



Proyecto Fin de Carrera

**Ingeniería Técnica en Telecomunicación**

---

# Electromagnetismo en medios materiales con monopolos magnéticos

Fernando López Bara

---

Director: Joan García García  
*Departamento de Ingeniería Electrónica*  
**Escuela de Ingeniería**  
**Universidad Autónoma de Barcelona (UAB)**

Septiembre 2012



El sotasignant, *Joan García García*, Professor de l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria (ETSE) de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB),

CERTIFICA:

Que el projecte presentat en aquesta memòria de Projecte Fi de Carrera ha estat realitzat sota la seva direcció per l'alumne *Fernando López Bara*.

I, perquè consti a tots els efectes, signa el present certificat.

Bellaterra, 3 de setembre 2012.

Signatura:

A handwritten signature in blue ink, appearing to be 'J. García García', written over a faint circular stamp or watermark.

**Resum:**

Els monopols es defineixen, teòricament, com càrregues que generen camps amb divergència diferent de zero. Malgrat això, les entitats amb comportament mimètic al dels monopols magnètics, segueix sent compatible amb  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , han estat detectades experimentalment en gels d'espín ('spin-ices'). Aquesta aparent contradicció pot generar confusió i, per tant, requereix explicació. D'altra banda, s'estudien propietats duals dels materials amb càrregues magnètiques efectives tals com la 'magnetricity' en els 'spin-ices' (conductivitat de les càrregues magnètiques davant un camp magnètic extern). Com una conseqüència de la magnetricitat, l'apantallament del camp magnètic en materials amb càrregues magnètiques és analitzat. Estudio la propagació d'ones electromagnètiques transversals en medis materials infinits i en plasmes magnètics diluïts davant la presència de camps elèctrics externs constants. Aquesta propagació és dual a la propagació d'ones en plasmes de càrregues elèctriques davant la presència de camps magnètics externs, constants. Finalment, estudio el frenat elèctric d'un conductor de càrregues magnètiques amb un efecte dual al frenat magnètic en conductors elèctrics.

**Resumen:**

Los monopolos se definen teóricamente como cargas que generan campos cuya divergencia es diferente de cero. Sin embargo, las entidades con comportamiento mimético al de los monopolos magnéticos, siendo compatible con  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , han sido detectadas experimentalmente en hielos de espín ("spin-ices"). Esta aparente contradicción puede generar confusión y, por lo tanto, requiere explicación. Por otro lado, se estudian propiedades duales de los materiales con cargas magnéticas efectivas. Hago una descripción de la "magnetricity" en los "spin-ices" (conductividad de cargas magnéticas ante el campo magnético exterior). Como una consecuencia de la magnetricidad, analizo el posible apantallamiento del campo magnético en materiales con cargas magnéticas. Analizo la propagación de ondas electromagnéticas transversales en medios infinitos y en plasmas magnéticos diluidos ante la presencia de campos eléctricos externos constantes. Esta propagación es la dual de la existente en plasmas de cargas eléctricas ante la presencia de campos magnéticos externos, constantes e intensos. Por último, estudio el frenado eléctrico de un conductor de cargas magnéticas como efecto dual del frenado magnético en conductores eléctricos.

**Summary:**

The monopoles are theoretically defined as sources of fields with null divergence. However, the structural entities with mimetic behavior to that of magnetic monopoles, which have been detected in the spin-ices, are compatible with the fact of generating magnetic field whose divergence is null. This apparent and confuse contradiction requires to be explained, which is an objective of this work. On the other hand, dual properties of materials with effective magnetic charges are analyzed. The magnetricity, which is the conductivity of magnetic charges under external magnetic fields, is described. As a consequence of magnetricity, the magnetic field shielding by materials with magnetic charges is pondered. The propagation of transversal electromagnetic waves in both infinite material media magnetic and dilute plasmas under the presence of electric constant and strong fields is studied. This is a dual property of the same condition propagation of EM transversal waves in electric plasmas. Finally, the electric braking dual of the standard magnetic one is outlined.

**Índice.**

1. Introducción Física.....	5
1.1. Introducción de monopolos magnéticos en medios materiales.....	6
1.2. Introducción de posibles aplicaciones tecnológicas de los “spin-ice” y materiales similares.....	10
2. El modelo “Dumbbells”.....	11
3. Campos magnéticos en los “spin-ices”.....	13
3.1. Determinación de campos de Maxwell.....	15
3.2. Campos moleculares.....	17
4. Fuerza de Lorentz.....	19
5. Ecuaciones de campos.....	21
6. Energía e impulso del campo electromagnético.....	22
7. “Magnetricity”.....	25
8. Transformaciones de dualidad.....	29
9. Respuestas lineales.....	32
9.1. Conductividad.....	33
9.2. Función dieléctrica.....	35
9.3. Permeabilidad magnética.....	36
9.4. Respuestas lineales con varias clases de “dyones”.....	37
10. Cálculo de polarizabilidades.....	38
11. Propagación electromagnética en medios no dispersivos.....	39
11.1. Matriz de propagación electromagnética no dispersiva.....	40
12. Propagación electromagnética en medios dispersivos.....	43
12.1. Función dieléctrica dispersiva.....	44
12.2. Pérdidas dieléctricas de energía.....	45
13. Velocidad de grupo.....	51
13.1. Resultados cuantitativos.....	51
14. Conductividad de “dyones” en el modelo Lorentz-Drude.....	54
15. Ondas transversales en plasmas.....	55
15.1. Ondas transversales en plasmas eléctricos.....	56
15.2. Ondas transversales en plasmas de cargas magnéticas.....	58
16. Frenado eléctrico dual del magnético.....	64
17. Conclusiones y perspectivas.....	66
18. Bibliografía.....	69

**Índice de figuras.**

<i>Figura 1.- Disposición geométrica de la estructura cristalina de los “spin-ices”.</i>	7
<i>Figura 2.- Disposición de los momentos magnéticos en los tetraedros en el estado fundamental.</i>	8
<i>Figura 3.- Figura de los tetraedros con sus respectivos momentos magnéticos en sus vértices.</i>	8
<i>Figura 4.- Representación esquemática de la disposición de formación del plasma magnético.</i>	9
<i>Figura 5.- Representación esquemática de los monopolos libres en el plasma magnético frío ya constituido.</i>	20
<i>Figura 6.- Esquema de energía potencial de un dipolo enlazado y de una carga libre.</i>	26
<i>Figura 7.- Pérdidas de energía en un “spin-ice” en función del campo magnético y de la frecuencia.</i>	49
<i>Figura 8.- Pérdida de energía cuando la función dieléctrica tienen varias frecuencias propias.</i>	50
<i>Figura 9.- Parte real y parte imaginaria de la función dieléctrica A.</i>	52
<i>Figura 10.- Parte real e imaginaria de la función dieléctrica B.</i>	52
<i>Figura 11.- Índice de refracción y coeficiente de absorción.</i>	52
<i>Figura 12.- Velocidad de grupo en función de la frecuencia</i>	53
<i>Figura 13.- Velocidad de grupo con una frecuencia dada.</i>	53
<i>Figura 14.- Disco girando ante la presencia del campo magnético.</i>	64

## 1. Introducción Física.

La primera noticia escrita acerca de los monopolos magnéticos se publicó en 1269 por Petrus Peregrinus [1] y fue para ratificar la imposibilidad de su existencia. Este autor medieval afirmaba que al partir por la mitad un imán, el cual tiene polo norte y polo sur, resultan dos imanes con sendos polos norte y sur. Es decir, es imposible aislar un polo, ya sea norte o sur, de su otro polo antagónico, y por consiguiente no era posible la existencia de monopolos libres e independientes. En esta misma dirección, en 1861 Maxwell [2] formuló como una de sus cuatro ecuaciones que la divergencia del campo magnético se anula siempre, lo cual implica que es imposible encontrar una fuente de campo magnético localizada en un punto.

Por otro lado, en sentido inverso, la primera vez que algún autor expresó por escrito algo en sentido positivo sobre la existencia de monopolos fue M.P. Curie [3] quien publicó un comentario sobre el posible paralelismo entre la electricidad o conducción de carga eléctrica y la conducción de cargas magnéticas que debería llamarse magnetricidad. Sin embargo, fue Dirac en 1931 [4] quien introdujo formalmente tanto en forma cualitativa como cuantitativa la idea de monopolo magnético como un solenoide muy largo y extensible similar a una cuerda, y por ello ahora en recuerdo de esa idea se denomina a este modelo "Dirac's strings" o cuerdas de Dirac. Conforme a esta idea, el solenoide cuya longitud debería ser mucho mayor que su radio implicaría una interacción entre los polos localizados en los extremos que debería tender a cero. En consecuencia, en esta construcción ideal de Dirac, los extremos del solenoide ante un campo magnético externo se comportarían como polos que se moverían en sentidos opuestos y de forma cuasi-libre. Además, según Dirac, los monopolos procedentes de los extremos tendrían una "carga magnética" efectiva que ante el campo magnético externo le produciría una fuerza. La carga de estos monopolos estaría cuantizada y por diversos argumentos físicos [3] se relaciona con la carga del electrón según la fórmula,  $g = h / (e\mu_0)$ , donde  $h$  es la constante de Planck,  $e$  es la carga del electrón y  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío. De hecho, según Dirac, era necesario introducir el concepto de carga magnética para justificar la cuantización de la carga eléctrica.

Cinco décadas después de la formulación de los denominados monopolos de Dirac, Cabrera [5] dio a conocer un evento empírico en el que, según este autor, una corriente superconductor inducida en un dispositivo de interferencia cuántica formado por un aro superconductor, denominado "squid" (acrónimo de "superconducting quantum interference device") sólo podía ser justificado por el cruce de monopolos a través de dicho dispositivo que bien pudieran provenir de la radiación cósmica. Este dispositivo estaba formado por un sistema en forma de "aro de calamar" (forma familiar que se conoce al "squid" por la coincidencia del acrónimo con su significado del fonema inglés) constituido por una circunferencia de un material superconductor muy delgado. Según el argumento de Cabrera, cuando el dispositivo fuera atravesado por una supuesta carga magnética, la variación de flujo magnético produciría corrientes estables en el superconductor que por efecto Meissner [32] preservarían el interior de éste del campo magnético. La forma observada de la corriente inducida en el superconductor sólo podría explicarse, según Cabrera, por la presencia de cargas magnéticas atravesando el dispositivo. Lamentablemente, para el propio autor, parece que este evento nunca más se ha vuelto a repetir.

En cualquier caso, desde que Dirac argumentó que la cuantización de la carga eléctrica sólo era posible encajarla dentro de la Electrodinámica si se consideraba la existencia de cargas magnéticas, la búsqueda experimental de éstas así como la formulación teórica de una Electrodinámica dual (con la presencia de cargas magnéticas y eléctricas) ha sido y es un tema recurrente.

Siguiendo en forma cronológica los intentos de explicar cómo sería la formulación del Electromagnetismo en el caso de existir estas entidades magnéticas, en 1938, Jordan [6] interpretó y aclaró conceptualmente lo analizado en 1931 por Dirac en un famoso trabajo. Y en 1974, Hooft [7], por un lado, y Polyakov [8], por otro, basándose en las ideas anteriores introdujeron la idea de monopolo magnético como una contribución a la segunda gran unificación de las tres fuerzas más intensas de la naturaleza: la electromagnética, la nuclear débil y la nuclear fuerte. Todos estos trabajos teóricos han provocado la persecución experimental de manifestaciones de la existencia de monopolos magnéticos. Todo ello hace que en el presente momento, grandes grupos de investigación están invirtiendo tiempo y recursos en la búsqueda de indicios sobre estas cargas tanto en Física de Altas Energías [8] como en el interior de materiales sólidos [9-20].

Otros antecedentes sobre cargas y corrientes magnéticas se han desarrollado en el cálculo de campos en la dispersión de ondas electromagnéticas debidas a la difracción en antenas de apertura [21] y en el estudio de resistores de memoria [22], así como en el estudio de fuentes equivalentes en la reconstrucción de superficies 3D [23]. Estas fuentes equivalentes de corrientes y cargas magnéticas pueden constituir un eficiente y muy potente método de cálculo para complejos problemas electromagnéticos [21-23]. Estos procedimientos se desarrollan con el objetivo fundamental de obtener exactitud en la determinación de campos eléctricos y magnéticos que sean soluciones de las ecuaciones de Maxwell. Pero no se trata de asignar naturaleza independiente, es decir, se proponen como elementos matemáticos dentro de un modelo para obtener resultados físicos reales pero sin que sean entidades a las que se les asigna existencia física real.

### **1.1. Introducción de monopolos magnéticos en medios materiales.**

La idea inicial que formalizó Dirac no ha podido ser validada con evidencias empíricas, con excepción de los eventos que Cabrera dijo haber obtenido en 1982. En cualquier caso, este tema recurrente de las cargas magnéticas ha recibido recientemente un aldabonazo importante en un sentido muy diferente al que imaginaron experimentalmente y diseñaron teóricamente los pioneros en este tema citados en los párrafos anteriores. No obstante, los principios básicos utilizados en el diseño de un Electromagnetismo extendido al caso de la existencia de cargas magnéticas puede servir de inspiración para comprender recientes resultados experimentales que han tenido lugar en materiales sólidos [14,15]. En dichos experimentos han sido detectadas entidades cuyos comportamientos ante el campo magnético externo es como si poseyeran no sólo cargas eléctricas sino que también tuvieran carga magnética.

Aceptando que estas entidades presentan fenomenología similar a la que es de esperar que tuvieran las cargas magnéticas, lo primero que hay que decir es que no pueden ser consideradas como partículas elementales tales como son el electrón, el hueco electrónico de los semiconductores, el muon y ni tan siquiera el protón o el neutrón que aun siendo partículas complejas (constituidas por quarks) pueden tener existencia independiente en el espacio libre. Las entidades aparecidas en los elementos sólidos sólo pueden ser posibles en el medio material, Estos sólidos son los denominados hielos de espín ("spín-ices") [9-11,13-15,18-20,24-29] o los aislantes denominados topológicos [12].

Por lo tanto las cargas magnéticas en estos materiales corresponden a comportamientos efectivos que imitan a los que tendrían las partículas con carga magnética y cuyo diseño teórico ha de ser forzosamente diferente al que fue avanzado por Dirac hace ocho décadas.

En consecuencia, los monopolos magnéticos en medios materiales son modelos efectivos dirigidos a explicar las propiedades de unas estructuras cristalinas y que como tales están sometidos a la

especulación y debate cuyo valor vendrá dado en la medida que sean capaces de explicar de forma cuantitativa los resultados experimentales. Afortunadamente, dichos experimentos son más simples que los que se exige para determinar la existencia de cargas magnéticas en física de altas energías. Por otro lado, se acepta que la naturaleza de estos supuestos monopolos magnéticos es compatible con la condición de que la divergencia del campo de Maxwell en estos materiales sigue siendo cero, es decir:  $\nabla \cdot B = 0$  [27].

Es necesario en primer lugar hacer una ligera descripción de las características de las estructuras cristalina y magnética de aquellos materiales en los que se ha detectado entidades microestructurales cuyo comportamiento es similar al de las cargas magnéticas. Estos son fundamentalmente compuestos de tierras raras que cristalizan en forma similar al pirocloro ("spin-ices") [9-11,13-15,18-20,24-29] y los aislantes topológicos [12]. Los segundos conciernen a situaciones específicas de algunos aislantes cuyos electrones que circulan por la superficie generan un campo electromagnético que se puede considerar como el que producirían unas cargas magnéticas localizadas en posiciones especulares con respecto a la superficie del material. Estos aislantes topológicos tienen un interés teórico indudable dentro de la teoría cuántica de campos pero son difícilmente utilizables como dispositivos electrónicos y por ello la dimensión tecnológica de estos materiales es, al menos por el momento, mucho más reducida que los citados en primer lugar.

Los compuestos de tierras raras, que cristalizan en forma cuya denominación en cristalografía es tipo pirocloro, son compuestos cuya fórmula química es  $Ho_2Ti_2O_7$  y  $Dy_2Ti_2O_7$ , donde  $Ho$  es holmio,  $Dy$ , disprosio,  $Ti$ , titanio y  $O$ , oxígeno. En esta estructura cristalina, lo que fundamenta sus propiedades magnéticas es que los iones de tierra rara,  $Ho$  o  $Dy$  ocupan los vértices de tetraedros regulares que están conectados entre sí por cada vértice con otros tetraedros que en denominación cristalográfica serían sus vecinos más próximos [14].

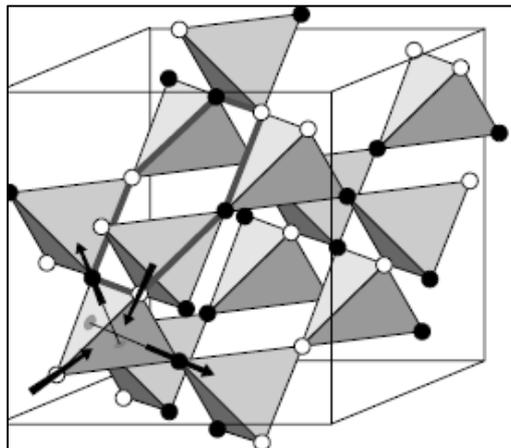


Figura 1.- Disposición geométrica de la estructura cristalina de los "spin-ices". [14]

El campo cristalino de estos compuestos genera momentos magnéticos en cada átomo cuya orientación es la dirección (1, 1, 1) que se dirige hacia el centro del tetraedro, además dos de los cuatro momentos magnéticos apuntan hacia afuera del tetraedro y dos hacia dentro. Esta configuración de momento magnético total igual a cero en términos de magnetismo de la materia se dice que estos materiales son completamente antiferromagnéticos.

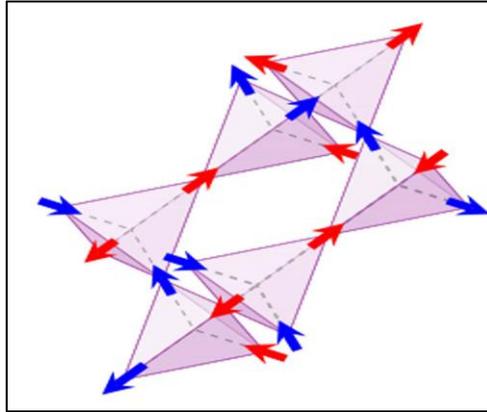


Figura 2.- Disposición de los momentos magnéticos en los tetraedros en el estado fundamental. [39].

