ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
Revista de investigación y experiencias didácticas
Núm. 31.2 (2013): 113-131
ISSN: 0212-4521

SUCESIÓN CONVERGENTE Y SUCESIÓN DE CAUCHY: EQUIVALENCIA MATEMÁTICA Y EQUIVALENCIA FENOMENOLÓGICA

CONVERGENT SUCCESSION AND CAUCHY'S SUCCESSION: MATHEMATICAL EQUIVALENCE AND PHENOMENOLOGICAL EQUIVALENCE

Francisco Javier Claros Mellado
Universidad Carlos III
fclaros@eco.uc3m.es

María Teresa Sánchez Compaña
Fundación María Inmaculada.
teresasanchez@eummia.es

Moisés Coriat Benarroch
Universidad de Granada
mcoriat@ugr.es

RESUMEN: Esta investigación está enmarcada por la Fenomenología, el Pensamiento Matemático Avanzado y los Sistemas de Representación; en ella estudiamos una equivalencia fenomenológica, junto a la conocida equivalencia matemática, entre sucesión convergente y sucesión de Cauchy.

Enunciamos dos fenómenos organizados por definiciones de límite finito de una sucesión y de sucesión de Cauchy; con el apoyo de libros de texto de secundaria, reconocemos en los libros de texto españoles dos fenómenos organizados por la primera definición mientras que, en los libros británicos, solamente observamos uno de los dos fenómenos. (Los libros de texto españoles se eligieron al azar y no constituyen muestras representativas. Los libros de texto británicos se eligieron "ad hoc" por lo que, evidentemente, tampoco constituyen muestras representativas.) Comparamos los fenómenos organizados por cada definición; establecemos analogías y diferencias entre ellos; introducimos un criterio de equivalencia entre fenómenos y un criterio de 'equivalencia fenomenológica' entre definiciones matemáticamente equivalentes; concluimos afirmativamente acerca de la equivalencia fenomenológica entre ambas definiciones. Ésta es algo más compleja que la equivalencia matemática, ya que involucra dos pares de fenómenos: un par se observa bajo un enfoque intuitivo mientras que el otro se observa bajo un enfoque formal. Este artículo prolonga resultados presentados en Claros (2010).

PALABRAS CLAVE: sucesión, sucesión de Cauchy, límite de una sucesión (definición), libros de texto de matemáticas (educación secundaria), contexto intuitivo, contexto formal, fenómenos de aproximación intuitiva, fenómenos de retroalimentación, fenomenología, equivalencia fenomenológica, fenomenología didáctica.

ABSTRACT: This research is framed by Phenomenology, Mathematical Advanced Thinking and Representation Systems; we study a phenomenological equivalence to be added to the well known mathematical equivalence between a convergent sequence and a Cauchy sequence.

We introduce two phenomena associated to each definition (the finite limit of a sequence, and a Cauchy sequence); by using several high school mathematics textbooks, we recognize, in Spanish high schools textbooks, two phenomena organized by the first definition and, in British high schools textbooks only one of these phenomena. (Spanish textbooks were randomly selected, but they are not a representative sample; British textbooks were selected by "ad hoc" criteria and do not should be considered as representing the corresponding population.) We compare phenomena organized by each definition; we establish analogies and differences among them; we introduce a criterion of equivalence between phenomena and a criterion of phenomenological equivalence between mathematically equivalent definitions; finally, we answer affirmatively about the phenomenological equivalence among both definitions. Phenomenological equivalence appears to be more complex than mathematical equivalence, since it involves two couples of phenomena: the first one is observed within an intuitive context while the other couple is observed within a formal context. This paper extends results presented in Claros (2010)

KEY WORDS: Sequence, Cauchy Sequence, limit of a sequence (definition), mathematics textbooks (secondary education), intuitive approach, formal approach, phenomena, feedback phenomena, phenomenology, phenomenological equivalence, didactical phenomenology.

Fecha de recepción: marzo 2012 • Aceptado: septiembre 2012

Claros, F.J., Sánchez Compaña, M.T. y Coriat, M. Sucesión convergente y sucesión de Cauchy: equivalencia matemática y equivalencia fenomenológica, *Enseñanza de las Ciencias*, 31(2), pp.113-131

INTRODUCCIÓN

Hace más de diez años pusimos en marcha un pequeño equipo (tres personas) para preparar dos tesis doctorales en la no clara zona de encuentro entre la fenomenología y el análisis matemático elemental. La primera tesis doctoral (Claros, 2010) desarrolla los fenómenos organizados por el límite finito de una sucesión; la segunda (Sánchez, 2012) desarrolla, paralelamente, los fenómenos organizados por el límite finito de una función en un punto.

Este artículo presenta algunos avances a partir de ideas extraídas de la tesis doctoral de Claros (2010) relativas al límite de sucesiones y a las sucesiones de Cauchy en el conjunto numérico R.

Tiene cuatro objetivos principales:

- Interpretar fenomenológicamente las definiciones de límite finito de una sucesión y de sucesión de Cauchy y establecer los fenómenos organizados por cada una de ellas.
- Establecer un criterio de equivalencia fenomenológica entre fenómenos organizados por definiciones matemáticamente equivalentes.
- Enunciar un criterio de equivalencia fenomenológica entre definiciones matemáticamente equivalentes y aplicarlo en las dos definiciones.
- Concluir que las definiciones de límite finito de una sucesión y de sucesión de Cauchy son también fenomenológicamente equivalentes.

El propósito general del equipo de investigación es elaborar una fenomenología didáctica del límite. Para alcanzarlo, decidimos, con razones expuestas en varios lugares (véase, por ejemplo, Sánchez, 2012), separar el estudio del límite de una sucesión del límite de una función; análogamente, separamos las situaciones de convergencia de sucesiones y enfocamos el estudio en las que son convergentes. De esta manera, hemos analizado cada definición sin dejar de establecer conexiones, diferencias y analogías entre la sucesión y la función.

El artículo se compone de nueve apartados. En el segundo apartado (antecedentes) mencionamos una selección de investigaciones que se han ocupado del límite de una sucesión desde una perspectiva educativa; enmarcan la que presentamos aquí, aunque se distinguen claramente y muestran que el campo de discusión está activo. La lista de estos antecedentes es restrictiva con objeto de acortar este trabajo.

En los apartados 3 (marco teórico), 4 (definiciones de límite finito de una sucesión) y 5 (fenómenos organizados por dos definiciones) recogemos, de la tesis doctoral de Claros (2010), dos fenómenos organizados por la «definición épsilon-delta» de límite finito de una sucesión y por la definición de sucesión de Cauchy, que, respectivamente, designamos como definición S1 y definición S2. Cada definición organiza dos fenómenos que, de un modo genérico, denominamos, respectivamente, de aproximación intuitiva y de retroalimentación o ida y vuelta. En estos apartados damos nombres más precisos para los fenómenos organizados por cada definición, junto con una explicación detallada de ellos.

Se plantea fácilmente la cuestión de saber si estos fenómenos son un mero resultado del interés del autor por la fenomenología o si, por el contrario, se observan en libros de textos destinados a la introducción del límite finito de una sucesión. Esta cuestión permite precisar los fenómenos y detectar la manera como los autores de libros de texto se acercan al límite de una sucesión. En la tesis doctoral de Claros (2010, capítulo 4) se usó una muestra de treinta libros de texto españoles publicados entre 1933 y 2005, se confirmó la presencia de ambos fenómenos y se observó que la frecuencia del fenómeno de aproximación intuitiva va aumentando progresivamente a la vez que va disminuyendo la del fenómeno de retroalimentación en los libros de texto de secundaria. En el sexto apartado (los fenómenos en los libros de texto) hemos preferido presentar ejemplos de ambos fenómenos extraídos de libros de texto españoles y británicos sin ninguna intención comparativa ni de estudio de series temporales, como se esbozó, para lo último, en Claros (2010: 189-310).

