

ARCHIVES OF MATHEMATICS
ARCHIV DER MATHEMATIK
ARCHIVES MATHÉMATIQUES

Herausgegeben in Verbindung
mit dem Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach

von

H. BILHARZ · H. KNESER · W. SÜSS

Beirat: G. BOL, E. BOMPIANI, J. DIEUDONNÉ, CH. EHRESMANN, W. FELLER
H. GÖRTLER, H. HADWIGER, H. HOPF, S. MACLANE, W. MAGNUS, T. NAGELL,
CHR. PAUC, G. PICKERT, J. RADON, K. REIDEMEISTER, J. A. SCHOUTEN,
H. SEIFERT, E. SPERNER, E. STIEFEL, P. TURÁN

VOL. 6 · 1955



B I R K H Ä U S E R V E R L A G
BASEL UND STUTT GART

Inhalt — Contents — Sommaire

ANDRÉ, J.: Über Perspektivitäten in endlichen projektiven Ebenen	29
BAER, R.: Burnsidische Eigenschaften	165
BANASCHEWSKI, B.: Abstufungen des Kompaktheitsbegriffes	320
BARNER, M.: Über gewisse Kurventripel auf Regelflächen	223
BARNER, M.: Geradengeometrische Kennzeichnung der W -Kurven des projektiven Raumes	462
BAUER, H.: Darstellung additiver Funktionen auf Booleschen Algebren als Mengenfunktionen	215
BEHNKE, H.: Die analytischen Gebilde von holomorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen (Zusammenfassender Bericht)	353
BOTTEMA, O.: Zur Kinematik des Rollgleitens	25
BRAUNER, H.: Erzeugung eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides durch Bewegung einer gleichseitigen Hyperbel	330
CARLITZ, L.: The Coefficients of the Reciprocal of $J_0(x)$	121
DEVIDÉ, V.: Ein Axiomensystem für die natürlichen Zahlen	408
DIEUDONNÉ, J.: Sur quelques groupes de Lie abéliens sur un corps de caractéristique $p > 0$ (Rectifications)	88
EGLOFF, W.: Ein geometrischer Beweis eines Satzes von Axel Schur	281
GAIER, D., siehe WALSH, J. L.	77
GASCHÜTZ, W.: Gruppen, deren sämtliche Untergruppen Zentralisatoren sind	5
GODEAUX, L.: Note sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique	1
GROTEMEYER, K.P.: Integralsätze bei infinitesimalen Verbiegungen von geschlossenen Raumkurven	250
GROTEMEYER, K. P.: Ein Satz aus der Differentialgeometrie der Eiflächen	403
GROTEMEYER, K. P.: Zur eindeutigen Bestimmtheit konvexer Mützen	454
GRÜN, O.: Homomorphe Abbildungen von Gruppen auf Faktorgruppen von Untergruppen	264
HEFFTER, L.: Gleichmäßige Differenzierbarkeit einer Funktion und Stetigkeit ihrer Ableitung in einem Bereich	45
HEINS, M.: A universal Blaschke product	41
HELLWIG, G.: Über die Verbiegbarkeit von Flächenstücken mit positiver Gaußscher Krümmung	243
HLAWKA, E.: Über einen Satz von van der Corput	115
HORNFECK, B.: Zur Dichte der Menge der vollkommenen Zahlen	442
HUPPERT, B.: Primitive, auflösbare Permutationsgruppen	303
JORDAN, H.: Eine Bemerkung über die Monotonie von $\text{sn}(tK)$	185

