ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
Revista de investigación y experiencias didácticas
Núm. 31.3 (2013): 207-225
ISSN (papel): 0212-4521 / ISSN (en linea): 2174-6486

VISUALIZACIÓN GRÁFICA Y ANÁLISIS COMPARATIVO DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA EN EL AULA

VISUALIZING AND COMPARING TEACHER'S MATHEMATICAL PRACTICE

Edelmira Badillo, Lourdes Figueiras
Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, Universitat Autònoma de Barcelona
edelmira.badillo@uab.cat, lourdes.figueiras@uab.cat

Vicenç Font
Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica. Universitat de Barcelona.
vfont@ub.edu

Mario Martínez
Secretaría de Educación del Estado de Nuevo León, México.
mariomartinez2203@yahoo.com.mx

RESUMEN: El problema de investigación que se aborda en este artículo es la visualización de la práctica del aula de manera que queden resaltados los elementos esenciales de la actividad matemática en el desarrollo temporal de una clase (definiciones, propiedades, procesos matemáticos, etc.). Aportamos un instrumento para este fin, que aplicamos al estudio de los elementos comunes y las diferencias en tres clases realizadas por diferente profesorado en una misma institución, año y nivel escolar cuando enseñan la mediatriz. Los resultados de este estudio permiten inferir, además, aspectos del conocimiento matemático activado por el profesorado participante en su práctica profesional.

PALABRAS CLAVE: análisis de la práctica, mediatriz, conocimiento del profesor de matemáticas, primaria.

ABSTRACT: The research problem addressed in this paper is the visualization of the essential elements of the mathematical activity arising during classroom practice (definitions, properties, mathematical processes, etc.). We provide a tool for this purpose that displays these elements in the form of a graphic, and apply it to the study of the commonalities and differences in three different classes by different teachers in the same institution, year and school level when they teach the bisector. The results permit to infer further aspects of mathematical knowledge in the teaching practice.

KEY WORDS: Analysis of practice, bisector, mathematics teaching knowledge, primary mathematics education.

Fecha de recepción: julio 2012 • Aceptado: abril 2013

Badillo Jiménez, E., Figueiras, L., Font, V. y Martínez, M. (2013) Visualización gráfica y análisis comparativo de la práctica matemática en el aula. *Enseñanza de las Ciencias* 31 (3). pp. 207-225

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre el conocimiento matemático y el desarrollo profesional del profesorado ha adquirido una importante relevancia internacional en los últimos años y ha puesto de manifiesto su complejidad y las limitaciones del conocimiento producido por dichas investigaciones (Sullivan y Wood, 2008; Silverman y Thompson, 2008). En particular, es necesaria una agenda de investigación que acerque a la práctica los modelos teóricos existentes, que permita conceptualizar la práctica docente y que describa y analice entre otros aspectos cómo se presenta la matemática en el transcurso de una clase.

La necesidad de relacionar los modelos teóricos de formación del profesorado con su práctica profesional se pone de manifiesto en diferentes investigaciones, programas de formación de profesorado y proyectos de innovación docente. Por ejemplo, el grupo de investigadores de la Universidad de Michigan, liderado por Deborah Ball, profundiza en cuáles son las características del conocido modelo Conocimiento Matemático para la Enseñanza para conseguir una enseñanza de calidad (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Ball, Thames y Phelps, 2008). Estos investigadores concluyen que, aunque existe una significativa, fuerte y positiva asociación entre el conocimiento del profesorado y la calidad matemática de la instrucción, hay también un número importante de factores que mediatizan esta relación, facilitando o dificultando el uso del conocimiento del profesor en su práctica (Hill *et al.*, 2008).

Desde otras perspectivas se pone un mayor énfasis en una consideración dinámica del conocimiento del profesor, que se construye durante la práctica. Por ejemplo, los trabajos de Rowland y colaboradores (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005) y su propuesta de las categorías fundamentos, transformación, conexión y contingencia para caracterizar el conocimiento del profesor activado durante la instrucción aportan herramientas muy concretas de conceptualización de la práctica. Los trabajos de Tomás Ferreira y Da Ponte (Menezes, 2004; Tomás Ferreira, 2005; Martinho y Ponte, 2009) enfatizando el rol del profesor en el proceso de comunicación o las aportaciones derivadas de la metodología *Lesson Study* (Fernández y Yoshida, 2004), que incluyen un modelo de análisis colaborativo por parte del profesorado para planificar, implementar, observar y reflexionar sobre las clases de matemáticas, son otros ejemplos importantes que permiten situar nuestro problema de investigación. Este último enfoque dado al conocimiento profesional conduce a trabajos cuyo objetivo es dar cuenta de las acciones que permiten al profesor de matemáticas desarrollar su profesión con éxito. Mason, por ejemplo, subraya la importancia de la competencia denominada "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes (Mason, 2002). Dicha competencia permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional que lo diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas. En España, el grupo coordinado por el Dr. Llinares, de la Universidad de Alicante, investiga cómo los estudiantes para profesor y los profesores pueden llegar a ver y dotar de sentido las situaciones de enseñanza y cómo determinadas experiencias pueden apoyar el desarrollo de esta competencia (Fernández, Llinares y Valls, 2012).

Todas estas propuestas tienen en común en mayor o menor medida la especificidad otorgada al conocimiento matemático para la enseñanza, lo cual marca una diferencia con otras investigaciones de carácter general que diferencian únicamente entre un conocimiento didáctico general y un conocimiento de la matemática como disciplina científica. Diversos autores asumen la complejidad de los objetos matemáticos y que el conocimiento matemático que los profesores tienen de estos es amplio, intrincado y en constante evolución. Según Davis y Renert (2013), en lugar de pensar en el conocimiento matemático del profesor como un conjunto discreto de conocimiento básico contenido en la cabeza de los individuos, es más productivo pensar la comprensión del profesorado de un concepto matemático como un sistema autopoiético y cambiante de instanciaciones (definiciones formales, algoritmos, metáforas, imágenes, aplicaciones, gestos, etc.) que se distribuyen a través de un cuerpo de profesores. Además, consideran importante tener en cuenta que cada una de estas formas o instanciaciones de aproximarse al concepto tiene asociadas profundas diferencias de valor conceptual y que es importante que un profesor pueda conocer cuantas más mejor y conectarlas entre ellas para conseguir una enseñanza de calidad.

En esta investigación asumimos que los objetos matemáticos tienen una naturaleza compleja que está distribuida en instituciones diferentes, en momentos históricos distintos, en libros de textos variados y con enfoques metodológicos diferentes en el aula. Nos interesa conocer cómo ciertos aspectos de esta complejidad se ponen de manifiesto en la práctica del profesor de matemáticas, evidenciando similitudes y diferencias en la actividad matemática generada en el aula por profesoras diferentes, en una misma institución, nivel y espacio de tiempo cuando explican el mismo objeto matemático. Estamos interesados en mirar cómo se manifiesta esta complejidad en términos de los elementos esenciales de la actividad matemática en el desarrollo temporal de la clase (definiciones, proposiciones, propiedades, procesos matemáticos, etc.). En un momento en el que hay una tendencia a organizar los currículos en términos de procesos y competencias, es especialmente útil para la formación del profesorado disponer de instrumentos que permitan, entre otros aspectos, referirse explícitamente a los procesos matemáticos que intervienen en la actividad matemática.

Los objetivos que se han propuesto en este trabajo son los siguientes:

- Diseñar un instrumento de visualización que pueda dar cuenta de la complejidad matemática durante el desarrollo de una clase en términos de objetos y procesos y de sus relaciones.
- Utilizar este instrumento para resaltar los elementos esenciales de la actividad matemática (definiciones, propiedades, tareas, procesos) que el profesorado utiliza al aproximarse al concepto de mediatriz y dar cuenta de algunos aspectos del conocimiento matemático activado por el profesorado participante en su práctica profesional de aula.
- Dar cuenta de las similitudes y las diferencias de la actividad matemática de diferentes profesores o profesoras que abordan un mismo contenido matemático, en el mismo año escolar y la misma institución.

