ARCHIVES OF MATHEMATICS

# ARCHIV DER MATHEMATIK

ARCHIVES MATHÉMATIQUES

Herausgegeben in Verbindung
mit dem Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach
von H. Kneser und W. Süss



VOL. 4 · 1953

VERLAG BIRKHÄUSER
BASEL · STUTTGART

# Inhalt — Contents — Sommaire

# Invariante Untermoduln des Endomorphismenrings eines Vektorraums

Von Friedrich Kasch in Göttingen

## I. Fragestellung, Voraussetzungen und Bezeichnungen

**1.** Die folgenden Überlegungen haben zwei Ausgangspunkte, einerseits einen Satz von H. Cartan über invariante Unterkörper eines Schiefkörpers ([2], Théorème 4) und andererseits den Satz von der Normalbasis. Die Frage, ob diese beiden Sätze auf einfache Ringe ausgedehnt werden können, führt dazu, invariante Untermoduln eines einfachen Ringes oder allgemeiner des Endomorphismenrings eines beliebigen Vektorraums zu untersuchen. Dabei soll ein Untermodul (oder Unterring) eines Ringes $A$ invariant heißen, wenn er bei den inneren Automorphismen von $A$ als Ganzes (aber nicht notwendig elementweise) fest bleibt. Die hier durchgeführten Überlegungen enthalten eine Antwort auf die Ausgangsfragen und gestatten darüber hinaus Verallgemeinerungen gewisser Sätze von L.-K. Hua ([3]). Aus den Ergebnissen über invariante Untermoduln werden ferner Folgerungen für invariante Unterringe gezogen.

**2.** Sei $A$ der Ring aller linearen Abbildungen eines Vektorraumes $\mathfrak{V}$ über einem Schiefkörper $K$ als Linksskalarenkörper. Die Dimension $n$ von $\mathfrak{V}/K$, die endlich oder unendlich sein kann, sei im folgenden, wenn nicht ausdrücklich anders angegeben, stets größer als 1; es sei also $A$ kein Schiefkörper.

Ist insbesondere $n$ endlich, so ist $A$ ein einfacher Ring mit 1-Element und Minimalbedingung und umgekehrt ist bekanntlich jeder solche Ring zum Ring aller linearen Abbildungen eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem Schiefkörper isomorph. Die folgenden Ergebnisse gelten daher insbesondere für einfache Ringe mit 1-Element und Minimalbedingung, die wir kurz als *einfache Ringe* bezeichnen wollen.

Ist darüber hinaus der Rang von $K$ über seinem Zentrum $Z$ endlich, so ist $A$ eine *einfache Algebra.*

Eine Menge $B$ von Abbildungen aus $A$ heißt bekanntlich *r-fach transitiv*, wenn es zu je $r$ über $K$ linear unabhängigen Elementen $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_r \in \mathfrak{V}$ und beliebigen Elementen $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2, \ldots, \mathfrak{w}_r \in \mathfrak{V}$ in $B$ eine Abbildung gibt, die $\mathfrak{v}_i$ in $\mathfrak{w}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ überführt. Ist $B$ $r$-fach transitiv für jedes endliche $r$, so heißt $B$ *dicht.* Im Falle $n = \infty$ bedeute eine $n$-fach (oder z. B. $(n-1)$-fach) transitive Menge $B$ von Abbildungen aus $A$ ebenfalls, daß $B$ dicht sei.

Wir hatten $K$ als Linksskalarenkörper von $\mathfrak{V}$ eingeführt, d. h. es sei $k\mathfrak{v} \in \mathfrak{V}$, falls $\mathfrak{v} \in \mathfrak{V}$ und $k \in K$. Es soll nun auch noch eine Multiplikation der Vektoren aus $\mathfrak{V}$ mit den Elementen aus $K$ von rechts erklärt werden. Dazu bezeichne $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$, ... eine feste Linksbasis von $\mathfrak{V}/K$. Dann wollen wir unter

$$\mathfrak{v} \to \mathfrak{v}k, \quad k \in K$$

die lineare Abbildung von $\mathfrak{V}/K$ verstehen, die jedes Basiselement $\mathfrak{v}_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ in $k\mathfrak{v}_i$ überführt. In diesem Sinne wird also $K$ auch als Unterkörper des Endomorphismenrings $A$ von $\mathfrak{V}/K$ aufgefaßt. Ob bei den folgenden Überlegungen diese oder die ursprüngliche Bedeutung von $K$ als Linksskalarenkörper zu Grunde gelegt wird, wird sich jeweils unmittelbar aus dem Zusammenhang ergeben.

