ARCHIVES OF MATHEMATICS

ARCHIV DER MATHEMATIK

ARCHIVES MATHÉMATIQUES

Herausgegeben in Verbindung
mit dem Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach

von

H. BILHARZ · H. KNESER · W. SÜSS

VOL. 6 · 1955

BIRKHÄUSER VERLAG

BASEL UND STUTTGART

Inhalt — Contents — Sommaire

Über den Automorphismenring einfacher Algebren

Von Friedrich Kasch in Göttingen

1. Fragestellung

Es sei A der Ring aller n-reihigen (mit $n > 1$), quadratischen Matrizen mit Matrixelementen aus einem kommutativen Körper Z. Dann ist Z das Zentrum von A und A besitzt über Z nur innere Automorphismen. Die Gruppe der inneren Automorphismen von A bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}$. Im Sinne der galoisschen Theorie für Ringe ist A/Z eine galoissche Erweiterung mit $\mathfrak{G}$ als Galoisgruppe.

Betrachtet man A nur als linearen Vektorraum über Z, so stellen die Automorphismen aus $\mathfrak{G}$ lineare Abbildungen von A/Z dar. Die durch die Elemente von Z als Multiplikatoren von A erzeugten Abbildungen von A sind ebenfalls lineare Abbildungen von A/Z. Der durch alle diese linearen Abbildungen von A/Z erzeugte Ring sei $\mathfrak{R} = [Z, \mathfrak{G}]$. Wir bezeichnen ihn wie in [2,3] als *Automorphismenring.* In den erwähnten Arbeiten war damit begonnen worden, die Eigenschaften von $\mathfrak{R}$ und von A als $\mathfrak{R}$-Modul zu untersuchen, und zwar unter allgemeineren Voraussetzungen über A und Z. Hier sollen diese Überlegungen unter den angegebenen Voraussetzungen weitergeführt werden. Abgesehen davon, daß bereits der vorliegende Fall an sich von Interesse sein dürfte, ist zu erhoffen, daß sich auf Grund der hier gewonnenen Ergebnisse auch Gesichtspunkte für die Behandlung der gleichen Frage bei allgemeineren galoisschen Ringerweiterungen ergeben.

Das Ziel dieser Überlegungen besteht in der Bestimmung der Struktur von A als $\mathfrak{R}$-Modul und der damit zusammenhängenden Kennzeichnung der in $\mathfrak{R}$ enthaltenen linearen Abbildungen von A/Z. Dieses Ziel wird vollständig erreicht unter der Voraussetzung, daß Z nicht der Primkörper P_2 der Charakteristik 2 ist und die Charakteristik von Z nicht in n aufgeht.

2. Hilfsmittel

Wir beginnen damit, ein Ergebnis aus [3] zu formulieren. Dabei wird vorausgesetzt, daß entweder $Z \neq P_2$ oder $n > 2$ ist. Mit d_{ij}, $(i, j = 1, \ldots, n)$ seien die Matrixeinheiten und mit e das Einselement von A bezeichnet. Nennt man einen Untermodul von A *invariant*, wenn er gegenüber der Anwendung von inneren Automorphismen von A abgeschlossen ist, so folgt aus [3], Satz 1, daß jeder invariante Untermodul von A, der nicht in Z enthalten ist, den durch die Elemente d_{ij} mit $i \neq j$ und $d_{ii} - d_{jj}$, $(i, j, = 1, \ldots, n)$ über Z aufgespannten Untermodul

(1) $$B = \{Z d_{ij}\,,\quad Z(d_{ii} - d_{jj})\}_{\substack{i, j = 1, \ldots, n \\ i \neq j}}$$

enthält. Wir stellen nun fest, daß B gleich dem durch die Kommutatoren $ab - ba$, $(a, b \in A)$ erzeugten Modul

(2) $$B = \{ab - ba\}_{a,b \in A}$$

ist[1]). Zunächst ist klar, daß die Elemente d_{ij}, $i \neq j$ und $d_{ii} - d_{jj}$ als Kommutatoren dargestellt werden können:

$$d_{ij}\, d_{jj} - d_{jj}\, d_{ij} = d_{ij} \text{ für } i \neq j\,,$$
$$d_{ij}\, d_{ji} - d_{ji}\, d_{ij} = d_{ii} - d_{jj}\,.$$