METODOLOGÍA

En este apartado se explican las herramientas de visualización para el análisis de la práctica en el aula y cómo se hizo la recogida de datos y su organización.

Herramientas para la visualización y el análisis de prácticas de aula

Todas las investigaciones mencionadas anteriormente comparten la finalidad de mejorar las prácticas matemáticas en el aula, centrándose bien en la complejidad *a priori* de los objetos matemáticos o bien en el conocimiento matemático del profesor que se pone en juego en la gestión de dicha complejidad. Para poder realizar de manera sistemática un análisis que permita describir, explicar y valorar estas prácticas matemáticas, es necesario contar con herramientas específicamente diseñadas para atender su complejidad. Con este fin, la investigación en educación matemática también ha producido herramientas metodológicas y marcos específicos de análisis. Sin ser exhaustivos y en el caso de España, algunas de estas herramientas son las tres dimensiones para el análisis del contenido (estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología) utilizadas en el Grupo de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (Gómez, 2006); el constructo praxeología y la teoría de los momentos didácticos utilizados en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (Bosch, Espinoza y Gascón, 2003), y el constructo configuración epistémica en el marco del enfoque ontosemiótico (Pochulu y Font, 2011).

Hemos optado por la utilización del enfoque ontosemiótico para el diseño de un instrumento de visualización por tres razones. En primer lugar, porque permite describir cómo emergen los objetos matemáticos en el aula y prestar atención a la complejidad asociada al objeto (concept study en la terminología de Davis (2013)). En segundo lugar, porque caracteriza la actividad matemática en término de prácticas, objetos y procesos matemáticos en un momento en que los currículos de primaria y secundaria están estructurados en términos de procesos (argumentación, comunicación, modelización, etc.) y se requieren herramientas que se refieran explícitamente a dichos procesos y permitan visualizarlos. Por último, porque en el marco del enfoque ontosemiótico ya se han llevado a cabo esfuerzos para producir herramientas de visualización. Godino, Contreras y Font (2006) hacen un intento de visualización de los objetos matemáticos primarios en el transcurso de una clase que en este trabajo enriquecemos incorporando también los procesos.

Para el análisis de las transcripciones se han utilizado los dos primeros niveles del enfoque ontosemiótico (Pochulu y Font, 2011). El primero explora la práctica matemática, definida como secuencias de acciones sujetas a reglas matemáticas. En nuestro caso, los tres profesores comparten una práctica común, que es la construcción de la mediatriz. El segundo nivel se centra en los objetos matemáticos primarios y los procesos matemáticos involucrados en la práctica, así como los que emergen de ella. El enfoque ontosemiótico utiliza el término objeto primario con un amplio significado para referirse a cualquier entidad de la práctica matemática a la que es posible referirse de manera independiente (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.). Por otra parte, en lugar de ofrecer una definición general de procesos, el enfoque ontosemiótico opta por seleccionar una lista considerada importante, sin pretender que sea exhaustiva.

La construcción de la mediatriz puede servir de ejemplo para ilustrar las diferencias entre prácticas, objetos primarios y procesos. Para llevar a cabo esta construcción, el estudiante lleva a cabo una secuencia de acciones sujetas a reglas matemáticas (idea de práctica en EOS), como por ejemplo las que tienen que ver con el uso de la regla y el compás. En particular, los estudiantes pueden utilizar un algoritmo de construcción usando únicamente la regla y el cartabón (idea de procedimiento, considerado un objeto primario en EOS). Con la repetición de otros ejercicios similares, el estudiante se ve inmerso en un proceso de automatización.

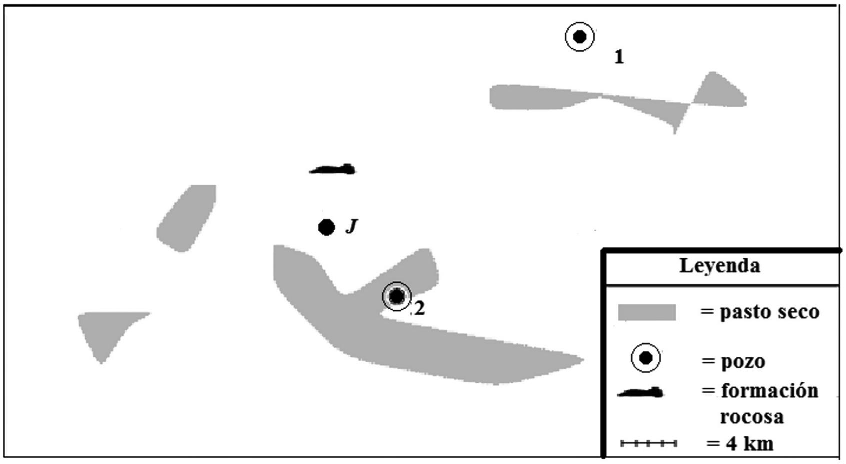
Recogida y organización de los datos

Se observaron clases del último curso de primaria y primero de secundaria de diferentes colegios e institutos durante todo un curso escolar y se procedió a seleccionar aquellos contenidos que: (1) estaban presentes, de manera muy similar, en ambas etapas educativas y, (2) su enseñanza fuese considerada sencilla por parte del profesor en comparación con otros contenidos como, por ejemplo, la proporcionalidad. Se seleccionó un centro de primaria en particular y las clases de tres profesoras (en adelante Laura, Antonia y Encarna) que (*a*) explicaban la mediatriz en tres grupos diferentes de sexto de primaria, (*b*) realizaban una actividad matemática diferente en cada caso y, (*c*) mostraban modelos diferentes de gestión de la clase. Las tres clases fueron grabadas en vídeo y transcritas para su posterior análisis, buscando las similitudes y las diferencias en la actividad matemática desarrollada en cada clase.

En los primeros dos casos, siguiendo el libro de texto de la institución, el principal objetivo de la maestra fue mostrar un procedimiento para trazar la mediatriz con regla y compás. En el tercer caso, el objetivo fue hacer emerger la definición de mediatriz a partir de la resolución de un problema en pequeños equipos y de manera colectiva (figura 1).

En el desierto: En la figura se muestra parte de un mapa de un desierto. Hay dos pozos en esta región. Imagínate que estás con tu rebaño de ovejas en J, que estás muy sediento y solo llevas este mapa contigo.

a) ¿A cuál de los pozos irías a tomar agua?



b) Señala otros dos lugares desde los cuales irías al pozo 2. Escógelos uno alejado del otro.

c) Ahora, esboza una división del desierto en dos partes o regiones de manera que siempre tengas más cerca un pozo que el otro pozo. ¿Si estás en la frontera a qué pozo irías y por qué?

d) ¿Qué clase de línea es la frontera? ¿Recta o curva?

e) Encuentra un procedimiento para dibujar esta línea. Describe los pasos de este procedimiento.

Fig. 1. Problema inicial utilizado en la clase de Encarna, adaptado de una tarea propuesta en Goddijn, Kindt y Reuter (2004, parte I, 5).

Para el análisis de las transcripciones se utilizaron los dos primeros niveles del modelo de análisis didáctico propuesto por el enfoque ontosemiótico, a los que ya se hizo referencia en la sección anterior. Con relación a los objetos matemáticos primarios, se identifican definiciones, procedimientos de construcción, propiedades y situaciones-problema (ejemplos, contraejemplos o tareas). Con relación a los procesos, se identifican automatización, institucionalización, argumentación, comunicación, modelización y conexión.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS DATOS

El análisis detallado de objetos primarios y procesos matemáticos ilustra aspectos relevantes de la estructura y el funcionamiento de cada una de las clases y permite diferenciar muchos de los elementos que conforman la actividad matemática realizada en una clase de matemáticas (situación-problema, definiciones, propiedades, etc.), así como establecer relaciones entre ellos. Las figuras 2, 3 y 4 permiten visualizar los elementos que hemos considerado más significativos en el desarrollo de cada una de las tres clases y son en sí mismas una herramienta que permite la comparación entre las tres clases.

