofort, daß der Frobeniushomomorphismus von A auf B die verlangte Eigenschaft besitzt.

Literaturverzeichnis

[1] R. BRAUER, C. NESBITT: On the regular representation of algebras. Proc. Nat. Acad. Sc. **23**, 236 (1937). — [2] C. J. EVERETT: Vektor spaces over rings. Bull. Amer. math. Sc. **48**, 312 (1942). — [3] W. GASCHÜTZ: Über den Fundamentalsatz von MASCHKE zur Darstellungstheorie der endlichen Gruppen. Math. Z. **56**, 376 (1952). — [4] M. HALL: A type of algebraic closure. Ann. of Math. **40**, 360 (1939). — [5] M. IKEDA: On a theorem of GASCHÜTZ. Osaka Math. J. **5**, 53 (1953). — [6] F. KASCH: Halblineare Abbildungen und die Rangrelation bei galoisschen Erweiterungen. Arch. der Math. VI, 402 (1953). — [7] T. NAKAYAMA: On Frobenius Algebras I. Ann. of Math. **40**, 611 (1939). — [8] T. NAKAYAMA: On Frobenius Algebras II. Ann. of Math. **42**, 1 (1941). — [9] T. NAKAYAMA: Galois theory of simple rings. Trans. Amer. math. Sc. **73**, 276 (1952). — [10] T. NAKAYAMA: On two topics in the structural theory of rings (Galois theory of rings and Frobenius algebras). Proc. of the int. Congress of Math. II, 49 (1950). — [11] T. NAKAYAMA, H. NAGAO: On the structure of (M_0)- and (M_u)-moduls. Math. Z. **59**, 164 (1953). — [12] C. NESBITT: On the regular representations of algebras. Ann. of Math. **39**, 634 (1938). [13] F. K. SCHMIDT: Algebraische Zahlentheorie II. Vorlesungsausarbeitung Münster, SS. 1950. — [14] E. WITT: Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. Journ. f. d. r. u. angew. Math. **176**, 31 (1937).

(Eingegangen am 14. Dezember 1953.)