La posible modificación del sentido de uno de los momentos magnéticos en uno de los vértices de un tetraedro modifica el balance nulo del momento magnético total de los dos tetraedros que comparten el mismo vértice en el que se ha producido la inversión. Entonces, la imanación total en los dos tetraedros contiguos que comparten el mismo vértice es diferente de cero y de diferente signo en cada uno de ellos. En este caso se crea un par de polos magnéticos (norte-sur o positivo-negativo) y desde el punto de vista del campo magnético cada polo tiene un comportamiento idéntico pero de signo contrario. Si la inversión no progresa y queda fija en el vértice en el que se produce la inversión de dirección, el sistema es como un microimán con dos polos del tamaño de la longitud de separación de los centros de dos tetraedros, es decir, es de la longitud de una molécula. Si se forman muchas inversiones, por ser un sistema en el que la inversión tiene un coste de energía prácticamente nulo [9], el sistema pasa de ser de imanación cero para cada tetraedro a imanación cero por cada pareja de tetraedros que forman los dipolos o microimanes moleculares, es decir, cada pareja de tetraedros componen un microimán con dos polos, uno negativo y positivo. Entonces la configuración sufre un cambio en el que las fuentes de generación de campo magnético son los microimanes con dos polos que se han venido a denominar sistema de "dumbbells" [9-10].

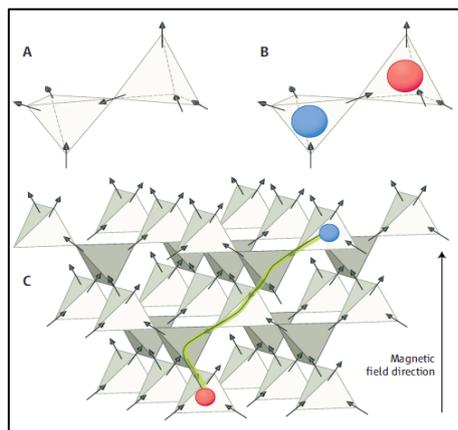


Figura 3.- Figura de los tetraedros con sus respectivos momentos magnéticos en sus vértices. [25].

En la figura 3-A se dibuja dos tetraedros neutros, En la siguiente, 3-B, se ha formado por inversión de un momento magnético en el vértice compartido por los dos tetraedros un dipolo de cargas magnéticas. Y por último, en la figura 3-C, al propagarse la inversión se ha formado una cuerda de Dirac en la que en los extremos se están las cargas magnéticas equivalentes. Cuando la longitud de esta cuerda aumenta los dos polos son prácticamente independientes ante la presencia del campo magnético externo.

Cada microimán puede ser considerado también como un par de polo-antipolo. La característica de los “spin-ices” que hace posible la existencia de cargas magnéticas es que las inversiones entre dos tetraedros se pueden propagar en sucesivos cambios entre tetraedros contiguos con un mínimo gasto de energía. Por consiguiente, los dipolos van aumentando progresivamente su longitud, formándose lo que se denomina cuerdas de Dirac (por la semejanza física a los solenoides de Dirac). En esta cuerda de Dirac, la interacción atractiva entre los dos diferentes polos magnéticos puede disminuir tanto que a partir de una determinada separación los polos son prácticamente independientes y funcionan como si cargas magnéticas de diferente signo estuvieran “nadando” en medios neutros de carga. En consecuencia, la estructura antiferromagnética inicial se convierte en un conjunto de cuerdas de Dirac de diferentes tamaños que pueden interactuar con un campo magnético exterior. En dicho conjunto de cuerdas, ante la interacción con el campo magnético, la longitud de los microimanes puede aumentar y con este incremento de longitud se genera un mayor número de polos desacoplados (monopolos) que viajan en el interior del material. Este escenario en su límite puede llegar a constituir un estado de plasma magnético [27] cuya dinámica es equivalente a su dual, el plasma de carga eléctrica.

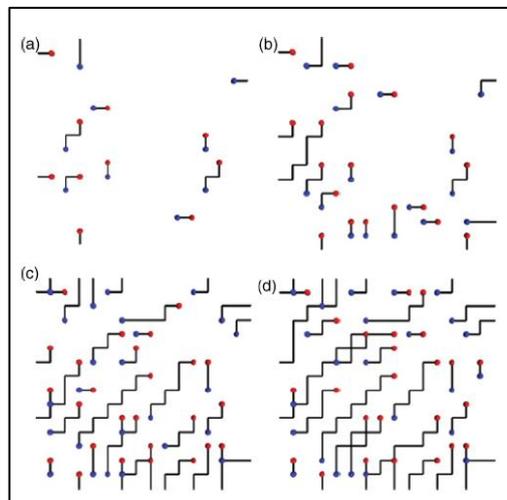


Figura 4.- Representación esquemática de la disposición de formación del plasma magnético. [48].

En la figura 4, coexisten monopolos libres (puntos rojos o azules solitarios), dipolos con parejas de puntos rojos y azules acoplados y cuerdas de Dirac, donde los puntos rojos se van progresivamente separando de los azules formando la denominada cuerda.

El plasma magnético es un sistema de carga total cero de partículas cargadas positivas y negativas que interactúan entre sí mediante una interacción coulombiana entre sus componentes cargados [7, 8, 9,11, 12, 19, 27]:

$$V_{ij} = \frac{K}{4\pi} \frac{g_i g_j}{r_{ij}} \tag{1}$$

Donde  $K$  es una constante que se definirá más adelante de forma que permita establecer la unidad magnética de carga  $g$  en coherencia con el sistema de unidades internacional.

El plasma magnético funciona de forma similar al eléctrico pero con cargas positivas y negativas magnéticas procedentes de los polos magnéticos de cada par que se desacople al aumentar la distancia. A diferencia de los monopolos de Dirac que no son observables, es decir, constituyen variables ocultas del sistema que sólo se manifiestan indirectamente de forma fenomenológica, los monopolos en forma de cuerdas extensibles en los “spin-ices” son observables experimentalmente [24-28].

No obstante, el estado real de los “spin-ices” ante un campo magnético exterior es el de un sistema en el que coexisten microimanes con polos acoplados y diferentes cuerdas de Dirac que constituyen monopolos efectivos que interaccionan coulombianamente entre sí. Esto implica la necesidad de formular las ecuaciones del Electromagnetismo, contando con la existencia de estas cargas magnéticas efectivas [9-10]. Y en consecuencia, el sistema se puede convertir en un estado conductor de cargas magnéticas de forma dual al conductor de cargas eléctricas.

## **1.2. Introducción de posibles aplicaciones tecnológicas de los “spin-ice” y materiales similares.**

Lo primero que se debe analizar son las modificaciones que pueden surgir dentro del electromagnetismo de los medios materiales e incluso dentro del vacío si se consideran estas cargas magnéticas. Eventualmente, este Electromagnetismo extendido puede servir para interpretar ciertos procesos de radiación cósmica o aquellos que puedan aparecer en la Física de altas energías en los colisionadores de hadrones tales como el LHC [8]. No obstante, en este trabajo me centraré en el estudio de las cargas magnéticas dentro de los medios materiales, estudiando propiedades de éstos cuando aparecen cargas magnéticas tal como ocurre en los “spin-ices”.

Hacer un resumen sobre las novedades más relevantes dentro del Electromagnetismo ante la existencia de monopolos magnéticos constituye un objetivo inicial de este trabajo. La primera parte sirve para aclarar los principios generales en los que se basan aquellas propiedades electromagnéticas duales que serán analizadas en la segunda parte de este proyecto. La denominación de Electromagnetismo dual procede por ser dual la posibilidad de existencia de carga. Obviamente, cuando una evidencia empírica, tal como la surgida en los “spin-ices” es tan reciente, deben estudiarse los principios generales que pueden servir para describir las propiedades de los materiales que son susceptibles de ser utilizados como dispositivos que transmitan la energía y corriente procedente de estas cargas magnéticas. No obstante, por ser tan reciente las manifestaciones experimentales de éstas, no puede ser un estudio demasiado ambicioso en el sentido tecnológico de sus propiedades, aunque si se consolidan las ideas experimentales y proliferan los tipos de materiales con propiedades similares es necesario tener un estudio lo más completo posible de los comportamientos y fenomenología derivada de la naturaleza dual de la carga.

En consecuencia, será objeto de la segunda parte de este trabajo el análisis de las siguientes propiedades:

- La “magnetricity” o movimiento de cargas magnéticas ante el campo magnético en dualidad y semejanza con la “electricity” o movimiento de cargas eléctricas ante el campo eléctrico. El apantallamiento del campo magnético en los materiales con cargas magnéticas (jaula de “Faraday magnética”) en dualidad y semejanza al apantallamiento del campo eléctrico por los conductores (jaula de Faraday estándar) como consecuencia de la “magnetricity”.
- Las respuestas del medio material ante los campos externos e internos que no sean demasiado intensos para que dichas respuestas puedan considerarse lineales.
- La conductividad dependiente de la frecuencia de la onda electromagnética.
- La propagación de ondas electromagnéticas transversales no confinadas en medio con monopolos magnéticos. Dado que el sistema físico que se constituye en el seno del material es neutro en cargas

magnéticas, de acuerdo con la denominación de Bonitz [27], los “spin-ices” cuando las cargas magnéticas están en forma cuasi-libre, constituyen lo que se denomina un plasma magnético. En consecuencia, de forma dual al caso del plasma eléctrico, analizaré el comportamiento de aquél ante las ondas transversales ayudadas con campos eléctricos constantes, externos e intensos cuya forma de comportarse es la dual del plasma electrónico tal como surge en los gases ionizados.

- El frenado eléctrico de los sistemas con cargas magnéticas en dualidad al frenado magnético en los conductores con cargas eléctricas, estudiando las fuerzas de frenado macroscópico de un sistema con cargas magnéticas ante la presencia de campos eléctricos perpendiculares.

Muchos otros objetivos podrían ser desarrollados con posterioridad y que se pueden incluir en el capítulo de perspectivas de este trabajo. Ejemplos de ellos son fáciles de relatar, aunque posiblemente difíciles de llegar a obtener conclusiones de forma simple e inmediata, estos podrían ser:

- La teoría del campo de radiación generado por las cargas magnéticas, en dualidad del que existe con las cargas eléctricas aceleradas.
- La propagación de las ondas electromagnéticas en medios confinados en donde existan monopolos en dualidad a las propiedades de propagación en medios confinados en los que sólo existan cargas eléctricas.
- Establecer el diseño teórico de dispositivos “electrónicos” que en este caso deberían denominarse magnetrónicos. Ello implicaría establecer una teoría cuántica que permita, como se hizo en los comienzos de la electrónica, los planteamientos cuánticos necesarios para estudiar dispositivos de la magnetronica en dualidad y semejanza con aquellos que han permitido desarrollar la electrónica física en particular y la electrónica en general. No obstante, es preciso establecer la diferencia entre la posible magnetronica con respecto a la espintrónica, ya que ésta es una parte de la electrónica en la que el espín o momento magnético de los electrones es la base fundamental de la conducción.

## 2. El modelo “Dumbbells”.

La existencia efectiva de cargas magnéticas en los “spin-ices” es que los microimanes que se forman cuando se produce una inversión del momento magnético en una pareja de tetraedros contiguos puede entenderse como un dipolo de cargas magnéticas, cuyo momento dipolar magnético es:

$$\vec{\mu} = g\vec{l} \quad (2)$$

Donde  $\vec{l}$  es el vector que une la carga magnética negativa  $-g$  con su pareja positiva  $+g$ . Esta sencilla ecuación (2) es importante pues define las dimensiones de la carga magnética como carga eléctrica por velocidad. Este dipolo que se ha venido a llamar “dumbbells” [9] es semejante a su dual dipolo eléctrico elemental formado por una carga eléctrica negativa y otra de igual módulo y positiva separado por una distancia que en el caso de los “dumbbells” es la separación entre dos tetraedros contiguos.

La energía de interacción magnética entre los momentos magnéticos de los átomos de tierras raras de la red antiferromagnética localizados en los vértices de los tetraedros puede expresarse en forma de interacción dipolo-dipolo, lo cual es comúnmente aceptado [9-11,13-16] considerando tanto el corto como el largo alcance y su expresión es:

$$E = \sum_{i,j} \left[ J \vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j + \frac{\mu_0}{4\pi} D \left( \frac{\vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j}{r_{ij}^3} - \frac{3(\vec{\mu}_j \cdot \vec{r}_i)(\vec{\mu}_j \cdot \vec{r}_j)}{r_{ij}^5} \right) \right] \quad (3)$$

Donde  $J$  y  $D$  son constantes de acoplamiento deducibles empíricamente y la distancia entre los momentos magnéticos  $\mu_i$  y  $\mu_j$  es  $r_{ij}$ . La energía de esta ecuación es igual, salvo errores cuantitativamente despreciables, a la energía que procede de considerar la interacción tipo coulombiano de cargas magnéticas que puede expresarse de la siguiente forma [9,10]:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,j(r_{ij} \neq 0)} \frac{K}{4\pi} \frac{g_i g_j}{r_{ij}} + \sum_{i,j(r_{ij}=0)} v_0 g_i g_j \quad (4)$$

Donde  $g_i$  y  $g_j$  son las cargas magnéticas cuyos valores vienen definidos por  $g = |\vec{\mu}|/l$ , donde  $|\vec{\mu}|$  es el módulo del vector que tiene su origen en la carga negativa del dipolo y acaba en la positiva del mismo (las unidades de momento magnético atómico vienen dadas en magnetones de Bohr). Esta longitud  $l$  es igual a la separación entre dos tetraedros contiguos que es un parámetro fijo de la estructura cristalina. Además, el término  $v_0 g_i g_j$  es la energía termodinámica para formar un par acoplado, es decir, un microimán. La energía de la ecuación (4) sugiere que la interacción entre dos cargas magnéticas  $\frac{K}{4\pi} \frac{g_i g_j}{r_{ij}}$  implica que cada una de ellas genera un campo magnético [9,10.27] cuya expresión es:

$$\vec{B}(r) = \frac{K g_i}{4\pi} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (5)$$

Y que la fuerza de interacción entre un campo magnético externo  $\vec{B}(r)$  y la carga magnética  $g_i$  es  $\vec{F}(r) = g_i \vec{B}(r)$ . En consecuencia teniendo en cuenta el campo magnético creado por un dipolo, ello implica que la divergencia de este campo magnético viene dada por la expresión:

$$\nabla \cdot \vec{B}(r) = K \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (6)$$

Por otro lado, en este modelo de “dumbbells” surgen dos de polarizaciones procedentes de los dos tipos de dipolos eléctricos y otros dos magnéticos, cuya definición explícito-matemática es [40,41]:

$$\vec{P} \equiv \begin{pmatrix} \vec{P}_e \\ \kappa \vec{P}_m \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\Delta v} \int_{\Delta v} \vec{r} \begin{pmatrix} \rho_e \\ \kappa \rho_m \end{pmatrix} (\vec{r}) d^3 r \quad (7)$$

$$\vec{M} \equiv \begin{pmatrix} \vec{M}_e \\ \kappa \vec{M}_m \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2\Delta v} \int_{\Delta v} \vec{r} \Lambda \begin{pmatrix} \vec{J}_e \\ \kappa \vec{J}_m \end{pmatrix} (\vec{r}) d^3 r \quad (8)$$

Donde  $\vec{P}_e$  y  $\vec{P}_m$  son las polarizaciones eléctrica (magnética) que se genera por los momentos dipolares cuando las cargas eléctricas (magnéticas) no tienen una distribución uniforme. Los correspondientes momentos dipolares proceden de dipolos estáticos pues no dependen del movimiento de las cargas sino de su posición (los dipolos estáticos son construidos con dos cargas iguales y de signo contrario separados una distancia). La constante  $\kappa$  tiene que definirse como inversa de la velocidad de la luz en el vacío en orden a homogeneizar las dimensiones de los vectores:

$$\begin{pmatrix} \vec{P}_e \\ \kappa \vec{P}_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_e \\ \kappa \rho_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{M}_e \\ \kappa \vec{M}_m \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \vec{J}_e \\ \kappa \vec{J}_m \end{pmatrix}.$$

Las dimensiones de esta constante  $\kappa$  implica que la constante  $K$  de las fórmulas (1), (4), (5) y (6) se relaciona con  $\kappa$  mediante la expresión  $K = \kappa\mu_0 c$  lo cual implica que  $K$  tiene unidades de  $K = \mu_0$  en el sistema internacional de unidades. Además, los dos tipos de imanación  $\vec{M}_e$  y  $\vec{M}_m$  de la ecuación (8) son las imanaciones generadas por las corrientes eléctricas y magnéticas  $\vec{J}_e$  y  $\kappa\vec{J}_m$ , respectivamente, y cuyos momentos dipolares han venido a denominarse cinéticos [40-44] pues dependen del movimiento de las cargas que forman las correspondientes corrientes. En concordancia y coherencia con las expresiones de las polarizaciones, los momentos dipolares estáticos y cinéticos vienen a ser las correspondientes polarizaciones multiplicadas por  $\Delta v$ . Para una explicación exhaustiva ver [40, 41, 43].

### 3. Campos magnéticos en los “spin-ices”.

Es necesario insistir en los diferentes campos que pueden definirse en los medios materiales puesto que en los “spin-ices” las distintas definiciones pueden aclarar el hecho de llamar a estas entidades monopolos a su vez de decir que la divergencia del campo magnético sigue siendo cero. Por un lado, está el campo que corresponde a las ecuaciones de Maxwell. Este campo es un campo de carácter macroscópico que se define como un campo medio sobre un elemento de volumen, que aun siendo un elemento diferencial en las integraciones matemáticas, es de una dimensión de varios órdenes de magnitud superior a las dimensiones atómicas o moleculares [31-35]. Este campo tiene la particularidad que es de divergencia nula incluso en los “spin-ices” [27]. Este hecho, como ya he dicho, podría poner en cuestión el concepto de monopolos que por definición es aquella fuente de campo cuya divergencia es diferente de cero.