Unter $d_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3, \ldots)$ wollen wir die Abbildung von $\mathfrak{V}$ verstehen, die $\mathfrak{v}_i$ in $\mathfrak{v}_j$ und alle anderen Basiselemente in Null überführt. Den $d_{ij}$ entsprechen also die Matrixeinheiten in der durch die gegebene Basis erzeugten Darstellung von $A$.

Die Abbildungen aus $A$ üben wir, wie dies schon für die durch die Elemente aus $K$ erzeugten Abbildungen angegeben, durch Multiplikation von rechts auf die Elemente aus $\mathfrak{V}$ aus. Es sei also $\mathfrak{v}a$ das Bild von $\mathfrak{v} \in \mathfrak{V}$ bei der Abbildung $a \in A$.

$\Gamma$ bezeichne die Gruppe der inneren Automorphismen von $A$ und $Z$ das Zentrum von $K$, welches dann auch Zentrum von $A$ ist. *Invariante Untermoduln* oder *invariante Unterringe* von $A$ sind dann also dadurch gekennzeichnet, daß sie gegenüber $\Gamma$ als Operatorenbereich abgeschlossen sind.

Schließlich wollen wir unter $\{a; b; c; \ldots\}$ den durch die in der Klammer stehenden Elemente erzeugten Modul verstehen.

## II. Invariante Untermoduln und Ringe

**1.** Wir geben zunächst einen Untermodul $B$ von $A$ an, der für das folgende wesentlich ist. Es sei

$$B = \{K d_{ij},\ i \neq j;\ K(d_{ii} - d_{jj});\ (k_1 k_2 - k_2 k_1)\, d_{ii},\ \ k_1, k_2 \in K\},$$

wobei $i$ und $j$ unter der angegebenen Beschränkung von 1 bis $n$ laufen mögen. Ist $r < n$, so gibt es in $B$ eine Abbildung, die $r$ beliebige der Basiselemente in vorgegebene Bilder überführt, denn es lassen sich im Falle $n < \infty$ die Koeffizienten sämtlicher $d_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ bis auf den Koeffizienten eines der $d_{ii}$ und im Falle $n = \infty$ die Koeffizienten jeweils endlich vieler der $d_{ij}$ beliebig vorgeben. Der durch $B$ erzeugte Ring enthält offenbar alle $kd_{ij}$ mit beliebigem $k \in K$, ist also dicht und stimmt im Falle $n < \infty$ mit $A$ überein.

Bezeichnet man mit $P_2$ den Primkörper der Charakteristik 2, so gilt der folgende Satz über invariante Untermoduln.

**Satz 1:** *Sei $K \neq P_2$ oder $n > 2$, dann gilt für jeden invarianten Untermodul $U$ von $A$ entweder*

$$U \subseteq Z \quad \textit{oder} \quad B \subseteq U\,.$$

Wir beginnen den Beweis mit einem Hilfssatz, der auch für $K = P_2$ und $n = 2$ gültig ist.

**Hilfssatz 1:** *Jeder nicht in $Z$ enthaltene invariante Untermodul von $A$ ist einfach transitiv.*

Zum Beweis ist zu zeigen, daß jeder durch ein beliebiges Element $a \in A$, $a \notin Z$ erzeugte invariante Untermodul $U$ einfach transitiv ist.

Es genügt zu beweisen, daß es zu je zwei linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w} \in \mathfrak{V}$ eine Abbildung $a' \in U$ mit $\mathfrak{v}a' = \mathfrak{w}$ gibt, denn dann existiert auch die Abbildung $a'' \in U$ mit $\mathfrak{v}a'' = -\mathfrak{w} + k\mathfrak{v}$, $k \in K$, also ebenfalls $\mathfrak{v}(a' + a'') = k\mathfrak{v}$.