Es relevante anotar aquí que, siendo bien conocido el teorema que establece la equivalencia matemática entre las definiciones de límite finito de una sucesión y de sucesión de Cauchy, nos hemos preguntado si era posible establecer, de manera también indiscutible, la equivalencia entre los fenómenos de aproximación intuitiva, por una parte, y los de retroalimentación, por otra, organizados por ambas definiciones.

El apartado 7 (comparación de los fenómenos descritos) lo dedicamos a comparar los fenómenos organizados por cada definición, a enunciar un criterio que permita establecer la equivalencia entre los fenómenos y a establecer una conclusión sobre dicha equivalencia fenomenológica de las definiciones.

En el apartado 8 (equivalencia fenomenológica entre definiciones) establecemos la equivalencia fenomenológica entre las dos definiciones manejadas, mientras que el apartado 9 (conclusiones y perspectivas futuras) resume el contenido del trabajo y enumera líneas por las que esperamos continuar nuestra investigación.

ANTECEDENTES

Nuestro estudio del límite se inicia debido a dificultades compartidas por docentes y que han sido señaladas, entre otros, por los investigadores que mencionamos.

El conjunto de los números reales y la noción de límite abren el camino hacia el análisis matemático, ya que esta sirve de base para la derivada o la integral. Garbin Dall'Alba y Azcárate (2001) han reconocido la dificultad del concepto de límite y la explican por la diversidad de concepciones, por la riqueza de nociones asociadas y por los múltiples matices de la definición formal.

Las dificultades asociadas al límite han llevado a muchos autores a diseñar secuencias didácticas que mejoren el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Przenioslo (2005) sugiere prestar atención a las concepciones particulares de los alumnos y a algunos hechos y principios más generales, entre los que se encuentran las representaciones visuales (por el papel que juegan en el aprendizaje de los conceptos matemáticos) y el desarrollo del *concept-image*, el cual puede estar considerablemente influenciado por los primeros ejemplos que se plantean a los alumnos. Por ello recomienda que se presente una amplia gama de ejemplos a partir de los cuales los alumnos construyan y desarrollen, además de la definición, las situaciones apropiadas en las que se empleen los límites.

Mamona-Downs (2001) defiende que se estudie cada límite de manera diferenciada y se centra en el límite finito de una sucesión. Esta autora considera que el número real y el concepto de función son requisitos inevitables. Entre las acciones que permiten dominar la definición, destaca el manejo de los cuantificadores usados en esta. En la secuencia didáctica que dicha autora propone, la definición se presenta después de una introducción intuitiva del límite finito de una sucesión y de una serie de debates y discusiones en torno a él.

La relación entre el número real y el límite o, dicho con más precisión, la relación entre el principio de continuidad que caracteriza el número real y el análisis infinitesimal en el que están englobados el cálculo de límites, el de derivadas o el de integrales, quedó establecida por Dedekind (1998: 93-94) a través del método de las cortaduras. Dedekind demuestra la equivalencia entre el citado principio y el siguiente teorema: «Si en el proceso de variación de una magnitud x se puede determinar, para cada magnitud positiva δ dada, un valor correspondiente, a partir del cual x varía menos que δ, entonces x se aproxima a un valor límite». En primer lugar, Dedekind admite la existencia de dos valores denominados α y β que cumplen que $\alpha \geq \beta$ y a los que denomina límite superior e inferior respectivamente, para llegar posteriormente a demostrar la necesaria igualdad entre ambos valores.

Las dificultades para comprender el límite están motivadas en muchos casos por la dificultad para manejar el conjunto de los números reales; esto ha llevado a autores como Earles (1995) a investigar la relación que existe entre las creencias de los alumnos en torno al límite y la comprensión del concepto de límite. Esta autora analiza el límite de una función, aunque incluye cuestiones relativas a las sucesiones como: «What is between 0,999... and 1?». En el análisis de las creencias de los alumnos distingue las «creencias axiomáticas», entre las que sitúa los conceptos de número real, infinito y función, de «las fuentes de convicción», que hacen referencia a cómo se establece la verdad matemática y la validez de sus resultados. Según los resultados de su estudio, las fuentes de convicción influyen en la comprensión del concepto de límite, y en los estudiantes analizados se observan tres tipos de conceptos de límite: uno como movimiento (movimiento pasivo, movimiento activo y movimiento infinitesimal) y dos conceptos de límite como frontera (frontera local y global).

El número real queda reconocido como un concepto que deben conocer los alumnos para manejar el concepto de límite. La idea de considerar el número real como un requisito para dominar el límite finito de una sucesión es ampliamente criticada por Burn (2005: 293). Según este autor, el límite es precisamente un requisito sin el cual no es posible comprender los números reales; propone una nueva definición de límite basada en su idea de que la completitud del conjunto de los números reales no es imprescindible para asegurar que una sucesión tiene límite y en el manejo de sucesiones nulas (p. 287):

> «A sequence (A_n) is said to have the limit L, if and only if there exists a null sequence of positive terms (a_n) such that $-a_n < A_n - L < a_n$, for all positive integers n».

La nueva definición dada por Burn (2005) es criticada por Bergé (2006) porque, en su opinión, Burn no habría tenido en cuenta los trabajos de Davis y Vinner (1986), Sierpinska (1990) y Mamona-Downs (2001), quienes, además de señalar las dificultades de los alumnos en torno al límite, proponen categorías para describir la comprensión de este (en particular, así lo hace Sierpinska). Burn se centra en el trabajo con sucesiones nulas y Bergé señala que la principal diferencia entre la definición dada por Burn y la definición estándar de sucesión con límite L es que se restringe el campo de demostración, reduciéndose este a demostrar que para un $\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que si $n > n_0$, $a_n < \varepsilon$(es decir, el límite L es cero y por lo tanto en lugar de usar $|a_n - L| < \varepsilon$, emplea $a_n < \varepsilon$). También señala una ventaja en la definición dada por Burn y es que, una vez encontrado ε para la sucesión nula, el proceso se reduce a acotar usando estas sucesiones nulas. En resumen, Bergé señala que la definición dada por Burn no disminuye las dificultades que presenta la definición estándar, sino que las sitúa en un nivel distinto.

Espinoza y Azcárate (2000) analizan la tarea de un profesor que tiene que enseñar el concepto de límite. Para ello se preguntan qué tipo de conocimiento moviliza el profesor cuando se enfrenta con la tarea de enseñar el límite de una función y las dificultades con las que se encuentra. La enseñanza-aprendizaje del límite parece haber dado un paso más en los últimos años situando su medio de investigación en el nivel universitario (véase, por ejemplo, Corica y Otero (2009), en relación con la enseñanza del límite de una función por un profesor universitario).

De esta breve colección de reseñas extraemos dos conclusiones:

- Trabajamos en el conjunto de los números reales y abordamos el estudio del límite finito de una sucesión de manera diferenciada a otros límites (como sugiere también Mamona-Downs). Consideramos que el número real es un requisito para dominar el límite y que el estudio que se va a realizar de las definiciones seleccionadas es un paso que permitirá desarrollar secuencias didácticas que mejoren la enseñanza y aprendizaje del límite.
- Prácticamente, todas las investigaciones destacan un dilema; por una parte, parece necesario que los alumnos de secundaria aprendan una definición sin la cual el límite no tiene significado matemático; por otra, la definición parece demasiado «difícil» para esos mismos alumnos. El

enfoque fenomenológico, cuya presentación iniciamos inmediatamente, ayuda a superar, esperamos, este dilema.

MARCO TEÓRICO

Nuestro marco teórico se apoya en tres campos de investigación: la fenomenología, los sistemas de representación y el pensamiento matemático avanzado. En este trabajo manejamos solamente los dos primeros.

Usamos el término *fenómeno* siguiendo a Freudenthal (1983), para quien los conceptos o las estructuras matemáticas son *noumena*, pero también son piezas de las matemáticas que pueden ser consideradas como *phainomena*. Freudenthal ilustró esta dualidad apelando al número, el cual organiza el fenómeno de cantidad pero es también un fenómeno del sistema decimal (p. 28).