Sin embargo, los microimanes que dan lugar a las cuerdas de Dirac en estos materiales y que su presencia crece con la del campo magnético exterior tienen dimensiones atómicas. Por lo tanto, el análisis de este campo en dichas dimensiones es importante pues es éste el que tiene la responsabilidad del Electromagnetismo del sistema en estos materiales. Por ello es preciso hacer una revisión de los conceptos de los diferentes campos microscópicos y moleculares, así como su relación con los macroscópicos o campos medios de Maxwell.

Por tanto, las entidades definidas como monopolos magnéticos en “spin-ices” [9-11, 13-16, 21, 27] son de tal naturaleza que se mantiene como válida la ecuación  $\nabla \cdot \langle \vec{B} \rangle = 0$ , donde el campo  $\langle \vec{B} \rangle$  es el campo denominado de Maxwell y que se refiere al campo medio en un elemento de volumen donde existen muchas moléculas, por ello se debe hacer un análisis de las diferentes escalas en las que se definen los diferentes campos electromagnéticos.

La escala macroscópica es la de los cuerpos macroscópicos que van desde la dimensión del Universo hasta las dimensiones de las muestras de laboratorio a las que se desean hacer medidas para determinar sus propiedades electromagnéticas, tales como función dieléctrica, susceptibilidad magnética, conductividad, etc. Estas muestras vienen a ser del orden del centímetro [35].

En segundo lugar, se deben considerar que las propiedades de los materiales vienen definidas o determinadas por variables físicas que se deducen a partir de integraciones matemáticas en un recinto normalmente de una, dos o tres dimensiones. En estas integrales, el integrando tiene una determinada variabilidad, por ejemplo el campo magnético depende de la función densidad de corriente, y el campo

eléctrico de la densidad de carga. Así se tendrá que la integración de la variable física, sea escalar o vectorial, vendrá definida por  $C = \int_R I(x, y, z, t) d^n r$ , donde  $n$  es la dimensión del recinto.

Esta integración se calcula de forma que el valor de la variable viene dado por  $C(t) = \sum_{i,j,k} I(x_i, y_j, z_k, t) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$  donde  $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = \Delta v$ , siendo  $v$  un elemento de volumen

llamado diferencial en el que se supone que la variable  $I(x, y, z, t)$  permanece constante en un instante de tiempo  $t$ . Es decir, si esa variable tuviera variabilidad en el elemento de volumen  $v$  se tendría que reducir éste y aumentar el número en el sumatorio, o alternatively, si las dimensiones de este elemento de volumen son inferiores a la capacidad de medida empírica, es necesario conformarse con determinar el valor medio de esa variable  $I(x, y, z, t)$  en el elemento de volumen  $v$ . Esta segunda situación es la que pensó Maxwell y es que cuando las dimensiones de  $v$  son inferiores a aproximadamente entre  $10^{-9}$  y  $10^{-12}$  del volumen de la muestra macroscópica de laboratorio, es difícil que cualquier sonda pueda evaluar de forma directa o indirecta la variable  $I(x, y, z, t)$ . Por ello el campo de Maxwell, siempre se toma en valores medios en los intervalos diferenciales.

Sin embargo, las dimensiones de los denominados microimanes, tienen dimensiones atómicas que están en el intervalo entre  $10^{-21}$  y  $10^{-24}$  las dimensiones macroscópicas mínimas que he fijado en  $10^{-6} m^3$ . Lo cual implica que en cada elemento diferencial de volumen  $v$  puede haber entre  $10^9$  y  $10^{12}$  moléculas o microimanes. En consecuencia los campos que afectan a estos microimanes no pueden definirse como campos de Maxwell, es decir, campos medios en el elemento de volumen.

Se puede argumentar que en esas dimensiones, los efectos microscópicos sólo pueden contabilizarse mediante efectos cuánticos, lo cual pueden desvirtuar las teorías que se deduzcan a partir de la Electromagnetismo Clásica. Pero en este caso, es una energía de origen clásico tal como es la ecuación (4), la que da buena cuenta de los resultados de la energía definida por la ecuación (3), de acuerdo con el conocido y normalmente aceptado modelo "dumbbells" descrito en la sección anterior. Por ello es preciso elaborar una teoría clásica que sea coherente con las ecuaciones clásicas (3) y (4) tal que por el principio de correspondencia pueda ayudar a un modelo cuántico que sea capaz de explicar el comportamiento de "spin-ices" [44]. Es decir, es necesario establecer un Electromagnetismo clásico que haga punto de encuentro con la explicación cuántica por medio del principio de correspondencia. Además desde un punto de vista tecnológico van a ser las conclusiones y ecuaciones clásicas las que se van a poder aplicar de forma más o menos inmediata para obtener dispositivos que sirvan de aplicación de los fenómenos que se describen en apartados sucesivos. Estas teorías clásicas que dan resultados coherentes con sus correspondientes cuánticas, aunque no abundan, no son extrañas. Algunos ejemplos serían la función dieléctrica y conductividad de la teoría de Lorentz-Drude deducida clásicamente a partir de las leyes de Newton, y que aporta resultados similares a la función dieléctrica determinada por la denominada "Random Phase Aproximation"[43,44] cuyo planteamiento es exclusivamente cuántico. Otro ejemplo es el efecto Meissner-Oschenfeld [33], cuyas explicaciones cuántica y clásica coinciden con bastante fidelidad y precisión [32]. Por lo tanto no es descabellado intentar construir modelos clásicos para explicar la fenomenología dentro de los "spin-ices" partiendo de adecuados modelos dentro de la Física clásica. De hecho ya se tiene la teoría de Onsager [14,15 y 17] para la determinación de la conductividad de un electrolito. Esta teoría permite justificar y explicar la conductividad de las cuerdas de Dirac, las denominadas cargas magnéticas de los "spin-ices", ante la presencia de un campo magnético exterior (ver la determinación de la denominada "magnetricity" [11, 12]).

En consecuencia en esta sección realizo un análisis de los diferentes campos electromagnéticos dentro de los dos modelos (que se ha demostrado que son equivalentes [9,10]), el de configuración de estructura magnética de momentos magnéticos y el de “dumbbells”. En electromagnetismo clásico, un potencial vector magnético se asocia a cada entidad que tenga un momento magnético  $\vec{m}_i$ . Este potencial magnético define un campo magnético en un punto que usualmente se denomina campo microscópico [9, 10, 25-27]:

$$\vec{B}'(\vec{r}) = \nabla \wedge \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \int_{V'} \frac{\vec{J}_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (9)$$

Donde  $J_i(r')$  es la corriente eléctrica de la partícula o entidad estructural que genere campo magnético

y el momento magnético viene definido por  $\vec{m}_i = \frac{1}{2} \int \vec{r} \wedge \vec{J}_i(\vec{r}) d^3r$ .

### 3.1. Determinación de campos de Maxwell.

El campo denominado macroscópico o magnético medio en la materia, el que aparece en las ecuaciones estándar de Maxwell [32-35], puede ser obtenido por medio del siguiente proceso [31-33, 35, 43]. En primer paso, se determina la contribución de todos los momentos magnéticos en la materia excluyendo un pequeño volumen,  $\Delta v$ , que puede elegirse esférico sin pérdida de generalidad y con la finalidad de simplificar. Este pequeño volumen está definido en la escala infinitesimal y es el que contiene el punto donde los campos eléctrico y magnético deberán ser calculados. Las dimensiones de este volumen  $\Delta v$  son suficientemente pequeñas como para considerar los campos, densidades de carga y de corriente de las ecuaciones de Maxwell constantes en todo este elemento de volumen. Pero las dimensiones de  $\Delta v$  son suficientemente grandes como para que contenga un gran número moléculas tetraédricas de “spines”, entre  $10^9$  y  $10^{12}$ . Una segunda contribución es el campo magnético (o eléctrico) de valor medio creado por las cargas magnéticas (o eléctricas) de las moléculas dentro de este volumen,  $\Delta v$ . Estos dos términos constituyen los denominados campos macroscópicos o campos medio del material magnético (o dieléctrico), que son los de las ecuaciones de Maxwell.

Cuando se considera el modelo de “dumbbells” con cargas magnéticas  $g_i$ , el valor medio del campo generado por todas estas cargas localizadas en un pequeño volumen esférico  $\Delta v$  puede ser escrito como [43]:

$$\begin{aligned} \langle \vec{b} \rangle_{\Delta v} &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{B} dV = -\frac{3}{4\pi R^3} \frac{K}{4\pi} \sum_i \int_{\Delta V} \nabla \left( \frac{g_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) d^3r = \\ &= -\frac{3}{4\pi R^3} \frac{K}{4\pi} \sum_i g_i \int_{S(\Delta V)} \left( \frac{\vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) dS = -\frac{K}{4\pi R^3} \sum_i g_i \vec{r}_i = -\frac{K}{3} \vec{P}_m \end{aligned} \quad (10)$$

Donde  $\vec{P}_m$  es la polarización de la carga dipolar magnética formada por pares de monopolos y antimonopolos confinados y el vector unitario  $\vec{n} = \frac{d\vec{S}}{dS}$  es el vector perpendicular al elemento de

superficie que es la variable de integración. La integral  $\int_{\Delta S} \frac{\vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} dS$  de la ecuación (10) depende de la geometría de  $\Delta V$  y es un factor determinante en el resultado final, pero otra geometría diferente de la forma esférica conserva la dependencia funcional del campo de valor medio  $\langle \vec{b} \rangle_{\Delta V}$ . Una indicación para obtener el valor de esta integral es el siguiente:

$$\int_{\Delta S} \frac{\vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} dS = \vec{e}_z \int_0^\pi \frac{R^2 \cos \theta \sin \theta}{(R^2 + r_i^2 - 2Rr_i \cos \theta)^{1/2}} d\theta = \frac{4\pi \vec{r}_i}{3} \quad (11)$$

El cálculo del campo magnético medio generado por todas las cargas  $g_i$  localizadas en un volumen esférico pequeño  $\left( \Delta V = \frac{4}{3} \pi R^3 \right)$  es en consecuencia:

$$\langle \vec{b} \rangle_{\Delta V} = -\frac{K}{4\pi R^3} \sum_i g_i \vec{r}_i = -\frac{K}{3} \vec{P}_m \quad (12)$$

Y de forma análoga se puede obtener el valor medio del campo eléctrico en el elemento de volumen si se considera que existen, a su vez, cargas eléctricas y, por lo tanto, su valor es [31-33,35]

$$\langle \vec{e}' \rangle_{\Delta V} = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0 R^3} \sum_i q \vec{r}_i = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}_e \quad (13)$$

El valor medio del campo magnético en el volumen  $\Delta V$  creado por los momentos magnéticos procedentes de las corrientes de carga eléctrica correspondientes a las moléculas en el interior del elemento de puede ser obtenida por medio de: [43]

$$\begin{aligned} \langle \vec{b}' \rangle_{\Delta V} &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \nabla \wedge \vec{A}(\vec{r}) d^3 r = \\ &= \frac{3}{4\pi R^3} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Delta V} \int_{\Delta V} \nabla \wedge \frac{\vec{J}_e(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' d^3 r = \frac{3}{4\pi R^3} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Delta V} \int_{\Delta S} \vec{n} \wedge \frac{\vec{J}_e(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS d^3 r' = \\ &= \frac{3}{4\pi R^3} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Delta V} \int_{\Delta S} \frac{\vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS \wedge \vec{J}_e(r') d^3 r' = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \int_{\Delta V} \vec{r}' \wedge \vec{J}_e(\vec{r}') d^3 r' = \\ &= \frac{2\mu_0}{4\pi R^3} \vec{m}_e = \frac{2\mu_0}{3} \vec{M}_e \end{aligned} \quad (14)$$

Donde  $\vec{M}_e$  es la imanación macroscópica debido a las corrientes eléctricas. Similarmente, el valor medio del campo eléctrico creado por la densidad de corriente magnética  $\vec{J}_m$  en este volumen es:

$$\langle \vec{e} \rangle_{\Delta V} = -\frac{K}{4\pi R^3} \int_{\Delta V} \vec{r}' \wedge \vec{J}_m(r') d^3 r' = -\frac{2K}{4\pi R^3} \vec{m}_m = -\frac{2K}{3} \vec{M}_m \quad (15)$$

Donde  $\vec{M}_m$  es la magnetización debida a las corrientes eléctricas. En resumen, el valor medio del campo magnético creado por las corrientes eléctricas viene dado por:

$$\langle \vec{b}' \rangle_{\Delta V} = \frac{2\mu_0}{3} \vec{M}_e \quad (16)$$

Para la validez del modelo de "dumbbells" la ecuación (12) debe ser completada. La polarización debida a los dipolos magnéticos en forma de pares de polos-antipolos debe ser idéntica a la generada por los dipolos magnéticos entendidos como corrientes eléctricas circulando como circuitos, de esta forma se

obtiene que se deba cumplir [43] que  $K\vec{P}_m = \mu_0\vec{M}_e$ . Entonces si la contribución del campo magnético de las moléculas fuera del volumen  $\Delta V$  es  $\vec{B}_0$ , el campo medio de la configuración de espín es:

$$\langle \vec{B}' \rangle = \vec{B}_0 + \langle \vec{b}' \rangle_{\Delta V} = \vec{B}_0 + \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}_e \quad (17)$$

Y por el modelo “dumbbells”:

$$\langle \vec{B} \rangle_{\Delta V} = \vec{B}_0 + \langle \vec{b} \rangle_{\Delta V} = \vec{B}_0 - \frac{K}{3}\vec{P}_m = \vec{B}_0 - \frac{\mu_0}{3}\vec{M}_e \quad (18)$$

Por tanto la diferencia entre el campo magnético medio correspondiente a la interpretación física clásica de la configuración de espín y la correspondiente al modelo de “dumbbells” es:

$$\langle \vec{B}' \rangle = \langle \vec{B} \rangle + \mu_0\vec{M}_e \quad (19)$$

En consecuencia, se debe distinguir dos campos magnéticos diferentes, el campo magnético medio  $\langle \vec{B} \rangle$  del modelo de “dumbbells” y el campo medio de la configuración de espín  $\langle \vec{B}' \rangle$  el cual es el único cuya divergencia es nula y puede ser definido como el campo de las ecuaciones de Maxwell. De modo que,  $\nabla \cdot \langle \vec{B} \rangle = K\rho_m$  donde  $\rho_m = -\nabla \cdot \vec{P}_m$  es la densidad de cargas magnéticas “dumbbells”.

Los “spin-ices” son un sistema tridimensional en los que no hay ordenación de largo rango, por tanto son sistemas magnéticos desordenados [38,39], y como consecuencia la imanación macroscópica  $\vec{M}_e = 0$  y como consecuencia  $\langle \vec{B} \rangle = \langle \vec{B}' \rangle$ . Además, esto está de acuerdo con las recientes interpretaciones [27,13-15,27] del campo magnético en “spin-ices” que pone énfasis en el hecho que en estas estructuras los monopolos magnéticos son de tal forma que el campo magnético de Maxwell es tal que  $\nabla \cdot \langle \vec{B} \rangle = 0$ .

### 3.2. Campos moleculares.

Para la determinar el campo molecular electromagnético es necesario considerar que el elemento de volumen  $\Delta V$ , como se mencionó con anterioridad, contiene entre  $10^9$  y  $10^{12}$  moléculas, “dumbbells” o corrientes moleculares.

Estos momentos magnéticos están distribuidos aleatoriamente en el volumen  $\Delta V$ , y por tanto, la contribución molecular del campo electromagnético es nula. El modelo de “dumbbells” de sistemas de “spin-ices” puede ser concebido como un medio con cargas magnéticas de diferentes signo atravesando la materia como un gas coulombiano similar a un plasma [27]. En este escenario, la respuesta del medio material ante la modificación de la densidad de carga magnética tiene significativa importancia a la hora de determinar sus propiedades de propagación de ondas electromagnéticas [30,31]. Hay propiedades que dependen de las funciones de permeabilidad magnética y dieléctrica del material que deben determinarse por medio del campo efectivo capaz de polarizar eléctrica y magnéticamente las moléculas.

Por tanto, se debe establecer el concepto de un campo intermedio (entre el campo medio de Maxwell  $\langle \vec{B} \rangle$  y el campo puntual  $\vec{B}$ ) que depende del entorno y determina las funciones de respuesta eléctrica y magnética. Este campo es por tanto denominado campo local o molecular  $\vec{B}_{mol}$  [31-33,35], y se define como el campo actuando sobre una molécula dada en el interior del material. El campo molecular  $\vec{B}_{mol}$  es debido a todas las fuentes externas más todas las otras moléculas que constituyen el material, pero excluyendo el propio campo de la molécula en cuestión. Esto puede ser determinado quitando dicha

molécula, manteniendo todas las otras en sus estados y calculando el valor medio del campo magnético en la cavidad previamente ocupada por la molécula extraída.

Si la cavidad puede ser elegida como un volumen esférico de radio  $r_0$ , entonces se obtiene que [43]:

$$\vec{E}_{mol} = \vec{E} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \sum \vec{p}_e + \frac{2K}{4\pi r_0^3} \sum \vec{m}_m \quad (20)$$

Donde el segundo término es debido al momento dipolar total  $\sum \vec{p}_e$  de las cargas eléctricas, y el tercer término tiene en cuenta los momentos dipolares cinéticos  $\sum \vec{m}_m$  de las corrientes magnéticas incluidos en la pequeña cavidad. Para el campo magnético:

$$\vec{B}_{mol} = \vec{B} + \frac{K}{4\pi r_0^3} \sum \vec{p}_m - \frac{2\mu_0}{4\pi r_0^3} \sum \vec{m}_e \quad (21)$$

Donde se asumen que hay división del momento dipolar de carga  $\sum \vec{p}_m$  debido a los monopolos y el momento dipolar cinético  $\sum \vec{m}_e$  producido por las corrientes eléctricas.