Gibt es einen Vektor $\mathfrak{v} \in \mathfrak{V}$, so daß die Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}a$ linear unabhängig sind, so ist man fertig. Sind nämlich $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zwei beliebige linear unabhängige Vektoren, so existiert offenbar eine umkehrbar eindeutige lineare Abbildung $b \in A$ mit

$$\mathfrak{x}b = \mathfrak{v}\,, \quad \mathfrak{y}b = \mathfrak{v}a\,.$$

Dann ist

$$\mathfrak{x}bab^{-1} = \mathfrak{y} \text{ mit } bab^{-1} \in U\,.$$

Es ist also nur noch zu zeigen, daß es zu festem $a \in A$, $a \notin Z$ einem Vektor $\mathfrak{v}$ gibt, so daß $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}a$ linear unabhängig sind. Ist $\mathfrak{v}$ ein beliebiger Vektor, so sei $\mathfrak{v}a = k'\mathfrak{v}$. Mit einem von $\mathfrak{v}$ linear unabhängigen Vektor $\mathfrak{w}$ sei ferner $\mathfrak{w}a = k''\mathfrak{w}$. Nimmt man $k' \neq k''$ an, so wären $\mathfrak{v} + \mathfrak{w}$ und $(\mathfrak{v} + \mathfrak{w})\,a = k'\mathfrak{v} + k''\mathfrak{w}$ linear unabhängig und der Beweis vollständig. Sei also $k' = k'' = k$. Die gleiche Überlegung gilt für $x\mathfrak{w}$ mit beliebigem $x \in K$. Also ist auch $(x\mathfrak{w})\,a = k(x\mathfrak{w})$; andererseits ist aber $(x\mathfrak{w})\,a = x(\mathfrak{w}a) = xk\mathfrak{w}$, d. h. es ist $k \in Z$. Dann wäre $a = k \in Z$ entgegen unserer Voraussetzung. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Den Beweis von Satz 1 führen wir nun zunächst für den Fall $n > 2$. Sei $U \notin Z$, dann ist nach Hilfssatz 1 $U$ einfach transitiv und es gibt in $U$ eine Abbildung $a$ mit $\mathfrak{v}_1 a = \mathfrak{v}_2$, wobei $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ die beiden ersten Elemente der festen Basis von $\mathfrak{V}/K$ sind. Bezeichnen wir noch mit $e$ das Einselement von $A$, also die identische Abbildung von $\mathfrak{V}$, so sind wegen

$$(e + kd_{ij})\,(e - kd_{ij}) = e \text{ für } i \neq j,\ k \in K\,,$$

auch die Abbildungen

$$a' = (e - d_{21})\,a(e + d_{21}) - a = -d_{21}\,a + a d_{21} - d_{21}\,a d_{21}$$

und

$$a'' = (e + d_{31})\,a'(e - d_{31}) - a' = d_{31}\,a d_{21} + d_{21}\,a d_{31}$$

in $U$ enthalten. Offenbar gilt

$$\mathfrak{v}_3\,a'' = \mathfrak{v}_1\,, \quad \mathfrak{v}_i\,a'' = 0 \text{ für } i \neq 3\,,$$

also ist $a'' = d_{31} \in U$.

Ferner sind dann die folgenden Abbildungen in $U$ enthalten:

$$(e+kd_{ij})\,d_{31}\,(e-kd_{ij})-d_{31}=\begin{cases} kd_{i1} & \text{für } i \neq 1,3\,;\; j=3 \\ -kd_{3j} & \text{für } i=1 \quad ;\; j\neq 1,3 \end{cases}$$

mit beliebigem $k \in K$. Indem man auf die so erhaltenen $d_{ij}$ die gleichen Operationen wie auf $d_{31}$ ausübt, sieht man ein, daß für $i \neq j$ alle $kd_{ij}$ in $U$ enthalten sind. Dann ist auch für $i \neq j$ und beliebige $k_1, k_2 \in K$

$$(e+k_1 d_{ij})\,k_2 d_{ji}(e-k_1 d_{ij})-k_2 d_{ji}-k_1 k_2 k_1 d_{ij}=k_1 k_2 d_{ii}-k_2 k_1 d_{jj}$$

ein Element aus $U$. Für $k_2=1$ folgt daraus $K(d_{ii}-d_{jj}) \in U$. Dann ist aber auch

$$k_1 k_2 d_{ii}-k_2 k_1 d_{jj}-k_2 k_1 (d_{ii}-d_{jj})=(k_1 k_2-k_2 k_1)\,d_{ii} \in U.$$

Folglich ist der ganze Modul $B$ in $U$ enthalten und damit Satz 1 für $n>2$ bewiesen.