Seien

$$a = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, d_{ij}\,, \quad b = \sum_{s,t} \beta_{st}\, d_{st}\,, \quad \alpha_{ij}\,, \beta_{st} \in Z$$

zwei beliebige Elemente aus A, so ist umgekehrt

$$ab - ba = \sum_{i,j,t} \alpha_{ij}\, \beta_{jt}\, d_{it} - \sum_{i,j,s} \alpha_{ij}\, \beta_{si}\, d_{sj}$$
$$\equiv \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, \beta_{ji}\, d_{ii} - \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, \beta_{ji}\, d_{jj} \equiv \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, \beta_{ji}\, (d_{ii} - d_{jj}) \bmod \{Z d_{ij}\}_{i \neq j}\,,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Da nach (2) B ein invarianter Modul ist, ist B auch $\mathfrak{R}$-Modul. Der Rang von B/Z ist nach (1) gleich $n^2 - 1$. Wir können also anmerken:

Ist $Z \neq P_2$, so besitzt A als $\mathfrak{R}$-Modul nur die echten, nichttrivialen Untermoduln Z und B mit $(B:Z) = n^2 - 1$. Ist Z nicht in B enthalten, so besitzt folglich A als $\mathfrak{R}$-Modul die direkte Zerlegung

(3) $$A = Z \oplus B$$

in irreduzible Summanden.

Es erhebt sich nun die Frage, unter welcher Voraussetzung $Z \subseteq B$ gilt.

Wir behaupten:

Dann und nur dann ist $Z \subseteq B$, wenn die Charakteristik p von Z in n aufgeht. Daß die Bedingung hinreichend ist, ist sofort klar, denn dann ist das in B enthaltene Element

$$\sum_i (d_{ii} - d_{nn}) = d_{11} + \cdots + d_{n-1\, n-1} - (n-1)\, d_{nn}$$

wegen $-(n-1) \equiv 1(p)$ das Einselement von A und folglich gilt $Z \subseteq B$. Ist umgekehrt $Z \subseteq B$, so muß sich e linear durch die Elemente $d_{ii} - d_{nn}$, $(i = 1, \ldots, n-1)$ darstellen lassen und daraus folgt sofort $-(n-1) \equiv 1(p)$, also p/n.

[1]) Darauf wurde ich durch eine Bemerkung in der Arbeit von A. HATTORI [1] aufmerksam gemacht. In dieser Arbeit, die mir bei der Abfassung von [3] nicht bekannt war, wird ein Satz über invariante Unterringe bewiesen, der sich in [3] als unmittelbare Folge von Satz 1 ergibt (Satz 2). In der fraglichen Bemerkung (added in proof) wird ohne Beweis mitgeteilt, daß N. IWAHORI einen Satz aufgestellt hat, der einen Spezialfall von Satz 1 aus [3] darstellt.

3. Hauptsatz

Es wird jetzt vorausgesetzt, daß $Z \neq P_2$ ist und die Charakteristik p von Z nicht in n aufgeht. Dann ist nach der eben gemachten Feststellung B als $\mathfrak{R}$-Modul irreduzibel oder, anders formuliert, $\mathfrak{R}$ ist ein einfach transitiver Ring von linearen Abbildungen von B/Z. Damit erhebt sich die Frage, ob $\mathfrak{R}$ für B/Z sogar mehrfach transitiv ist. Die überraschende Antwort lautet, *daß $\mathfrak{R}$ tatsächlich alle linearen Abbildungen von B/Z induziert.* Um dies einzusehen, ziehen wir das Schursche Lemma heran. Da B als $\mathfrak{R}$-Modul irreduzibel ist, bilden nach dem Schurschen Lemma die mit allen Abbildungen aus $\mathfrak{R}$ vertauschbaren Endomorphismen von B einen Schiefkörper S und $\mathfrak{R}$ induziert in B alle linearen Abbildungen von B/S. Die Endomorphismen $s \in S$ lassen sich wegen (3) zu linearen Abbildungen $\bar{s}$ von A/Z fortsetzen, die wieder mit allen Elementen aus $\mathfrak{R}$ vertauschbar sind. Dazu setze man einfach

$$B\bar{s} = Bs, \quad Z\bar{s} = 0 \text{ [2]}.$$

Können wir zeigen, daß die Einschränkung auf B jeder mit den Elementen aus $\mathfrak{R}$ vertauschbaren linearen Abbildung von A/Z bereits in Z enthalten ist, so ist folglich $Z = S$ und der Beweis vollständig. Diesen Nachweis stellen wir zurück (Hilfssatz) und fragen sogleich noch nach dem Rang von $\mathfrak{R}/Z$.