Hasta donde hemos sido capaces de indagar, Freudenthal no se ocupó del límite de una sucesión; resaltó que el aspecto cinético de una variable ha sido sustituido por definiciones precisas. Así, en lugar de escribir «x_n converge a cero», escribimos «$\lim_n x_n=0$» y se define así: «for every $\varepsilon>0$ there is an n_0 such that $|a_n|<\varepsilon$ for $n\geq n_0$» (Freudenthal, 1983: 492).

Gracias al formalismo y a las definiciones que este incorpora, organizamos fenómenos mediante conceptos o estructuras matemáticas y no hay razón para que este proceso se detenga en los primeros conceptos o estructuras, siempre que seamos capaces de concebirlos como fenómenos que querríamos organizar, matemáticamente, de nuevo.

Freudenthal distinguió cuatro tipos de fenomenología: fenomenología, fenomenología didáctica, fenomenología genética y fenomenología histórica.

Una fenomenología se diferencia de las demás por los fenómenos que tiene en cuenta con respecto al concepto matemático del que todas se ocupan. En el primer caso, hablamos de fenómenos que están organizados por las matemáticas en el momento actual y en el uso actual. En el segundo caso, hablamos de fenómenos presentes en el mundo de la enseñanza. En el tercer caso, hablamos de fenómenos que tienen en cuenta el desarrollo cognitivo de los aprendices y, en el cuarto caso, hablamos de fenómenos que son organizados por el concepto matemático y cómo esta organización se extendió a otros fenómenos.

Prestamos aquí atención, principalmente, a fenómenos organizados por las matemáticas, con la convicción de que es necesario comprender los fenómenos hallados en el límite finito de una sucesión antes de usarlos en la elaboración de una fenomenología didáctica de dicho límite. Aunque hemos usado como fuentes de información libros de texto ligados a la introducción del análisis matemático y hemos destacado la fenomenología (del primer tipo) que hemos sido capaces de observar, perseguimos, como meta, una fenomenología didáctica del límite.

El estudio fenomenológico del límite finito de una sucesión comienza, según nuestro equipo de investigación, observando que cuando hablamos de «sucesión convergente» combinamos dos ideas y dos enfoques.

Las dos ideas se expresan con frases muy parecidas:

- Primera idea: los términos de la sucesión parecen acercarse progresivamente *a un valor*, que denominamos límite.
- Segunda idea: los términos de la sucesión parecen acercarse progresivamente *entre sí*.

Estas ideas reciben, en matemáticas, tratamientos diferentes. La primera idea da lugar a varias definiciones y aquí usaremos una, coloquialmente conocida como «definición épsilon-delta», que llamaremos *definición S1* (sobre las otras definiciones, véase Claros, 2010: 186-188). La segunda idea da lugar a lo que se denomina sucesión de Cauchy y a la correspondiente definición la llamaremos *definición S2*. Son matemáticamente equivalentes en R, que es el conjunto numérico con el trabajamos.

A su vez, los dos enfoques usados para capturar esas ideas se conocen como enfoque *intuitivo* y enfoque *formal*. Estos enfoques no son matemáticamente comparables y dan lugar a los dos fenómenos de los que hablaremos con detalle. *Ambos enfoques* se reconocen en *cada* definición (S1 y S2). Al presentar las dos ideas hemos usado términos que se suelen considerar propios del enfoque intuitivo.

En nuestro caso, el concepto de sucesión convergente integra varias definiciones y cada una de ellas organiza, al menos, dos fenómenos que serán descritos con detalle en este trabajo y que contienen, respectivamente, un enfoque intuitivo y otro formal.

Nuestra investigación se apoya también en los sistemas de representación, en el sentido de Janvier (1987) y el «pensamiento matemático avanzado»; presentamos una breve reseña de estos campos.

Las representaciones juegan un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas y su aprendizaje por parte de los alumnos. Blázquez y Ortega (2000) proponen trabajar el concepto de límite en secundaria en los sistemas de representación que denominan: verbal, gráfico, simbólico y numérico. Empleamos el término *tabular*, en lugar de *numérico*, siguiendo a Janvier (1987), y entendemos que se usan cuatro sistemas de representación en la enseñanza del límite: simbólico, gráfico, tabular y verbal. Teniendo en cuenta esto hablaremos de fenómenos organizados por el límite de una sucesión en diferentes sistemas de representación. La observación de un fenómeno exige indicar el sistema de representación en que ha sido expresado, de ahí la necesidad de tener en cuenta los sistemas de representación al describir los fenómenos.

En 1985, en el seno de PME, se creó un grupo de trabajo que pretendía estudiar la naturaleza del «pensamiento matemático avanzado»; básicamente, pretendía profundizar en los procesos cognitivos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal (Dreyfus, 1990 y Tall, 1991). El límite es un concepto que se sitúa dentro del cálculo infinitesimal ya que la derivada y la integral se definen a partir de él. Además, el concepto de límite se considera abstracto y se suele situar en el ámbito de las llamadas matemáticas superiores. Autores como Tall (1991) y Cornu (1991) señalan esas dificultades y concuerdan en situar el límite dentro del pensamiento matemático avanzado.

Para desarrollar el contenido del presente trabajo solamente necesitamos apelar a la fenomenología y a los sistemas de representación.

DOS DEFINICIONES DE LÍMITE FINITO DE UNA SUCESIÓN

Se conocen varias definiciones de límite de una sucesión; cada autor suele introducir algún matiz o detalle técnico; sin embargo, desde nuestro punto de vista, todas las definiciones de límite finito de una sucesión se reducen a la formalización de una de las dos ideas mencionadas en el apartado anterior. Los libros de texto universitarios suelen presentarlas en el siguiente orden: (1) Caracterización matemática de la primera idea mediante una definición. (2) Caracterización matemática de la segunda idea mediante una definición. (3) Demostración de la equivalencia matemática de ambas definiciones.

En Claros (2010) hemos establecido que la elección de una u otra forma de la definición para caracterizar la primera idea no genera diferencias esenciales en lo que vamos a decir. Lo mismo ocurre con las variantes de las definiciones usadas para caracterizar la segunda idea. Por eso, creemos que las definiciones que se usen han de estar bien enunciadas, siendo de menor importancia el enunciado concreto adoptado, siempre que se halle dentro de la gama de definiciones aceptadas. Por ejemplo, para la definición S1, que recordamos a continuación, y cuya parte formal se apoya en ideas «métricas», se pueden usar intervalos u otras ideas. Sin embargo, no discutiremos aquí esta cuestión, que puede consultarse en Claros (2010: 177-185). Por «definición bien enunciada» entendemos aquí una definición generalmente autorizada.

Las definiciones que usaremos se presentan a continuación:

- *Definición S1*: Sea x_n una sucesión en R, decimos que x_n converge a un número real x (o tiene como límite el real x y escribimos lim x_n= x) si para cada ε > 0 existe un número natural N tal que si n ≥ N se cumple que $|x_n\text{-}x| < \varepsilon$ (Spivak, 1991: 615).
- *Definición S2*: Una sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy si para ε > 0 existe un número natural N tal que, para todo m y n, si m,n > N, entonces $|a_n\text{-}a_m| < \varepsilon$ (esta condición se escribe generalmente lim m,n→∞ $|a_n\text{-}a_m|$= 0) (Spivak, 1991: 624).

En ambas definiciones, R es el conjunto de los números reales y la convergencia en R se entiende como la convergencia en el espacio métrico R, con la distancia usual d(x,y) = |x-y|. En la jerga estudiantil, la definición S1 se conoce como «definición épsilon-delta», mientras que la definición S2 se conoce como la caracterización de las sucesiones de Cauchy.

FENÓMENOS ORGANIZADOS POR LA DEFINICIÓN S1 Y LA DEFINICIÓN S2

Cada definición organiza dos fenómenos, uno en el enfoque intuitivo y otro en el enfoque formal. A continuación enunciamos los fenómenos organizados por cada definición.