KALUZA jr., TH.: Beweis einer Vermutung von Herrn H. Hopf über die Numerierung der Eckpunkte gewisser unendlicher Graphen	157
KANTZ, G.: Über Integritätsbereiche mit eindeutiger Primelementzerlegung	397
KARZEL, H.: Ein Axiomensystem der absoluten Geometrie	66
KARZEL, H.: Verallgemeinerte absolute Geometrien und Lotkernegeometrien	284
KASCH, F.: Über den Automorphismenring einfacher Algebren	59
KASCH, F.: Bemerkung zum Hauptsatz der Galoisschen Theorie für Schiefkörper	420
KNESER, M.: Einige Bemerkungen über das Minkowskische Flächenmaß	382
KOWALSKY, H.-J.: Distributivität in atomaren Booleschen Verbänden	9
KÖNIG, H.: Multiplikation und Variablentransformation in der Theorie der Distributionen	391
LAMPRECHT, E.: Arithmetische Zetafunktionen zu zyklischen p -Körpern von zwei Veränderlichen über einem Galoisfeld	266
LAUFFER, R.: Interpolation mehrfacher Integrale	159
LAUGWITZ, D.: Über vollständige Normtopologien in linearen Räumen	128
LAUGWITZ, D.: Zur geometrischen Begründung der Parallelverschiebung in Finslerschen Räumen	448
LENZ, H.: Zur Zerlegung von Punktengen in solche kleineren Durchmessers	413
LEPTIN, H.: Bemerkung zu einem Satz von S. Kaplan	139
LEPTIN, H.: Ein Darstellungssatz für kompakte, total unzusammenhängende Gruppen	371
LEVI, F. W.: Überdeckung eines Eibereiches durch Parallelverschiebung seines offenen Kerns	369
MAAK, W.: Eine Verallgemeinerung des Weierstraßschen Approximationssatzes.	188
MAHLER, K.: On a Problem in Diophantine Approximations	208
MESCHKOWSKI, H.: Über Hilbertsche Räume mit Kernfunktion	151
MESCHKOWSKI, H.: Über Hilbertsche Räume mit Kernfunktion (Berichtigung)	481
MÜLLER, CL.: Über die Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes	47
MÜLLER, H. R.: Zur Kinematik des Rollgleitens, II (Sphärisches Rollgleiten)	471
MÜLLER, M.: Über die Approximation reeller Zahlen durch die Näherungsbrüche ihres regelmäßigen Kettenbruches	253
NEUMANN, H.: On some finite non-desarguesian planes	36
NINOT, J.: Über den Hauptsatz der Galoisschen Theorie (Kommutative Körper)	52
NITSCHKE, JOACHIM: Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem II	13
NITSCHKE, JOACHIM: Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem III	145
NITSCHKE, JOHANNES: Eine charakteristische Eigenschaft der Lösungen von Randwertproblemen elliptischer Differentialgleichungssysteme	18
OHMANN, D.: Eine lineare Verschärfung des Brunn-Minkowskischen Satzes für abgeschlossene Mengen	33
OSTROWSKI, A.: Über Evoluten und Evolventen ebener Kurven	170
ÖZKAN, A.: Une condition caractéristique pour la classe des surfaces à courbure moyenne constante et un resultat pour ces surfaces	136
PAASCHE, I.: Beweis des Moessnerschen Satzes mittels linearer Transformationen	194
PICKERT, G.: Einfacher Beweis eines Satzes von M. Hall über offene Inzidenzstrukturen	417
REMBES, E.: Randvorgaben bei infinitesimaler Verbiegung konvexer Flächen	55

RITTER, R.: Charakterisierung der Baronischen Klassen von Biegungsflächen	311
ROGOSINSKI, W. W.: Linear extremum problems for real polynomials and trigonometrical polynomials (Corrigenda)	87
ROSENBLOOM, P.: Perturbation of Linear Operators in Banach Spaces	89
SAUER, R.: Darboux-Kranz verknickbarer Vierecksgitter.	180
SCHAEFER, H.: Über einen allgemeinen Konvergenzsatz von A. Korn	132
SCHAEFER, H.: Stetige Konvergenz in allgemeinen topologischen Räumen	423
SCHIEFERDECKER, E.: Die fastperiodischen Funktionen einer Oreschen Halbgruppe	428
SCHIEK, H.: Gruppen mit Relationen $X^3 = 1$, $(XY)^3 = 1$	341
SCHMIDT, J.: Eine verallgemeinerte Wohlordnung und die Endlichkeitsbedingungen der Ordnungstheorie	374
SCHOTTLAENDER, ST.: Über die Transformation einer Reihe nach Besselschen Funktionen	275
STÖCKER, C.: Beweis eines Hilfssatzes von Bruck und Kleinfeld unter Voraussetzung beliebiger Charakteristik	296
VOLKMANN, B.: Über die Klasse der Summenmengen	200
VOSS, K.: Eine Bemerkung über die Totalkrümmung geschlossener Raumkurven	259
WALSH, J. L. und GAIER, D.: Zur Methode der variablen Gebiete bei der Randverzerrung	77
WARSAWSKI, S. E.: On Mean Convergence in Conformal Mapping	102
WEIER, J.: Abhängigkeit des Indexes von der Einbettung.	348
WINTNER, A.: On a theorem of Painlevé	439
WUNDERLICH, W.: Kreise als Doppelloxodromen	230
ZAUBEK, O.: Ein Beitrag zum Borelschen Überdeckungssatze	444
ZELLER, K.: Über Konvergenzmengen von Fourierreihen	335