Da $\mathfrak{R}$ alle linearen Abbildungen von B/Z erzeugt und $(B:Z) = n^2-1$ ist, gilt einerseits $(\mathfrak{R}:Z) \geq (n^2-1)^2$. Wegen (3) muß andererseits $(\mathfrak{R}:Z) \leq (n^2-1)^2+1$ gelten. Es bleiben also nur zwei Möglichkeiten und wir behaupten:

$$(\mathfrak{R}:Z) = (n^2-1)^2+1\,. \tag{4}$$

Der Ring aller linearen Abbildungen von B/Z hat den Rang $(n^2-1)^2$. Nimmt man nun $(\mathfrak{R}:Z) = (n^2-1)^2$ an, so müßte $\mathfrak{R}$ zum Ring aller linearen Abbildungen von B/Z isomorph sein und wäre daher ein einfacher Ring. Der Ring $\mathfrak{E}$ aller linearen Abbildungen von A/Z hat den Rang n^4 über Z und ist ebenfalls einfach. Ein einfacher, Z umfassender Unterring von $\mathfrak{E}$ muß nach der galoisschen Theorie für einfache Ringe über Z einen Rang besitzen, der n^4 teilt. Also ist die Annahme $(\mathfrak{R}:Z) = (n^2-1)^2$ falsch und folglich gilt (4). Unter Beachtung von (3) folgt daraus schließlich noch, daß $\mathfrak{R}$ halbeinfach ist.

Wir fassen die bisherigen Überlegungen zusammen in dem folgenden

Satz: *Es sei A der Ring aller quadratischen, n-reihigen Matrizen mit Matrixelementen aus einem kommutativen Körper Z, der vom Primkörper der Charakteristik 2 verschieden sei und n sei nicht durch die Charakteristik von Z teilbar. Ist $\mathfrak{R} = [Z, \mathfrak{G}]$ der Automorphismenring von A/Z und $B = \{ab-ba\}$, $a, b \in A$, so gilt:*

1.) *A ist als $\mathfrak{R}$-Modul vollständig reduzibel und besitzt die direkte Zerlegung in irreduzible Summanden*

$$A = Z \oplus B\,.$$

[2]) Anwendung der Endomorphismen auf A bzw. B erfolgt durch Multiplikation von rechts.

2.) $\mathfrak{R}$ *induziert in B alle linearen Abbildungen von B/Z.*

3.) $\mathfrak{R}$ *ist halbeinfach und zwar (bis auf Isomorphie) direkte Summe von Z und dem Ring aller $(n^2—1)$-reihigen, quadratischen Matrizen mit Matrixelementen aus Z; es besteht daher die Rangbeziehung*

$$(\mathfrak{R}:Z) = (n^2-1)^2 + 1 .$$

Bemerkung: Wie schon festgestellt, sind bis auf die Rangbeziehung alle Behauptungen des Satzes unzutreffend, wenn die Charakteristik von Z in n aufgeht. Ob die Rangbeziehung gültig bleibt, muß offengelassen werden. Ebenso bleibt die Frage offen, ob der Satz auch zutrifft, wenn Z der Primkörper der Charakteristik 2 ist. Jedenfalls ist neben den anderen Aussagen des Satzes auch die Rangrelation ungültig, wenn Z der Primkörper der Charakteristik 2 und $n = 2$ ist, denn dann gibt es überhaupt nur 6 reguläre Elemente in A.

Zum vollständigen Beweis des Satzes haben wir bei gleichen Voraussetzungen noch den folgenden Hilfssatz zu beweisen.