Fenómenos organizados por la definición S1

Aproximación simple intuitiva

Cuando observamos una sucesión de números reales cuyo candidato a límite queremos declarar, preguntamos si los valores que toma se van acercando más y más a un número. Este es el primer fenómeno que observamos en las sucesiones que tienen límite, también llamadas convergentes, y lo denominamos *fenómeno de aproximación simple intuitiv*a o fenómeno a.s.i.

Este fenómeno se observa en afirmaciones como la siguiente: «A medida que n aumenta, los términos de la sucesión se aproximan cada vez más al número real 2» (Vizmanos y Anzola, 1998). En general, caracterizamos el fenómeno a.s.i. del siguiente modo:

> – *Aproximación simple intuitiva (a.s.i.).* Dados *k* términos ordenados de una sucesión, generalmente consecutivos, $(1, a_1), (2, a_2),\ldots, (k,a_k)$, caracterizamos la aproximación simple intuitiva como el fenómeno observado al inspeccionar la secuencia de valores $a_1, a_2,\ldots, a_k$ cuando «parecen acercarse» a otro valor fijo (Claros, 2010: 147-148).

Empleamos la expresión *parecen acercarse* para capturar cualquier intuición para el límite finito de la sucesión; por ejemplo, como conjetura o como resultado del reconocimiento de una pauta (explícita o no) en los valores inspeccionados. El siguiente ejemplo paradigmático ilustra el fenómeno de aproximación simple intuitiva.

Modelo: En la sucesión *(1,1), (2,1/2), (3,1/3),…,* los términos *1/n* parecen acercarse a 0 a medida que *n* crece.

La aproximación simple intuitiva remite a la convicción de que los valores que van tomando los términos de una sucesión de números reales se acercan a un valor numérico real.

El fenómeno de aproximación simple intuitiva es el primero que se observa en las sucesiones que tienen límite y permite obtener un candidato a límite o comprobar, grosso modo, que un candidato a límite propuesto parezca adecuado. Sin embargo, este fenómeno no garantiza que el candidato seleccionado sea el verdadero límite de la sucesión presentada, porque la idea de «acercarse cada vez más» a un valor no ha quedado bien establecida con este fenómeno.

Retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones

La seguridad de que un candidato a límite es, efectivamente, el límite de la sucesión presentada se consigue a través del fenómeno que llamamos «retroalimentación» o «fenómeno de ida y vuelta en sucesiones», por los procesos que controla para establecer o descartar, sin lugar a dudas, el acercamiento indefinido de los valores de la sucesión a un candidato a límite bien elegido. Para caracterizar la *retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones (i.v.s.)* necesitamos describir esos procesos:

– El primer proceso, que denominamos *de ida*, corresponde a la expresión que forma parte de la definición S1: «para cada $\varepsilon > 0$, existe un número natural N». La «ida» se establece partiendo de la variable *dependiente* y llegando a la variable independiente.
– El segundo proceso, que denominamos *de vuelta*, corresponde a la expresión que forma también parte de la definición S1: «si $n \geq N$ se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$». En la «vuelta» se parte de la variable *independiente* y se acaba en la variable dependiente.

La observación conjunta de estos dos procesos da lugar a lo que denominamos fenómeno de retroalimentación o de ida-vuelta en sucesiones. Aquí, «primer proceso» y «segundo proceso» remiten a etapas inevitablemente consecutivas y ordenadas. La retroalimentación se manifiesta al interpretar y aplicar las acciones incluidas en los procesos indicados desde una perspectiva métrica, la cual exige construir una función (ε, *$N(\varepsilon)$*). Dicho en términos descriptivos: una vez establecido el entorno en el límite con ε dado, determinamos, si existe, un correspondiente valor de *n* asociado (es decir, «vamos» desde algún lugar del entorno hacia la variable natural); hecho esto, «volvemos» al entorno del límite para comprobar que las imágenes así obtenidas pertenecen al entorno considerado.

Lo anterior resume con palabras la retroalimentación; se lleva a cabo la construcción efectiva de una nueva función que queda vinculada unívocamente a la sucesión. De hecho, con el apoyo de la propia sucesión de referencia, el enfoque formal induce la construcción de tal función, o en su defecto la demostración de su existencia, la cual sirve a su vez para establecer una propiedad de la sucesión dada: su convergencia.

Modelo: Partiendo de la sucesión (n, 1/n) se construye la función (ε, $E(1/\varepsilon) + 1$) donde E designa la función parte entera. Una vez fijado ε, tenemos que determinar N a partir del cual $|1/n| < \varepsilon$; resolviendo esta inecuación, deducimos que n debe ser mayor que $(1/\varepsilon) + 1$. Para asegurarnos de que sea un número natural tomamos $N= E(1/\varepsilon)+1$.

Como consecuencia de lo anterior afirmamos que la definición S1 organiza los dos fenómenos de aproximación simple intuitiva (a.s.i.) y de ida-vuelta en sucesiones (i.v.s.).

Fenómenos organizados por la definición S2

Aproximación simple intuitiva de Cauchy

En un enfoque intuitivo de la definición de sucesión de Cauchy observamos que las distancias entre los términos de la sucesión se hacen cada vez más pequeñas a medida que n crece. Las distancias entre los términos de la sucesión tienden a cero cuando n y m crecen indefinidamente. Convenimos en llamar a este fenómeno, fenómeno de aproximación simple intuitiva de Cauchy.

– *Aproximación simple intuitiva de Cauchy (a.s.i.c.)*: Dados *k* términos ordenados de una sucesión, generalmente consecutivos, $(1,a_1)$, $(2,a_2)$, …, (k,a_k), caracterizamos la aproximación simple intuitiva de Cauchy como el fenómeno observado al inspeccionar cualquier secuencia de valores; a medida que avanzamos en la sucesión, la diferencia entre dos valores $/a_n - a_m/$ «parece acercarse» a cero. Es decir, a medida que avanzamos en la sucesión, las diferencias existentes entre cualesquiera dos valores de la sucesión se hacen cada vez más pequeñas.

Modelo: En la sucesión *(1,1), (2,1/2), (3,1/3),…,* las diferencias |*1/(m+1)- 1/m*| parecen acercarse a 0 a medida que *n* y *m* crecen. Las diferencias entre los términos consecutivos se van haciendo cada vez más pequeñas: |1/2 –1| > |1/3 –1/2| > |1/4-1/3| > …

El fenómeno de aproximación simple intuitiva de Cauchy es el fenómeno más fácil de observar en las sucesiones de Cauchy y sirve para obtener cierta convicción sobre el hecho de que las diferencias entre los términos de la sucesión se hacen cada vez más pequeñas a medida que avanzamos en ella. Sin embargo, este fenómeno no garantiza que la sucesión con la que se esté trabajando sea una sucesión de Cauchy, solamente da una primera pista sobre ello.

Retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones de Cauchy

La seguridad de que, cuando avanzamos en la sucesión, los términos no van a tener un comportamiento inesperado se adquiere con el fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones de Cauchy, el cual se apoya en los dos procesos siguientes, que forman parte de la definición S2.

– *Retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones de Cauchy*:

Primer proceso: Si ε > 0 existe un N perteneciente al conjunto de los números naturales.
Segundo proceso: Si n, m > N entonces $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

La observación conjunta de estos dos procesos da lugar a lo que denominamos fenómeno de ida-vuelta en sucesiones de Cauchy o i.v.s.c. Aquí, «primer proceso» y «segundo proceso» remiten a etapas inevitablemente consecutivas y ordenadas. La retroalimentación se manifiesta al interpretar y aplicar las acciones incluidas en los procesos indicados desde una perspectiva métrica, la cual exige construir una función *(ε, N(ε))*. Dicho en términos descriptivos: una vez fijado épsilon, tenemos que determinar el valor de N (es decir, «vamos» desde algún lugar del entorno hacia la variable natural) a partir del cual las diferencias entre dos términos cualesquiera de la sucesión son menores que el valor de épsilon fijado anteriormente (proceso «de vuelta»).