Una primera observación de los gráficos mostró que la actividad matemática no se desarrolla de manera uniforme a lo largo de una clase, sino que hay un intervalo de tiempo en el que la densidad de procesos, definiciones, procedimientos, etc., es mayor. A estos intervalos de tiempo nos referimos en adelante, en términos metafóricos, como momentos de acumulación. Son intervalos en los que se ponen de manifiesto muchos objetos diferentes y muy seguidos en el tiempo. En los gráficos aparecen como marcas muy concentradas en un espacio pequeño de la línea temporal de la clase. En el siguiente epígrafe se realiza el análisis detallado de la actividad matemática de las tres clases. Dicho análisis y su comparativa muestran momentos de acumulación.

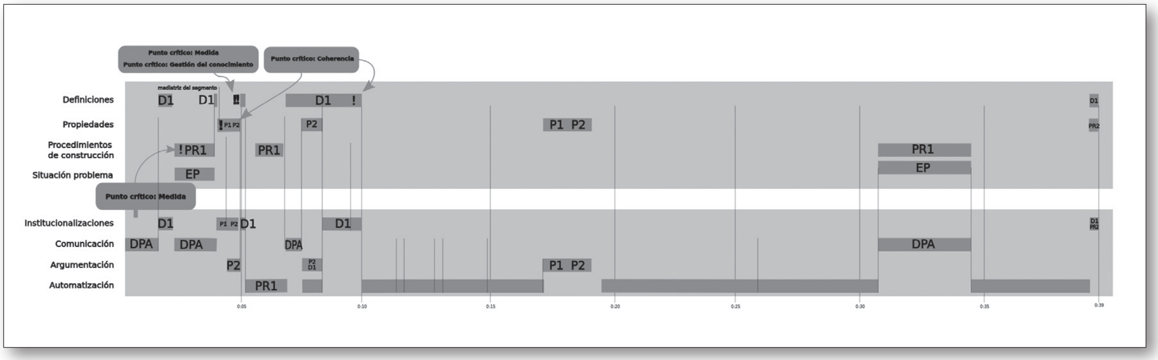


Fig. 2. Clase de Laura.

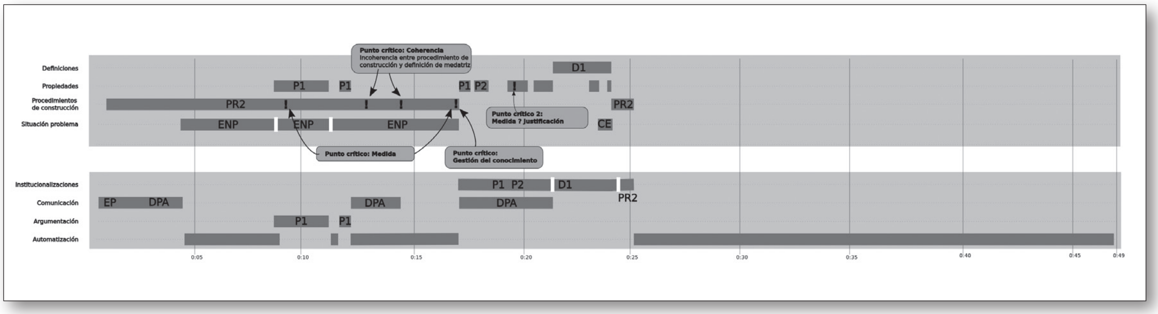


Fig. 3. Clase de Antonia.

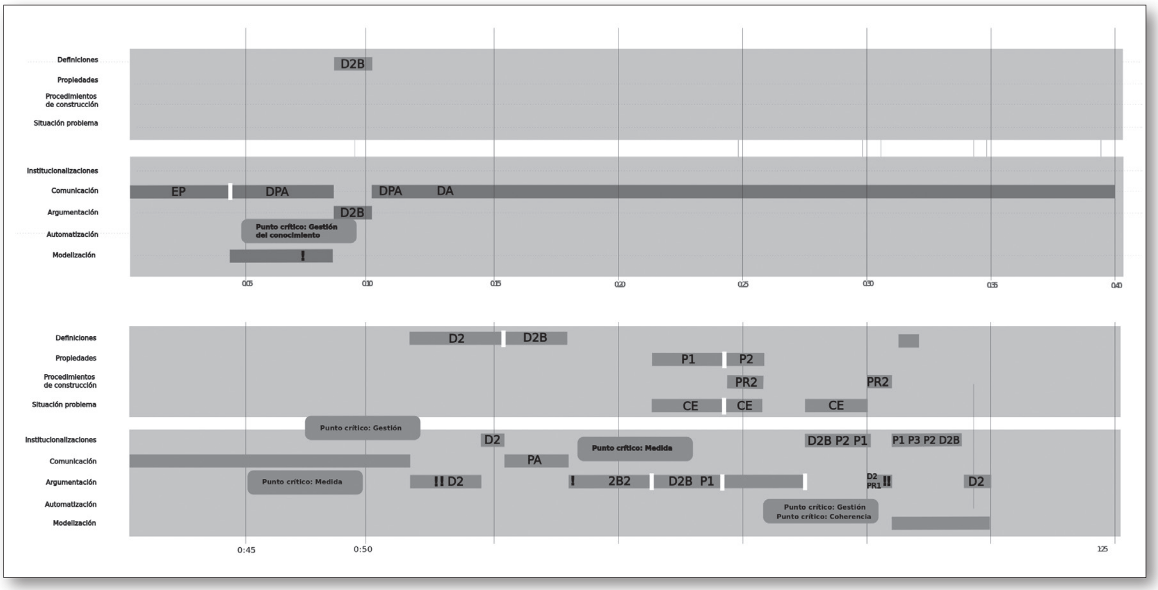


Fig. 4. Clase de Encarna.

En la tabla 1 se incluye la codificación de los objetos y procesos tenidos en cuenta para la confección de las figuras 2, 3 y 4.

Tabla 1
Codificación de objetos y procesos que intervienen en la clase sobre mediatriz

<table>
<tr><td colspan="3">Objetos matemáticos</td></tr>
<tr><td colspan="3">Definición: en la gráfica aparecen señalados los momentos de la secuencia en la que las maestras trabajan, explícita o implícitamente, la definición de la mediatriz.</td></tr>
<tr><td>D_1:</td><td colspan="2">Línea perpendicular que pasa por el punto medio del segmento.</td></tr>
<tr><td>D_2:</td><td colspan="2">Lugar geométrico formado por todos los puntos que equidistan de dos puntos dados.</td></tr>
<tr><td>D_2A:</td><td colspan="2">Lugar geométrico formado por todos los puntos que equidistan de los extremos del segmento dado.</td></tr>
<tr><td>D_2B:</td><td colspan="2">Línea (frontera) que, dados dos puntos, separa el plano en dos regiones de manera que en una región todos los puntos están más cerca de uno de los dos puntos dados que del otro.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Propiedad: cualquier afirmación, relacionada con la definición y el procedimiento de construcción de la mediatriz, que puede ser cierta o falsa, pero que hay un intento de justificarla en la clase.</td></tr>
<tr><td>P_1:</td><td colspan="2">La recta construida corta al segmento en el punto medio.</td></tr>
<tr><td>P_2:</td><td colspan="2">La recta construida es perpendicular al segmento dado.</td></tr>
<tr><td>P_3:</td><td colspan="2">Los puntos de la frontera (D_2B) están alineados.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Procedimiento de construcción: una serie de pasos para la construcción de la mediatriz, explícita o implícitamente.</td></tr>
<tr><td>Pr_1:</td><td colspan="2">Procedimiento de Euclides para la construcción de la mediatriz (Libro I, prop. X.): dado un segmento, se construye un triángulo equilátero que lo tenga por base (prop. I) y se biseca su ángulo opuesto (prop. IX).</td></tr>
<tr><td>Pr_2:</td><td colspan="2">Procedimiento del lugar geométrico: dados dos puntos, encontrar otros dos puntos equidistantes de ellos y unirlos con una línea recta.</td></tr>
<tr><td>Pr_3:</td><td colspan="2">Procedimiento del carpintero: dado un segmento, medir su longitud con una regla graduada, encontrar su punto medio y trazar la perpendicular en el punto medio con las escuadras o el transportador de ángulos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Situación problema: tareas que desencadena la actividad matemática, ejemplos y contraejemplos.</td></tr>
<tr><td>T:</td><td colspan="2">Tarea.</td></tr>
<tr><td>EP:</td><td colspan="2">Tarea con ejemplos paradigmáticos.</td></tr>
<tr><td>ENP:</td><td colspan="2">Tarea con ejemplos no paradigmáticos.</td></tr>
<tr><td>CE:</td><td colspan="2">Contraejemplos</td></tr>
<tr><td colspan="3">Procesos matemáticos</td></tr>
<tr><td colspan="3">Institucionalización (I): una definición, propiedad y/o procedimiento se consensua explícitamente como algo válido, y a partir de ese momento se asume como conocido.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Automatización (A): se pretende que un cierto procedimiento se repita mecánica e individualmente.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Comunicación (C): se expresan contenidos matemáticos de forma oral y/o por escrito o explícitamente se excluye la argumentación matemática. En nuestro análisis hemos distinguido tres tipos de comunicación:</td></tr>
<tr><td>EP: Exposición de la profesora.</td><td>DPA: Diálogo entre profesora y alumnos.</td><td>DA: Diálogo entre alumnos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Argumentación (Ar): es cuando se siguen o se crean cadenas de argumentos matemáticos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Modelización (M): es cuando aparece, por lo menos, alguna de las siguientes fases de la modelización: a) presentación del problema en contexto extramatemático, b) descontextualización, c) trabajo dentro de las matemáticas, d) contextualización y e) transferencias a otros contextos.</td></tr>
</table>

