ARCHIVES OF MATHEMATICS

ARCHIV DER MATHEMATIK

ARCHIVES MATHÉMATIQUES

Herausgegeben in Verbindung
mit dem Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach
von
H. BILHARZ · H. KNESER · W. SÜSS

VOL. 6 · 1955

BIRKHÄUSER VERLAG
BASEL UND STUTTGART

Inhalt — Contents — Sommaire

ANDRÉ, J.: Über Perspektivitäten in endlichen projektiven Ebenen 29

BAER, R.: Burnsidesche Eigenschaften 165

BANASCHEWSKI, B.: Abstufungen des Kompaktheitsbegriffes 320

BARNER, M.: Über gewisse Kurventripel auf Regelflächen 223

BARNER, M.: Geradengeometrische Kennzeichnung der W-Kurven des projektiven Raumes 462

BAUER, H.: Darstellung additiver Funktionen auf Booleschen Algebren als Mengenfunktionen 215

BEHNKE, H.: Die analytischen Gebilde von holomorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen (Zusammenfassender Bericht) 353

BOTTEMA, O.: Zur Kinematik des Rollgleitens 25

BRAUNER, H.: Erzeugung eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides durch Bewegung einer gleichseitigen Hyperbel 330

CARLITZ, L.: The Coefficients of the Reciprocal of $J_0(x)$ 121

DEVIDÉ, V.: Ein Axiomensystem für die natürlichen Zahlen 408

DIEUDONNÉ, J.: Sur quelques groupes de Lie abéliens sur un corps de caractéristique $p > 0$ (Rectifications) 88

EGLOFF, W.: Ein geometrischer Beweis eines Satzes von Axel Schur 281

GAIER, D., siehe WALSH, J. L. 77

GASCHÜTZ, W.: Gruppen, deren sämtliche Untergruppen Zentralisatoren sind 5

GODEAUX, L.: Note sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique . 1

GROTEMEYER, K.P.: Integralsätze bei infinitesimalen Verbiegungen von geschlossenen Raumkurven 250

GROTEMEYER, K. P.: Ein Satz aus der Differentialgeometrie der Eiflächen 403

GROTEMEYER, K. P.: Zur eindeutigen Bestimmtheit konvexer Mützen 454

GRÜN, O.: Homomorphe Abbildungen von Gruppen auf Faktorgruppen von Untergruppen 264

HEFFTER, L.: Gleichmäßige Differenzierbarkeit einer Funktion und Stetigkeit ihrer Ableitung in einem Bereich 45

HEINS, M.: A universal Blaschke product 41

HELLWIG, G.: Über die Verbiegbarkeit von Flächenstücken mit positiver Gaußscher Krümmung 243