Es ist also nur noch der Fall $K \neq P_2$ und $n=2$ zu behandeln. Wegen der einfachen Transitivität von $U$ gibt es auch jetzt eine Abbildung

$$a=d_{12}+xd_{21}+yd_{22} \in U, \quad x,y \in K.$$

Wegen $K \neq P_2$ existiert ein $k \in K$ mit $k \neq 0$ und $k \neq -1$. Dann ist

$$(e+kd_{11})\,(e-k\,(1+k)^{-1}\,d_{11})=e$$

und folglich sind

$$a'=(e+kd_{11})\,a\,(e-k(1+k)^{-1}d_{11})-a=kd_{12}-xk(1+k)^{-1}\,d_{21}$$

und

$$a''=(e+k^{-1}d_{21})\,a'(e-k^{-1}d_{21})-a'=d_{22}-d_{11}-k^{-1}d_{21}$$

in $U$ enthalten, also auch

$$a''-(e+kd_{22})\,a''\,(e-k(1+k)^{-1}\,d_{22})=d_{21}.$$

Schließlich ist

$$(e+kd_{22})\,d_{21}(e-k(1+k)^{-1}\,d_{22})=(1+k)\,d_{21} \in U$$

und folglich $Kd_{21} \in U$. Entsprechend sieht man ein, daß auch $Kd_{12} \in U$. Der Rest des Beweises folgt dann wie im Falle $n>2$, so daß Satz 1 vollständig bewiesen ist.

Diese Überlegung, die wir auf die Basis $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \ldots$ gegründet hatten, ist natürlich ebenso für jede andere Basis richtig. Zusammen mit den angegebenen Eigenschaften von $B$ folgt dann aus Satz 1 bzw. aus Hilfssatz 1 im Falle $K=P_2$ und $n=2$

**Satz 2:** *Jeder invariante Untermodul von $A$ ist entweder im Zentrum von $A$ enthalten oder $(n-1)$-fach transitiv.*

Wir bemerken noch ohne Beweis, daß man diesen Satz für einen kommutativen Körper $K$ nicht verschärfen kann, denn dann ist bereits $B$ ein invarianter Untermodul. Ist $K$ nicht kommutativ, so würde Satz 2 mit $n$ statt mit $n-1$ gelten, falls der durch alle Elemente $k_1 k_2 - k_2 k_1$ mit $k_1, k_2 \in K$ erzeugte Modul $\{k_1 k_2 - k_2 k_1\} = K$ wäre. Ob dies richtig ist, ist mir nicht bekannt. Eine Aussage in dieser Richtung enthält der später folgende Hilfssatz 2.

**2.** Da der durch $B$ erzeugte Ring dicht ist, erhält man aus Satz 1 auch das folgende Ergebnis.

**Satz 3:** *Ist $K \neq P_2$ oder $n > 2$, so gilt für jeden invarianten Unterring $R$ von $A$ entweder $R \subseteq Z$ oder $R$ ist dicht; ist $A$ ein einfacher Ring, so hat man also*

$$R \subseteq Z \quad \textit{oder} \quad R = A.$$

Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung des anfangs erwähnten Satzes von H. Cartan dar, der besagt, daß ein invarianter Unterschiefkörper eines beliebigen Schiefkörpers $K$ entweder im Zentrum von $K$ enthalten ist oder mit $K$ übereinstimmt. Dieser Satz wurde zunächst von H. Cartan ([2]) unter zusätzlichen Voraussetzungen bewiesen und sodann von mehreren Autoren ([1, 3, 4]) mit einem sehr einfachen Beweis in der angegebenen Fassung aufgestellt. Satz 3 ist daher auch für $n = 1$ richtig, wenn man zusätzlich verlangt, daß $R$ mit jedem invertierbaren Element auch das Inverse enthält. Ob im Falle $n = 1$ ohne diese Forderung, also ohne Zulassung der Division das gleiche Ergebnis gilt, ist nicht bekannt.

Ist $K = P_2$ und $n = 2$, so ist Satz 3 falsch. Z. B. ist dann der durch $d_{12} + d_{21} + d_{22}$ erzeugte invariante Unterring nicht in $Z$ enthalten und von $A$ verschieden, wie man durch eine kurze Rechnung feststellt.