Similitudes y diferencias entre la actividad matemática de las tres clases

El hecho de haber analizado detalladamente la actividad matemática en términos de objetos primarios y procesos matemáticos nos permite extraer algunas conclusiones sobre el tipo de actividad matemática que promueve cada profesora. Los gráficos de las tres clases (figuras 2, 3 y 4) permiten visualizar que la actividad matemática no se desarrolla de manera uniforme a lo largo de una clase, sino que hay momentos en los que se concentran un mayor número de objetos primarios y de procesos. Estos *momentos de acumulación* ocupan aproximadamente entre un cuarto y un tercio del tiempo total en cada una de las tres clases. Sin embargo, en la clase de Laura ocurre desde el inicio, en la de Antonia pasados los primeros minutos y en la clase de Encarna sucede al final (figura 5).

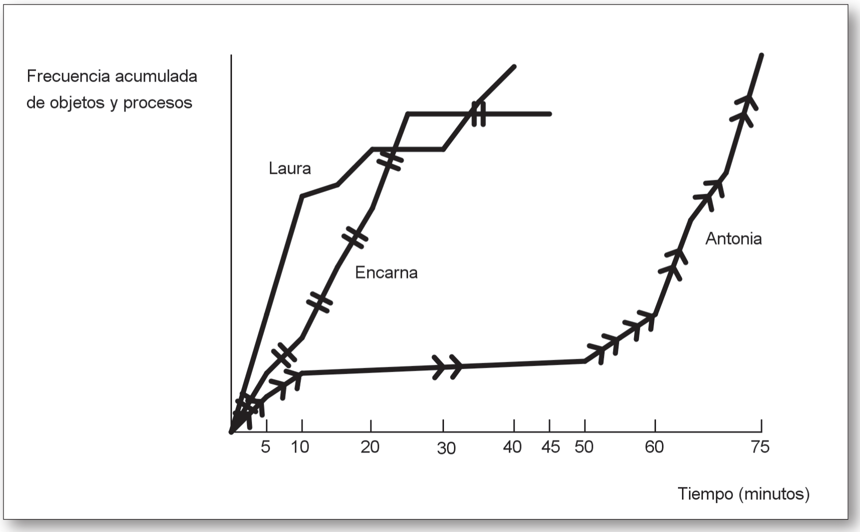


Fig. 5. Momentos de acumulación de la actividad matemática en las tres clases.

En cada una de las tres clases se observan definiciones y procedimientos diferentes. En la clase de Laura, se institucionalizan la definición de la mediatriz como línea perpendicular que pasa por el punto medio del segmento (D_1) y el procedimiento de construcción de Euclides (PR_1), mientras que el procedimiento del carpintero, (PR_3) que es sugerido por un alumno, no se institucionaliza. En la clase de Antonia, se institucionalizan esta misma definición (D_1) y un procedimiento diferente (PR_2: dados dos puntos, encontrar otros dos equidistantes de estos y unirlos con una línea). En la clase de Encarna, se institucionaliza la definición de mediatriz como la frontera que separa el plano en dos regiones de manera que en una región todos los puntos están más cerca de uno de los dos puntos dados que del otro (D_2B) y ningún procedimiento de construcción.

En las tres clases hay un proceso predominante que ocupa aproximadamente tres cuartas partes del tiempo total. En las clases de Laura y Antonia este proceso es el de automatización, que transcurre inmediatamente después del momento de acumulación y llega hasta el final. En cambio, en el caso de la clase de Encarna, este proceso es el de comunicación y ocupa aproximadamente las tres cuartas partes del total de la clase. Resaltamos que en esta tercera clase aparecen los procesos de modelización y de argumentación, que tienen poca o nula presencia en las otras dos.

La figura 2 muestra que la mayoría de objetos primarios son presentados por la primera profesora en los cinco primeros minutos. En términos de procesos, se visualiza que se invierte un mayor tiempo (75%) en la automatización del procedimiento de construcción de la mediatriz (trabajo individual del alumno sin discusión colectiva). El proceso de comunicación que predomina es expositivo y se dedica muy poco tiempo al proceso de argumentación. Durante este proceso hay falta de consistencia lógica de su discurso con relación a la validez de la medida para la demostración y la construcción geométrica. La comunicación entre alumnos y profesora está dirigida únicamente a la exposición de la definición (D_1) y las propiedades (P_1 y P_2). Los intervalos de tiempo que se dedican a la institucionalización son muy breves. Concretamente, se destina un único intervalo de dos minutos aproximadamente para las propiedades P_1 y P_2. Los puntos críticos (que se analizan en el siguiente apartado) se concentran en el momento de acumulación de los cinco primeros minutos, en particular en el proceso de institucionalización de las dos propiedades y de la definición.

La figura 3 corresponde a una clase en la que se pretende que la definición de mediatriz emerja a partir de un procedimiento de construcción. Por esta razón, el momento de acumulación de objetos primarios y procesos matemáticos ocurre un poco más tarde que en la clase de la figura 2, entre el minuto 10 y 20 aproximadamente. Después de este momento de acumulación, todo el tiempo se invierte en el proceso de automatización del procedimiento PR_2 (50% aproximadamente). El proceso de comunicación no pretende ser expositivo, sino que sigue el patrón de un diálogo entre profesor y alumnos (DPA). Este proceso de comunicación está dirigido a obtener la definición de la mediatriz (D_1) y las propiedades (P_1 y P_2) a partir de un procedimiento de construcción (PR_2) que se aplica a segmentos de diferente longitud y posición en el plano (ejemplos no paradigmáticos). El orden en que aparecen los procedimientos y la definición en la clase que se visualiza en la figura 3 y el tiempo que dedica evidencian que el proceso de argumentación es inductivo, pretendiendo que los alumnos enuncien una definición a partir de la automatización del procedimiento de construcción.

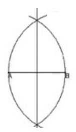
La figura 4 permite visualizar una clase en la que se resuelve en grupo un problema de contexto extramatemático. El tiempo dedicado al estudio de la mediatriz casi duplica el de las otras dos clases y el intervalo de mayor acumulación de objetos primarios y procesos matemáticos se produce en los últimos 15 minutos. Hay que resaltar que es la única de las tres clases en la que aparecen los procesos de argumentación y modelización (del problema extramatemático inicial de los pozos del desierto emerge el objeto mediatriz, que al final de la clase se recontextualiza en otro contexto diferente). Además, la mayor parte del tiempo se dedica al proceso de comunicación y no a la automatización de un procedimiento. A diferencia de las dos clases anteriores, que se centraban en institucionalizar y automatizar un procedimiento de construcción de la mediatriz, en esta no se institucionaliza ningún procedimiento de construcción con regla y compás; solo se institucionalizan una definición (D_2B) y las tres propiedades.