HLAWKA, E.: Über einen Satz von van der Corput 115

HORNFECK, B.: Zur Dichte der Menge der vollkommenen Zahlen 442

HUPPERT, B.: Primitive, auflösbare Permutationsgruppen 303

JORDAN, H.: Eine Bemerkung über die Monotonie von $\operatorname{sn}(tK)$ 185

KALUZA jr., TH.: Beweis einer Vermutung von Herrn H. Hopf über die Numerierung der Eckpunkte gewisser unendlicher Graphen 157
KANTZ, G.: Über Integritätsbereiche mit eindeutiger Primelementzerlegung 397
KARZEL, H.: Ein Axiomensystem der absoluten Geometrie 66
KARZEL, H.: Verallgemeinerte absolute Geometrien und Lotkerngeometrien 284
KASCH, F.: Über den Automorphismenring einfacher Algebren 59
KASCH, F.: Bemerkung zum Hauptsatz der Galoisschen Theorie für Schiefkörper 420
KNESER, M.: Einige Bemerkungen über das Minkowskische Flächenmaß 382
KOWALSKY, H.-J.: Distributivität in atomaren Booleschen Verbänden 9
KÖNIG, H.: Multiplikation und Variablentransformation in der Theorie der Distributionen . . 391
LAMPRECHT, E.: Arithmetische Zetafunktionen zu zyklischen p-Körpern von zwei Veränderlichen über einem Galoisfeld 266
LAUFFER, R.: Interpolation mehrfacher Integrale 159
LAUGWITZ, D.: Über vollständige Normtopologien in linearen Räumen 128
LAUGWITZ, D.: Zur geometrischen Begründung der Parallelverschiebung in Finslerschen Räumen 448
LENZ, H.: Zur Zerlegung von Punktmengen in solche kleineren Durchmessers 413
LEPTIN, H.: Bemerkung zu einem Satz von S. Kaplan 139
LEPTIN, H.: Ein Darstellungssatz für kompakte, total unzusammenhängende Gruppen . . 371
LEVI, F. W.: Überdeckung eines Eibereiches durch Parallelverschiebung seines offenen Kerns 369
MAAK, W.: Eine Verallgemeinerung des Weierstraßschen Approximationssatzes. 188
MAHLER, K.: On a Problem in Diophantine Approximations 208
MESCHKOWSKI, H.: Über Hilbertsche Räume mit Kernfunktion 151
MESCHKOWSKI, H.: Über Hilbertsche Räume mit Kernfunktion (Berichtigung) 481
MÜLLER, CL.: Über die Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes 47
MÜLLER, H. R.: Zur Kinematik des Rollgleitens, II (Sphärisches Rollgleiten) 471
MÜLLER, M.: Über die Approximation reeller Zahlen durch die Näherungsbrüche ihres regelmäßigen Kettenbruches 253
NEUMANN, H.: On some finite non-desarguesian planes 36
NINOT, J.: Über den Hauptsatz der Galoisschen Theorie (Kommutative Körper) 52
NITSCHE, JOACHIM: Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem II 13
NITSCHE, JOACHIM: Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem III 145
NITSCHE, JOHANNES: Eine charakteristische Eigenschaft der Lösungen von Randwertproblemen elliptischer Differentialgleichungssysteme 18
OHMANN, D.: Eine lineare Verschärfung des Brunn-Minkowskischen Satzes für abgeschlossene Mengen 33
OSTROWSKI, A.: Über Evoluten und Evolventen ebener Kurven 170
ÖZKAN, A.: Une condition caractéristique pour la classe des surfaces à courbure moyenne constante et un resultat pour ces surfaces 136
PAASCHE, I.: Beweis des Moessnerschen Satzes mittels linearer Transformationen 194
PICKERT, G.: Einfacher Beweis eines Satzes von M. Hall über offene Inzidenzstrukturen . . 417
REMBS, E.: Randvorgaben bei infinitesimaler Verbiegung konvexer Flächen 55

RITTER, R.: Charakterisierung der Baronischen Klassen von Biegungsflächen 311

ROGOSINSKI, W. W.: Linear extremum problems for real polynomials and trigonometrical polynomials (Corrigenda) 87

ROSENBLOOM, P.: Perturbation of Linear Operators in Banach Spaces 89

SAUER, R.: Darboux-Kranz verknickbarer Vierecksgitter. 180

SCHAEFER, H.: Über einen allgemeinen Konvergenzsatz von A. Korn 132

SCHAEFER, H.: Stetige Konvergenz in allgemeinen topologischen Räumen 423

SCHIEFERDECKER, E.: Die fastperiodischen Funktionen einer Oreschen Halbgruppe . . . 428

SCHIEK, H.: Gruppen mit Relationen $X^3 = 1$, $(XY)^3 = 1$ 341

SCHMIDT, J.: Eine verallgemeinerte Wohlordnung und die Endlichkeitsbedingungen der Ordnungstheorie 374

SCHOTTLAENDER, ST.: Über die Transformation einer Reihe nach Besselschen Funktionen 275

STÖCKER, C.: Beweis eines Hilfssatzes von Bruck und Kleinfeld unter Voraussetzung beliebiger Charakteristik 296

VOLKMANN, B.: Über die Klasse der Summenmengen 200

VOSS, K.: Eine Bemerkung über die Totalkrümmung geschlossener Raumkurven 259

WALSH, J. L. und GAIER, D.: Zur Methode der variablen Gebiete bei der Randverzerrung 77

WARSCHAWSKI, S. E.: On Mean Convergence in Conformal Mapping 102

WEIER, J.: Abhängigkeit des Indexes von der Einbettung. 348

WINTNER, A.: On a theorem of Painlevé 439

WUNDERLICH, W.: Kreise als Doppelloxodromen 230

ZAUBEK, O.: Ein Beitrag zum Borelschen Überdeckungssatze 444

ZELLER, K.: Über Konvergenzmengen von Fourierreihen 335

Glückwunschadresse zum 60. Geburtstag und Bild von Professor Dr. WILHELM SÜSS nach S. 164

Bemerkung zum Hauptsatz der GALOISschen Theorie für Schiefkörper

Von FRIEDRICH KASCH in Göttingen

1. Die historische Entwicklung der GALOISschen Theorie stellt ein eindrucksvolles Beispiel für die schrittweise Linearisierung einer Theorie und die damit verbundene Ausdehnung ihres Geltungsbereiches dar. Mit der Linearisierung war zugleich eine fortschreitende Vereinfachung der Beweise verbunden.