Modelo: Partiendo de la sucesión (n, 1/n) se construye la función (ε, E(1/ε) + 1) donde E designa la función parte entera. Si fijamos e, tenemos que determinar N de manera que si n y m pertenecen al conjunto de los números naturales se cumpla que |1/n-1/m| < ε. Sabemos que |1/n-1/m| < 1/n es una desigualdad que se cumple para todo n, m ≥ 1 y n < m; además, se cumple que 1/n < e, por la propiedad arquimediana. Entonces, tomando N= E(1/ε) + 1, aseguramos que |1/n-1/m| < ε.

Como consecuencia de todo lo anterior, afirmamos que la definición de sucesión de Cauchy organiza dos fenómenos: el de aproximación simple intuitiva de Cauchy (a.s.i.c.) y el de ida y vuelta en sucesiones de Cauchy (i.v.s.c.).

LOS FENÓMENOS EN LOS LIBROS DE TEXTO

La conclusión de que la definición S1 organiza dos fenómenos llevó a plantear la siguiente cuestión: en los libros de texto de matemáticas de secundaria, ¿se observan estos fenómenos cuando desarrollan el límite finito de una sucesión? En Claros (2010) dimos una respuesta afirmativa a esta cuestión, estableciendo los fenómenos usados y las respectivas frecuencias en los libros de texto de una muestra, teniendo en cuenta el periodo educativo en el que se habían publicado. También observamos que el fenómeno de retroalimentación declina frente al auge del fenómeno de aproximación intuitiva, sobre todo a partir de la aprobación y posterior desarrollo de la LOGSE en 1990. En todo caso, concluimos ahora que la fenomenología didáctica del límite constituye una tarea pendiente. En este apartado presentamos algunos ejemplos con objeto de precisar los fenómenos y el uso que hacen de estos varios autores en sus libros.

Por lo que respecta a las sucesiones de Cauchy, al ser un contenido no estudiado en secundaria, hemos buscado los fenómenos organizados por ella en manuales de texto universitarios. Dado el nivel en el que se desarrolla la idea de sucesión de Cauchy, parece razonable pensar que su desarrollo tendrá un marcado carácter formal, hecho que se ve corroborado con el «olvido» del fenómeno a.s.i.c.

Fenómenos a.s.i. e i.v.s. en libros de texto

Presentamos algunos ejemplos, extraídos de libros de texto de secundaria, de los fenómenos de aproximación simple intuitiva y retroalimentación, con el fin de ilustrar cómo los respectivos autores los usan cuando tienen que presentar el límite finito de una sucesión. Los ejemplos en español forman parte de una muestra de treinta libros de texto que se incluyó en Claros (2010) y que abarcan un periodo comprendido entre 1933 y 2005.

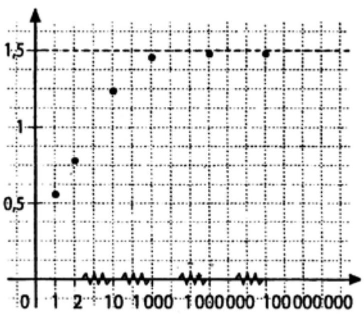
Los sistemas de representación más usuales en los que suele presentarse el límite son llamados verbal (v), gráfico (g), simbólico (s) y tabular (t). El uso de estos sistemas es señalado por Blázquez y Ortega (2000) y Claros (2010); este añade que, además de los sistemas de representación en los que aparece el límite, debemos considerar los formatos usados para presentarlo, y denomina estos como ejemplo (e) o definición (d). Con cada ejemplo hemos argumentado brevemente el fenómeno observado.

Ejemplos del fenómeno a.s.i.:

> Ejemplo 1: Vizmanos, Anzola y Primo (1981: 157):
> «Diremos que el número a es el límite de la sucesión (a_n) cuando a medida que n toma valores cada vez mayores entonces los términos de la sucesión se aproximan cada vez más al número real a».

El fenómeno de aproximación simple intuitiva se reconoce en expresiones como «los términos de la sucesión se aproximan cada vez más a un número real»; se usa el sistema de representación verbal y se presenta como una definición. Abreviamos usando el código de fenómeno: a.s.i. v-d.

Ejemplo 2: Bescos y Pena (2002: 206):



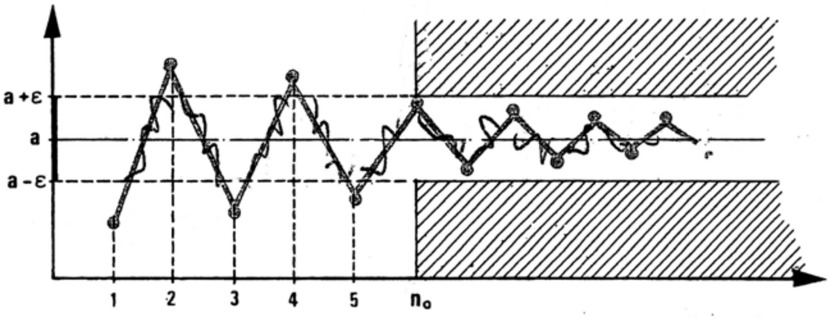
A partir de la observación de unos términos dibujados (figura 1) que se aproximan cada vez más al número real 1,5, se infiere que este es el candidato a límite; se usa el sistema de representación gráfico y se presenta como un ejemplo. Código de fenómeno: a.s.i. g-e.

Ejemplos del fenómeno i.v.s:

> Ejemplo 3: Terrise y Dávila (1976: 13):
> «Sea a_n una sucesión de números reales y L un número, también real. Se dice que la sucesión a_n tiende a L, o tiene por límite L cuando para todo número $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un término a_p de la sucesión tal que él y todos los términos que le siguen difieren de L, en valor absoluto, en menos que ε».

Se trata de un fenómeno de ida-vuelta ya que explicita los dos procesos indicados; se usa el sistema de representación verbal y se presenta como una definición. Código de fenómeno: i.v.s. v-d.

Ejemplo 4: Vizmanos, Anzola y Primo (1981: 159):



En la figura 2 se observa cómo los términos de la sucesión, a partir de un cierto lugar, quedan dentro del intervalo centrado en el límite; se usa el sistema de representación gráfico y se presenta como una definición. Repárese en la dificultad que tiene el autor para mostrar la gráfica, porque une los puntos y tacha la unión; entendemos que quiere con ello superar una inevitable e incorrecta analogía con el límite de una función en un punto. Código de fenómeno: i.v.s. g-d.

Los numerosos ejemplos estudiados en libros españoles condujeron a suponer que los dos fenómenos se observarían también en libros escritos en otros idiomas. Por este motivo, y aunque reconocemos su escaso interés estadístico, hemos recopilado información de algunos libros de texto de secundaria británicos.

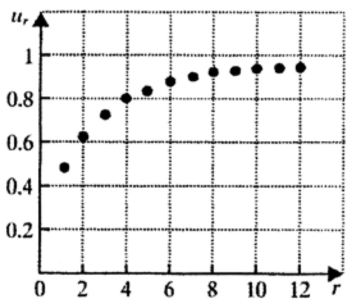
Ejemplos de fenómeno a.s.i. en libros de texto del Reino Unido:

Ejemplo 5: Bostock y Chandler (2000: 228):

«Consider the sequence $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ All the terms are less than 1, and the values of the terms are increasing as r increases, i.e., as the sequence progresses, the value of the terms is getting closer to 1. Expressing this in symbols we have $u_r \to 1$ as $r \to \infty$ or $\lim_{r\to\infty} u_r = 1$ and we say that the sequence converges».

Se observan expresiones como «the value of the terms is getting closer to 1», se usa el sistema de representación verbal y se presenta como un ejemplo. Código de fenómeno: a.s.i. v-e.