Intervalos de acumulación y puntos críticos

Los objetos primarios y procesos matemáticos activados en los intervalos de mayor acumulación en cada una de las tres clases fueron objeto de un análisis descriptivo detallado. La tabla 2 muestra el intervalo de acumulación que se pone de manifiesto en los cinco primeros minutos de la clase de Laura y sugiere ciertas contradicciones en la actividad matemática realizada en el aula. Por ejemplo, el procedimiento emergente para la determinación del punto medio (ver primera fila sombreada en la tabla 2), basado en la medida que sugiere el alumno, no se aplica porque la profesora no lo considera pertinente. Sin embargo, después, ella misma utiliza la medida en su argumento para justificar que la recta construida es la perpendicular del segmento (segunda fila sombreada). La existencia de esta y otras situaciones similares hace necesario un análisis interpretativo que requiere poner atención al diálogo que se establece en la clase en los intervalos de acumulación.

Este tipo de situaciones en las que hay contradicciones están relacionadas con el conocimiento del profesor y con su gestión del proceso de enseñanza y aprendizaje. Como contrapunto, en el análisis de otros intervalos de acumulación hemos detectado situaciones en las que se percibe una buena práctica con potencial para crear oportunidades de aprendizaje, también relacionadas con el conocimiento del profesor sobre la temática concreta de la mediatriz. Así pues, definimos un punto crítico como una manifestación de las dificultades o potencialidades que tiene el profesor al enfrentarse a la complejidad de la mediatriz. Los puntos críticos, por lo tanto, hacen referencia tanto a las dificultades del docente como a su potencial para crear oportunidades de aprendizaje. Las dificultades se manifiestan en forma de errores, omisiones, imprecisiones o falta de consistencia lógica en el discurso del profesor. Las potencialidades, sin embargo, se manifiestan con una acción orientada positivamente a la mejora del aprendizaje de los alumnos. Dichos puntos críticos aparecen, sobre todo, en los intervalos de acumulación. En los gráficos de las figuras 2, 3 y 4 se han señalizado mediante una admiración. Para el análisis interpretativo se seleccionaron como unidades de análisis los extractos de la transcripción de intervalos de acumulación en los que se daban puntos críticos.

Tabla 2.
Análisis de prácticas, objetos primarios
y procesos matemáticos del intervalo de acumulación de la clase de Laura

Práctica matemática
Se define la mediatriz como la recta perpendicular a un segmento por un punto medio. A continuación se explica un procedimiento de construcción de esta recta coherente con esta definición y se intenta justificar que la construcción, realmente, es coherente con la definición. Se reproduce repetidamente este procedimiento con otros segmentos.
Análisis de objetos y procesos
Lenguaje verbal: mediatriz, línea recta, segmento, origen y final de un segmento, extremo opuesto, amplitud del segmento, recta perpendicular, punto medio de un segmento, semicircunferencia, punto de corte, ángulo, grado, etc. *Lenguaje gráfico*: extremos de un segmento, segmento, semicircunferencia, recta perpendicular, punto de corte.  *Lenguaje simbólico*: A, B, $\overline{AB}$ *Lenguaje gestual*: Movimiento a lo largo del segmento, cruz con brazos para perpendicular.
Situaciones-problema Construir la recta perpendicular a un segmento por su punto medio (es el problema del profesor). Ejercicios para reproducir y mecanizar el procedimiento de construcción (son los problemas de los alumnos)
Definiciones/conceptos Previos – Segmento (tiene origen y final) – Línea recta (no tiene principio ni fin) – Punto medio (divide el segmento en dos de igual longitud) – Semicircunferencia (media circunferencia trazada con el compás dado el centro y el radio) – Recta perpendicular (forma con el segmento cuatro ángulos de 90 grados). – Ángulo recto (mide 90 grados). *Emergentes* Mediatriz (definida como recta perpendicular al segmento que pasa por el punto medio) (profesora)
Procedimientos Previos - Medir longitudes de segmentos y amplitudes de ángulos con regla y transportador de ángulos. - Identificación de rectas y segmentos. (Fijar dos puntos en la recta) - Identificación de rectas perpendiculares. (Tomar el transportador. Medir 90º)

Emergente Determinación del punto medio: 1) se mide la longitud del segmento con una regla, 2) se determina con la regla el punto cuya distancia a un extremo del segmento es la mitad de la longitud del segmento *(Sugerido por un alumno y desestimado por la profesora)*
- Procedimiento de construcción con regla y compás de la mediatriz *(Explicado por la profesora)* 1) Con centro un extremo del segmento se dibuja la semicircunferencia de radio la longitud del segmento. 2) Se repite el punto 1 con el otro extremo del segmento. 3) Se determinan los dos puntos de corte de las dos semicircunferencias. 4) Se dibuja la recta que pasa por los dos puntos de corte.
Propiedades *Emergentes* La recta que se construye de esta manera corta al segmento en dos partes iguales (profesor). La recta construida de esta manera tiene un punto común con el segmento (alumno). La recta que se construye de esta manera es perpendicular al segmento (profesor).
Argumentos Tesis: la recta construida con el procedimiento explicado es perpendicular al segmento [y esto es la mediatriz]. Argumentos: Si es perpendicular los 4 ángulos medirán 90º (proposición). Hago la medición de los 4 ángulos con el transportador de ángulos y compruebo que los 4 miden 90º (procedimiento).
Procesos que genera el profesor durante la interacción Comunicación del objetivo/la intención de la sesión. Definición. Primera fase del proceso de automatización (presentación de un procedimiento). Argumentación. Segunda fase del proceso de automatización (ejercicios de aplicación del procedimiento).

En la globalidad de las tres clases hemos categorizado tres puntos críticos. Dos de ellos informan sobre el conocimiento matemático involucrado en la enseñanza de la mediatriz y el tercero sobre la gestión que el profesor hace de este conocimiento. El análisis de los diálogos que se producen en la clase alrededor de estos puntos críticos permite profundizar en el conocimiento matemático involucrado en la enseñanza de la mediatriz desde el punto de vista de la práctica del profesorado. Los extractos que siguen a continuación son unidades de análisis seleccionadas de las transcripciones de los intervalos de acumulación de las tres clases.

Punto crítico 1: Medida. En los momentos de acumulación de las tres clases aparecen puntos críticos relacionados con la medida directa.

En los dos extractos siguientes, de la clase de Laura, se ilustra la falta de consistencia lógica de su discurso con relación a la validez de la medida para llevar a cabo una demostración o una construcción geométrica. En el primer extracto, un alumno pretende utilizar un procedimiento de construcción del punto medio del segmento utilizando una regla graduada. La profesora impone como norma que la medida directa con regla no es válida en un procedimiento de construcción geométrico:

Profesora: por lo tanto la mediatriz del segmento no es nada más que la línea recta perpendicular a este segmento que lo divide en dos partes exactamente iguales, ¿de acuerdo? ¿Cómo se hace para conseguir ese centro de ese segmento y partirlo en dos mitades iguales? Dime.
Alumno: podría subir eso y medir con esto (*levanta una regla*).
Profesora: lo podría medir con la regla, pero me saldría exactamente, exactamente igual. Podría…
Alumna: on el compás
Profesora: con el compás. Con el compás *(agarra el compás de pizarra)* es el instrumento de medida adecuado con el cual el centro del segmento me va a salir a la perfección…

En cambio, en el extracto que aparece a continuación, la misma profesora utiliza la medida directa para comprobar que la construcción cumple las propiedades de la definición. En este caso, substituye una demostración por una comprobación basada en la medida de ángulos:

Profesora: por lo tanto, una condición es que la recta que divide al segmento en dos partes iguales, la mediatriz del segmento ha de ser perpendicular. ¿Cómo puedo yo saber si estas dos rectas son perpendiculares? ¿De qué manera lo tengo que hacer? Perpendicular *(con las manos señala los cuatro cuadrantes que se forman en la intersección del segmento y la recta perpendicular a él)*.
Alumno: midiéndolo con el transportador de ángulos.
Profesora: midiéndolo con el transportador de ángulos *(agarra el transportador de ángulos de madera)*.
Alumno: un ángulo recto.
Profesora: y me tiene que dar…
Alumnos: un ángulo recto, noventa.
Profesora: … y me tiene que dar cuatro ángulos rectos. Uno, dos, tres y cuatro. Si yo pongo el transportador de ángulos aquí (*coloca el transportador sobre el segmento y mide el ángulo del primer cuadrante*) y lo hago coincidir, a ver, fijaros que me sale perfectamente un ángulo de 90º. ¿Lo veis? Si lo pongo al revés aquí me sale también exactamente 90º. Por lo tanto, yo puedo decir que la mediatriz del segmento es la recta perpendicular a ese segmento que divide a ese segmento en dos partes perfectamente iguales. Exactamente.

En el análisis de las unidades anteriores se pone de manifiesto un aspecto fundamental del conocimiento profesional asociado a la enseñanza de la mediatriz. Por una parte, la elección del procedimiento de construcción exige reflexionar sobre el sentido que se le otorga a la actividad matemática. Para los estudiantes encontrar el punto medio de un segmento conduce de manera natural a un problema de medida directa aproximada, mientras que si la decisión del profesor es seguir las normas de la geometría euclidiana, el uso de la medida directa no tiene cabida en el proceso de construcción o de demostración de propiedades de la mediatriz. Esta diferencia genera un problema profesional que el profesorado solo puede gestionar desde una reflexión previa sobre la validez que se otorga a la medida directa en las construcciones geométricas.

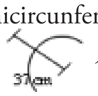
En el extracto que sigue, correspondiente a la clase de Encarna, encontramos también un punto crítico relacionado con la medida, pero esta vez este punto crítico expresado de forma consistente. La medida se considera en un contexto de medida directa sobre un mapa, en la situación concreta de establecer una conjetura sobre la distancia de un punto cualquiera suficientemente alejado de la mediatriz a los dos extremos del segmento. Es importante distinguir que en esta ocasión se recurre a la medida para conjeturar la solución del problema (construir la mediatriz), mientras que en la anterior se recurría a la medida para *demostrar* que la construcción cumple con la propiedad de perpendicularidad. Se trata de una acción de la profesora que puede mejorar el aprendizaje de los alumnos. Por esta razón, lo considerados una manifestación de la potencialidad que tiene Encarna para enfrentarse a la complejidad del objeto matemático mediatriz.

Profesora: estamos en J, ¿vale? Vamos a ponernos aquí. Vale, si yo mido, me estás, si hago algo que tú no me estás diciendo, si mido de J a dos. ¿Con qué mido?
Alumnos: con regla.
Profesora: ah, vale, con regla, si mido desde J hasta dos.
Alumno: son 8 km.
Profesora: ¿y por qué 8 km, Jordi?
Alumno: porque abajo te pone la…
Profesora: de J a dos segmento, ¿no?, hay 8 km. ¿Por qué, Jordi?
Alumno: porque abajo te sale la escala
Profesora: toma. 1 cm equivale a…
Alumnos: 4 kilómetros.

Profesora: 4 km. ¿Qué distancia había de J a dos? Dos centímetros, por tanto 2 km. ¿Este qué tema es?
Alumnos: 8 km.

Es relevante que en los tres casos hay manifestación de puntos críticos relacionados con la medida, lo cual avala que, en la complejidad asociada a la mediatriz, la medida tiene un papel fundamental.

Punto crítico 2: Coherencia entre definición y procedimiento de construcción. Este punto crítico está relacionado con la falta de coherencia entre el procedimiento de construcción de la mediatriz y la definición que se explica en la clase. El procedimiento de construcción (PR_2) con el que se inicia la siguiente unidad de análisis extraída de la clase de Antonia implica entender la mediatriz como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los dos extremos de un segmento.

Alumna: por más de la mitad, poniendo el punto medio, la raya…
Profesora: pongo en un extremo…
Alumna: en un extremo y tienes que llegar hasta la mitad.
Profesora: que sea más de la mitad. ¿Y lo mido o lo hago a ojo? *(desde el extremo derecho va abriendo poco a poco el compás hasta conseguir una abertura mayor que la mitad del segmento)*
Alumna: lo mides.
Alumnos: no, lo haces a ojo.
Profesora: no, lo hago a ojo, a ojo más o menos podéis verlo. ¿Y qué trazo?
Alumna: una… una semicircunferencia.
Profesora: una semicircunferencia *(comienza a dibujar la semicircunferencia desde el extremo inferior-derecho, así:* 

). Para vosotros será más fácil porque podéis clavar la punta en el papel, yo aquí no puedo clavar la punta. ¿Y ahora qué?
Alumnos: y ahora… otra desde el otro extremo.
Profesora: otra desde el otro extremo… ¿Muevo el compás? 

Alumnos: no.
Profesora: ¿y ahora qué?
Alumnos: y ahora… otra desde el otro extremo.
Profesora: otra desde el otro extremo… ¿Muevo el compás?
Alumnos: no.
Profesora: ¿qué hago, Sara? ¿Qué hago, Sara? No, Ana…
Alumna: o dejas igual y le pones en el otro extremo.
Profesora: lo dejo igual y lo pongo en el otro extremo, y hago otra semicircunferencia. ¿Qué nos pasa?
Alumna: que se cruzan de nuevo.
Profesora: ¿qué nos pasa?
Alumnos: que se parece, que se cruzan, que…
Profesora: que se juntan otra vez dos puntos. ¿Qué hacemos con esos dos puntos?
Alumnos: hacer otro segmento… las marcas…

Sin embargo, como se transcribe a continuación, la profesora define posteriormente la mediatriz como la recta perpendicular que pasa por el punto medio de dicho segmento (D_1). Esta falta de coherencia tiene consecuencias importantes en la manera en la cual se otorga significado a la mediatriz. Una trayectoria coherente desde una perspectiva matemática implicaría definir la mediatriz como lugar geométrico después de haber utilizado el procedimiento de construcción que se describe, mientras que lo que sucede es que la maestra se ve forzada a comprobar, utilizando la medida directa de ángulos, que la recta que obtiene es una recta perpendicular por el punto medio del segmento para así poder definir la mediatriz como la recta perpendicular por el punto medio del segmento que une dos puntos dados.

Alumno: pues los semicírculos, que hacen cuatro partes.
Profesora: ah, los sectores estos…
Alumno: sí.
Profesora: ah, vale, que nos quedan cuatro sectores iguales; vale lo pondremos así.
Alumno: ¿sectores?
Profesora: los llaman así, sectores, de todos modos están bien. Pero atención, fijaros sobre todo, fijaros en la relación que tienen las dos, los dos segmentos que hemos dibujado. Todos tienen una cruz, una posición muy concreta.
Alumno: una cruz.
Profesora: forman una cruz, sí señora, forman una cruz, y cuando forman una cruz en matemáticas tienen un nombre.
Alumno: semirrectas.
Profesora: no.
Alumna: suma.
Profesora: uhhh… Cuando dos rectas forman una cruz o dos segmentos forman una cruz en matemáticas tienen un nombre muy concreto, se dicen que son segmentos...
Alumno: perpendiculares.
Profesora: perpendiculares, viva el caballero, sí señor, que el segmento que nos da, de hacerlo esto así, el segundo segmento siempre es perpendicular al primer segmento que nosotros hemos dibujado.