Unter diesem Gesichtspunkt ist ein Beweis des Hauptsatzes der GALOISschen Theorie für kommutative Körper von Interesse, den kürzlich J. NINOT [3] mitgeteilt hat. Während dabei dem „leichteren" Teil des Hauptsatzes (Zuordnung: Zwischenkörper $\to$ Untergruppe $\to$ Zwischenkörper) die übliche Schlußweise zu Grunde liegt, enthält der Beweis des „schwierigeren" Teils (Zuordnung: Untergruppe $\to$ Zwischenkörper $\to$ Untergruppe) einen neuen Gedanken[0]).

Inbezug auf den Gesichtspunkt der Linearisierung wird dieser Gedanke besonders deutlich, wenn man ihn nicht wie dort für die GALOISgruppe selbst, sondern für einen durch die GALOISgruppe in gewisser Weise erzeugten Ring von linearen Abbildungen ausspricht. Bei dieser Fassung bietet sich außerdem die Möglichkeit, den Gedanken von J. NINOT zum Beweis des Hauptsatzes der GALOISschen Theorie für Schiefkörper heranzuziehen. Man kommt dann insbesondere ohne den Satz von JACOBSON-BOURBAKI aus. Das soll hier in dem Umfang angegeben werden, wie es von der bekannten Schlußweise abweicht.

2. Es seien K ein nicht notwendig kommutativer Körper[1]) und H ein Unterkörper von K. Wir betrachten K als Rechtsvektorraum über H, d. h. als additive, abelsche Gruppe mit H als Rechtsmultiplikatorenbereich. Die Dimension von K/H bei dieser Auffassung bezeichnen wir mit $(K:H)_r$[2]). Ferner sei $\mathfrak{R}$ der Ring aller linearen Abbildungen von K/H; ist $\mathfrak{r} \in \mathfrak{R}$ und $k \in K$, so sei $\mathfrak{r}(k)$ das Bild von k bei der Abbildung $\mathfrak{r}$. Multipliziert man K mit einem festen Element $k \in K$ von links, so wird dadurch eine lineare Abbildung von K/H erzeugt, die wir wieder mit k bezeichnen wollen. Den auf diese Weise durch die Elemente von K als Links-

[0]) Darüber hinaus liegt der Nachdruck bei J. NINOT auf einer möglichst symmetrischen Beweisführung beider Teile.

[1]) Auch im folgenden sind alle betrachteten Körper nicht notwendig kommutativ, ohne daß dies ausdrücklich angegeben wird.

[2]) Sinngemäß sei z. B. $(\mathfrak{R}:K)_l$ die Dimension des Linksvektorraums $\mathfrak{R}$ über K.

multiplikatoren von K erzeugten Unterring von $\mathfrak{R}$, der offenbar zu K ringisomorph ist, bezeichnen wir ebenfalls wieder mit K, so daß K im folgenden in zwei verschiedenen Bedeutungen auftritt. Die jeweilige Bedeutung wird sich stets unmittelbar aus dem Zusammenhang ergeben; während z. B. $\mathfrak{r}(k)$ das Bild von k bei der Abbildung $\mathfrak{r}$ ist, verstehen wir der zweiten Bedeutung von k entsprechend unter $\mathfrak{r}\,k$ die Abbildung, die jedes Element $x \in K$ in $\mathfrak{r}(kx)$ überführt.

3. Mit diesen Bezeichnungen gilt

(1) $$(\mathfrak{R} : K)_l = (K : H)_r\ ^{3)}\,.$$

Beweis: Sei zunächst $(K:H)_r < \infty$ und bezeichne $k_1, \ldots, k_n$ eine Rechtsbasis von K/H; dann stellen die durch

$$\mathfrak{r}_i(k_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq j \\ 1 \text{ für } i = j \end{cases} \qquad (i,j = 1, \ldots, n)$$

definierten linearen Abbildungen $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_n$ offenbar eine Linksbasis[4]) von $\mathfrak{R}/K$ dar. Im Falle $(K:H)_r = \infty$ kann man in gleicher Weise unendlich viele über K links linear unabhängige Abbildungen aus $\mathfrak{R}$ definieren. Damit ist (1) bewiesen.