Glückwunschadresse zum 60. Geburtstag und Bild von Professor Dr. WILHELM SÜSS nach S.164

Über den Automorphismenring einfacher Algebren

Von FRIEDRICH KASCH in Göttingen

1. Fragestellung

Es sei A der Ring aller n -reihigen (mit $n > 1$), quadratischen Matrizen mit Matrixelementen aus einem kommutativen Körper Z . Dann ist Z das Zentrum von A und A besitzt über Z nur innere Automorphismen. Die Gruppe der inneren Automorphismen von A bezeichnen wir mit \mathcal{G} . Im Sinne der galoisschen Theorie für Ringe ist A/Z eine galoissche Erweiterung mit \mathcal{G} als Galoisgruppe.

Betrachtet man A nur als linearen Vektorraum über Z , so stellen die Automorphismen aus \mathcal{G} lineare Abbildungen von A/Z dar. Die durch die Elemente von Z als Multiplikatoren von A erzeugten Abbildungen von A sind ebenfalls lineare Abbildungen von A/Z . Der durch alle diese linearen Abbildungen von A/Z erzeugte Ring sei $\mathfrak{R} = [Z, \mathcal{G}]$. Wir bezeichnen ihn wie in [2,3] als *Automorphismenring*. In den erwähnten Arbeiten war damit begonnen worden, die Eigenschaften von \mathfrak{R} und von A als \mathfrak{R} -Modul zu untersuchen, und zwar unter allgemeineren Voraussetzungen über A und Z . Hier sollen diese Überlegungen unter den angegebenen Voraussetzungen weitergeführt werden. Abgesehen davon, daß bereits der vorliegende Fall an sich von Interesse sein dürfte, ist zu erhoffen, daß sich auf Grund der hier gewonnenen Ergebnisse auch Gesichtspunkte für die Behandlung der gleichen Frage bei allgemeineren galoisschen Ringerweiterungen ergeben.

Das Ziel dieser Überlegungen besteht in der Bestimmung der Struktur von A als \mathfrak{R} -Modul und der damit zusammenhängenden Kennzeichnung der in \mathfrak{R} enthaltenen linearen Abbildungen von A/Z . Dieses Ziel wird vollständig erreicht unter der Voraussetzung, daß Z nicht der Primkörper P_2 der Charakteristik 2 ist und die Charakteristik von Z nicht in n aufgeht.

2. Hilfsmittel

Wir beginnen damit, ein Ergebnis aus [3] zu formulieren. Dabei wird vorausgesetzt, daß entweder $Z \neq P_2$ oder $n > 2$ ist. Mit d_{ij} , ($i, j = 1, \dots, n$) seien die Matrixeinheiten und mit e das Einselement von A bezeichnet. Nennt man einen Untermodul von A *invariant*, wenn er gegenüber der Anwendung von inneren Automorphismen von A abgeschlossen ist, so folgt aus [3], Satz 1, daß jeder invariante Untermodul von A , der nicht in Z enthalten ist, den durch die Elemente d_{ij} mit $i \neq j$ und $d_{ii} - d_{jj}$, ($i, j = 1, \dots, n$) über Z aufgespannten Untermodul

$$(1) \quad B = \{Zd_{ij}, Z(d_{ii} - d_{jj})\}_{\substack{i, j=1, \dots, n \\ i \neq j}}$$