Asumiendo la definición de polarización considerando todas las moléculas se tiene lo siguiente:

$$\frac{3}{4\pi r_0^3} \sum \vec{m}_{e,m} = \vec{M}_{e,m}; \quad \frac{3}{4\pi r_0^3} \sum \vec{p}_{e,m} = \vec{P}_{e,m} \quad (22)$$

Y esto da [43]:

$$\vec{E}_{mol} = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}_e + \frac{2}{3} K \vec{M}_m; \quad \vec{B}_{mol} = \vec{B} + \frac{K}{3} \vec{P}_m - \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}_e \quad (23)$$

También se puede calcular el campo molecular por la división del volumen del material en dos, a través de una esfera virtual de volumen  $\Delta V$ . El campo debido a las moléculas exteriores a la esfera es  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ . El campo debido a las moléculas de la superficie de la esfera es:

$$\vec{E}_{surf} = \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}_e + \frac{2}{3} K \vec{M}_m; \quad \vec{B}_{surf} = \frac{1}{3} K \vec{P}_m - \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}_e \quad (24)$$

En ciertas circunstancias (por ejemplo, simetría cubica), el campo debido a las moléculas en el interior de la esfera puede ser considerado cero y entonces  $\vec{E}_{mol} = \vec{E} + \vec{E}_{surf}$  y  $\vec{B}_{mol} = \vec{B} + \vec{B}_{surf}$ , que son las mismas que las de las ecuaciones (22) y (23).

En resumen, se puede establecer la diferencia esencial entre los campos moleculares y los campos que aparecen en las ecuaciones de Maxwell en función de cómo se definen y determinan tanto teóricamente como experimentalmente. En los últimos, se considera que en los elementos diferenciales de volumen, que como ya he explicado son de dimensiones tales que contienen entre  $10^9$  y  $10^{12}$  moléculas, los campos y demás funciones vectoriales o escalares han de considerarse constantes. Por ello, el valor de los campos creados por los generadores de campo (cargas y/o corrientes) incluidos en los elementos de volumen se ha de calcular mediante los valores medios de los campos microscópicos creados por éstos. Por el contrario, cuando se tratan los campos a nivel molecular, el recinto en el que se consideran constantes los campos es de las dimensiones de la molécula. Como consecuencia, el valor de los campos en cada molécula debido a los generadores de campo incluidos en un elemento de volumen son cero debido a que la distribución de ese gran número de moléculas encerradas en ellos es esférica y por lo tanto su contribución es nula. Este argumento [31-33,35] es el que se utiliza para obtener las ecuaciones (10-23).

#### 4. Fuerza de Lorentz.

Como se deduce de los apartados anteriores, es necesario distinguir entre los campos a escala microscópica y aquéllos que quedan representados en las ecuaciones de Maxwell. Éste es un punto muy importante en orden a resolver la aparente contradicción que surge al considerar que el campo  $\vec{B}$  pueda ser de divergencia nula en los “spin-ices” y sin embargo afirmar que existen entidades en estos materiales cuyo comportamiento viene a ser similar a la de los monopolos magnéticos. Teniendo en cuenta las figuras 3 y 4, cada monopolo no confinado o escindido de su antimonipolo tiene los efectos ante el campo magnético externo como si fuera un polo de una cuerda de Dirac de gran longitud, tal que ya no siente interacción atractiva de su par. El campo magnético en el espacio alrededor de él vendrá dado por:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{K}{4\pi} \frac{g}{r^3} \vec{r} \quad (25)$$

Donde  $g$  ya ha sido definida como la carga magnética de la ecuación (1). El campo magnético creado por esta carga  $g$  puede considerarse procedente de un potencial que viene dado por:

$$V_m(\vec{r}) = \frac{K}{4\pi} \frac{g}{r} \quad (26)$$

Y que tiene asignada una energía potencial:

$$W(\vec{r}) = g \int_{\infty}^{\vec{r}} \nabla V_m(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (27)$$

Lo cual permite la definición de una fuerza entre el campo magnético y la carga que es dual de la fuerza de Coulomb entre cargas y campos eléctricos:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{K}{\mu_0} g \vec{B}(\vec{r}) \quad (28)$$

Cuando esta carga lleva una velocidad  $\vec{v}$ , el campo  $\vec{B}$  se transforma de acuerdo con la teoría de la relatividad especial [33-35] en  $\vec{B}' \rightarrow \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E}$  y por lo tanto la fuerza sobre la carga  $g$  vendrá dada por:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{K}{\mu_0} g \left( \vec{B}(\vec{r}) - \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E}(\vec{r}) \right) \quad (29)$$

El hecho generalmente aceptado de la variación de los campos eléctricos y magnéticos al cambiar de sistema de referencia inercial es un elemento crucial para la formalización, tanto de la fuerza de Lorentz como la explicación de las ecuaciones de campo generalizadas. Por otro lado, la interacción a pequeñas velocidades, es decir, a velocidades mucho menores que la velocidad de la luz en el vacío de dos cargas eléctricas, una a velocidad  $\vec{v}$  y otra a velocidad  $\vec{v}_1$  viene dada mediante la siguiente expresión [33-35]:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qq_1 \left( \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \left( \frac{\vec{v}_1}{c} \wedge \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \right) \right) \quad (30)$$

Por lo tanto por analogía, la interacción de dos cargas magnéticas  $g$  y  $g_1$  que lleven velocidades  $\vec{v}$  y  $\vec{v}_1$ , respectivamente toma la forma:

$$\vec{F} = \frac{K^2}{4\pi\mu_0} g g_1 \left( \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \left( \frac{\vec{v}_1}{c} \wedge \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \right) \right) \quad (31)$$

Este resultado se legitima por comparación en lo que ocurre en el caso de la interacción de cargas eléctricas con velocidades  $\vec{v}$  y  $\vec{v}_1$  dado que el tipo de interacción en el caso estático es funcionalmente idéntico y su transformación Lorentz al cambiar de sistema de referencia es, en consecuencia, idéntica también. Por lo tanto, teniendo en cuenta las ecuaciones (29) y (31) se llega a que el campo eléctrico que surge cuando una carga magnética  $g_1$  adquiere un movimiento con velocidad  $\vec{v}_1$  viene dado por la expresión:

$$\vec{E} = -\frac{K}{4\pi} g_1 \vec{v}_1 \wedge \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (32)$$

Todo ello queda justificado empíricamente con las evidencias experimentales de la denominada "magnetricity", recientemente puesta en evidencia por Bramwell [14-15] y que una representación esquemática se da en la figura 5.

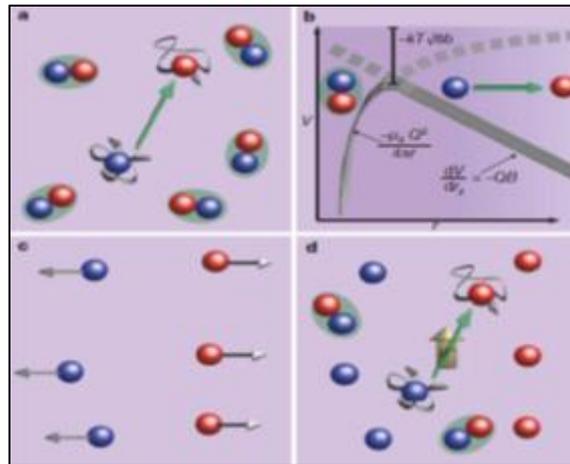


Figura 5.- Representación esquemática de los monopolos libres en la imagen de plasma magnético frío ya constituido. [15].

En esta figura se puede observar:

- a) Dipolos constituidos por monopolo-antimonopolo confinados y en el centro se muestra un dipolo rompiéndose.
- b) Los dos polos en el potencial al que están sometidos cuando están formando un dipolo (a la izquierda) y cuando están liberándose uno del otro (a la derecha).
- c) Monopolos positivos y negativos ante el campo magnético externo  $\vec{B}$  que estaría dirigido de izquierda a derecha, por ello los rojos (monopolos positivos) van en el sentido del campo y los azules (negativos) en sentido contrario.
- d) Plasma real donde hay polos libres, confinados y cuerdas que tenderán a desconfinar los monopolos. Dada la demostración empírica del modelo de Bramwell y utilizando argumentos de la teoría de la relatividad especial queda demostrado que el campo interno molecular creado por estas cargas puede ser considerado equivalente al campo molecular deducido en los apartados anteriores. De las ecuaciones

(25-32) y a partir de las transformaciones de los campos ante las transformaciones de Lorentz, se deduce directamente que la fuerza de Lorentz cuando existen cargas magnéticas es [34,40-44]:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \left( \vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \wedge \vec{B}(\vec{r}) \right) + \frac{K}{\mu_0} g \left( \vec{B}(\vec{r}) - \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{E}(\vec{r}) \right) \quad (33)$$

Esta fórmula general se puede poner en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= (q, \kappa g) \left[ \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} - \frac{\vec{v}}{c} \wedge \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} \right\} \right] = \\ &= -(q, \kappa g) \left( \Omega + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \right) \Omega \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} = (q, \kappa g) \left( \vec{I}_d + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \Omega \right) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La fuerza de Lorentz en éste como en el caso del Electromagnetismo estándar tiene dos términos, uno que depende de las cargas y de los campos (e independientes de las velocidades de éstas) y otro término transversal que es lineal con las velocidades.

### 5. Ecuaciones de campos.

La ecuación (32) cuando existen N cargas magnéticas, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{K}{4\pi} \sum_i^N \frac{g_i \vec{v} \wedge (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Y pasando al continuo, el campo eléctrico generado por una densidad de monopolos magnéticos,  $\rho_m(\vec{r}', t)$  viene dado por:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{K}{4\pi} \iiint \frac{\rho_m(\vec{r}', t) \vec{v}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \wedge (\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' = \\ &= -\frac{K}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}_m(\vec{r}', t) \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' \end{aligned} \quad (34)$$

Donde se define la corriente de monopolos magnéticos como:

$$\vec{J}_m(\vec{r}', t) = \rho_m(\vec{r}', t) \vec{v}$$

Al calcular el rotacional de este campo eléctrico cuando la corriente  $\vec{J}_m(\vec{r}', t)$  es estacionaria, es decir, cuando  $\nabla \cdot \vec{J}_m = 0$ , se obtiene la siguiente ecuación:

$$\nabla \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) = -K \vec{J}_m(\vec{r}, t) \quad (35)$$

Y si además se considera la conservación de la carga magnética se cumple la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{J}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0 \quad (36)$$

Y si se vuelve calcular el rotacional del campo eléctrico, se obtiene la expresión general de la ecuación extendida de "Maxwell" considerando la existencia de corrientes magnéticas más la generación de campos debida a la ley de Faraday:

$$\nabla \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) = -K \vec{J}_m(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (37)$$

Además, teniendo en cuenta la expresión del campo magnético de la ecuación (25), se puede establecer las siguientes ecuaciones extendidas de “Maxwell” para el plasma magnético creado en los “spin-ices”:

$$\nabla \wedge \vec{E} = -K \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (38)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (39)$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (40)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = K \rho_m \quad (41)$$

Estas ecuaciones presentan una mayor simetría que las ecuaciones de Maxwell típicas, aunque aun así y todo, los signos negativos del lado derecho de la igualdad en la ecuación del rotacional del campo eléctrico son fundamentales en orden a mantener el principio de conservación de la energía. Si estos signos negativos no existieran, es decir si se sustituyen por signos positivos podría generarse un sistema en el que se conseguiría energía infinita. Si se supone una corriente de cargas magnéticas ascendente por eje z (para simplificar la supongo infinita o muy larga), ésta crearía un campo eléctrico azimutal en el que si existen cargas eléctricas se acelerarían creando un campo magnético en la dirección del eje z que a su vez aceleraría las cargas magnéticas con el aumento de la corriente de dichas cargas. Esto provocaría un aumento en el campo eléctrico que implicaría mayor corriente eléctrica, lo cual aumentaría a su vez el campo magnético formándose un ciclo de aumentos sucesivos hasta llegar a valores infinitos de todas las variables. Esto obviamente es imposible por violar el principio de conservación de la energía. Este signo menos de la corriente magnética en el rotacional del campo eléctrico produce el mismo efecto que el signo negativo en la variación temporal del campo magnético que define la ley de Lenz y que completa la ley de Faraday.

## 6. Energía e impulso del campo electromagnético.

La variación temporal de la energía cinética de las partículas sometidas a una determinada fuerza, de acuerdo con los principios de la Mecánica Clásica, es igual a:

$$\frac{dW_p}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (42)$$

Donde  $W_p$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{F}$  son la energía cinética de las partículas, la velocidad de éstas y la fuerza a la que están sometidas, que en este caso, corresponde a la fuerza de Lorentz que viene dada por la ecuación (33). Multiplicando escalarmente la velocidad por la expresión de la fuerza de Lorentz, se obtiene:

$$\frac{dW_p}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{v} + \frac{Kg}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{v} \quad (43)$$

Que en una distribución continua de carga viene a ser:

$$\frac{dW_p}{dt} = \int_V \left( \vec{E} \cdot \vec{J}_e + \frac{K}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{J}_m \right) d^3r \quad (44)$$

Y sustituyendo en esta ecuación la expresión de las corrientes en función de los campos considerando las ecuaciones de los rotacionales de éstos (38-41) se tiene lo siguiente:

$$\boxed{\frac{dW_p}{dt} + \frac{1}{2} \int_V \left( \epsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t} \right) d^3r = - \int_{S(V)} \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{S}} \quad (45)$$

En esta ecuación, el segundo término puede modificarse en el supuesto de que el volumen donde se encierran las partículas cuya superficie es el recinto de integración es estático, es decir, este volumen tiene velocidad nula. En estas condiciones, la ecuación (45) se convierte en el conocido teorema de Poynting cuya expresión es idéntica al caso en el que sólo existen cargas eléctricas. Este teorema puede enunciarse de la forma siguiente: la suma de las variaciones de la energía cinética de las partículas más la variación temporal de la energía electromagnética encerrada en un volumen es igual a menos el flujo del vector de Poynting a través de la superficie que encierra dicho volumen. Matemáticamente este teorema se formaliza como:

$$\frac{dW_p}{dt} + \frac{dW_{EM}}{dt} = - \int_{S(V)} \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{S} \quad (46)$$

Donde  $W_{EM} = \frac{1}{2} \int_V \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) d^3r$  es la expresión de la energía del campo electromagnético.

El impulso del campo electromagnético en el supuesto de que existan cargas magnéticas puede determinarse mediante un proceso similar al del teorema del vector de Poynting. Se parte por lo tanto desde la fuerza de Lorentz de la ecuación (34), que en versión de distribución continua de cargas toma la forma siguiente:

$$\vec{F} = \int_{\infty} \left( \rho_e \vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B} + \kappa c \rho_m \vec{B} - \kappa \frac{\vec{J}_m}{c} \wedge \vec{E} \right) d^3r = \int_{\infty} \vec{f} d^3r \quad (47)$$

Donde  $\vec{f}$  es la densidad de fuerza por unidad de volumen, es decir,  $\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV}$  de igual modo a como se

hace en el caso de la energía, sustituyo las ecuaciones de campo en las densidades de carga y corriente y se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_{\infty} \left( \epsilon_0 \vec{E} \nabla \cdot \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \wedge (\nabla \wedge \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \nabla \cdot \vec{B} - \epsilon_0 \vec{E} \wedge (\nabla \wedge \vec{E}) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \wedge \vec{B}) \right) d^3r = \\ &= \int_{\infty} \vec{f} d^3r \end{aligned} \quad (48)$$

Como  $\vec{F}$  es una fuerza sobre partículas con masa, de acuerdo con las leyes de Newton se tiene que la ecuación (48) se puede poner de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}_m}{dt} + \int_{\infty} \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \wedge \vec{B}) d^3r \\ = \int_{\infty} \left( \epsilon_0 \vec{E} \nabla \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} \wedge (\nabla \wedge \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \nabla \cdot \vec{B} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \wedge (\nabla \wedge \vec{B}) \right) d^3r \end{aligned} \quad (49)$$

Donde el término segundo de la parte izquierda de la igualdad, que tiene unidades de momento lineal y que depende exclusivamente de los campos, es la variación temporal del impulso o momento lineal del campo Electromagnético cuya expresión es:

$$\vec{P}_{EM} = \epsilon_0 \int_{\infty} (\vec{E} \wedge \vec{B}) d^3r \quad (50)$$

El término de la derecha de la igualdad se puede transformar de forma idéntica al caso estándar procedente de las ecuaciones de Maxwell y se puede poner como [35,37]:

$$\int_{\infty} \left( \varepsilon_0 \vec{E} \nabla \cdot \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} \wedge (\nabla \wedge \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \nabla \cdot \vec{B} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \wedge (\nabla \wedge \vec{B}) \right) d^3r \quad (51)$$

$$= \int_{S(\infty)} (\vec{T}_x \cdot \vec{n}, \vec{T}_y \cdot \vec{n}, \vec{T}_z \cdot \vec{n}) dS$$

Donde  $\vec{T}_x = (T_{xx}, T_{xy}, T_{xz})$ ;  $\vec{T}_y = (T_{yx}, T_{yy}, T_{yz})$ ;  $\vec{T}_z = (T_{zx}, T_{zy}, T_{zz})$  y los términos de la matriz  $T_{ij}$  vienen dados por la expresión siguiente:

$$T_{ij} = \varepsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad (52)$$

La integral de superficie tiene dimensiones de una fuerza ejercida sobre la superficie del infinito, ello implica que la ley de conservación de los momentos viene a ser:

$$\boxed{\frac{d\vec{P}_m}{dt} + \frac{d\vec{P}_{EM}}{dt} = \int_{S(\infty)} (\vec{T}_x \cdot \vec{n}, \vec{T}_y \cdot \vec{n}, \vec{T}_z \cdot \vec{n}) dS} \quad (53)$$

Los elementos de matriz  $T_{ij}$  son cuadráticos con los campos, y si éstos varían como  $r^{-2}$ , es decir, no se consideran campos de radiación, el integrando de la integral de superficie varía como  $r^{-4}$  y como la superficie crece como  $r^2$ , la integral varía como  $r^{-2}$  y por lo tanto al ser evaluada en la superficie del infinito, esta integral es cero. Si por el contrario, se consideran cargas aceleradas en el sistema de cargas, estos campos varían como  $r^{-1}$  y en este caso la ecuación de conservación del momento total es exactamente la ecuación (53). De acuerdo con estos argumentos, se puede establecer la ley de conservación del momento lineal en el caso de que no haya campos que varíen  $r^{-1}$  y, en este caso más restringido, el teorema de conservación del momento toma la siguiente forma:

$$\frac{d\vec{P}_m}{dt} + \frac{d\vec{P}_{EM}}{dt} = 0 \quad (54)$$

Cuando no existen fuerzas exteriores al sistema y se puede asegurar que los campos dominantes varían inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los generadores de campo, el momento total  $\vec{P}_T = \vec{P}_m + \vec{P}_{EM}$  se conserva, es decir, no varía con el tiempo.