Ejemplo 6: Bostock y Chandler (2000, p. 228):



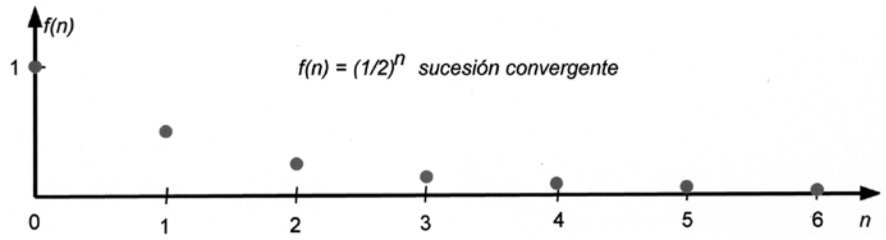
Por observación, en la gráfica (figura 3), de algunos términos que se aproximan cada vez más al número real 1, se infiere este como candidato a límite; se usa el sistema de representación verbal y se presenta como un ejemplo. Código de fenómeno: a.s.i. v-e.

Ejemplo 7: Mannall, G., y Kenwood, H. M. (2000: 110):

«b) The terms of the sequence are $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, ... Each term is half of the immediately preceding term. As n increases, succeeding terms get progressively nearer to zero.
Sequences whose nth term approaches a finite number as n approaches infinity are called convergent – they converge on or get closer to a number. Te number they converge on is sometimes called the limit or the limiting value».

Se observa la expresión «terms get progressively nearer to zero», se usa el sistema de representación verbal y se presenta como un ejemplo. Código de fenómeno: a.s.i. v-e.

Ejemplo 8: Mannall, G., y Kenwood, H. M. (2000: 110):



Adaptada de Mannall y Kenwood, oc.

En la gráfica de la figura 4 notamos cómo los términos de la sucesión se van aproximando cada vez más a cero, se usa el sistema de representación verbal y se presenta en un ejemplo. Código de fenómeno: a.s.i. g-e.

Ejemplo 9: Boardman, Clough y Evans (2005: 124):

« A sequence may be defined inductively by a recurrence relation such as in the previous worked example, or by a refining formula such as $u_n = \frac{1+3n}{n+2}$.
In this case, you need to substitute n=1,2,… to obtain

$$u_1 = \frac{1+(3\cdot 1)}{1+2} = \frac{4}{3},\quad u_2 = \frac{1+(3\cdot 2)}{2+2} = \frac{7}{4}$$, etc. As n gets larger $u_{100} = \frac{1+(3\cdot 100)}{100+2} = \frac{301}{102} \approx 2.951$

and $u_{1000} = \frac{1+(3\cdot 1000)}{1000+2} = \frac{3001}{1002} \approx 2.995$ so that the values are getting closer and closer to 3. This sequence is said to converge to the value 3.»

La expresión «the values are getting closer and closer to 3» indica que se usa el sistema de representación verbal y el formato ejemplo. Código de fenómeno: a.s.i. v-e.

No hemos hallado ejemplos del fenómeno i.v.s. en los pocos libros de texto de secundaria británicos que hemos consultado.

Fenómenos a.s.i.c. e i.v.s.c. en libros de texto

Tampoco hallamos sucesiones de Cauchy en los libros de texto de enseñanza secundaria en España que hemos manejado. En los manuales universitarios, en cambio, se encuentran fácilmente, presentándose, en la mayoría de los casos, una demostración de la equivalencia matemática entre ella y la definición de límite finito de una sucesión. En los manuales analizados se usa principalmente el fenómeno de ida-vuelta en sucesiones de Cauchy en diferentes sistemas de representación y asociado al formato definición. Por eso presentamos solamente dos ejemplos.

> Ejemplo 10: Rey Pastor y Castro Brzezicki (1963: 253):
> «La condición necesaria y suficiente para que una sucesión α_1, α_2, α_3, ... de números reales tenga límite finito es que para cada número positivo corresponda un valor de n, tal que todas las diferencias $\alpha_n - \alpha_m$ entre términos posteriores a se conserven en valor absoluto inferiores a ε».

En este caso se presenta la definición de sucesión de Cauchy junto con la aseveración de que una sucesión de Cauchy es equivalente a una sucesión que tiene límite. Estamos ante el fenómeno i.v.s.c., ya que, sucesivamente, se determinan ε y a continuación (proceso de ida) se comprueba que las diferencias $\alpha_n - \alpha_m$ en términos posteriores a α_v cumplen que son inferiores a ε (proceso de vuelta). Se usa el sistema de representación verbal en una definición. Código de fenómeno: i.v.s.c. v-d.

> Ejemplo 11: Martínez Salas (1992: 255):
> «La condición necesaria y suficiente para que una sucesión $\{x_n\}$ sea convergente es que a todo número $\varepsilon > 0$ *se pueda asociar un número natural v tal que, cualesquiera que sean p y q mayores que v, se verifique* $|x_p - x_q| < \varepsilon$».

El autor apela al fenómeno i.v.s.c.: en el proceso de ida se determina y a continuación, en el proceso de vuelta, se comprueba que las diferencias $x_p - x_q$ en términos posteriores a x_v cumplen que son inferiores a. Se usa el sistema de representación simbólico y el formato definición. Código de fenómeno: i.v.s.c. s-d.

COMPARACIÓN DE LOS FENÓMENOS DESCRITOS

En este apartado detallamos las diferencias principales entre los fenómenos organizados por cada una de las definiciones S1 y S2.

Enfoque intuitivo

En el fenómeno a.s.i., los términos de la sucesión parecen acercarse a un número (candidato a límite), mientras que, en el fenómeno a.s.i.c., las diferencias entre los términos de la sucesión parecen devenir cada vez más pequeñas.

A pesar de existir diferencias notables entre los fenómenos de cada pareja, diferencias que dotan a cada uno de ellos de una entidad propia, observamos también cierta relación, que ilustraremos con un ejemplo.

Dada la sucesión, observamos que los términos parecen acercarse al valor 3. Esto significa que, si pensamos en una escala de proximidad a 3, la secuencia u_{100}, u_{1000}, u_{10000} es una secuencia de valores cada vez más próximos a 3, como corresponde al fenómenos a.s.i. También observamos que las diferencias entre dos términos están más próximas a cero si los índices son mayores: $u_{10000} - u_{1000} < u_{1000} - u_{100}$, como corresponde al fenómeno a.s.i.c.

En este ejemplo, no hay razón alguna para dar prioridad a uno de los fenómenos frente al otro: si se comienza observando que $u_{10000} - u_{1000} < u_{1000} - u_{100}$, se deduce que la secuencia u_{100}, u_{1000}, u_{10000} es una secuencia de valores cada vez más próximos a 3; por ejemplo, basta con observar que $3 - u_{100} > 3 - u_{1000} > 3 - u_{10000}$.

Queda pendiente de estudio el supuesto en el que el candidato a límite no fuera elegido correctamente. Si conseguimos algunas respuestas sobre este supuesto, creemos que estaremos un poco más cerca de una fenomenología didáctica del límite.

Enfoque formal

En los fenómenos i.v.s. e i.v.s.c., se observa que las funciones asociadas a cada uno de estos fenómenos pueden ser distintas.

Consideremos el siguiente ejemplo. Dada la sucesión $A_n = \{1/n\}$, observamos que la función (ε, N(ε)) en la definición de límite finito es distinta de la función (ε, N(ε)) asociada a la misma sucesión A_n en la definición de sucesión de Cauchy. Esta afirmación se comprueba tomando valores de épsilon y observando qué valor debe tomar N para que se cumplan la definición S1 y la definición S2. El cuadro 1 recoge lo esencial del ejemplo.

Aunque la definición de la función ((*ε, N(ε)*) parece distinta en ambos casos ya que los valores correspondientes (*(ε, N(ε)*) no coinciden y lo que se hace con ellos tampoco, no es difícil encontrar una función que unifique ambas, ya que si elegimos N= max$\{n_1,n_2\}$, siendo n_1 el valor N en la definición de límite finito de una sucesión y n_2 el valor de N en la definición de sucesión de Cauchy, se cumplen la definición S1 y la definición S2. Por lo tanto, los dos fenómenos se dan inseparablemente.