enthält. Wir stellen nun fest, daß B gleich dem durch die Kommutatoren $ab - ba$, ($a, b \in A$) erzeugten Modul

$$(2) \quad B = \{ab - ba\}_{a, b \in A}$$

ist¹⁾. Zunächst ist klar, daß die Elemente d_{ij} , $i \neq j$ und $d_{ii} - d_{jj}$ als Kommutatoren dargestellt werden können:

$$\begin{aligned} d_{ij} d_{jj} - d_{jj} d_{ij} &= d_{ij} \text{ für } i \neq j, \\ d_{ij} d_{ji} - d_{ji} d_{ij} &= d_{ii} - d_{jj}. \end{aligned}$$

Seien

$$a = \sum_{i,j} \alpha_{ij} d_{ij}, \quad b = \sum_{s,t} \beta_{st} d_{st}, \quad \alpha_{ij}, \beta_{st} \in Z$$

zwei beliebige Elemente aus A , so ist umgekehrt

$$\begin{aligned} ab - ba &= \sum_{i,j,t} \alpha_{ij} \beta_{jt} d_{it} - \sum_{i,j,s} \alpha_{ij} \beta_{si} d_{sj} \\ &\equiv \sum_{i,j} \alpha_{ij} \beta_{ji} d_{ii} - \sum_{i,j} \alpha_{ij} \beta_{ji} d_{jj} \equiv \sum_{i,j} \alpha_{ij} \beta_{ji} (d_{ii} - d_{jj}) \pmod{\{Zd_{ij}\}_{i \neq j}}, \end{aligned}$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Da nach (2) B ein invarianter Modul ist, ist B auch \mathfrak{R} -Modul. Der Rang von B/Z ist nach (1) gleich $n^2 - 1$. Wir können also anmerken:

Ist $Z \neq P_2$, so besitzt A als \mathfrak{R} -Modul nur die echten, nichttrivialen Untermoduln Z und B mit $(B:Z) = n^2 - 1$. Ist Z nicht in B enthalten, so besitzt folglich A als \mathfrak{R} -Modul die direkte Zerlegung

$$(3) \quad A = Z \oplus B$$

in irreduzible Summanden.

Es erhebt sich nun die Frage, unter welcher Voraussetzung $Z \subseteq B$ gilt.

Wir behaupten:

Dann und nur dann ist $Z \subseteq B$, wenn die Charakteristik p von Z in n aufgeht. Daß die Bedingung hinreichend ist, ist sofort klar, denn dann ist das in B enthaltene Element

$$\sum_i (d_{ii} - d_{nn}) = d_{11} + \dots + d_{n-1, n-1} - (n-1) d_{nn}$$

wegen $-(n-1) \equiv 1(p)$ das Einselement von A und folglich gilt $Z \subseteq B$. Ist umgekehrt $Z \subseteq B$, so muß sich e linear durch die Elemente $d_{ii} - d_{nn}$, ($i=1, \dots, n-1$) darstellen lassen und daraus folgt sofort $-(n-1) \equiv 1(p)$, also $p|n$.

¹⁾ Darauf wurde ich durch eine Bemerkung in der Arbeit von A. HATTORI [1] aufmerksam gemacht. In dieser Arbeit, die mir bei der Abfassung von [3] nicht bekannt war, wird ein Satz über invariante Unterringe bewiesen, der sich in [3] als unmittelbare Folge von Satz 1 ergibt (Satz 2). In der fraglichen Bemerkung (added in proof) wird ohne Beweis mitgeteilt, daß N. IWAHORI einen Satz aufgestellt hat, der einen Spezialfall von Satz 1 aus [3] darstellt.