Hilfssatz: *Eine lineare Abbildung von A/Z, die mit jedem Element aus $\mathfrak{R}$ vertauschbar ist, induziert in B die Multiplikation mit einem Element aus Z.*

Zum Beweis bezeichne man mit a^l bzw. a^r den durch ein Element $a \in A$ als Links- bzw. Rechtsmultiplikator von A hervorgerufenen Endomorphismus von A. Der Endomorphismenring A^l bzw. A^r ist dann (bei Anwendung der Endomorphismen durch Multiplikation von rechts auf die Elemente von A) zu A inversisomorph bzw. isomorph. Bekanntlich wird der Ring $\mathfrak{E}$ aller linearen Abbildungen von A/Z durch A^l und A^r erzeugt, $\mathfrak{E} = [A^l, A^r]$, und es besteht die Basisdarstellung

$$\mathfrak{E} = \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}^l A^r .$$

Nach Voraussetzung besitzt Z mehr als zwei Elemente, es gibt also ein Element $x \in Z$, das von 0 und -1 verschieden ist. Dann ist $e + x d_{ss}$ ein reguläres Element von A mit dem Inversen $e - x(x+1)^{-1} d_{ss}$ und

$$(e + x d_{ss})^l (e - x(x+1)^{-1} d_{ss})^r = \mathfrak{t}_{e+xd_{ss}}$$

ist der durch dieses Element erzeugte innere Automorphismus von A. Bezeichnet

$$\mathfrak{e} = \sum_{i,j} d_{ij}^l a_{ij}^r$$

ein mit allen Elementen aus $\mathfrak{R}$ vertauschbares Element aus $\mathfrak{E}$, so folgt aus der Gleichung $\mathfrak{t}_{e+xd_{ss}}\, \mathfrak{e} = \mathfrak{e}\, \mathfrak{t}_{e+xd_{ss}}$ durch Koeffizientenvergleich für den Koeffizienten von d_{ii}^l mit $i \neq s$:

$$d_{ss}\, a_{ii} = a_{ii}\, d_{ss} .$$

Setzt man noch $a_{ij} = \sum_{\nu,\mu} z_{\nu\mu}^{ij} d_{\nu\mu}$, $z_{\nu\mu}^{ij} \in Z$, so folgt

$$z_{s\mu}^{ii} = z_{\nu s}^{ii} = 0, \quad i, \nu, \mu \neq s;$$

also gilt allgemein

$$z_{\nu\mu}^{ii} = 0 \quad \text{für } \nu \neq \mu \text{ und } i = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

denn wegen $\nu \neq \mu$ ist mindestens eine der Zahlen ν oder μ ungleich i und diese identifiziere man mit s.

Nun benutzen wir den durch das Element $e + d_{st}$, $s \neq t$ mit $(e + d_{st})^{-1} = e - d_{st}$ erzeugten inneren Automorphismus $\mathfrak{t}_{e+d_{st}}$. Die Gleichung $\mathfrak{t}_{e+d_{st}}\,\mathfrak{e} = \mathfrak{e}\,\mathfrak{t}_{e+d_{st}}$ bedeutet ausführlich geschrieben

$$\sum_i d_{it}^l\,(e-d_{st})^r\,a_{is}^r - \sum_{i,j} d_{ij}^l\,d_{st}^r\,a_{ij}^r = \sum_j d_{sj}^l\,a_{tj}^r\,(e-d_{st})^r - \sum_{i,j} d_{ij}^l\,a_{ij}^r\,d_{st}^r$$

und daraus folgt durch Koeffizientenvergleich für den Koeffizienten von d_{ss}^l

$$\sum_{\nu,\mu} z_{\nu\mu}^{ts}\,d_{\nu\mu} - \sum_{\nu} (z_{\nu s}^{ts} + z_{\nu s}^{ss})\,d_{\nu t} + \sum_{\mu} z_{t\mu}^{ss}\,d_{s\mu} = 0 \tag{6}$$

und für den Koeffizienten von d_{st}^l

$$\sum_{\nu,\mu} (z_{\nu\mu}^{ss} - z_{\nu\mu}^{tt})\,d_{\nu\mu} - \sum_{\mu} (z_{t\mu}^{st} + z_{t\mu}^{ss})\,d_{s\mu} + \sum_{\nu} (z_{\nu s}^{st} + z_{\nu s}^{tt})\,d_{\nu t} = 0\,. \tag{7}$$