Cuadro 1

	Función (*ε, N(ε)*) en la definición de límite finito de una sucesión	Función (*ε, N(ε)*) en la definición de sucesión de Cauchy
ε=1/4	|1/n|< 1/4 para N=5	|1/n - 1/m|< 1/4 para N=4
ε=1/5	|1/n|< 1/5 para N=6	|1/n - 1/m|< 1/5 para N=5
ε=1/6	|1/n|< 1/6 para N=7	|1/n - 1/m|< 1/6 para N=6
ε=1/7	|1/n|< 1/7 para N=8	|1/n - 1/m|< 1/7 para N=7
ε=1/8	|1/n|< 1/8 para N=9	|1/n - 1/m|<1/8 para N=8

Enfoques intuitivo y formal

Los ejemplos considerados se generalizan sin dificultad.

Si el candidato a límite, en la definición S1, se eligió correctamente (lo cual nunca está garantizado en el marco del enfoque intuitivo), es imposible que se dé el fenómeno a.s.i. pero no el a.s.i.c. o, recíprocamente, que se dé el fenómeno a.s.i.c. pero no el fenómeno a.s.i.

Si el candidato a límite, en la definición S1, se eligió correctamente (lo cual solamente se sabrá cuando se haya desarrollado el enfoque formal), es imposible que se dé el fenómeno i.v.s. pero no el i.v.s.c. o, recíprocamente, que se dé el fenómeno i.v.s.c. pero no el fenómeno i.v.s.

Dicho con otras palabras, si el candidato a límite fue elegido correctamente, los fenómenos a.s.i. y a.s.i.c. son distinguibles pero se dan inevitablemente ambos. Lo mismo cabe decir de los fenómenos i.v.s. e i.v.s.c.

Queda pendiente de estudio el supuesto en el que el candidato a límite no fuera elegido correctamente.

Decimos que los fenómenos a.s.i. y a.s.i.c. son equivalentes o que hay equivalencia fenomenológica entre los enfoques intuitivos incluidos en la definición S1 y la definición S2 porque no se puede dar uno de los fenómenos sin que se dé el otro.

Análogamente, decimos que los fenómenos i.v.s. e i.v.s.c. son equivalentes o que hay equivalencia fenomenológica entre los enfoques formales incluidos en la definición S1 y la definición S2 porque no se puede dar uno de los fenómenos sin que se dé el otro.

Concluimos que, en las sucesiones convergentes, hay un paralelismo entre la equivalencia matemática y la equivalencia fenomenológica.

EQUIVALENCIA FENOMENOLÓGICA ENTRE DEFINICIONES

Esta equivalencia entre las parejas de fenómenos a.s.i./a.s.i.c., por una parte, e i.v.s./i.v.s.c., por otra, lleva a establecer una equivalencia fenomenológica entre las definiciones de límite finito de una sucesión y sucesión de Cauchy, ya que cada definición organiza fenómenos que son fenomenológicamente equivalentes.

En el apartado anterior hemos usado dos veces la misma idea: dos fenómenos los hemos considerado como equivalentes, fenomenológicamente hablando, si refiriéndonos al mismo enfoque (respectivamente: intuitivo o formal) la observación de uno es inseparable de la observación del otro.

Elevamos esto a la categoría de criterio de equivalencia fenomenológica de fenómenos y enunciamos:

> Criterio 1. *Dos fenómenos son equivalentes fenomenológicamente si corresponden al mismo enfoque (o intuitivo o formal) y la verificación de un fenómeno va irremediablemente unida a la verificación del otro y viceversa.*
> Este criterio se verifica en el enfoque intuitivo: el fenómeno a.s.i. (que se observa en la definición S1) y el fenómeno a.s.i.c. (que se observa en la definición S2) *son equivalentes fenomenológicamente*.
> Lo mismo sucede, en el enfoque formal, con los fenómenos i.v.s. e i.v.s.c.: son equivalentes fenomenológicamente.

Esta equivalencia entre los fenómenos organizados por la definición S1 y la definición S2 sugiere el enunciado del siguiente criterio, que permite decir si dos definiciones matemáticas son equivalentes fenomenológicamente hablando.

> Criterio 2. *Dos definiciones matemáticamente equivalentes son equivalentes fenomenológicamente si los fenómenos organizados por cada una de ellas son fenomenológicamente equivalentes.*
> Teniendo en cuenta el criterio 1 y el criterio 2 concluimos que la definición S1 y la definición S2 son fenomenológicamente equivalentes.

Si reunimos todas las consideraciones sobre la equivalencia de los fenómenos, observamos que la equivalencia fenomenológica es algo más compleja que la equivalencia matemática. La equivalencia matemática establece que el contenido de una definición no es matemáticamente diferente del de la otra. La equivalencia fenomenológica establece que las parejas de fenómenos son distinguibles pero no se pueden dar los unos sin que se den los otros.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS

1. La definición S1 («definición épsilon-delta» de límite finito de una sucesión) organiza el fenómeno de aproximación simple intuitiva o fenómeno a.s.i. y el fenómeno de ida-vuelta en sucesiones o fenómeno i.v.s.
   El fenómeno a.s.i. da un primer candidato a límite, que quedará confirmado, a través del fenómeno i.v.s., cuando consigamos construir una función epsilon-N que satisfaga los dos procesos correspondientes.
2. La definición S2 (de sucesión de Cauchy) organiza el fenómeno de aproximación simple intuitiva de Cauchy o fenómeno a.s.i.c. y el fenómeno de ida-vuelta en sucesiones de Cauchy o fenómeno i.v.s.c.

El fenómeno de aproximación simple intuitiva de Cauchy da una primera impresión de lo que sucede con la sucesión; si la sucesión es de Cauchy, las distancias entre los términos se van haciendo cada vez más pequeñas. Una vez que tenemos cierta sospecha de que la sucesión es de Cauchy, recurrimos al fenómeno i.v.s.c. y construimos una función épsilon-N que satisfaga los dos procesos correspondientes. Si establecemos que una sucesión es de Cauchy, cabe inferir que la sucesión tiene límite, pero no sabemos cuál es ese límite.

3. Encontramos evidencias del fenómeno a.s.i. en libros de texto de educación secundaria de España y del Reino Unido. Estas evidencias solamente corresponden a una muestra «amplia» en el caso de los libros de texto españoles. Encontramos evidencias de los fenómenos i.v.s. en libros de texto de educación secundaria de España.
4. Encontramos evidencias de los fenómenos i.v.s.c. en manuales universitarios de España.
5. Hemos dado un criterio que permite decidir cuándo dos fenómenos son fenomenológicamente equivalentes; esto ha permitido afirmar que el fenómeno a.s.i. es fenomenológicamente equivalente al fenómeno a.s.i.c. y que el fenómeno i.v.s. es fenomenológicamene equivalente al fenómeno i.v.s.c.
6. Hemos dado un criterio para decidir si dos definiciones matemáticamente equivalentes son equivalentes fenomenológicamente y hemos usado este criterio para afirmar que la definición S1 (límite finito de una sucesión) y la definición S2 (sucesión de Cauchy) son equivalentes en este sentido.
7. Hemos precisado el sentido en que consideramos más compleja la equivalencia fenomenológica que la equivalencia matemática entre las definiciones.

Junto con el anterior resumen significativo del trabajo, mencionamos algunas líneas de investigación.

a) Para elaborar una fenomenología didáctica de las sucesiones convergentes es necesario ampliar el estudio de la equivalencia fenomenológica analizando casos en que el candidato a límite no esté bien elegido.

b) Es conveniente establecer en qué medida se deben trabajar los fenómenos a.s.i. e i.v.s. con alumnos de educación secundaria; paralelamente, conviene disponer de varios métodos de enseñanza. Algunas preguntas planteadas son: *a*) En la enseñanza y aprendizaje del límite finito de una sucesión, ¿serán más eficientes las clases magistrales que tengan en cuenta estos fenómenos? *b*) Los fenómenos a.s.i.c. e i.v.s.c., ¿se deben trabajar con alumnos de educación secundaria? *c*) ¿Cómo se adaptan estas ideas a alumnos de primeros años de universidad?

c) Para elaborar una fenomenología didáctica del límite finito de una sucesión será necesario profundizar en la bibliografía de Freudenthal y realizar experiencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de ambas definiciones con el apoyo de los fenómenos mencionados y de la equivalencia establecida entre fenómenos de cada enfoque.