Por otro lado, si en las integrales de volumen se consideran recintos finitos, en lugar de todo el espacio, la ley de variación temporal del impulso o momento del sistema electromagnético, vendría a ser enunciado diciendo que la variación temporal del impulso total  $\vec{P}_T = \vec{P}_m + \vec{P}_{EM}$  del sistema localizado en un volumen finito es igual a la fuerza ejercida por la presión del campo electromagnético sobre la superficie que encierra el mismo.

## PROPIEDADES DUALES DE SISTEMAS CON CARGAS MAGNÉTICAS.

A partir de este punto se van a analizar algunas propiedades duales que tienen interés no sólo desde un punto de vista físico sino por las posibles aplicaciones tecnológicas y que pueden tener interés dentro de la ingeniería eléctrica y de telecomunicaciones. Algunas de ellas se analizan para poner en práctica las diferentes ecuaciones que rigen los campos electromagnéticos cuando existen cargas magnéticas y otras tendrán implicación directa con la posible construcción de dispositivos que sean susceptibles de ser utilizados en las telecomunicaciones.

### 7. “Magnetricity”.

El modelo “dumbbells” [9], explicado en la sección 2, es la justificación teórica de los monopolos magnéticos y por ello tiene una especial importancia en la construcción del modelo de cargas magnéticas. Por otro lado, la ratificación empírica de que las inversiones del momento magnético y su propagación en forma de cuerdas de Dirac se comportan como si fueran cargas magnéticas está justificada en los experimentos de conducción de estas estructuras ante la presencia de campo magnético externo y que han sido realizados recientemente [14,15,27]. Este experimento sobre cómo las denominadas cargas magnéticas efectivas se propagan en el medio cristalino generando una conductancia ante el campo magnético externo es el elemento fundamental que permitan pensar en estos materiales como futuros compuestos que conduzcan a la generación de dispositivos duales de los electrónicos y que se denominarían dispositivos magnetrónicos. Siendo estos experimentos de conducción de monopolos un posible inicio de la denominada “magnetronica” ciencia dual de la electrónica y diferente, tal como se ha dicho ya de la espintrónica [16].

El paso decisivo, para la consagración de esta posible, todavía futurible, ciencia de la magnetronica, será cuando se puedan construir con facilidad y economía (que no es el caso todavía), hilos, muestras superficiales y volúmicas de tamaño utilizable como dispositivos con propiedades similares a las que presentan los “spin-ices” [9-11,13-15,18-19,24-28] o los aislantes topológicos [12]. El paso inicial de los trabajos experimentales sobre el movimiento de las cargas magnéticas efectivas ante el campo magnético exterior está inequívocamente establecido por los ya citados trabajos de Bramwell y su grupo. La ventaja que tendrían estos supuestos dispositivos con respecto a los electrónicos sería que estas cargas magnéticas tienen masa efectiva dependiente de su energía y de su momento lineal pero no existe en ellas masa gravitacional y por ello su inercia al movimiento es menor y por tanto, su función respuesta puede ser más rápida que la que procede de las cargas eléctricas procedentes de los electrones. El inconveniente fundamental será que la temperatura de trabajo, es decir, la temperatura a la cual la densidad de estos monopolos es suficientemente alta tiene que ser necesariamente baja. Otro inconveniente es la vida media de estas cargas magnéticas ya que al interactuar entre sí, se pueden recombinar formando pares de polo-antimonopolo (recombinación dual de la electrón-hueco de la electrónica) generando los microimanes, tal como se ha mostrado en las figuras 4 y 5.

Para comprender la situación del plasma magnético de estas figuras y para ayudar a entender cómo y por qué las cargas magnéticas pueden moverse, es por lo que he añadido la siguiente la figura 6. En esta, se

muestra el potencial tipo “Coulomb” ( $V_{i \rightarrow j}(\vec{r}_j) = \frac{\mu_0 g_i}{4\pi |\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$ ) que la carga con subíndice i ejerce sobre

la que tiene subíndice j, existiendo otro completamente simétrico que la que tiene subíndice j ejerce sobre la que tiene i.

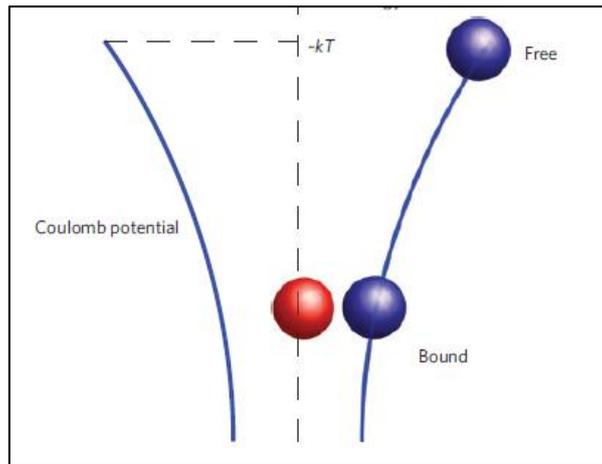


Figura 6.- Esquema de energía potencial de un dipolo enlazado y de una carga libre. [15].

La figura representa un esquema de energía potencial, según el cual cuando la energía total es inferior a

la potencial  $W_{ij} = -\frac{\mu_0 |g_i g_j|}{4\pi |\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$ , la situación es de estado enlazado y el sistema funciona como dipolos.

Cuando la distancia entre ambas cargas es suficientemente corta, están enlazadas en un microimán o dipolo cuya longitud puede ser más o menos variable en función de los pasos de inversión de momento magnético que se hayan establecido entre el principio y el final de la cuerda de Dirac. Si la distancia crece, aquellas partículas pueden incrementar su energía de movimiento de tal forma que la energía total sea positiva y entonces la carga magnética evoluciona libremente por el cristal como si de una partícula de un gas se tratara.

El fenómeno de la “magnetricity”, surge cuando la concentración de cargas libres permite hablar de un sistema neutro (carga total nula) pero que presenta cargas libres tantas positivas como negativas interaccionando entre sí según la fórmula del modelo “dumbbells” (4). Si se aplica al sistema un campo magnético externo,  $\vec{B}_{ex}$ , las cargas positivas se mueven en la misma dirección del campo y las negativas en dirección opuesta, tal como indica la figura 5.

La inspiración de Bramwell para realizar el montaje y la medida de la fenomenología del movimiento de estas cargas ante el campo  $\vec{B}_{ex}$  surge por imitación dual a la teoría de Onsager [17] del movimiento de cargas eléctricas en un electrolito. Un electrolito ante un campo eléctrico externo puede sufrir el efecto de disociación de las moléculas para formar iones de diferente signo de carga. Un ejemplo es la autoionización de las moléculas de agua ante campos eléctricos externos suficientemente intensos, explicado por Onsager en 1934, y que viene a ser definida esta autoionización por la siguiente reacción química:



Es decir, dos moléculas de agua pueden formar un dipolo eléctrico con las cargas positiva y negativa del paréntesis cuadrado. En consecuencia, forman un par enlazado. Ante la presencia de un campo eléctrico con suficiente intensidad y con la adecuada separación de las cargas, éstas pueden llegar a moverse por el líquido de forma independiente. Cuando esto ocurre, que simbólicamente se representa en el tercer paso de la reacción química, se habrá formado un electrolito de cargas disueltas en el líquido (el cual queda constituido por las moléculas de agua no ionizadas).

Este proceso es dinámico y la interacción coulombiana induce un balance de:

$$\text{moléculas} \rightarrow \text{pares(dipolos)} \rightarrow \text{iones}$$

Donde la variable en función del campo es el coeficiente de disociación (proporción de moléculas de agua que se disocian) que según la teoría de Onsager viene cuantitativamente dado por la expresión siguiente [14,17]:

$$K(E) = K(0) \left( 1 + b + \frac{b^2}{3} + \frac{b^3}{18} + \frac{b^4}{180} + \dots \right) \quad (55)$$

Donde  $K(E)$  es este coeficiente de disociación para intensidad de campo eléctrico  $E$ ,  $K(0)$  coeficiente para campo nulo,  $b$  es un parámetro que viene dado según esta teoría para electrolitos monovalentes [17] por la siguiente expresión:

$$b = 9,636 \frac{E}{\varepsilon T^2} \quad (56)$$

Siendo  $E$  campo eléctrico,  $\varepsilon$  constante dieléctrica del medio y  $T$  temperatura en kelvins. El electrolito que se forma puede entenderse como un plasma eléctrico sumergido en un medio de constante dieléctrica dada.

De acuerdo con el planteamiento del grupo de Bramwell [14,15], la similitud dual del plasma de Onsager con el plasma magnético de Castelnovo [9] es claro pues los resultados experimentales de conductancia en los “spin-ices” ante el campo magnético externo son idénticos a los que se obtienen con la teoría de Onsager en los electrolitos siempre y cuando se hagan los cambios duales oportunos, es decir, se sustituyan en las fórmula de Onsager los siguientes cambios  $e \rightarrow g; \vec{E} \rightarrow \vec{B}; \varepsilon_0 \rightarrow \mu_0^{-1}$ .

El problema fundamental es obtener una concentración de cargas magnéticas independientes suficientemente alta. El grupo de Bramwell ha conseguido concentraciones suficientes y con tiempos de recombinación suficientemente largos como para establecer la idea de que los “spin-ices” pueden llegar a ser considerados como verdaderos “conductores” de cargas magnéticas. Este hecho puede ser relevante desde un punto de vista experimental e incluso tecnológico.

El procedimiento experimental para realizar la medición de la conductancia en el caso de los “spin-ices” es obviamente más complicado que en el caso de los electrolitos, fundamentalmente por la inexistencia de aparatos de medida de potencial magnético equivalente a los voltímetros. En este caso, la medida de conductancia se realiza mediante la implantación en la muestra de partículas de carga electrónica pero de mayor masa y que se denominan muones. Estas partículas con baja movilidad tienen momento magnético idéntico al de los electrones y vibran por la interacción con otros momentos magnéticos procedentes de las cargas magnéticas. El decaimiento exponencial del valor máximo de la oscilación del momento magnético de los muones depende de los campos magnéticos generados por las partículas que evolucionan en estado cuasi-libre y, por lo tanto, este decaimiento constituye una medida indirecta de la concentración de cargas magnéticas existentes en el “material conductor magnético”. Para una explicación más extensa ver [14 y 15].

No obstante, es preciso considerar que la interacción entre cargas eléctricas en el electrolito o plasma eléctrico depende del apantallamiento que se produce en los medios materiales, es decir, depende de las funciones dieléctricas que genera el medio. Y por la simetría de dualidad, las medidas de “magnetricity” deben ser interpretadas considerando que las funciones respuesta del plasma magnético dependen de las características específicas de los sistemas con monopolos magnéticos, por ello se debe hacer un análisis de estas funciones respuesta.

### 7.1. Apantallamiento del campo magnético.

Se denominan conductores y plasmas eléctricos en equilibrio electrostático aquéllos en los que las cargas en su interior no tienen movimiento, es decir, no están sometidos a ningún campo eléctrico. Dado que este estado de equilibrio se obtiene incluso aunque existan campos electrostáticos exteriores, la condición de equilibrio junto con la existencia de cargas positivas y negativas en su interior implica que éstas se han de redistribuir de tal forma que el campo total, es decir, el creado por ellas más el campo exterior, se anule en el interior del material. Esto es así porque si no se anulase el campo eléctrico total, las cargas estarían en movimiento y no habría equilibrio electrostático. En los plasmas magnéticos son las cargas magnéticas las que están en su interior en el equilibrio magnetostático. En consecuencia, el campo magnético total en el interior del conductor magnético o del plasma ha de ser, de forma dual al caso eléctrico, nulo, pues si no lo fuera habría movimiento de cargas, lo cual es contradictorio con el hecho de estar en equilibrio magnetostático. La anulación del campo magnético en el interior del conductor y/o plasma magnético, incluso cuando existe un campo magnetostático exterior, es debido a la redistribución de cargas que se genera.

Por todo ello, en los plasmas magnéticos, el fenómeno de exclusión de líneas de campo magnético del material en el que hay cargas magnéticas libres es una propiedad dual de la citada del caso de conductores y plasmas eléctricos en donde se excluyen las líneas de campo eléctrico.

Esto tiene muchas posibles implicaciones técnicas de apantallamiento de sistemas ante el campo magnético. Todo lo que se dice del caso del campo eléctrico en los conductores eléctricos se puede establecer, según la simetría dual, en los “spin-ices” con respecto al campo magnético.

Para empezar, se puede decir que lo que mueve las cargas en el interior del material con cargas magnéticas es que existe una fuerza sobre cada carga magnética  $\vec{F} = \frac{K}{\mu_0} g \vec{B}$ , donde  $\vec{B}$  es el campo

total. Este campo total es el campo magnetostático exterior, más el campo creado por las otras cargas magnéticas. Es decir, la fuerza sobre una carga cualquiera  $g_i$  en el interior del material debe ser  $\sum \vec{F} = 0$  cuando se logra el equilibrio magnetostático, y por tanto se tiene lo siguiente:

$$\vec{F} = \frac{K}{\mu_0} g_i \vec{B} = \frac{K}{\mu_0} g_i \left( \vec{B}_0 + \sum_{j \neq i} \vec{B}_j \right) = \frac{K}{\mu_0} g_i \vec{B}_0 + \frac{K}{\mu_0} g_i \sum_{j \neq i} \frac{K g_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{4\pi |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} = 0$$

Las expresiones del campo magnético y las ecuaciones de campo generalizadas implican que el campo magnetostático se puede poner como  $\vec{B}(\vec{r}) = -\nabla \phi_m(\vec{r})$ .

En consecuencia, en el equilibrio magnetostático, ello implica que en el interior del material magnético  $\phi_m(\vec{r}) = \text{constante}$ , dado que el campo en esa región es nulo. Este resultado es el dual de lo que ocurre en el interior del conductor eléctrico. Por lo tanto, la superficie de material que contiene cargas magnéticas es una superficie equipotencial del potencial magnético y el campo magnético en la superficie del material es perpendicular a ésta. Una diferencia notable con los conductores eléctricos es que no se puede ni incluir carga magnética neta en ellos ni tan siquiera inducirla puesto que esta carga es debida a la elongación primero y ruptura después de los microimanes que se forman en los materiales (“spin-ices”), tal como se ha explicado en la introducción. Una posibilidad que debe considerarse es que para que la fuerza total sobre las cargas libres en el interior del “spin-ice” sea cero, es decir, que el campo total se

anule, es necesario que haya suficientes cargas magnéticas efectivas para que se puedan redistribuir y anular la acción del campo magnético exterior. Pero es necesario tener en cuenta que la fuerza que une a los monopolos en los dipolos de longitud mínima puede quedar compensada por la acción del campo exterior que moviliza a los monopolos del dipolo en sentido contrario. Por consiguiente, a mayor campo exterior, mayor probabilidad de que aumente el número los monopolos efectivos que son los que pueden anular dicho campo exterior. Por ello, se establece la siguiente situación dinámica: cuanto mayor es el campo exterior mayor es el número necesario para compensar sus efectos en el interior, pero a su vez, cuanto mayor es el campo exterior mayor probabilidad de que aumente el número de monopolos libres.

Todo ello conduce a una aplicación de estos materiales que apantallan el campo magnético. Como  $\nabla^2 \phi_m(\vec{r}) = -K \rho_m$  esta ecuación sería la dual de Poisson que como es conocido, se pueden aplicar el teorema de unicidad [31-37]. Es decir, cuando se conoce el potencial eléctrico en una superficie cerrada y una solución válida de la correspondiente ecuación de Poisson en el volumen encerrado por dicha superficie, esa solución es la única solución (la demostración de este teorema se puede ver en cualquier libro elemental de electromagnetismo [31-37]). Este teorema de unicidad puede aplicarse a cualquier hueco en el interior de un material en el que existan cargas magnéticas libres, lo cual constituye la denominada “jaula de Faraday” magnética dual de la bien conocida jaula de Faraday eléctrica. Efectivamente, cuando existen cavidades en el interior de un material que contiene monopolos, en estas cavidades el campo magnético es cero y por consiguiente constituye una jaula de Faraday perfecta para el campo magnético.

La demostración es clara a la luz del teorema de unicidad. Como en el interior del material magnético el campo es nulo. Las cavidades que son superficies cerradas en el interior del material, son superficies equipotenciales respecto del a potencial magnético, es decir,  $\phi_m(\vec{r}) = \phi_0$ , siendo  $\phi_0$  un valor constante del potencial en todos los puntos de la superficie de la cavidad. Como en el interior de la cavidad no hay cargas magnéticas, puesto que no hay material, se cumple la ecuación  $\nabla^2 \phi_m(\vec{r}) = 0$ . Por consiguiente, la solución  $\phi_m(\vec{r}) = \phi_0$ , para todos los puntos del interior de la cavidad es válida ya que el laplaciano de esta función es cero y el valor de la función en todos los puntos de la cavidad es  $\phi_0$ . En consecuencia es la única solución según el teorema de unicidad. Y si el potencial es constante en todos los puntos del interior, ello implica que el campo magnético es cero en los puntos del interior del hueco al igual que ocurre en los puntos del interior del material.

## 8. Transformaciones de dualidad.

La “magnetricity” no queda plenamente estudiada hasta que no se formaliza la conductividad, la función dieléctrica y la susceptibilidad magnética cuando coexisten cargas eléctricas y magnéticas, dado que la movilidad de las cargas en cualquier material y las cargas magnéticas en estos particulares compuestos de Holmio y Disprosio que constituyen los “spin-ices”, dependen de estas respuestas lineales del medio material. Se denominan respuestas lineales al efecto que sobre un medio material produce la presencia de los campos cuando éstos no son excesivamente intensos, y por lo tanto estas respuestas sólo dependen de las características del medio y no de la intensidad de éstos. Al crecer la intensidad de los campos externos la respuesta del medio deja de ser lineal y su estudio sobrepasa los objetivos de este trabajo. Es decir, cuando la intensidad de los campos crece, la respuesta del medio no sólo depende de las características estructurales del material sino que depende también de los campos aplicados, y entonces se pasa de una electromagnetismo lineal a otro no lineal.