Ist $\mathfrak{S}$ ein beliebiger Linksvektorraum über K und ist $\mathfrak{S}^*$ der zu $\mathfrak{S}$ duale Raum, d. h. der K-Rechtsmodul aller K-linkslinearen Abbildungen von $\mathfrak{S}$ in K, dann gilt bekanntlich

(2) $$(\mathfrak{S} : K)_l = (\mathfrak{S}^* : K)_r\,.$$

4. Sei $\mathfrak{G}$ eine Automorphismengruppe von K mit dem Fixkörper H. Unter $\mathfrak{S}$ verstehen wir jetzt den Unterring von $\mathfrak{R}$, der durch die Automorphismen aus $\mathfrak{G}$ und die Elemente aus K (als Linksmultiplikatoren von K) erzeugt wird. Die Anwendung von $\mathfrak{S}$ auf ein festes Element $k \in K$, d. h. die Abbildung

$$\mathfrak{s} \to \mathfrak{s}(k) \qquad (\mathfrak{s} \in \mathfrak{S})$$

stellt offenbar eine K-linkslineare Abbildung von $\mathfrak{S}$ in K dar, also ein Element aus $\mathfrak{S}^*$. Diese Abbildung bezeichnen wir mit σ_k. Dann gilt der

Hilfssatz (NINOT)[5]): *Sind $k_1, k_2, \ldots$ Elemente aus K, die rechts linear unabhängig über H sind, dann sind die Elemente $\sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}, \ldots$ aus $\mathfrak{S}^*$ rechts linear unabhängig über K; folglich gilt*

(3) $$(\mathfrak{S}^* : K)_r \geq (K : H)_r\,.$$

Aus (2) und (3) folgt $(\mathfrak{S} : K)_l \geq (K:H)_r$; also gilt im Falle $(K:H)_r = \infty$ auch $(\mathfrak{S} : K)_l = \infty$. Im Falle $(K:H)_r = n < \infty$ erhält man daraus wegen $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{R}$ und (1): $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$.

---

[3]) Ist eine dieser Dimensionen unendlich, so bedeute diese Gleichung nur, daß auch die andere unendlich sei, nicht aber, daß die Dimensionen gleiche Mächtigkeit besitzen mögen. Das gilt auch im folgenden bei Gleichungen zwischen Dimensionen.

[4]) Linksbasis bedeute, daß die Koeffizienten links stehen.

[5]) Der Beweis unterscheidet sich nicht von dem bei J. NINOT [3] behandelten kommutativen Fall.

Wir fassen das Ergebnis unserer Überlegungen zusammen.

Satz: *Es sei K ein Schiefkörper, $\mathfrak{G}$ eine Automorphismengruppe von K und H der Fixkörper von $\mathfrak{G}$ in K. Mit $\mathfrak{S}$ werde der durch $\mathfrak{G}$ und K als Linksmultiplikatorenbereich von K erzeugte Endomorphismenring von K bezeichnet. Unter diesen Voraussetzungen ist der Rechtsrang von K/H dann und nur dann endlich, wenn der Linksrang von $\mathfrak{S}/K$ endlich ist. Ist dies der Fall, dann ist $\mathfrak{S}$ der Ring aller linearen Abbildungen von K als Rechtsvektorraum über H.*

5. Mit diesem Ergebnis ist der Teil des Beweises des Hauptsatzes der GALOISschen Theorie geleistet, zu dem sonst der Satz von JACOBSON-BOURBAKI herangezogen wird. Die weitere Schlußweise kann etwa wie im Originalbeweis von H. CARTAN [1] geführt werden.

Wir weisen noch darauf hin, daß die hier angegebenen Überlegungen richtig bleiben, wenn K ein beliebiger Ring mit 1-Element ist und der Fixring H einer Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ von K ein Unterring von K ist, über dem K eine Rechtsbasis (im strengen, nicht nur modultheoretischen Sinne) besitzt[6]).

Literaturverzeichnis

[1] H. CARTAN, Théorie de Galois pour les corps non-commutatifs. Ann. École Norm. **65**, 60—77 (1948).

[2] F. KASCH, Halblineare Abbildungen und die Rangrelation bei Galoisschen Erweiterungen. Arch. der Math. **4**, 402—407 (1953).

[3] J. NINOT, Über den Hauptsatz der Galoisschen Theorie (Kommutative Körper). Arch. der Math. **6**, 52—54 (1955).

Eingegangen am 14. 6. 1955

[6]) Auch die für den weiteren Beweis des Hauptsatzes der GALOISschen Theorie wichtigen Hilfssätze (Lemme 1 und 2 bei H. CARTAN [1]) gelten unter allgemeineren Voraussetzungen; siehe dazu [2]. Bei dieser Gelegenheit sei auf einen Druckfehler in [2] hingewiesen. Auf Seite 403, 4. Zeile von unten muß es „linear abhängig" statt „linear unabhängig" heißen.