## III. Zum Satz von der Normalbasis

**1.** Ist $K/H$ eine kommutative, galoissche Körpererweiterung endlichen Ranges, so besagt der Satz von der Normalbasis bekanntlich, daß es ein Element $k \in K$ gibt, welches zusammen mit seinen Konjugierten bei den Automorphismen von $K/H$ eine Basis von $K/H$ bildet. Entsprechend kann man fragen, ob bei einer beliebigen galoisschen Erweiterung $A/H$ und zwar nicht nur bei Schiefkörpern, sondern etwa auch bei einfachen Ringen, ebenfalls eine Basis aus Konjugierten eines Elementes existiert. Eine solche Basis soll auch dann als *Normalbasis* bezeichnet werden. Man hat dabei allerdings zu beachten, daß im allgemeinen eine solche Basis nicht wie im kommutativen Fall alle Konjugierten eines Elementes umfaßt. Auch wenn $A/H$ einen endlichen Rang besitzt, können unendlich viele verschiedene Konjugierte eines Elementes existieren, was durch das Auftreten von inneren Automorphismen bedingt ist.

Dem Satz von der Normalbasis in diesem Sinne kann man analog zum kommutativen Fall auch jetzt die beiden folgenden Formulierungen geben. Man betrachte $A$ als Modul mit dem Rechtsoperatorenbereich $\Omega = [H^r, \Gamma]$[1]), wobei $\Omega$ der durch

[1]) $\Omega$ hatten wir in [5] als Automorphismenring bezeichnet.

die Automorphismen der Galoisgruppe $\Gamma$ von $A/H$ und die Elemente aus $H$ als Rechtsmultiplikatoren von $A$ erzeugte Endomorphismenring von $A$ ist. Dann ist die Existenz einer Normalbasis[2]) mit den Aussagen äquivalent, daß $\Omega$ als $\Omega$-Rechtsmodul operatorhomomorph auf $A$ als $\Omega$-Rechtsmodul abgebildet werden kann oder daß $A$ als $\Omega$-Rechtsmodul zyklisch ist.

2. Der Satz von der Normalbasis wurde bisher[3]) für eine recht allgemeine Klasse von galoisschen Erweiterungen bei einfachen Ringen bewiesen, jedoch nicht für beliebige galoissche Erweiterungen. Es dürfte daher von Interesse sein, ihn hier für galoissche Erweiterungen nachzuweisen, bei denen die bisher für einen solchen Nachweis bekannten Methoden nicht zum Ziel zu führen scheinen. Derartige Erweiterungen werden in den folgenden Sätzen angegeben, wobei wir wieder von den anfangs angegebenen Bezeichnungen Gebrauch machen.

**Satz 4:** *Es sei $A$ ein einfacher Ring (d. h. $n < \infty$). Besitzt $K/Z$ eine Normalbasis, so auch $A/Z$ und zwar erzeugt jedes Element $a = kd_{ii}$ $(i = 1, \ldots, n)$ eine Normalbasis von $A/Z$, wenn $k$ eine Normalbasis von $K/Z$ erzeugt.*

Die Voraussetzungen dieses Satzes sind z. B. trivialerweise erfüllt, wenn $K$ kommutativ, d. h. $K = Z$ ist[4]).

Da $k$ eine Normalbasis von $K/Z$ erzeugt, ist in dem durch $a$ erzeugten $\Omega$-Rechtsmodul der Modul $Kd_{ii}$ und nach Satz 1 auch $B$ enthalten; folglich ist er gleich $A$. Damit ist Satz 4 bis auf den Fall $K = P_2$ und $n = 2$ bewiesen. In diesem Fall folgt aus

$$\begin{aligned} &(d_{12}+d_{21})\, d_{ii}(d_{12}+d_{21}) = d_{jj}\,, \\ &(e+d_{ij})\, d_{11}(e+d_{ij}) + d_{11} = d_{ij}\,, \end{aligned} \qquad i = 1,2\,;\; j = 1,2\,;\; i \neq j\,.$$

unmittelbar die Gültigkeit von Satz 4.

**Satz 5:** *$A$ sei eine einfache Algebra und $K$ enthalte einen maximalen kommutativen und über $Z$ galoisschen Unterkörper $G$. Dann besitzt $A/Z$ eine Normalbasis und zwar erzeugt jedes Element $a = gd_{ii}$ $(i = 1, \ldots, n)$ eine Normalbasis von $A/Z$, wenn $g$ eine Normalbasis von $G/Z$ erzeugt.*

Da jeder Schiefkörper endlichen Ranges über einem Zahlkörper als Zentrum zyklisch ist, erhält man aus Satz 5 die

**Folgerung:** *Ist $A$ eine einfache Algebra über einem Zahlkörper $Z$ als Zentrum, so existiert eine Normalbasis von $A/Z$.*

---

[2]) Es soll sich hier wie auch im folgenden stets um Rechtsbasen handeln.