Aus (6) erhält man für den Koeffizienten von $d_{\nu\mu}$:

$$z_{\nu\mu}^{ts} = 0 \text{ falls } \nu \neq s \text{ und } \mu \neq t\,. \tag{8}$$

Wegen $s \neq t$ ist also insbesondere $z_{ts}^{ts} = 0$. Für den Koeffizienten von d_{ss} bzw. d_{tt} folgt aus (6)

$$z_{ss}^{ts} + z_{ts}^{ss} = 0 \quad \text{bzw.} \quad z_{tt}^{ts} - z_{ts}^{ts} - z_{ts}^{ss} = 0$$

und daraus ergibt sich auf Grund von (5) und (8)

$$z_{ss}^{ts} = z_{tt}^{ts} = 0\,. \tag{9}$$

Betrachten wir schließlich den Koeffizienten von $d_{s\mu}$ mit $\mu \neq s, t$ in (7):

$$z_{s\mu}^{ss} - z_{s\mu}^{tt} - z_{t\mu}^{st} - z_{t\mu}^{ss} = 0\,,$$

so folgt wegen (5)

$$z_{t\mu}^{st} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq s, t$$

und entsprechend sieht man auch $z_{\nu s}^{st} \neq 0$ für $\nu \neq s, t$ ein. Auf Grund dieser beiden Gleichungen, sowie (8) und (9) gilt also

$$z_{\nu\mu}^{ts} = 0 \text{ falls } \nu \neq s \text{ oder } \mu \neq t\,. \tag{10}$$

Nach (5) und (10) besitzt $\mathfrak{e}$ die Darstellung

$$\mathfrak{e} = \sum_{\substack{i,j\\ i \neq j}} z_{ji}^{ij}\,d_{ij}^l\,d_{ji}^r + \sum_i d_{ii}^l\,a_{ii}^r \quad \text{mit} \quad a_{ii} = \sum_{\nu} z_{\nu\nu}^{ii}\,d_{\nu\nu}\,. \tag{11}$$

Unter dieser Voraussetzung betrachten wir wieder die Ausgangsgleichung $\mathfrak{t}_{e+d_{st}}\mathfrak{e} = \mathfrak{e}\,\mathfrak{t}_{e+d_{st}}$ und unterscheiden nun zwei Fälle.

1. Fall: $n > 2$.

Koeffizientenvergleich für d_{sj}^l mit $j \neq s, t$ liefert jetzt

$$z_{jt}^{tj}\,d_{jt}\,(e-d_{st}) - z_{js}^{sj}\,d_{jt} = 0\,,$$

also

$$z_{jt}^{tj} = z_{js}^{sj} \text{ für } j \neq s, t \text{ und } s \neq t\,.$$

Entsprechend gilt auch $z_{si}^{is} = z_{ti}^{it}$, und daraus folgt

$$z_{ji}^{ij} = z \quad \text{für} \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

2. Fall: $n = 2$.

Sei zunächst $s = 1$, $t = 2$, dann folgt aus der Ausgangsgleichung für den Koeffizienten von $d_{11}^l\, d_{12}^r$:

$$z_{12}^{21} - z_{11}^{11} + z_{22}^{11} = 0.$$

Für $s = 2$, $t = 1$ erhält man entsprechend für den Koeffizienten von $d_{11}^l\, d_{21}^r$:

$$z_{21}^{12} - z_{11}^{11} + z_{22}^{11} = 0\,,$$

und die Differenz der beiden letzten Gleichungen liefert

$$z_{12}^{21} = z_{21}^{12} = z\,.$$

Auf Grund dieser Überlegungen können wir jetzt für $\mathfrak{e}$ die folgende Darstellung annehmen:

$$\mathfrak{e} = z \sum_{i,j} d_{ij}^l\, d_{ji}^r + \sum_i d_{ii}^l\, a_{ii}^r \quad \text{mit} \quad a_{ii}^r = \sum_\nu z_{\nu\nu}^{ii} d_{\nu\nu}\,,$$

wobei gegenüber (11) in der ersten Summe die Beschränkung $i \neq j$ fallengelassen worden ist. Die erste Summe werde mit $\mathfrak{e}_1$, die zweite mit $\mathfrak{e}_2$ bezeichnet.