La secuencia seguida por la profesora no permite a los estudiantes dar significado a la construcción de la mediatriz como lugar geométrico. Además, la profesora no explica por qué la apertura del compás en la construcción de la mediatriz puede ser cualquiera, siempre que supere la medida de la mitad del segmento. En el extracto que sigue, que se produce después de que la profesora haya explicado el procedimiento de construcción PR_2 –si bien ella conoce que la construcción con regla y compás que ha explicado proporciona con exactitud siempre el punto medio del segmento con independencia de la abertura del compás que tome cada alumno–, no atiende al estudiante que le pide implícitamente una argumentación en este sentido, plausiblemente debido a que no sabe cómo argumentarlo.

Alumno: a veces, a veces, todo no está bien, porque si ponemos un poco más de la mitad a veces nos pasamos y a veces no, no lo podemos…
Profesora: yo lo estoy poniendo un poco más de la mitad.
Alumno: ya, pero en todos no será igual.
Profesora: no, pero, fíjate una cosa, fíjate una cosa, Raúl, ¿lo estamos midiendo?
Alumno: no.
Profesora: no, entonces no lo estamos midiendo, ¿debe ser de vital importancia medirlo?
Alumno: no,
Profesora: porque sin medirlos, Raúl, sin medirlos, ¿qué nos ha pasado?
Alumno: pues que nos ha salido bien.
Profesora: que nos ha salido la mitad, si medirlo nos ha salido la mitad, debe ser por algo. Idle dando mientras yo intento dibujar la semicircunferencia.
Alumna: pero si…
Profesora: es difícil (*mientras dibuja*),
Alumna: pero si no mide más que la mitad, parece extraño que luego nos salga la mitad…
Profesora: ¿qué?
[...] Profesora: 15. Fíjate que sin medir, Raúl, que sin medir más o menos la mitad nos ha vuelto a dar exactamente la mitad del segmento.
Alumno: es magia.
Profesora: ¿es magia? No, no…
Alumno: es geometría.
Profesora: es geometría, ¿no? Vale, ¿qué características, y, qué veis en común? Ah, sí, perdón, los nombres, gracias Ana, venga Ana, ponle.

La falta de coherencia también está relacionada con el problema de la medida que exponíamos antes y la necesidad de articular de manera razonada los elementos que conforman la complejidad asociada a la mediatriz (propiedades, procedimientos, definiciones, etc.).

Punto crítico 3: Gestión del conocimiento en la interacción. Este punto crítico da cuenta de cómo el profesor utiliza su conocimiento matemático para atender (o no) a las necesidades de aprendizaje de los estudiantes durante la interacción. En la unidad de análisis que sigue, la profesora no cree conveniente gestionar la relación entre perímetro y frontera que ha establecido el alumno en su respuesta, dejando pasar la oportunidad de establecer una conexión relevante entre ambas nociones.

Profesora: después, si divides, si divides, por ejemplo, si yo divido Cataluña del País, del País Valenciano, yo digo: ¿cómo sé yo que está dividido? ¿Cómo se cuándo acaba Cataluña y dónde comienza el País Vasco, el País Valenciano, por ejemplo? ¿Cómo sabes? ¿Qué han hecho?
Alumno: por el perímetro, ¿no?
Profesora: no lo tengo tan claro, puede ser el perímetro ¿de qué?
Alumno: de Cataluña.
Profesora: vale, el perímetro de Cataluña y el perímetro de, de…
Alumna: del País Valenciano.
Profesora: vale, pero, ¿cómo sé yo? Cuando vais de Andorra, vamos a ponerlo más difícil, cuando vamos de Francia a España, a Cataluña… ¿qué pasamos?
Alumnos: la frontera.
Profesora: la frontera. ¿Y qué quiere decir la frontera?
Alumno: lo que separa los dos países.
Profesora: una línea que separa los dos países, que no sabemos de qué forma es. Puede ser una línea curva, puede ser una línea recta. Pues, cuando tú divides un desierto en dos zonas o regiones, en realidad estás haciendo una frontera, ¿sí o no?
Alumnos: sí.

Es importante hacer notar que este tipo de puntos críticos está relacionado con la toma de decisiones de los profesores durante la interacción y no necesariamente con su nivel de conocimiento del objeto matemático que están enseñando. En el caso de Encarna, no se puede inferir que la decisión de no establecer conexiones entre perímetro y frontera se deba a una falta de conocimiento, sino más bien a la pertinencia o no de establecerla en este momento.

CONCLUSIONES

Disponer de herramientas que permitan visualizar la práctica alrededor de un objeto matemático en particular permite descomponer el intrincado sistema de definiciones, propiedades, procesos, etc. (instanciaciones en la terminología de algunos autores), que el profesorado utiliza para la emergencia de dicho objeto. Conocer no solo cuáles son estas instanciaciones, sino cómo y cuándo surgen en el transcurso de una clase, cómo se relacionan entre ellas, las dificultades que encierran y los errores que se cometen, es fundamental para mejorar nuestra comprensión de este objeto desde la perspectiva de la investigación sobre conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. Además, este análisis es igualmente relevante para la formación del profesorado, en tanto que ofrece una aproximación al objeto desde la práctica de otros profesores y nuestra perspectiva teórica asume como punto de partida que el conocimiento matemático para la enseñanza es un sistema complejo distribuido entre todos los profesionales.

En este trabajo hemos aplicado una metodología de análisis basada en el modelo de análisis didáctico propuesto por el enfoque ontosemiótico para profundizar en la comprensión de este sistema de instanciaciones para el objeto mediatriz. Desde esta perspectiva, es evidente el interés que tiene poner de manifiesto los elementos comunes y las diferencias entre clases realizadas en una misma institución, año y nivel escolar cuando diferentes profesores enseñan este contenido. Entre los elementos comunes de las tres clases destacamos la falta de uniformidad de la actividad matemática, entendida por una parte en términos de la utilización de diferentes definiciones y de distintos procedimientos de construcción y, por otra, como predominio de un único proceso a lo largo de cada una de las clases (automatización en dos de las clases y comunicación en la tercera). En cuanto a las diferencias, destacamos que los intervalos en los que se manifiesta una mayor acumulación de estas instanciaciones aparecen en diferentes momentos en las tres clases. El análisis de estos momentos de acumulación es especialmente relevante porque es en estos intervalos de tiempo en los que se manifiestan los puntos críticos que nos informan sobre las dificultades que encierra el concepto o la conexión que se establece entre las definiciones, las propiedades o los procedimientos que se utilizan.

El análisis desarrollado ha permitido comparar la actividad matemática realizada por las tres profesoras al enseñar la mediatriz (en términos de objetos primarios y procesos). En particular, el uso de la definición de la mediatriz como la línea perpendicular por el punto medio del segmento que une dos puntos dados viene asociado a un proceso de automatización del procedimiento de construcción mediante la utilización repetida de ejemplos, prototípicos o no. En cambio, el uso de la definición de la mediatriz como lugar geométrico viene asociado a un proceso de comunicación mucho más amplio y ha permitido que aparezca un proceso de modelización. Aunque estas relaciones no pueden ser generalizables, sí permiten inferir que optar por la definición de la mediatriz como lugar geométrico genera procesos matemáticos relevantes y posibilidades de gestión mucho más amplias que si se opta por la primera definición.

Otra de las conclusiones que se derivan de los resultados de la investigación es la estrecha relación entre la enseñanza de la mediatriz y el problema fundamental de la utilización de la medida directa, desde el punto de vista de su uso para la formulación y/o demostración de conjeturas. Por ejemplo, el análisis del punto crítico relacionado con la medida muestra que la profesora Laura no aprovechó los comentarios de los alumnos para profundizar en la diferencia entre comprobación y demostración matemática. Las razones por las cuales no se hizo puede que tengan relación con la débil formación matemática que, en general, caracteriza los programas de formación del profesorado de primaria sobre qué significa demostrar en matemáticas y la confusión entre comprobación y demostración; o con que la profesora no tenga una competencia en análisis didáctico que le permita detectar los puntos críticos en los que su acción puede facilitar (o no) un conocimiento suficientemente robusto para favorecer el aprendizaje matemático posterior.