[3]) Siehe z. B. [5] und die dort angegebene Literatur.

[4]) Für gewisse kommutative Körper $K$ wurde Satz 4 bereits in [5] aufgestellt, jedoch auf anderem Wege bewiesen.

Zum Beweis von Satz 5 ist nur zu zeigen, daß $K d_{ii}$ in dem durch $g d_{ii}$ erzeugten $\Omega$-Rechtsmodul $U$ enthalten ist. Die Behauptung folgt dann nach der Schlußweise im Beweis von Satz 4. Zunächst ist klar, daß $G d_{ii} \subseteq U$ und $B \subseteq U$. In $B$ ist der durch die Elemente $(k_1 k_2 - k_2 k_1)\, d_{ii}$ mit $k_1, k_2 \in K$ erzeugte Modul enthalten. Kann nun noch gezeigt werden, daß

$$\{G;\, k_1 k_2 - k_2\, k_1 \text{ mit } k_1, k_2 \in K\} = K$$

gilt, so ist der Beweis von Satz 5 vollständig.

Dazu betrachten wir die Zuordnung

$$k \to kg - gk = D_g(k),\ k \in K,$$

wobei $g$ ein festes Element aus $K$ ist. Diese Zuordnung stellt eine innere Ableitung von $K$ dar. Den durch die Ableitungen $kg - gk$, $k \in K$, gebildeten Modul bezeichnen wir entsprechend mit $D_g(K)$.

Sei nun $g$ erzeugendes Element eines maximalen kommutativen Unterkörpers $G$ von $K$. Betrachtet man $K$ als Vektorraum mit $G$ sowohl als Links- als auch als Rechtsskalarenkörper, so stellt die Ableitung $D_g$ eine lineare Abbildung von $K/G$ dar, bei der genau die Elemente aus $G$ auf Null abgebildet werden. Ist $(K:G) = r$, so ist also $(D_g(K):G) = r - 1$. Ist $G$ ferner separabel über $Z$, so gilt, wie sogleich gezeigt werden soll,

$$G \cap D_g(K) = 0$$

und folglich besteht die direkte Summendarstellung

$$K = G \oplus D_g(K)\,.$$

Damit haben wir dann den folgenden Hilfssatz bewiesen, in dem die zum Beweis von Satz 5 noch fehlende Behauptung enthalten ist.

**Hilfssatz 2:** *Es seien $K$ ein Schiefkörper endlichen Ranges über seinem Zentrum $Z$, $G$ ein maximaler kommutativer und über $Z$ separabler Unterkörper von $K$ und $g$ ein erzeugendes Element von $G/Z$. Betrachtet man $K$ als Modul mit $G$ als zweiseitigem Operatorenbereich, so gilt:*

$$K = G \oplus D_g(K)\,.$$

Zum Beweis ist nur noch $G \cap D_g(K) = 0$ nachzuweisen. Dazu genügt es zu zeigen, daß $1 \notin D_g(K)$ gilt, denn ist $kg - gk = h \in G$, so folgt für $h \neq 0$

$$(h^{-1}k)\, g - g(h^{-1}k) = h^{-1}(kg - gk) = 1 \in D_g(K)\,.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Die Charakteristik von $K$ sei gleich Null. Nimmt man jetzt $kg - gk = 1$ an, so folgt

$$g^{-1}(gk)g = gk + 1\,.$$

Bezeichnet man noch $gk = q$, so würde also der kommutative Körper $Z(q)$ einen Automorphismus über $Z$ besitzen, bei dem $q$ in $q + 1$ übergeführt wird. Dies ist bei Charakteristik 0 nicht möglich.