Wir stellen nun fest, daß $\mathfrak{e}_1$ mit allen Elementen aus $\mathfrak{R}$ vertauschbar ist. In der Tat, Z wird durch $\mathfrak{e}_1$ auf sich abgebildet, und für B stellt $\mathfrak{e}_1$ den Nulloperator dar, denn das Bild der Basiselemente d_{ij}, $i \neq j$ von B bei dieser Abbildung ist gleich Null, und da die Elemente d_{ii} bei $\mathfrak{e}_1$ offenbar alle das gleiche Bild besitzen, werden auch die Basiselemente $d_{ii} - d_{jj}$ von B auf Null abgebildet. Dann folgt die behauptete Vertauschbarkeit von $\mathfrak{e}_1$ mit den Elementen aus $\mathfrak{R}$ sofort aus (3).

Es bleibt also nur noch $\mathfrak{e}_2$ zu untersuchen. Aus der Gleichung $\mathfrak{t}_{e+d_{st}}\, \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_2\, \mathfrak{t}_{e+d_{st}}$ entnimmt man $d_{st}\, a_{ii} = a_{ii}\, d_{st}$, also $z_{tt}^{ii} = z_{ss}^{ii}$, und folglich gilt $a_{ii} \in Z$. Dann ist aber $\mathfrak{e}_2 = a^l$, und da $\mathfrak{e}_2$ mit allen Elementen aus $\mathfrak{R}$ vertauschbar sein soll, folgt schließlich $a \in Z$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen und auch der Beweis des Satzes beendet.

4. Verallgemeinerung

Es erhebt sich die Frage, ob unser Satz auch für beliebige einfache Algebren A zutrifft. A ist dann bekanntlich (bis auf Isomorphie) der Ring aller quadratischen, n-reihigen Matrizen mit Matrixelementen aus einem Schiefkörper K, wobei K von endlichem Rang über dem Zentrum Z ist. Aus unserem Beweis entnimmt man fast unmittelbar, daß der Satz für A/Z zutrifft, falls er für K/Z gilt.

Und wann gilt er für K/Z? Jedenfalls dann, wenn K/Z ein beliebiger Quaternionenschiefkörper mit einer von zwei verschiedenen Charakteristik ist. Der Beweis dieser Behauptung kann durch einfache, aber längere Rechnung geführt werden. Der Beweisgedanke ist naheliegend: Die Annahme, daß gewisse Automorphismen eine Basis von $\mathfrak{R}/Z$ bilden, führt auf eine Determinantenbedingung, die durch geeignete Wahl erfüllt werden kann. Wie bereits in [2] erwähnt, ergibt sich daraus $(\mathfrak{R}:Z) = 10$ [3]). Aus der für einen Quaternionenschiefkörper mit von zwei verschiedener Charakteristik geltenden normierten Erzeugung

$$K = Z + Za + Zb + Zab$$

[3]) Diese Ranggleichung besteht auch bei Quaternionenschiefkörpern der Charakteristik 2.

mit

$$a^2 = z_1\,,\; b^2 = z_2\,;\; ab = -ba$$

folgt sofort die Zerlegung von K als $\mathfrak{R}$-Modul

$$K = Z \oplus B$$

und die Tatsache, daß B als $\mathfrak{R}$-Modul irreduzibel ist. Zusammen mit der Rangbeziehung ergibt sich dann unmittelbar, daß $\mathfrak{R}$ alle linearen Abbildungen von B/Z induziert. Es bleibt die Frage, ob der angegebene Satz auch bei einer größeren Klasse von Schiefkörpern gültig ist.

Literaturverzeichnis

[1] A. Hattori, On invariant subrings. Japanese J. Math. **21**, 121—129 (1951).

[2] F. Kasch, Über den Endomorphismenring eines Vektorraums und den Satz von der Normalbasis. Math. Ann. **126**, 447—463 (1953).

[3] F. Kasch, Invariante Untermoduln des Endomorphismenrings eines Vektorraums. Arch. der Math. **4**, 182—190 (1953).

Eingegangen am 9. 3. 1954