3. Hauptsatz

Es wird jetzt vorausgesetzt, daß $Z \neq P_2$ ist und die Charakteristik p von Z nicht in n aufgeht. Dann ist nach der eben gemachten Feststellung B als \mathfrak{R} -Modul irreduzibel oder, anders formuliert, \mathfrak{R} ist ein einfach transitiver Ring von linearen Abbildungen von B/Z . Damit erhebt sich die Frage, ob \mathfrak{R} für B/Z sogar mehrfach transitiv ist. Die überraschende Antwort lautet, daß \mathfrak{R} tatsächlich alle linearen Abbildungen von B/Z induziert. Um dies einzusehen, ziehen wir das SCHURSCHE Lemma heran. Da B als \mathfrak{R} -Modul irreduzibel ist, bilden nach dem SCHURSCHEM Lemma die mit allen Abbildungen aus \mathfrak{R} vertauschbaren Endomorphismen von B einen Schiefkörper S und \mathfrak{R} induziert in B alle linearen Abbildungen von B/S . Die Endomorphismen $s \in S$ lassen sich wegen (3) zu linearen Abbildungen \bar{s} von A/Z fortsetzen, die wieder mit allen Elementen aus \mathfrak{R} vertauschbar sind. Dazu setze man einfach

$$B\bar{s} = Bs, \quad Z\bar{s} = 0 \quad ^2).$$

Können wir zeigen, daß die Einschränkung auf B jeder mit den Elementen aus \mathfrak{R} vertauschbaren linearen Abbildung von A/Z bereits in Z enthalten ist, so ist folglich $Z = S$ und der Beweis vollständig. Diesen Nachweis stellen wir zurück (Hilfssatz) und fragen sogleich noch nach dem Rang von \mathfrak{R}/Z .

Da \mathfrak{R} alle linearen Abbildungen von B/Z erzeugt und $(B:Z) = n^2 - 1$ ist, gilt einerseits $(\mathfrak{R}:Z) \geq (n^2 - 1)^2$. Wegen (3) muß andererseits $(\mathfrak{R}:Z) \leq (n^2 - 1)^2 + 1$ gelten. Es bleiben also nur zwei Möglichkeiten und wir behaupten:

$$(4) \quad (\mathfrak{R}:Z) = (n^2 - 1)^2 + 1.$$

Der Ring aller linearen Abbildungen von B/Z hat den Rang $(n^2 - 1)^2$. Nimmt man nun $(\mathfrak{R}:Z) = (n^2 - 1)^2$ an, so müßte \mathfrak{R} zum Ring aller linearen Abbildungen von B/Z isomorph sein und wäre daher ein einfacher Ring. Der Ring \mathfrak{C} aller linearen Abbildungen von A/Z hat den Rang n^4 über Z und ist ebenfalls einfach. Ein einfacher, Z umfassender Unterring von \mathfrak{C} muß nach der galoisschen Theorie für einfache Ringe über Z einen Rang besitzen, der n^4 teilt. Also ist die Annahme $(\mathfrak{R}:Z) = (n^2 - 1)^2$ falsch und folglich gilt (4). Unter Beachtung von (3) folgt daraus schließlich noch, daß \mathfrak{R} halbeinfach ist.

Wir fassen die bisherigen Überlegungen zusammen in dem folgenden

Satz: *Es sei A der Ring aller quadratischen, n -reihigen Matrizen mit Matrixelementen aus einem kommutativen Körper Z , der vom Primkörper der Charakteristik 2 verschieden sei und n sei nicht durch die Charakteristik von Z teilbar. Ist $\mathfrak{R} = [Z, \mathfrak{G}]$ der Automorphismenring von A/Z und $B = \{ab - ba\}$, $a, b \in A$, so gilt:*

1.) *A ist als \mathfrak{R} -Modul vollständig reduzibel und besitzt die direkte Zerlegung in irreduzible Summanden*

$$A = Z \oplus B.$$

²⁾ Anwendung der Endomorphismen auf A bzw. B erfolgt durch Multiplikation von rechts.

2.) \mathfrak{R} induziert in B alle linearen Abbildungen von B/Z .

3.) \mathfrak{R} ist halbeinfach und zwar (bis auf Isomorphie) direkte Summe von Z und dem Ring aller (n^2-1) -reihigen, quadratischen Matrizen mit Matrixelementen aus Z ; es besteht daher die Rangbeziehung

$$(\mathfrak{R}:Z) = (n^2-1)^2 + 1.$$

Bemerkung: Wie schon festgestellt, sind bis auf die Rangbeziehung alle Behauptungen des Satzes unzutreffend, wenn die Charakteristik von Z in n aufgeht. Ob die Rangbeziehung gültig bleibt, muß offengelassen werden. Ebenso bleibt die Frage offen, ob der Satz auch zutrifft, wenn Z der Primkörper der Charakteristik 2 ist. Jedenfalls ist neben den anderen Aussagen des Satzes auch die Rangrelation ungültig, wenn Z der Primkörper der Charakteristik 2 und $n = 2$ ist, denn dann gibt es überhaupt nur 6 reguläre Elemente in A .