Para estudiar las diferentes respuestas de conductores y dieléctricos ante los campos eléctrico y magnético en el caso de existir tanto cargas eléctricas, siempre existentes en la materia, como entidades cuyo comportamiento es como si tuvieran cargas magnéticas, conviene hacer algunas consideraciones previas.

En este punto es necesario considerar la existencia entidades estructurales de medios materiales en las que coexistan cargas eléctricas y magnéticas. A estas entidades se les viene a denominar “dyones” [45, 12, 34, 40, 41, 8]. Ello permite hacer una representación de las cargas en un plano. En el eje de abscisas o (en la recta real si se considera el plano complejo) se representan las cargas eléctricas que ocuparán los puntos que corresponden a los números enteros, (esto es así puesto que la carga eléctrica esta cuantizada siempre es un número entero de cargas unidad, que es la carga del electrón si es negativa y del protón si es positiva  $|e|=1.6 \times 10^{-19}$  coulombs). A la derecha del origen se representan las cargas positivas (protones) y a la izquierda la negativas (electrones). En el eje de ordenadas (o en la recta imaginaria si considero el plano complejo), y sin restricción alguna, se representen las cargas magnéticas; se dice sin restricción alguna puesto que éstas no están cuantizadas en los “spin-ices” y por lo tanto pueden ocupar cualquier punto que represente un número del cuerpo de los números reales. De esta forma, las cargas magnéticas positivas estarán por encima del origen y las negativas por debajo. La carga de un “dyon” cualquiera se representa en un punto del plano (o del plano complejo) y ese punto tendrá una abscisa que será la carga eléctrica del “dyon” y una ordenada que corresponderá a la carga magnética del “dyon”. Los electrones son “dyones” con coordenadas en el plano (-1,0), los protones (1,0); las cargas magnéticas positivas (0,x), siendo  $x>0$  y las cargas magnéticas negativas (0,-x) con  $x>0$ . Y una carga “dyónica” en general se representara como (n,x) (o  $n+ix$  si se considera el plano complejo). De tal forma que la carga de un “dyon” vendrá dado por un vector de este plano de carga. La carga de un “dyon” vendrá dada por [40-45]:

$$Q = \begin{pmatrix} q \\ \kappa g \end{pmatrix} = |Q| \begin{pmatrix} \cos \xi \\ \text{sen} \xi \end{pmatrix} \quad (57)$$

Donde  $\kappa$  es una constante que homogeneiza las dimensiones de carga magnética con las de carga eléctrica;  $|Q|$  viene dado por:

$$|Q| = \sqrt{q^2 + \kappa^2 g^2} \quad (58)$$

Y  $\xi$  es el ángulo que forma el vector que une el origen con el punto que determina la carga  $Q$ . La relación existente entre la constante  $\kappa$  y la constante K que aparece en estas ecuaciones ha sido explicada con anterioridad. Por homogeneidad de las ecuaciones,  $\kappa g$  deberá tener, según la ecuación (2), unidades de carga eléctrica en el sistema internacional ampliado. Teniendo presente la definición de las cargas, sin definir ningún elemento nuevo o magnitud física nueva, se puede representar las ecuaciones de los apartados anteriores en una forma compacta cuya comprensión es posible si se tiene presente la representación de la carga en el plano. A éste, por lo tanto, se puede definir como plano de carga.

De esta forma las densidades de carga y corriente son:

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} \vec{J}_e \\ \kappa \vec{J}_m \end{pmatrix} \quad (59)$$

$$\vec{J}_e = \rho_e \vec{v}_e \quad (60)$$

$$\kappa \vec{J}_m = \kappa \rho_m \vec{v}_m \quad (61)$$

Las polarizaciones eléctricas y magnéticas extendidas han sido definidas en las ecuaciones (7) y (8). Tanto en las densidades de carga y corriente como en las polarizaciones, el elemento con subíndice e corresponde a la parte de carga o corriente eléctrica y el que lleva subíndice m concierne a la parte de carga o corriente magnética.

De igual forma las ecuaciones de campo (39-42) se reducen a dos:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{G} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho} \quad (62)$$

$$\boxed{\nabla \wedge \vec{G} = \frac{1}{\epsilon_0 c} \Omega \vec{J} + \frac{1}{c} \Omega \vec{G}} \quad (63)$$

Y la fuerza de Lorentz vendría dada por:

$$\boxed{\vec{F} = (q, \kappa g) \left( -\Omega - \frac{\vec{v}}{c} \wedge \right) \Omega \vec{G}} \quad (64)$$

Donde se han considerado las siguientes definiciones:

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix}; \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (65)$$

Otra representación equivalente, tal como ya se ha citado anteriormente, es considerar el plano de carga como si fuera el plano de números complejos y en este caso la carga de los “dyones” se representaría de la forma [40-44]:

$$Q = q + i\kappa g = |Q| e^{i\xi} = |Q| (\cos \xi + i \operatorname{sen} \xi) \quad (66)$$

$$\rho = \rho_e + i\kappa \rho_m \quad (67)$$

$$\vec{J} = \vec{J}_e + i\kappa \vec{J}_m \quad (68)$$

$$\vec{G} = \vec{E} + ic\vec{B} \quad (69)$$

Y con estas definiciones las ecuaciones de los campos vendría dada por:

$$\nabla \cdot \vec{G} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (70)$$

$$\nabla \wedge \vec{G} = \frac{i}{c} \left( \frac{\vec{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} \right) \quad (71)$$

La fuerza de Lorentz con esta notación sería:

$$\vec{F} = \operatorname{Re} \left( Q^* \left\{ -\Omega - i \frac{\vec{v}}{c} \wedge \right\} \Omega \vec{G} \right) = |Q| \operatorname{Re} \left( \{ \cos \xi + i \operatorname{sen} \xi \} \left[ -\Omega - i \frac{\vec{v}}{c} \wedge \right] \Omega \vec{G} \right) \quad (72)$$

Donde en todas ecuaciones en forma compleja se tiene que,  $i = \sqrt{-1}$  y la energía del campo vendría dada por:

$$W_{EM} = \epsilon_0 \int \vec{G} \cdot \vec{G}^* d^3 r \quad (73)$$

Esta notación compleja permite explicar con facilidad la denominada transformación de dualidad [40,41]. Según esta transformación si a la carga  $Q$  le hago un giro en el plano complejo de carga con un ángulo  $\theta$  la carga inicial  $|Q| e^{i\xi}$  pasa a ser  $|Q| e^{i(\xi+\theta)}$ , entonces el campo complejo correspondiente  $\vec{G}$  pasa

a ser  $\vec{G}e^{i\theta}$ , manteniéndose la misma energía que es cuadrática con el campo, así como la fuerza de Lorentz.

Esta propiedad de la transformación de dualidad pone en claro el sentido convencional del hecho de atribuir al electrón la unidad de carga eléctrica negativa y al protón unidad de carga positiva. Por consiguiente, se puede hacer una rotación en el plano de carga a la recta real donde se ubican las cargas eléctricas de los protones y electrones. Después de la rotación, estas partículas tendrían carga eléctrica y carga magnética permaneciendo intactas todas las propiedades electromagnéticas de los sistemas con electrones y protones. Es decir, si se hace un giro en el plano de carga de un ángulo  $\theta$ , los electrones pasarían a tener una carga en este plano que vendría dada por  $Q_e = -|e|(\cos\theta, \text{sen}\theta)$  y por tanto, se les asignaría una carga eléctrica  $q = -|e|\cos\theta$  y una carga magnética  $\kappa g = -|e|\text{sen}\theta$ .

Todo el Electromagnetismo quedaría igual si, a su vez, al protón se le asigna la carga  $Q_p = |e|(\cos\theta, \text{sen}\theta)$  y en lugar de utilizar las ecuaciones estándar de Maxwell, se utilizan las que se deducen en la primera parte del trabajo, (38)-(41). Esto es lo mismo que decir que mientras la carga del electrón esté en un lugar simétrico con respecto al origen del plano complejo que la ubicación de la carga del protón, el Electromagnetismo presentaría la misma fenomenología y los mismos valores cuantitativos de las variables físicas susceptibles de ser medidas. La verdadera novedad que aportan los materiales de "spin-ices" es que las entidades estructurales que se comportan como si fueran cargas magnéticas tienen una carga en el plano que no están alineadas con la carga de los electrones ni de los protones y en consecuencia aparecen fenomenologías que no están previstas ni contempladas con la transformación de dualidad, es decir, generan fenomenologías nuevas, tales como la "magnetricity" y otras más que denomino propiedades electromagnéticas duales.

### 9. Respuestas lineales.

Antes de proponer la forma de obtener estas respuestas lineales conviene definir los vectores generalizados que corresponderían al vector desplazamiento y al vector de intensidad magnética del Electromagnetismo [40, 41, 43]. Estas definiciones plantean vectores de dimensión 6 donde las tres primeras componentes corresponden al canal eléctrico y las tres últimas al canal magnético. De esta forma se define:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} \vec{d}_e \\ \vec{d}_m \end{pmatrix} = \epsilon_0 \vec{G} + \vec{P} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{P}_e \\ \kappa \vec{P}_m \end{pmatrix} \quad (74)$$

Donde el vector  $\vec{d}$  es el vector extendido (de 6 componentes) correspondiente al vector desplazamiento de las ecuaciones de Maxwell y el vector extendido de intensidad magnética se puede definir como:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} \vec{h}_e \\ \vec{h}_m \end{pmatrix} = (\mu_0 c)^{-1} (\vec{G}) - \Omega \vec{M} = (\mu_0 c)^{-1} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\kappa \vec{M}_m \\ \vec{M}_e \end{pmatrix} \quad (75)$$

Es importante reseñar que si la carga magnética es cero, es decir si  $\kappa = 0$ , entonces los vectores de las ecuaciones (74) y (75) vienen a ser los que corresponden al Electromagnetismo estándar, es decir:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \epsilon_0 c \vec{B} \end{pmatrix} \text{ y } \vec{h} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 c \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}$$

Con estas definiciones, las ecuaciones correspondientes al rotacional del campo se reducen a [41]:

$$\boxed{\nabla \wedge \vec{h} = \Omega \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{d}}{\partial t} \right)} \quad (76)$$

Las respuestas lineales del medio material relacionan los campos como agentes causales de modificaciones dinámicas con las polarizaciones generadas. El ejemplo más claro es la variación del movimiento de cargas ante la presencia de campos, lo que se denomina conductividad. En el caso eléctrico se denomina conductividad eléctrica lo que relaciona la densidad de corriente eléctrica con el campo eléctrico. Otro ejemplo es la relación entre las polarizaciones de las posiciones y movimiento de las cargas con los campos que vienen determinadas por la función dieléctrica y permeabilidad magnética. En el caso de los “dyones” (que sería la forma más general de partículas en el plano complejo de carga) la cuestión es ligeramente diferente aunque se utiliza principios similares al caso de cargas eléctricas aunque extendidos a este caso general [41,43].

En primer lugar, analizaré la conductividad de los “dyones” ante la presencia del campo generalizado  $\vec{G}$ . Es necesario recordar que dentro del plano “dyónico”, los electrones son “dyones” con un ángulo  $\xi = \pi$  y los protones son “dyones” con un ángulo  $\xi = 0$ .

### 9.1. Conductividad.

La ley empírica que permite la definición de la conductividad eléctrica es la ley de Ohm, según la cual la densidad de corriente eléctrica está relacionada con el campo eléctrico existente en el seno del conductor mediante la expresión general:

$$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{\sigma}(\vec{r}, \vec{E}) \vec{E}(\vec{r}) \quad (77)$$

Donde  $\vec{J}(\vec{r})$  es un campo vectorial de tres dimensiones que tiene asignado un vector en cada punto del conductor,  $\vec{\sigma}(\vec{r}, \vec{E})$  es, en general, una matriz 3x3 denominada conductividad y que sus elementos de matriz pueden ser funciones que dependan de cada punto y del campo (aunque en el caso de dependencia con el campo, no entraría dentro de lo que se denomina respuesta lineal, pues por definición este tipo de respuesta es independiente del campo); y  $\vec{E}(\vec{r})$  es el vector campo eléctrico en el mismo punto donde se evalúa la densidad de corriente. Para simplificar considero medios isótropos con los que la matriz de conductividad se convierte en función de punto y si es uniforme pasa a ser una constante característica del medio material. De esta forma, la ley de Ohm en medios lineales, isótropos y uniformes se propone de forma sencilla:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (78)$$

La densidad de corriente de “dyones” que tengan carga eléctrica y carga magnética dentro de la misma entidad estructural viene dada por:

$$\begin{pmatrix} \vec{J}_e \\ \vec{J}_m \end{pmatrix}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \rho_e \\ \kappa \rho_m \end{pmatrix} \vec{v} \quad (79)$$

Por el contrario si existen partículas con cargas eléctricas y otras con cargas magnéticas las definiciones de las corrientes se tendrían que plantear de forma independiente.

La velocidad de la partícula viene condicionada por la fuerza de Lorentz. Ahora bien la relación entre el módulo de la parte de la fuerza de Lorentz que depende de la velocidad con respecto a la que depende sólo de los campos es proporcional a  $v/c$ , siendo  $c$  la velocidad de la luz en el vacío y  $v$  la velocidad

de la partícula en el seno de los medios materiales. Esta última velocidad es muy pequeña puesto que sólo se puede considerar que se acelera por la acción de los campos durante el espacio recorrido entre dos choques, es decir, entre el intervalo de tiempo  $\tau$  necesario para recorrer el libre espacio medio. En consecuencia, se puede aproximar la velocidad media de las partículas como [41]:

$$\vec{v} = \frac{1}{m_{ef}} (q\vec{E} + \kappa g c \vec{B}) \tau \quad (80)$$

Donde  $m_{ef}$  es la masa efectiva de las entidades estructurales que se supone que tengan una carga “dyónica”.

De esta forma se tiene que la densidad de corriente tiene una dinámica definida por la ley de Ohm generalizada, de tal forma que:

$$\vec{J} = \frac{n_{li} \tau}{m_{ef}} \begin{pmatrix} q \\ \kappa g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & \kappa g \\ \kappa q g & \kappa^2 g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c \vec{B} \end{pmatrix} = \frac{n_{li} \tau}{m_{ef}} \begin{pmatrix} q^2 & \kappa q g \\ \kappa q g & \kappa^2 g^2 \end{pmatrix} \vec{G} = \vec{\sigma} \vec{G} \quad (81)$$

Consecuentemente, la conductividad generalizada para el caso de sistemas “dyónicos” lineales isótropos y uniformes,  $\vec{\sigma}$ , es una matriz 2x2 que viene dada por:

$$\vec{\sigma} = \frac{n_{li} \tau}{m_{ef}} \begin{pmatrix} q^2 & \kappa q g \\ \kappa q g & \kappa^2 g^2 \end{pmatrix} = \frac{n_{li} \tau}{m_{ef}} |Q|^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \frac{1}{2} \text{sen} 2\theta \\ \frac{1}{2} \text{sen} 2\theta & \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} \quad (82)$$

Donde  $n_{li}$  es la densidad de portadores “dyónicos” libres que existen en el sistema, el ángulo  $\theta$  es el que define el tipo de “dion” que se trata. Tal como se estableció, para  $\theta=0$  es una carga eléctrica positiva y para  $\theta=90^\circ$  es una carga magnética positiva y para cualquier valor del ángulo se tiene un “dion” del plano “dyónico” tal como comenté en la sección 8 de transformación de dualidad. Además,  $|Q|^2 = q^2 + \kappa^2 g^2$ . En el caso de que sólo existan monopolos magnéticos la conductividad viene dada por:

$$\vec{\sigma} = \frac{n_{li} \tau}{m_{ef}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \kappa^2 g^2 \end{pmatrix} = \frac{n_{li} \tau}{m_{ef}} |Q|^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} \quad (83)$$

En este último supuesto caso que es el que coincide con los experimentos de “magnetricity” de Bramwell, [14,15], la ley de Ohm generalizada vendría dada por:

$$\vec{J}_m = \frac{n_{li} \tau}{m_{ef}} \kappa^2 g^2 c \vec{B} \quad (84)$$

Con esta expresión se pueden obtener alguna información adicional sobre los recientes resultados experimentos sobre “magnetricity”. En este caso,  $n_{li}$ , es la densidad de polos libres no enlazados, es decir, polos positivos o negativos que viajan independientes ante la interacción con el campo magnético exterior. En el “spin-ice”  $Dy_2Ti_2O_7$  es aproximadamente entre  $10^{-4}$  y  $10^{-6}$  cargas libres por átomo de Dy [14,15]. En el experimento de Bramwell, en el régimen lineal, es decir, cuando la conductividad no depende del campo, la constante de tiempo en el decaimiento exponencial de la amplitud de la precesión de los muones implantados es proporcional a la conductividad, en concordancia dual con el experimento de Onsager [17].

En consecuencia, tomando los resultados experimentales del grupo de Bramwell, mediante la ecuación (84) y los datos de carga que pueden ser deducidos por la ecuación (2), se puede obtener la relación entre el tiempo de relajación y la masa efectiva de las cargas. Por otro lado, parece razonable admitir que este tiempo de relajación está conectado con el tiempo de recombinación de las cargas.

El problema subsiste puesto que la medida de la conductividad bajo un punto de vista empírico, en el caso del experimento de Bramwell, tiene que ser indirecta, a través de procedimientos complejos y económicamente caros, dada la inexistencia de aparatos de medida que hagan medidas supuestamente directas de la conductividad. La idea de generar dispositivos compactos para la determinación de la respuesta del movimiento de cargas ante la presencia del campo externo, tal como ocurre en la conductividad en los sistemas en los que sólo existen cargas eléctricas, sería deseable y será un objetivo a medio plazo si este campo de la Física se consolida como elemento aprovechable tecnológicamente. Como ya he dicho, la medida de la conductividad en este experimento se realiza implantando muones [9, 14, 15, 27] cuyos momentos magnéticos ante la presencia del campo magnético externo tienen un movimiento oscilatorio de precesión cuya amplitud depende según el efecto Wien [10, 17] de los momentos magnéticos libres de las cargas no enlazadas.