AGRADECIMIENTOS

Revisores anónimos realizaron atinados comentarios, contribuyendo a mejorar sensiblemente la estructura, organización y redacción del trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BERGÉ, A. (2006). Convergence of Numerical Sequences – a commentary on «the Vice: Some Historically Inspired and Proof Generated Steps to Limits of Sequences» by B. Burn. *Educational Studies in Mathematics*, 61, pp. 395-402.

BESCOS, E. y PENA, Z. (2002). *Matemáticas 1.º Bachillerato. Humanidades y Ciencias Sociales*. Madrid: Oxford Educación.

BLÁZQUEZ, S. y ORTEGA, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En R. Cantoral (ed.). *En el futuro del cálculo infinitesimal.* México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 331-354.

BOARDMAN, S., CLOUGH, T. y EVANS, D. (2005). *Pure Core Maths 3 & 4*. Gateshead: Heinneman.

BOSTOCK, L. y CHANDLER, S. (2000). *Third Edition. Core Maths. Advanced Level.* Gateshead: Tech-Set.

BURN, B. (2005). The vice: some historically inspired and proof-generated steps to limit of sequences. *Educational Studies in Mathematics*, 60, pp. 269-295.

CLAROS (2010). *Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza*. Tesis Doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

CORICA, A. y OTERO, M. (2009). Análisis de una praxeología matemática en torno a funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática*, 12(3), pp. 305-331.

CORNU, B. (1991). Limits. En D. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, pp. 153-166.

DAVIS, R. y VINNER, S. (1986). The notion of limit: some seemingly unavoidable misconceptions stages. *Journal of Mathematical Behaviour*, 5, pp. 281-303.

DEDEKIND, R. (1998/1872). *¿Qué son y para qué sirven los números?* Traducción e introducción: José Ferreirós. Alianza Editorial: Madrid.

DREYFUS, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En P. Nesher y J. Kilpatrick (eds.). *Mathematics and cognition*. Cambridge, U. K.: Cambridge University Press, pp. 113-133.

EARLES, J. (1995). *University calculus students' conceptual understanding of the limit of a function.* Madison: University of Wisconsin.

ESPINOZA, L. y AZCÁRATE, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto «límite de función»: una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), pp. 355-368.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

GARBIN, S. y AZCÁRATE, C. (2001). El concepto de infinito actual. Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato. *Suma*, 38, pp. 53-67.

JANVIER, C. (ed.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

MAMONA-DOWNS, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Matematics*, 48, pp. 259-288.

MANNALL, G. y KENWOOD, H. M. (2000). *Pure Mathematics 1.* Bath, U.K.: Heinneman Educational Publishers.

MARTÍNEZ SALAS, J (1992). *Elementos de Matemáticas*. Valladolid: Lex Nova.

PRZENIOSLO, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secundary school. *Educational Studies in Mathematics* 60, pp. 71-93.

REY PASTOR, J. y CASTRO (1963). *Elementos de matemáticas*. Madrid: Saeta.

SÁNCHEZ, M.ª T. (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza*. Tesis Doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

SIERPINSKA, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics* 10 (3), pp. 24-36.

SPIVAK, M. (1991). *Calculus*. Barcelona: Editorial: Reverté.

SPIVAK, M. (2006). *Calculus.* Houston: Cambridge University Press.

TALL, D. (1991). *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer.

TERRISE JARDI, M. y DÁVILA GARCÍA-MIRANDA, M. (1976). *Matemática Curso 2.º BUP.* Zaragoza: Librería General.

VIZMANOS, J. y ANZOLA, M. (1998). *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales* I. Madrid: Editorial SM.

VIZMANOS, José R., ANZOLA, M. y Primo Martínez A. (1981). *Funciones-2 Matemáticas 2.º BUP. Teoría y Problemas.* Madrid: SM.

CONVERGENT SUCCESSION AND CAUCHY'S SUCCESSION: MATHEMATICAL EQUIVALENCE AND PHENOMENOLOGICAL EQUIVALENCE

Francisco Javier Claros Mellado
Universidad Carlos III
fclaros@eco.uc3m.es

María Teresa Sánchez Compaña
Fundación María Inmaculada.
teresasanchez@eummia.es

Moisés Coriat Benarroch
Universidad de Granada
mcoriat@ugr.es

This study analyzes the phenomenological equivalence of the well-known mathematical equivalence between a convergent sequence and a Cauchy sequence. The theoretical framework involves components of Phenomenology, Mathematical Advanced Thinking and Representation Systems. In order to carry it out, two propositions were selected to define a finite limit of a sequence (labeled the 'epsilon-delta' definition) and a Cauchy sequence.

Two phenomena were classified in each definition; corresponding to intuitive approximation and to a formal round-trip. High school Spanish textbooks were analyzed to recognize both phenomena organized by the first definition. British textbooks were used to observe only one of the two phenomena.

The Spanish sample size is larger than the British sample size. Textbooks were chosen randomly and are not representative samples. Comparisons of phenomena in each definition exhibited both similarities and differences, as well as introduced a judgment of equivalence between phenomena and a criterion of 'phenomenological equivalence' between definitions that are mathematically equivalent.

The following conclusions were reached:

– The «Epsilon-delta» definition organizes a simple intuitive approximation phenomenon (IAP, shorted as «a.s.i.» in the article, following Spanish first letters of these words) and a round-trip phenomenon (RTP, to be found as «i.v.s.» in the article). The first phenomenon gives a numerical «candidate» for the sequence limit. The second phenomenon allows the confirmation or rejection of the candidate, as it results in the construction of a new function from R+ to N (called «epsilon-N») satisfying the two processes associated to a round-trip.
– The Cauchy sequence definition organizes another simple intuitive approximation phenomenon (IAPC, or «a.s.i.c» in the article) and a round-trip phenomenon (RTPC, to be found as «i.v.s.c.»); IAPC gives an initial understanding of what occurs in the sequence's terms. If the sequence is a Cauchy sequence the distances between two terms decreases indefinitely. On evidence that a sequence is a Cauchy sequence, the phenomenon RTPC is used to construct a function from R+ to N, satisfying two processes involved in the round-trip. If it is determined that a sequence is Cauchy, it can be inferred that the sequence has a limit, however, it is not know what that limit is. Obviously, IAPC is well distinguished from IAP, as RTPC is distinguished from phenomenological equivalence. The mathematical equivalence between a convergent sequence and a Cauchy sequence is collected.
– The IAP phenomenon was located in secondary school textbooks in both Spain and the United Kingdom. The RTP phenomenon was also located in secondary school textbooks in Spain. Additionally, the RTPC phenomenon was also located in Spanish university textbooks.
– A criterion was used to classify the level of two phenomena's phenomenological equivalency. This enabled the IAP and IAPC phenomena to be phenomenologically equivalent to one another, as with the RTP and RTPC phenomena.
– A criterion was used to decide if two (mathematically equivalent) definitions are also phenomenologically equivalent. This study concludes that «epsilon–delta» and Cauchy's definitions are, in fact, phenomenologically equivalent. The phenomenological equivalence between the two definitions appears to be more complex than mathematical equivalence, since it involves two sets of phenomena: a pair viewed under an intuitive approach and another pair viewed under a formal approach.
– This paper has clarified that phenomenological equivalence between definitions can be more complex than mathematical equivalence. Mathematical equivalence states that the content of a definition is not mathematically different from the other. This phenomenological equivalence states that phenomena IAP, IAPC, RTP and RTPC can be distinguishable and can only appear in pairs (if one of the phenomena is observed, the other can also be observed).