Zum vollständigen Beweis des Satzes haben wir bei gleichen Voraussetzungen noch den folgenden Hilfssatz zu beweisen.

Hilfssatz: Eine lineare Abbildung von A/Z , die mit jedem Element aus \mathfrak{R} vertauschbar ist, induziert in B die Multiplikation mit einem Element aus Z .

Zum Beweis bezeichne man mit a^l bzw. a^r den durch ein Element $a \in A$ als Links- bzw. Rechtsmultiplikator von A hervorgerufenen Endomorphismus von A . Der Endomorphismenring A^l bzw. A^r ist dann (bei Anwendung der Endomorphismen durch Multiplikation von rechts auf die Elemente von A) zu A inversisomorph bzw. isomorph. Bekanntlich wird der Ring \mathfrak{E} aller linearen Abbildungen von A/Z durch A^l und A^r erzeugt, $\mathfrak{E} = [A^l, A^r]$, und es besteht die Basisdarstellung

$$\mathfrak{E} = \sum_{i,j=1}^n d_{ij}^l A^r.$$

Nach Voraussetzung besitzt Z mehr als zwei Elemente, es gibt also ein Element $x \in Z$, das von 0 und -1 verschieden ist. Dann ist $e + x d_{ss}$ ein reguläres Element von A mit dem Inversen $e - x(x+1)^{-1} d_{ss}$ und

$$(e + x d_{ss})^l (e - x(x+1)^{-1} d_{ss})^r = t_e + x d_{ss}$$

ist der durch dieses Element erzeugte innere Automorphismus von A . Bezeichnet

$$e = \sum_{i,j} d_{ij}^l a_{ij}^r$$

ein mit allen Elementen aus \mathfrak{R} vertauschbares Element aus \mathfrak{E} , so folgt aus der Gleichung $t_e + x d_{ss} e = e t_e + x d_{ss}$ durch Koeffizientenvergleich für den Koeffizienten von d_{ii}^l mit $i \neq s$:

$$d_{ss} a_{ii} = a_{ii} d_{ss}.$$

Setzt man noch $a_{ij} = \sum_{\nu, \mu} z_{\nu\mu}^{ij} d_{\nu\mu}$, $z_{\nu\mu}^{ij} \in Z$, so folgt

$$z_{s\mu}^{ii} = z_{\nu s}^{ii} = 0, \quad i, \nu, \mu \neq s;$$

also gilt allgemein

$$(5) \quad z_{\nu\mu}^{ii} = 0 \quad \text{für } \nu \neq \mu \text{ und } i = 1, \dots, n,$$

denn wegen $\nu \neq \mu$ ist mindestens eine der Zahlen ν oder μ ungleich i und diese identifiziere man mit s .

Nun benutzen wir den durch das Element $e + d_{st}$, $s \neq t$ mit $(e + d_{st})^{-1} = e - d_{st}$ erzeugten inneren Automorphismus $t_{e+d_{st}}$. Die Gleichung $t_{e+d_{st}} e = e t_{e+d_{st}}$ bedeutet ausführlich geschrieben

$$\sum_i d_{it}^l (e - d_{st})^r a_{is}^r - \sum_{i,j} d_{ij}^l d_{st}^r a_{ij}^r = \sum_j d_{sj}^l a_{ij}^r (e - d_{st})^r - \sum_{i,j} d_{ij}^l a_{ij}^r d_{st}^r$$

und daraus folgt durch Koeffizientenvergleich für den Koeffizienten von d_{ss}^l

$$(6) \quad \sum_{\nu, \mu} z_{\nu\mu}^{ts} d_{\nu\mu} - \sum_{\nu} (z_{\nu s}^{ts} + z_{\nu s}^{ss}) d_{\nu t} + \sum_{\mu} z_{t\mu}^{ss} d_{s\mu} = 0$$