### 9.2. Función dieléctrica.

En el caso de los “dyones” con cargas magnética y eléctrica existen dos tipos de funciones respuesta: entre las polarizaciones de separación de cargas, que se ha venido a definir como “split-charge susceptibility” [41] y por otro lado, la relación entre el campo electromagnético generalizado  $\vec{G}$  y las imanaciones que viene a definir lo que se denomina “Kinetic susceptibility.”[41] Si considero partículas “dyónicas”, tales como existen en los aislantes topológicos [12], puedo definir que la separación entre las cargas positivas y negativas es proporcional a la fuerza de Lorentz que corresponde a las partes de esta fuerza que no dependen de las velocidades. La parte de las fuerzas que dependen de las velocidades de las cargas son muy pequeñas en comparación con las otras partes que no dependen de ellas. Esto es así porque las velocidades de las cargas en el interior de la materia son muy inferiores a la velocidad de la luz en el vacío. En consecuencia, en el medio material [32] se puede reducir la fuerza de Lorentz operativa en la separación de las cargas como  $\vec{F} = q\vec{E} + \kappa gc\vec{B}$  [41,43].

Entonces, la “spin-charge polarization” deberá ser proporcional a esta fuerza y a la carga del “dyon”. Esto permite establecer la relación entre la polarización de separación de cargas con el campo electromagnético generalizado:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \begin{pmatrix} \vec{P}_e \\ \kappa \vec{P}_m \end{pmatrix} = n\alpha \begin{pmatrix} q \\ \kappa g \end{pmatrix} (q, \kappa g) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} = \\ n\alpha |Q|^2 &\begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \frac{1}{2} \text{sen}2\theta \\ \frac{1}{2} \text{sen}2\theta & \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} = n\alpha \overleftrightarrow{\Theta} \vec{G} = \epsilon_0 \chi_s \overleftrightarrow{\Theta} \vec{G} \end{aligned} \tag{85}$$

Donde  $n$  es la densidad de “dyones”,  $\alpha$  es la polarizabilidad (propiedad de los materiales que indica la capacidad de ser polarizadas sus cargas). Siguiendo de forma análoga al Electromagnetismo, obtengo que:

$$\vec{d} = \epsilon_0 \vec{G} + \vec{P} = \epsilon_0 (I + \chi_s \overleftrightarrow{\Theta}) \vec{G} = \overleftrightarrow{\epsilon} \vec{G} \tag{86}$$

Lo cual sustituyendo en esta última ecuación la expresión (85) se tiene lo siguiente:

$$\vec{d} = \epsilon_0 \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{n\alpha|Q|^2}{\epsilon_0} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \frac{1}{2} \text{sen}2\theta \\ \frac{1}{2} \text{sen}2\theta & \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} \quad (87)$$

Es decir, tengo la definición de función dieléctrica para el sistema “dyónico”:

$$\vec{\epsilon} = \epsilon_0 \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{n\alpha|Q|^2}{\epsilon_0} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \frac{1}{2} \text{sen}2\theta \\ \frac{1}{2} \text{sen}2\theta & \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} \right) \quad (88)$$

De lo cual permite definir la función dieléctrica “Split-charge dielectric function” como:

$$\vec{\epsilon} = \epsilon_0 (I_d + \chi_s \vec{\Theta}) \quad (89)$$

En el caso de materiales anisótropos y no uniformes, la formulación de las ecuaciones (85-87), serían idénticas, pero en este caso general, teniendo en cuenta los dos canales eléctricos y magnéticos se refieren a dos características duales del mismo punto, la polarizabilidad,  $\alpha$ , sería una matriz cuadrada 6x6 de la siguiente forma:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Aquí los elementos de matriz  $\epsilon_{ij}$  pueden ser en el caso de sistemas anisótropos y no uniformes dependientes de cada punto es decir  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\vec{r})$ . Y en este caso la susceptibilidad viene dada por:

$$\vec{\chi}_s = n\alpha\epsilon_0^{-1}$$

Obviamente las ecuaciones (85-89) se convierten en las ecuaciones correspondientes del Electromagnetismo estándar si la carga magnética  $g=0$ .

### 9.3. Permeabilidad magnética.

Cuando una partícula cargada se mueve, el campo magnético induce modificaciones en los momentos magnéticos que son proporcionales al campo magnético  $\vec{B}$ , el cual ejerce una fuerza sobre la carga móvil  $\vec{v} \wedge \vec{B}$  que le produce un aumento de la velocidad angular y con ello mayor momento magnético y por consiguiente aumento del campo magnético. Además en la determinación de la fuerza de Lorentz se ve que si esta carga es magnética existe una componente de interacción sobre ella que depende de su velocidad y del campo eléctrico existente. En consecuencia, la parte de la fuerza de Lorentz generalizada que depende de la velocidad y que afecta a una partícula con carga eléctrica y magnética viene dada por la parte de la ecuación (34) que contiene la velocidad de las partículas cargadas. En consecuencia, por comparación esta fuerza será:  $\vec{F}_v = \vec{v} \wedge (q\vec{B} - \frac{\kappa}{c} g\vec{E})$ .

Esta fuerza aumentará la velocidad angular y el momento magnético de las corrientes de imanación de forma similar a como el campo  $\vec{B}$  con la fuerza  $\vec{v} \wedge \vec{B}$  genera aumento de velocidad angular en el caso de las cargas eléctricas. En el caso de los “dyones”, se puede establecer la relación para la permeabilidad magnética similar al caso de la función dieléctrica. Por lo tanto, la fórmula de la permeabilidad magnética se puede obtener de la siguiente forma [41]:

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} \vec{M}_e \\ \kappa \vec{M}_m \end{pmatrix} = \frac{1}{c} n \alpha' \begin{pmatrix} q \\ \kappa g \end{pmatrix} (-\kappa g, q) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c \vec{B} \end{pmatrix} = \frac{1}{c} n \alpha' \begin{pmatrix} -\kappa q g & q^2 \\ -(\kappa g)^2 & \kappa q g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c \vec{B} \end{pmatrix} \quad (90)$$

O también:

$$\vec{M} = \frac{1}{c} n \alpha' |Q|^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \text{sen} 2\theta & \cos^2 \theta \\ -\text{sen}^2 \theta & \frac{1}{2} \text{sen} 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c \vec{B} \end{pmatrix} = \frac{1}{c} n \alpha' \vec{\Theta}' \vec{G} = \mu_0 \chi_m \vec{G} \quad (91)$$

$$\chi_m = \frac{1}{\mu_0 c} n \alpha' \vec{\Theta}' \quad (92)$$

$$\vec{\Theta}' = |Q|^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \text{sen} 2\theta & \cos^2 \theta \\ -\text{sen}^2 \theta & \frac{1}{2} \text{sen} 2\theta \end{pmatrix} \quad (93)$$

Además, a partir de la ecuación (75) se llega a la expresión de la permeabilidad magnética extendida al caso de los “dyones” de la siguiente forma:

$$\vec{h} = \frac{1}{\mu_0 c} (\vec{I}_d - \mu_0 n \alpha' \Omega \vec{\Theta}') \vec{G} \quad (94)$$

$$\vec{G} = c \mu_0 \mu_r \vec{h} \quad (95)$$

$$\mu_r = (\vec{I}_d - \mu_0 n \alpha' \Omega \vec{\Theta}')^{-1} \quad (96)$$

Donde  $\mu_r$  es la permeabilidad magnética para “dyones” que es una matriz 2x2 que corresponde al doble canal, eléctrico y magnético del vector  $\vec{G}$ . En el caso de anisotropía y no uniformidad de material magnético, se puede definir una matriz 6x6 para la polarizabilidad de forma similar a lo que se hace en el caso de la función dieléctrica.

#### 9.4. Respuestas lineales con varias clases de “dyones”.

En el caso de existencia de varios tipos de “dyones”, es decir, que estén en distintas líneas del plano de carga, la conductividad eléctrica de la fórmula (83), la polarización eléctrica de la formula (86), la polarización magnética de la ecuación (91) deberán contar con esta condición de multiplicidad de “dyones” efectuando la suma a todas estas clases de partículas existentes en el sistema. Por lo tanto, tendré las siguientes expresiones de las repuestas lineales:

$$\vec{J} = \sum_d \frac{n_d \tau_d}{m_d} \begin{pmatrix} q_d \\ \kappa g_d \end{pmatrix} (q_d, \kappa g_d) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c \vec{B} \end{pmatrix} = \vec{\sigma} \vec{G} \quad (97)$$

$$\vec{P} = \sum_d n_d \alpha_d \begin{pmatrix} q_d \\ \kappa g_d \end{pmatrix} (q_d, \kappa g_d) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c \vec{B} \end{pmatrix} = \sum_d n_d \alpha_d \Theta_d \vec{G} \quad (98)$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} \vec{M}_e \\ \kappa \vec{M}_m \end{pmatrix} = \sum_d \frac{1}{c} n_d \alpha'_d \begin{pmatrix} q_d \\ \kappa g_d \end{pmatrix} (-\kappa g_d, q_d) \vec{G} = \sum_d \frac{1}{c} n_d \alpha'_d \vec{\Theta}'_d \vec{G} \quad (99)$$

Se puede establecer de forma análoga al caso en el que sólo hay una clase de “dyones”, las funciones respuesta simplemente considerando el sumatorio a todas estas clases. Efectivamente, las expresiones de estas respuestas lineales serán:

$$\vec{\sigma} = \sum_d \frac{n_d \tau_d}{m_d} \begin{pmatrix} q_d \\ \kappa g_d \end{pmatrix} (q_d, \kappa g_d) = \sum_d \frac{n_d \tau_d}{m_d} |Q_d|^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_d & \text{sen} \theta_d \cos \theta_d \\ \text{sen} \theta_d \cos \theta_d & \kappa \text{sen}^2 \theta_d \end{pmatrix}$$

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_0 \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_d \frac{n_d \alpha_d}{\varepsilon_0} |Q_d|^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_d & \text{sen} \theta_d \cos \theta_d \\ \text{sen} \theta_d \cos \theta_d & \text{sen}^2 \theta_d \end{pmatrix} \right]$$

$$\vec{\mu} = \mu_0 \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \sum_d n_d \alpha_d |Q_d|^2 \begin{pmatrix} -\text{sen} \theta_d \cos \theta_d & \cos^2 \theta_d \\ -\text{sen}^2 \theta_d & \text{sen} \theta_d \cos \theta_d \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

## 10. Cálculo de polarizabilidades.

En el análisis de las funciones respuesta dieléctrica y permeabilidad magnética, el único dato que falta por determinar es la polarizabilidad de los momentos dipolares eléctricos y magnéticos de los “spin-ices” a nivel molecular.

Por el principio de mínima energía los momentos dipolares  $p$  y  $m$  tienden a orientarse en la dirección del campo [31-35], que en el caso de los “dyones” será el campo electromagnético extendido  $\vec{G}_{mol}$ . Y si hay  $N$  moléculas por unidad de volumen se tiene, en coherencia del Electromagnetismo clásico, las siguientes relaciones entre el campo y las polarizaciones:

$$\vec{P} = N \vec{p} = N \alpha \vec{\Theta} \vec{G}_{mol} \quad (100)$$

$$\vec{M} = N \vec{m} = N \alpha' \vec{\Theta}' \vec{G}_{mol} \quad (101)$$

De acuerdo con las relaciones dadas por las ecuaciones (22) y (23) entre los campos moleculares y los campos medios  $\vec{G}_{mol} = \vec{G} + \gamma \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} + (\gamma' - 1) \mu_0 c \Omega \vec{M}$  y cuando los volúmenes elementales en los que

se calculan valores medios para obtener los campos de Maxwell se toman esféricos, esta relación se convierte en la siguiente:

$$\vec{G}_{mol} = \vec{G} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} - \frac{2}{3} \mu_0 c \Omega \vec{M}$$

Por otro lado, las matrices  $\vec{\Theta}$  y  $\vec{\Theta}'$  de las ecuaciones (85) y (93) cumplen las siguientes relaciones:

$$\vec{\Theta}^2 = \vec{\Theta} \vec{\Theta} = \vec{\Theta}$$

$$\vec{\Theta}' \vec{\Theta}' = \vec{\Theta}' \vec{\Theta} = 0$$

$$\vec{\Theta}' = -\vec{\Theta} \Omega$$

Y en consecuencia, en medios isótropos se tiene que [43]:

$$\vec{\Theta} \vec{P} = N \alpha \vec{\Theta} \vec{\Theta} \vec{G}_{mol} = N \alpha \vec{\Theta} \vec{G}_{mol} = \vec{P}$$

$$\vec{\Theta} \Omega \vec{M} = N \alpha' \vec{\Theta} \Omega \vec{\Theta}' \vec{G}_{mol} = 0$$

$$\begin{aligned}\vec{\Theta}'\vec{P} &= N\alpha\vec{\Theta}'\vec{\Theta}\vec{G}_{mol} = 0 \\ \vec{\Theta}'\Omega\vec{M} &= -N\alpha'\vec{\Theta}'\Omega\vec{\Theta}'\vec{G}_{mol} = N\alpha'\vec{\Theta}'\vec{G}_{mol} = \vec{M}\end{aligned}$$

Y por lo tanto, considerando la relación dada entre el campo molecular y el campo medio y las expresiones (100) y (101) se tienen las siguientes expresiones para la polarización de P y M:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= N\alpha\vec{\Theta}'\vec{G} + N\alpha\gamma\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \\ \vec{M} &= N\alpha'\vec{\Theta}'\vec{G} + N\alpha'(\gamma' - 1)\mu_0c\vec{M}\end{aligned}\tag{102}$$

La susceptibilidad correspondiente a la polarización de carga  $\vec{P}$  y el campo  $\vec{G}$  es:

$$\vec{P} = \frac{N\alpha}{1 - N\alpha\gamma/\epsilon_0}\vec{\Theta}\vec{G} = \epsilon_0\chi_s\vec{\Theta}\vec{G} \Rightarrow \chi_s = \frac{N\alpha/\epsilon_0}{1 - N\alpha\gamma/\epsilon_0}\tag{103}$$

La susceptibilidad eléctrica  $\chi_s$  es una variable física macroscópica que se puede medir con cierta facilidad y en consecuencia, la ecuación (103) permite determinar la polarizabilidad de cada molécula en función de la susceptibilidad.

En el caso de ausencia de cargas magnéticas, se obtiene la expresión estándar Clausius-Mossotti de la susceptibilidad [31-33, 35], y cuando el volumen de control de la relación entre campo molecular y macroscópico se toma de forma esférica, entonces  $\gamma = 1/3$ :

$$\chi_s = \frac{N\alpha/\epsilon_0}{1 - N\alpha/3\epsilon_0}\tag{104}$$

La susceptibilidad cinética puede ser calculada por las siguientes ecuaciones:

$$\vec{M} = \frac{N\alpha'}{1 - N\alpha'(\gamma' - 1)\mu_0c}\vec{\Theta}'\vec{G} = \mu_0\chi_m\vec{\Theta}'\vec{G}\tag{105}$$

Y por tanto:

$$\chi_m = \frac{N\alpha'\mu_0c}{1 - N\alpha'(\gamma' - 1)\mu_0c}\tag{106}$$

Este resultado es también coherente con el correspondiente resultado estándar para la susceptibilidad magnética cuando hay ausencia de cargas magnética [31-33,35]. De las ecuaciones (103) y (106) se tiene una relación directa entre las susceptibilidades eléctrica y magnética con las respectivas polarizabilidades.

### 11. Propagación electromagnética en medios no dispersivos.

Una segunda faceta, tan importante como la “magnetricity” es conocer cómo se propagan las ondas electromagnéticas en medios materiales no confinados en los que hay cargas magnéticas. Al igual que en el caso de la determinación de las respuestas lineales, considero el caso de la propagación electromagnética en medios infinitos, cuando existen componentes del sistema que presentan tanto carga eléctrica como magnética, es decir, se va a considerar la propagación electromagnética para un sistema de “dyones”.

En orden a extraer lo que es diferente físicamente cuando se trata la propagación en sistema de “dyones” con respecto a lo que ocurre en el caso de cargas eléctricas, realizo el estudio a medios lineales, uniformes e isótropos y que la propagación ocurre en los puntos del espacio en el que no existan cargas

libres. Con estos supuestos y teniendo en cuenta las ecuaciones (62-63), (86) y (91), las ecuaciones de campo en medios materiales que sustituyen a las (38)-(41) son las siguientes:

$$\nabla \cdot \vec{d} = \rho \tag{107}$$

$$\nabla \wedge \vec{h} = \Omega \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{d}}{\partial t} \right) \tag{108}$$

Donde  $\rho$  y  $\vec{J}$  son las densidades generalizadas de carga y corriente ya definidas en las ecuaciones (59-61). Dado que considero el espacio libre sin cargas y medios lineales isótropos y homogéneos, se puede utilizar como función de prueba de la ecuación diferencial una onda monocromática de la forma:

$$\vec{h}(\vec{r}, t) = \vec{h}_0 \exp \left[ i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right] \tag{109}$$

Donde  $\vec{h}_0$  es un vector constante de seis componentes, de las cuales las tres primeras corresponden al sector eléctrico y las tres siguientes al magnético.

Además teniendo presente la ecuación (107), y que se está en el espacio libre de toda carga:

$$\nabla \cdot \vec{d} = \nabla \cdot \vec{\epsilon} \vec{G} = c \vec{\epsilon} \vec{\mu} \nabla \cdot \vec{h} = 0 \tag{110}$$

Y esto implica que  $\vec{\epsilon} \vec{\mu} \vec{k} \cdot \vec{h}_0 = 0$ . Esta ecuación plantea un sistema de ecuaciones homogéneo que para que exista solución para las componentes del vector  $\vec{h}$  es necesario y suficiente que el determinante del producto de matrices de la función dieléctrica por la permeabilidad magnética sea diferente de cero. Lo cual proporciona la condición de transversalidad de todas las ondas planas  $\vec{h}$ .