2. Die Charakteristik von $K$ sei $p > 0$. Wie man unmittelbar nachrechnet, gilt jetzt

$$D_g^p(k) = D_{g^p}(k), \quad k \in K$$

Da $g$ separabel über $Z$ ist, ist mit $g$ auch $g^p$ erzeugendes Element von $G/Z$. Daher ist

$$D_g^p(K) = D_{g^p}(K) = D_g(K)$$

und folglich kann nicht $1 \in D_g(K)$ sein, da dann im Widerspruch zu vorstehender Gleichung

$$(D_g^p(K) : G) \leq (D_g^2(K) : G) < (D_g(K) : G)$$

gelten müßte. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

## IV. Folgerungen aus dem Satz über invariante Untermoduln

L.-K. Hua hat aus dem erwähnten Satz von H. Cartan über invariante Unterkörper von Schiefkörpern einige Folgerungen hergeleitet ([3]). Entsprechende Ergebnisse können auch jetzt auf Grund von Satz 1 bzw. Satz 3 bewiesen werden. So zeigte L.-K. Hua, daß ein nichtkommutativer Körper durch seine Kommutatoren körpertheoretisch erzeugt wird. Jetzt gilt der folgende

**Satz 6:** *Sei $K \neq P_2$ oder $n > 2$. Der durch alle Kommutatoren $aba^{-1}b^{-1}$ von $A$ erzeugte Modul ist dicht. Ist $A$ ein einfacher Ring, so stimmt er also mit $A$ überein.*

Zum Beweis betrachten wir den Kommutator der Elemente

$$a = kd_{1n} + d_{2\,n-1} + \dots + d_{n1}\,, \; 0 \neq k \in K; \quad b = e + d_{n1}$$

Wegen

$$a^{-1} = d_{1n} + \cdots + d_{n-1\,2} + k^{-1}\,d_{n1}\;; \quad b^{-1} = e - d_{n1}$$

gilt

$$aba^{-1}\,b^{-1} = e + kd_{1n} - d_{n1} - kd_{11}\,.$$

Da der durch die Kommutatoren erzeugte Modul invariant ist und $aba^{-1}\,b^{-1} \notin Z$ enthält, umfaßt er nach Satz 1 ganz $B$. Da er außerdem $e$ enthält, liegt auch

$$e + kd_{1n} - d_{n1} - aba^{-1}\,b^{-1} = kd_{11}\,,$$

also $Kd_{11}$ darin und folglich gilt Satz 6.

**Satz 7:** *$A$ besitze eine von 2 verschiedene Charakteristik. Dann ist der durch alle Quadrate aus $A$ erzeugte Modul dicht, stimmt also, wenn $A$ ein einfacher Ring ist, mit $A$ überein.*

Der durch die Quadrate erzeugte Modul ist invariant und wegen $d_{11}^2 = d_{11} \notin Z$ umfaßt er $B$. Auf Grund der Gleichung

$$(kd_{12}+d_{21})^2 = k(d_{11}+d_{22}),\ k \in K\,,$$

liegt dann auch $2\,Kd_{11}$, also $Kd_{11}$ darin und damit ist Satz 7 bereits bewiesen.

Schließlich besteht ebenfalls in Analogie zu einem Ergebnis von L.-K. Hua auch der folgende

**Satz 8:** *Der durch alle $r$-ten Potenzen von $A$ erzeugte Ring ist dicht, stimmt also für einen einfachen Ring $A$ mit $A$ überein.*

Für $K \neq P_2$ oder $n \neq 2$ folgt dies sofort aus Satz 3. Ist $K = P_2$ und $n = 2$, so liegen $d_{11}$, $d_{22}$ und wegen

$$(d_{11}+d_{12})^r = d_{11} + d_{12},\ (d_{11}+d_{21})^r = d_{11} + d_{21}$$

auch $d_{12}$ und $d_{21}$ in dem durch die $r$-ten Potenzen erzeugten Unterring.

## Literaturverzeichnis

[1] H. Brauer, On a theorem of H. Cartan. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 619—620 (1949).

[2] H. Cartan, Théorie de Galois pour les corps non commutatifs. Ann. Sci. École Norm. Sup. (3), **64**, 59—77 (1947).

[3] L.-K. Hua, Some properties of a sfield. Proc. nat. Acad. Sci. USA **35**, 533—537 (1949).

[4] F. Kasch, Über den Satz vom primitiven Element bei Schiefkörpern. J. reine angew. Math. **189**, 150—159 (1951).

[5] F. Kasch, Über den Endomorphismenring eines Vektorraums und den Satz von der Normalbasis. Math. Ann. (im Druck).

Eingegangen am 13. 4. 1953