und für den Koeffizienten von d_{st}^l

$$(7) \quad \sum_{\nu, \mu} (z_{\nu\mu}^{ss} - z_{\nu\mu}^{tt}) d_{\nu\mu} - \sum_{\mu} (z_{t\mu}^{st} + z_{t\mu}^{ss}) d_{s\mu} + \sum_{\nu} (z_{\nu s}^{st} + z_{\nu s}^{tt}) d_{\nu t} = 0.$$

Aus (6) erhält man für den Koeffizienten von $d_{\nu\mu}$:

$$(8) \quad z_{\nu\mu}^{ts} = 0 \text{ falls } \nu \neq s \text{ und } \mu \neq t.$$

Wegen $s \neq t$ ist also insbesondere $z_{ts}^{ts} = 0$. Für den Koeffizienten von d_{ss} bzw. d_{tt} folgt aus (6)

$$z_{ss}^{ts} + z_{ts}^{ss} = 0 \text{ bzw. } z_{tt}^{ts} - z_{ts}^{ts} - z_{ts}^{ss} = 0$$

und daraus ergibt sich auf Grund von (5) und (8)

$$(9) \quad z_{ss}^{ts} = z_{tt}^{ts} = 0.$$

Betrachten wir schließlich den Koeffizienten von $d_{s\mu}$ mit $\mu \neq s, t$ in (7):

$$z_{s\mu}^{ss} - z_{s\mu}^{tt} - z_{t\mu}^{st} - z_{t\mu}^{ss} = 0,$$

so folgt wegen (5)

$$z_{t\mu}^{st} = 0 \text{ für } \mu \neq s, t$$

und entsprechend sieht man auch $z_{\nu s}^{st} \neq 0$ für $\nu \neq s, t$ ein. Auf Grund dieser beiden Gleichungen, sowie (8) und (9) gilt also

$$(10) \quad z_{\nu\mu}^{ts} = 0 \text{ falls } \nu \neq s \text{ oder } \mu \neq t.$$

Nach (5) und (10) besitzt e die Darstellung

$$(11) \quad e = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} z_{ji}^{ij} d_{ij}^l d_{ji}^r + \sum_i d_{ii}^l a_{ii}^r \text{ mit } a_{ii} = \sum_{\nu} z_{\nu\nu}^{ii} d_{\nu\nu}.$$

Unter dieser Voraussetzung betrachten wir wieder die Ausgangsgleichung $t_{e+d_{st}} e = e t_{e+d_{st}}$ und unterscheiden nun zwei Fälle.

1. Fall: $n > 2$.

Koeffizientenvergleich für d_{sj}^l mit $j \neq s, t$ liefert jetzt

$$z_{jt}^{lj} d_{jt} (e - d_{st}) - z_{js}^{sj} d_{jt} = 0,$$

also

$$z_{jt}^{lj} = z_{js}^{sj} \text{ für } j \neq s, t \text{ und } s \neq t.$$

Entsprechend gilt auch $z_{si}^{is} = z_{it}^{it}$, und daraus folgt

$$z_{ji}^{ij} = z \text{ für } i \neq j, i, j = 1, \dots, n.$$

2. Fall: $n = 2$.

Sei zunächst $s = 1$, $t = 2$, dann folgt aus der Ausgangsgleichung für den Koeffizienten von $d_{11}^l d_{12}^r$:

$$z_{12}^{21} - z_{11}^{11} + z_{22}^{11} = 0.$$

Für $s = 2$, $t = 1$ erhält man entsprechend für den Koeffizienten von $d_{11}^l d_{21}^r$:

$$z_{21}^{12} - z_{11}^{11} + z_{22}^{11} = 0,$$

und die Differenz der beiden letzten Gleichungen liefert

$$z_{12}^{21} = z_{21}^{12} = z.$$

Auf Grund dieser Überlegungen können wir jetzt für e die folgende Darstellung annehmen:

$$e = z \sum_{i,j} d_{ij}^l d_{ji}^r + \sum_i d_{ii}^l a_{ii}^r \quad \text{mit} \quad a_{ii}^r = \sum_{\nu} z_{\nu\nu}^{ii} d_{\nu\nu},$$

wobei gegenüber (11) in der ersten Summe die Beschränkung $i \neq j$ fallengelassen worden ist. Die erste Summe werde mit e_1 , die zweite mit e_2 bezeichnet.