El análisis llevado a cabo permite inferir las limitaciones y potencialidades del conocimiento de las profesoras para enfrentarse a la complejidad del objeto matemático mediatriz, aunque no concluir que su actuación venga determinada por este conocimiento. Dichas limitaciones y potencialidades se manifiestan, primero, en las diferencias evidenciadas en el diseño e implementación de sus clases respectivas y, segundo, en la manera como resuelven los puntos críticos que hemos analizado. Por ejemplo, en el caso de Antonia, tenemos un nivel de errores e imprecisiones superior al observado en las otras dos profesoras que nos hace suponer su falta de conocimiento sobre los elementos básicos de la mediatriz. En cambio, en el caso de Laura, podemos inferir que sí tiene un conocimiento de esos elementos pero no de la complejidad asociada a la mediatriz, lo que se pone de manifiesto en esta falta de consistencia lógica de su discurso con relación a la validez de la medida para la demostración y la construcción geométrica. En el caso de Encarna, inferimos un conocimiento amplio de la complejidad del objeto matemático mediatriz que se muestra, sobre todo, en la propuesta didáctica que ha planteado y en la manera de resolver los puntos críticos. Este tipo de análisis consideramos que es una aportación relevante para investigadores interesados en el estudio del conocimiento matemático activado por los profesores en su práctica de aula.

Los gráficos que hemos utilizado permiten resaltar y visualizar los elementos esenciales de la actividad matemática en el desarrollo temporal de una clase. Por una parte, definiciones, propiedades, procedimientos de construcción y situaciones-problema y, por otra, procesos. Se trata de un instrumento que se puede aplicar al análisis de la mayoría de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este momento en el que hay una tendencia a organizar los currículos en términos de procesos y competencias, es especialmente útil disponer de instrumentos que permitan, entre otros aspectos, evidenciar y hacer explícitos los procesos matemáticos que intervienen en la actividad matemática.

Finalmente, queremos destacar la importancia del trabajo como aportación para la formación del profesorado de matemáticas y, en particular, para el desarrollo de la competencia de análisis didáctico del profesorado. Para su desarrollo, es necesario: (1) seleccionar episodios de aula, (2) realizar el análisis de las prácticas profesionales observadas en estos episodios y del conocimiento matemático-didáctico activado en dichas prácticas, (3) diseñar un ciclo formativo en el que se utilicen estos episodios y el análisis realizado en el punto 2 y (4) implementar estos ciclos formativos en la formación inicial y/o permanente de profesores de matemáticas. El trabajo que aquí se presenta hace aportaciones a las fases 1 y 2.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de investigación se ha llevado a cabo en el contexto de los siguientes proyectos: REDICE-12-1980-02. "Desarrollo de la competencia en análisis didáctico en la formación de futuros profesores de matemáticas de secundaria"; EDU2009-07298. "Factores de influencia en la discontinuidad del aprendizaje matemático entre primaria y secundaria"; EDU2012-31464. "Análisis de entornos colaborativos de aula desde la perspectiva de su mediación en la construcción discursiva de conocimiento matemático" y EDU2012-32644. "Desarrollo de un programa por competencias en la formación inicial de profesores de secundaria de matemáticas".

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ball, D., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge, in V. Richardson (ed.). *Handbook of Research on Teaching*. Washington, D.C., EEUU: American Educational Research Association, pp. 433-456.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), pp. 389-407.

Bosch, M., Espinoza, L. y Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio: Análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *RDM. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(1), pp. 79-136.

Contreras, A., García, M. y Font, V. (2012). Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. *Bolema*, 26(42B), pp. 667-690.

Davis, B. y Renert, M. (2013). Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teacher' disciplinary knowledge. *Educational Studies in Mathematics Education*, 82(2), pp. 245-265.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education* Online First. DOI 10.1007/s11858-012-0425-y.

Fernández, C. y Yoshida, M. (2004). *Lesson study: a Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Goddijn, A., Kindt, M. y Reuter, W. (2004). *Geometry with applications and proofs*. Freudenthal Institute, Utrecht, The Netherlands.

Godino, J., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), pp. 39-88.

Gómez, P. (2006). Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (eds.). *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Huesca: Instituto de Estudios Aragoneses, pp. 15-35.

Hill, H., Blunk, M., Charambous, Y., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L. y Ball, D. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction. An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, 26(4), pp. 430-511.

Martinho, M. H. y Ponte, J. P. (2009). Communication in the classroom: Practice and reflection of a mathematics teacher. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)* Supplemento n. 2 al n. 19.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.

Menezes, L. (2004). *Investigar para ensinar Matemática: Contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores*. Doctoral dissertation. University of Lisbon, Portugal.

Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME*, 14 (3), pp. 361-394.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), pp. 255-281.

Sullivan, P. y Wood, T. (2008). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education: Vol. 1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development.* Rotterdam, The Netherlands: Sense publishers.

Silverman, J. y Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of mathematics teacher education*, 11(6), pp. 499-511.

Tomás Ferreira, R. (2005). *Portuguese student teachers' evolving teaching modes: A modified teacher development experiment*. Doctoral dissertation. Illinois State University, USA.

VISUALIZING AND COMPARING TEACHER'S MATHEMATICAL PRACTICE

Edelmira Badillo, Lourdes Figueiras
Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, Universitat Autònoma de Barcelona.
edelmira.badillo@uab.cat, lourdes.figueiras@uab.cat

Vicenç Font
Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica. Universitat de Barcelona.
vfont@ub.edu

Mario Martínez
Secretaría de Educación del Estado de Nuevo León, México.
mariomartinez2203@yahoo.com.mx

This research paper addresses the need of instruments to visually display the mathematical complexity of the classroom in terms of the objects and processes involved. The one we have designed is based on the onto-semiotic approach. Firstly, we use it to highlight the essential elements of mathematical activity (definitions, properties, tasks, processes) when teaching the concept of bisector. Secondly, it is used to show the commonalities and differences of the mathematical activity between different teachers teaching this content in the same school, the same year and in the same institution.

We have decided to use the onto-semiotic approach in the design of a visualization tool for three reasons. First, it allows us to describe how mathematical objects emerge in the classroom and to draw attention to the complexity associated with them. Secondly, because it characterizes the mathematical activity in terms of practice, mathematical objects and processes now that primary and secondary curricula are structured in terms of processes (reasoning, communication, modeling...) and thus it is worthwhile that the visual display of classroom practice refers explicitly to these processes. Finally, because some efforts have already been made to produce visualization tools from the onto-semiotic approach. Some mathematical classrooms were observed in the final year of primary education and the first year of secondary in different schools, from which we selected a content that: (1) was considered in both stages of education and (2) was considered by the teacher to be less complex than other contents such as, for example, proportionality. Finally, we selected a primary school teacher and three secondary school teachers who (a) explain the perpendicular in three different groups of grade six, (b) perform a different mathematical activity in each case, and (c) show different patterns of classroom management. The three classes were videotaped and transcribed for later analysis. For the analysis of the transcriptions we have used the first two levels of the analytical model proposed by the onto-semiotic approach. The first explores the mathematical practice, defined as sequences of actions constrained by / subjected to mathematical rules. The second one focuses on primary mathematical objects and mathematical processes involved in the practice and those that emerge from it. Classroom practice is displayed using a graphic showing the essential elements of the mathematical activity during the class. These include definitions, properties, construction procedures and tasks, as well as the processes considered. When the graphics are used to compare the three classrooms, the following common elements are revealed: first, the lack of uniformity in the mathematical activity, expressed by the use of different definitions for the bisector, as well as different construction procedures; second, the predominance of a unique process during each of the classes (automation in two of them, and communication in the third one). Regarding the differences, we note that in every class there are some slots of time where many primary objects are considered, and that these slots appear at a different time in the three classes. The analysis of these slots of time is particularly important because it is there where the difficulties involved in the concept appear, as well as the connections between the definitions, properties or procedures. The analysis allows us to infer some relationship between the teachers' knowledge and the way they deal with the complexity of the mathematical content involved, although we cannot conclude that their practice is a consequence of that knowledge.