Wir stellen nun fest, daß e_1 mit allen Elementen aus \mathfrak{R} vertauschbar ist. In der Tat, Z wird durch e_1 auf sich abgebildet, und für B stellt e_1 den Nulloperator dar, denn das Bild der Basiselemente d_{ij} , $i \neq j$ von B bei dieser Abbildung ist gleich Null, und da die Elemente d_{ii} bei e_1 offenbar alle das gleiche Bild besitzen, werden auch die Basiselemente $d_{ii} - d_{jj}$ von B auf Null abgebildet. Dann folgt die behauptete Vertauschbarkeit von e_1 mit den Elementen aus \mathfrak{R} sofort aus (3).

Es bleibt also nur noch e_2 zu untersuchen. Aus der Gleichung $t_e + a_{st} e_2 = e_2 t_e + a_{st}$ entnimmt man $d_{st} a_{ii} = a_{ii} d_{st}$, also $z_{st}^{ii} = z_{ss}^{ii}$, und folglich gilt $a_{ii} \in Z$. Dann ist aber $e_2 = a^l$, und da e_2 mit allen Elementen aus \mathfrak{R} vertauschbar sein soll, folgt schließlich $a \in Z$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen und auch der Beweis des Satzes beendet.

4. Verallgemeinerung

Es erhebt sich die Frage, ob unser Satz auch für beliebige einfache Algebren A zutrifft. A ist dann bekanntlich (bis auf Isomorphie) der Ring aller quadratischen, n -reihigen Matrizen mit Matrixelementen aus einem Schiefkörper K , wobei K von endlichem Rang über dem Zentrum Z ist. Aus unserem Beweis entnimmt man fast unmittelbar, daß der Satz für A/Z zutrifft, falls er für K/Z gilt.

Und wann gilt er für K/Z ? Jedenfalls dann, wenn K/Z ein beliebiger Quaternionenschiefkörper mit einer von zwei verschiedenen Charakteristik ist. Der Beweis dieser Behauptung kann durch einfache, aber längere Rechnung geführt werden. Der Beweisgedanke ist naheliegend: Die Annahme, daß gewisse Automorphismen eine Basis von \mathfrak{R}/Z bilden, führt auf eine Determinantenbedingung, die durch geeignete Wahl erfüllt werden kann. Wie bereits in [2] erwähnt, ergibt sich daraus $(\mathfrak{R}:Z) = 10^3$. Aus der für einen Quaternionenschiefkörper mit von zwei verschiedener Charakteristik geltenden normierten Erzeugung

$$K = Z + Za + Zb + Zab$$

*) Diese Ranggleichung besteht auch bei Quaternionenschiefkörpern der Charakteristik 2.

mit

$$a^2 = z_1, b^2 = z_2; ab = -ba$$

folgt sofort die Zerlegung von K als \mathfrak{R} -Modul

$$K = Z \oplus B$$

und die Tatsache, daß B als \mathfrak{R} -Modul irreduzibel ist. Zusammen mit der Rangbeziehung ergibt sich dann unmittelbar, daß \mathfrak{R} alle linearen Abbildungen von B/Z induziert. Es bleibt die Frage, ob der angegebene Satz auch bei einer größeren Klasse von Schiefkörpern gültig ist.

Literaturverzeichnis

- [1] A. HATTORI, On invariant subrings. Japanese J. Math. **21**, 121—129 (1951).
- [2] F. KASCH, Über den Endomorphismenring eines Vektorraums und den Satz von der Normalbasis. Math. Ann. **126**, 447—463 (1953).
- [3] F. KASCH, Invariante Untermoduln des Endomorphismenrings eines Vektorraums. Arch. der Math. **4**, 182—190 (1953).

Eingegangen am 9. 3. 1954