Por otro lado, la ecuación (108), teniendo en cuenta (86) y (95), se puede expresar como:

$$\nabla \wedge \vec{h} = c \Omega \left( \vec{\sigma} + \vec{\epsilon} \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{\mu} \vec{h} \tag{111}$$

E introduciendo la ecuación general de la solución de la ecuación (109) se tiene la siguiente relación entre las componentes de cada onda plana monocromática en función de las respuestas lineales mediante la expresión:

$$\vec{k} \wedge \vec{h}_0 = -c \Omega \left( \vec{\epsilon} \omega + i \vec{\sigma} \right) \vec{\mu} \vec{h}_0 = \vec{M}_P \vec{h}_0 \tag{112}$$

Donde  $\vec{M}_P$  la denomino matriz de propagación electromagnética en medios materiales isótropos, lineales y uniformes. Mediante esta ecuación algebraica se establecen las condiciones que dependen de las propiedades del medio en el que se propaga el campo  $\vec{h}$  y que son fijadas por las respuestas lineales. Ahora pasaré a determinar estas condiciones de propagación electromagnética en medios infinitos determinadas por la ecuación (112).

### 11.1. Matriz de propagación electromagnética no dispersiva.

La matriz de propagación en los casos más generales es la correspondiente a imperfectos conductores que tienen tanto función dieléctrica como conductividad y puede escribirse de la siguiente forma:

$$\vec{M}_P = \vec{R}_P + i \vec{I}_P$$

Donde  $\vec{R}_P$  es la matriz parte real de la matriz de propagación e  $\vec{I}_P$  es su matriz parte imaginaria.

Teniendo presente las expresiones que entran en juego en esta matriz tengo lo siguiente:

$$\vec{R}_P = -c\omega\Omega\vec{\varepsilon}\vec{\mu} = \frac{-\omega}{c(1-\beta'')} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\text{sen}2\theta(\beta''+\beta') & -1+\beta''\cos^2\theta-\beta'\text{sen}^2\theta \\ 1-\beta''\text{sen}^2\theta+\beta'\cos^2\theta & \frac{1}{2}(\beta'+\beta'')\text{sen}2\theta \end{pmatrix} \quad (113)$$

$$\vec{I}_P = -c\Omega\vec{\sigma}\vec{\mu} = \frac{\mu_0 c \beta}{1-\beta''} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\text{sen}2\theta & \text{sen}^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\frac{1}{2}\text{sen}2\theta \end{pmatrix} \quad (114)$$

Donde las variables  $\beta$ ,  $\beta'$  y  $\beta''$  vienen dadas por las expresiones:

$$\beta = \frac{n_i |Q|^2 \tau}{m_{ef}} \quad (115)$$

$$\beta' = \frac{n\alpha |Q|^2}{\varepsilon_0} \quad (116)$$

$$\beta'' = \mu_0 n\alpha' |Q|^2 \quad (117)$$

En el caso de los “spin-ices”, el plasma magnético es un aislante de cargas eléctricas y carece de éstas en el estado de plasma magnético que sólo tiene cargas magnéticas libres y disponibles para poder ser aceleradas en orden a producir conductividad o “magnetricity”. En este caso concreto de sistema “dyónico”, tengo que definir el mecanismo de propagación del campo electromagnético extendido  $\vec{h}$  mediante las funciones respuesta y la matriz de propagación  $\vec{M}$ . Las funciones respuesta en el caso de sistema “dyónico” de los “spin-ices”, las obtengo de las expresiones generales deducidas en los apartados anteriores, concretamente, (82), (88) y (96) y que en este caso vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\vec{\sigma} = \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (118)$$

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\beta' \end{pmatrix} \quad (119)$$

$$\vec{\mu} = \mu_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\beta''} \end{pmatrix} \quad (120)$$

Y de esta forma la ecuación de propagación para cualquier onda monocromática en un medio no dispersivo viene a ser una versión específica de (113) y (114) aplicable a los medios no dispersivos que contengan en exclusividad cargas magnéticas (“dyones” cuyos ángulos son  $90^\circ$  y  $270^\circ$  para las cargas positivas y negativas respectivamente). Esta ecuación se puede poner de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \vec{k} \wedge \vec{h}_e \\ \vec{k} \wedge \vec{h}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\omega(1+\beta')}{c(1-\beta'')} + ic \frac{\mu_0 \beta''}{1-\beta''} \\ -\frac{\omega}{c} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{h}_e \\ \vec{h}_m \end{pmatrix} \quad (121)$$

Y en consecuencia las ecuaciones algebraicas que relacionan las componentes de los diferentes vectores vienen a ser las siguientes:

$$\vec{k} \wedge \vec{h}_e = \left( \frac{\omega(1+\beta)}{c(1-\beta'')} + i \frac{\mu_0 c \beta}{1-\beta''} \right) \vec{h}_m \quad (122)$$

$$\vec{k} \wedge \vec{h}_m = \left( -\frac{\omega}{c} \right) \vec{h}_e$$

Y teniendo en cuenta las dos ecuaciones y la transversalidad de los campos  $\vec{h}$ , se obtiene:

$$k^2 = \left( \frac{\omega^2 (1+\beta')}{c^2 (1-\beta'')} + i \frac{\omega \mu_0 \beta}{1-\beta''} \right) \quad (123)$$

De esta ecuación se puede determinar el valor del módulo del vector k en función de la frecuencia y de las respuestas lineales. Es decir:

$$k^2 = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i2ab \quad (124)$$

$$a^2 - b^2 = k_0^2 \left( \frac{(1+\beta')}{(1-\beta'')} \right) \quad (125)$$

$$2ab = k_0 \left( \frac{c \mu_0 \beta}{(1-\beta'')} \right) \quad (126)$$

Donde  $k_0$  es el correspondiente vector de ondas en el vacío para la frecuencia  $\omega$ . La solución de este par de ecuaciones algebraicas no lineales permite determinar la parte real y la parte imaginaria del vector  $\vec{k}$ . Esto implica que la onda plana monocromática es evanescente de acuerdo con el valor de b. Es decir, la onda se convierte en:

$$\vec{h}(\vec{r}, t) = \vec{h}_0 \exp(-b\vec{n} \cdot \vec{r}) \exp \left[ i(\vec{a}\vec{n} \cdot \vec{r} - \omega t) \right] \quad (127)$$

Donde se ha definido el vector  $\vec{n}$  como un vector unitario en la dirección de propagación que es perpendicular a los campos  $\vec{h}_e$  y  $\vec{h}_m$ . De acuerdo con este resultado, la respuesta de la propagación electromagnética en medios infinitos lineales, isótropos y uniformes cuando sólo existen cargas magnéticas es similar al caso estándar pero con la diferencia de que los parámetros de respuesta dieléctrica son diferentes y están definidos por las ecuaciones (118-120). Las partes real e imaginaria del vector:

$$\vec{k} = (a+ib)\vec{n} = k \exp(i\eta)\vec{n} \quad (128)$$

Puede deducirse de (124-126) lo siguiente:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( k_0^2 \left( \frac{(1+\beta')}{(1-\beta'')} \right) + \left[ k_0^4 \left( \frac{(1+\beta')}{(1-\beta'')} \right)^2 + k_0^2 \left( \frac{c \mu_0 \beta}{(1-\beta'')} \right)^2 \right]^{1/2} \right)^{1/2} \quad (129)$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -k_0^2 \left( \frac{(1+\beta')}{(1-\beta'')} \right) + \left[ k_0^4 \left( \frac{(1+\beta')}{(1-\beta'')} \right)^2 + k_0^2 \left( \frac{c \mu_0 \beta}{(1-\beta'')} \right)^2 \right]^{1/2} \right)^{1/2} \quad (130)$$

De tal forma que el módulo y fase del vector de ondas complejo viene dado por las siguientes expresiones:

$$k = \left[ k_0^4 \left( \frac{(1+\beta')}{(1-\beta'')} \right)^2 + k_0^2 \left( \frac{c \mu_0 \beta}{(1-\beta'')} \right)^2 \right]^{1/4} = \frac{\omega n_r}{c} \left( 1 + \left( \frac{\beta}{\omega \epsilon_0 (1+\beta')} \right)^2 \right)^{1/4}$$

$$= \frac{\omega n_r}{c} \left( 1 + \left( \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right)^{1/4} \quad (131)$$

$$\eta = \operatorname{artg} \left[ \frac{\left[ -k_0^2 \left( \frac{(1+\beta')}{(1-\beta'')} \right) + \left[ k_0^4 \left( \frac{(1+\beta')}{(1-\beta'')} \right)^2 + k_0^2 \left( \frac{c\mu_0\beta}{(1-\beta'')} \right)^2 \right]^{1/2}}{\left[ k_0^2 \left( \frac{(1+\beta')}{(1-\beta'')} \right) + \left[ k_0^4 \left( \frac{(1+\beta')}{(1-\beta'')} \right)^2 + k_0^2 \left( \frac{c\mu_0\beta}{(1-\beta'')} \right)^2 \right]^{1/2}} \right]^{1/2}} \right] \quad (132)$$

$$= \operatorname{artg} \left[ \frac{\left[ -1 + \left( 1 + \left[ \frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right]^2 \right)^{1/2} \right]^{1/2}}{1 + \left( 1 + \left[ \frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right]^2 \right)^{1/2}} \right]^{1/2}$$

En estas expresiones, todas las variables han sido definidas con anterioridad con la excepción de:

$$n_r = \sqrt{\frac{(1+\beta')}{(1-\beta'')}} = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$$

Que es el índice de refracción del campo electromagnético del medio material en el que se propaga la onda monocromática. Las expresiones (125-132) son idénticas a las que se obtienen en la propagación de las ondas monocromáticas en medios con cargas eléctricas. Es decir, la propagación de dichas ondas en espacios infinitos, partiendo de las fórmulas generales de la matriz de propagación, (112) y (113), no se modifica si las ondas se propagan en sistemas con “dyones” que estén en la recta imaginaria (cargas magnéticas) con respecto a lo que se deduce cuando las cargas quedan en la recta real (cargas eléctricas). Ello implica que la propagación en medios infinitos es una propiedad que se conserva ante la simetría de dualidad, de forma similar a la “magnetricity” experimentada por el grupo de Bramwell. Simplemente hay que considerar las correspondientes respuestas lineales de conductividad,  $\sigma$ , función dieléctrica,  $\epsilon$ , y permeabilidad magnética correspondiente al caso de los sistemas con cargas magnéticas dadas por las expresiones (118-120).

## 12. Propagación electromagnética en medios dispersivos.

Si se tiene un campo electromagnético  $\vec{h}(\vec{r}, t)$  cualquiera con cualquier dependencia temporal, una onda monocromática no es una forma realista de determinación analítica, y entonces su forma general vendría dada por:

$$\vec{h}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \left( \iiint \vec{h}(\vec{k}, \omega) \exp \left[ i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right] d^3k \right) d\omega \quad (133)$$

Esta expresión implica la existencia de un paquete de ondas monocromáticas cada una con diferentes contribuciones al campo completo determinado por la función de “peso”. En estos casos, la conductividad, función dieléctrica y permeabilidad magnética no son constantes sino que pueden depender de la frecuencia del campo electromagnético. Como se consideran intensidades de campo no demasiado grandes, las relaciones entre los campos  $\vec{d}$  y  $\vec{G}$ , así como entre  $\vec{h}$  y  $\vec{G}$  son lineales. Esto implica que:

$$\vec{d}(t) = \vec{G}(t) + \int_0^\infty \vec{f}(\tau) \vec{G}(t - \tau) d\tau \quad (134)$$

$$\vec{h}(t) = \vec{G}(t) + \int_0^{\infty} \vec{g}(\tau) \vec{G}(t - \tau) d\tau \quad (135)$$

Estas dos ecuaciones se pueden interpretar como que el valor de los campos  $d$  y  $h$  en un instante de tiempo dependen de los campos  $G$  evaluados en tiempos inmediatamente anteriores a éste y multiplicados por funciones de “peso”  $f$  y  $g$  respectivamente que en realidad son matrices  $2 \times 2$ .

Ante un campo como (133), se obtiene que las ecuaciones constitutivas en este caso vienen dadas por:

$$\vec{d}(\omega) = \vec{\varepsilon}(\omega) \vec{G}(\omega) \quad (136)$$

$$\vec{G}(\omega) = c \vec{\mu}(\omega) \vec{h}(\omega) \quad (137)$$

Donde las funciones dieléctricas y permeabilidades magnéticas vienen dadas por:

$$\vec{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_0 \left( I + \int_0^{\infty} \vec{f}(t) e^{i\omega t} dt \right) \quad (138)$$

$$\vec{\mu}(\omega) = \mu_0 \left( I + \int_0^{\infty} \vec{f}(t) e^{i\omega t} dt \right) \quad (139)$$

En consecuencia todas las respuestas del medio, conductividad, función dieléctrica y función permeabilidad magnética dependen de la frecuencia de la onda electromagnética y por ello se denominan dispersivas puesto que dependen de la frecuencia. Esta dependencia hace que se produzca la dispersión electromagnética en un medio material. Introduciendo el campo de la expresión (133) en la ecuación de campo (108), se tiene que:

$$\vec{k} \wedge \vec{h}(\vec{k}, \omega) = -c\Omega \left( \vec{\varepsilon}(\omega)\omega + i\vec{\sigma}(\omega) \right) \vec{\mu}(\omega) \vec{h}(\vec{k}, \omega) = \vec{M}_P(\omega) \vec{h}(\vec{k}, \omega)$$

La formulación de la matriz de dispersión es idéntica a la que he realizado en el caso no dispersivo (112), pero con las funciones respuesta, conductividad, función dieléctrica y permeabilidad magnética dependientes de la frecuencia. Por ello es necesario establecer las respuestas del medio dependientes de la frecuencia del campo electromagnético.

### 12.1. Función dieléctrica dispersiva.

La función dieléctrica para medios dispersivos “dyónicos” puede ser calculada a partir del modelo de Lorentz-Drude [34]. Este modelo usa un oscilador armónico clásico para partículas cargadas. Si se considera una carga “dyonica”  $Q$  bajo un campo electromagnético molecular extendido  $G_{mol} = G_0 e^{-i\omega t}$  y asumiendo una extensión del oscilador Lorentz-Drude con la dirección  $x$ , la ecuación del movimiento se puede escribir:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \Gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{Q^T G_{loc}}{m} \quad (140)$$

Donde  $\omega_0$  es la frecuencia de resonancia del oscilador clásico correspondiente a una partícula con una carga  $Q$ , y  $\Gamma$  es la constante de amortiguamiento. La polarización debida a la separación entre cargas de diferente signo con una densidad de partículas por unidad de volumen  $N$  es:

$$P = NQx = NQ \frac{Q^T G_0 / m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} e^{-i\omega t} = \frac{N|Q|^2 \Theta G_0 / m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} e^{-i\omega t} \quad (141)$$

Entonces, se puede definir polarizabilidad  $\alpha$  [31, 32] con la ecuación (100) y entonces se tiene, que:

$$\frac{N\alpha}{\varepsilon_0} = \omega_p^2 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} \quad (142)$$

Donde  $\omega_p^2 \equiv \frac{N|Q|^2}{m\varepsilon_0}$  y teniendo presente que la función dieléctrica es la relación entre el vector  $\vec{d}$  y el

$\vec{G}$  según la ecuación  $\vec{d} = \varepsilon_0 \vec{G} + \vec{P} = \vec{\varepsilon} \vec{G}$ , se tiene que la función dieléctrica viene dada por:

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_0 \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{N|Q|^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega - i\Gamma\omega} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \frac{1}{2} \text{sen}2\theta \\ \frac{1}{2} \text{sen}2\theta & \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} \right\} = \varepsilon_0 (I + \chi_s \Theta) \quad (143)$$

Donde  $\chi_s = \frac{N|Q|^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega - i\Gamma\omega} = \omega_p^2 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega - i\Gamma\omega}$  y si se considera el campo molecular de la ecuación Clausius-Mossotti:

$$\chi_s = \frac{3N\alpha / \varepsilon_0}{3 - N\alpha / \varepsilon_0} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega_p^2 / 3 - \omega^2 - i\Gamma\omega} \quad (144)$$

Este resultado implica una frecuencia efectiva definida por  $\omega_i^2 \equiv \omega_0^2 - \omega_p^2 / 3$ .

Si de la ecuación (144) se despeja  $\alpha$ , tengo determinado el valor de la polarizabilidad molecular en función de la frecuencia. Si además, se consideran varios tipos de partículas con frecuencias de oscilación  $\omega_i$ , entonces la susceptibilidad de separación de carga puede ser obtenida teniendo en cuenta los mismos argumentos del modelo estándar de Lorentz-Drude, y el resultado es:

$$\chi_s = \sum_i \frac{\omega_p^2}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega}; \vec{P} = \varepsilon_0 \chi_s \vec{\Theta} \vec{G} \quad (145)$$

## 12.2. Pérdidas dieléctricas de energía.

Retomando la ecuación (143) se pueden interpretar las partes reales e imaginarias de la función dieléctrica desde un punto de vista energético. Para ello, haré un análisis en el contexto del Electromagnetismo de cargas eléctricas para después hacerlo en el sistema dual de cargas magnéticas, pues ello es una propiedad más del Electromagnetismo dual aplicable a los "spin-ices". Volviendo a las ecuaciones de los rotacionales de los campos de Maxwell:

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (146)$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J}_e + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (147)$$

Si se multiplica escalarmente la primera por el vector intensidad magnética y la segunda por el vector campo eléctrico y se resta la segunda ecuación de la primera se obtiene:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) + \vec{J}_e \cdot \vec{E} + \frac{\mu_0}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} + \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = -\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (148)$$

Integrando al volumen del material y aplicando el teorema de Gauss, se tiene lo siguiente:

$$\iint_S \vec{E} \wedge \vec{H} \cdot d\vec{S} + \iiint_V \vec{J}_e \cdot \vec{E} dV + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \iiint_V (\mu_0 H^2 + \epsilon_0 E^2) dV \right) = - \iiint_V \vec{E} \cdot (\epsilon - \epsilon_0) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV$$

El primer término es el flujo del vector de Poynting, el segundo es la variación temporal de la energía cinética de las partículas ante la interacción con el campo electromagnético de Maxwell, y el tercero es la variación temporal de la energía del campo electromagnético. En el vacío la suma de estos tres términos es nula que es lo que constituye el principio de conservación de la energía del campo con partículas eléctricas cargadas. Sin embargo, el término de la derecha de la igualdad corresponde a una energía propia de la existencia del dieléctrico. Este término implica una disminución de la energía interna por unidad de tiempo debida a la existencia del propio material y que afecta a grados de libertad de éste caracterizados por la función dieléctrica. De este término, consideraré la densidad de energía por unidad de volumen y por unidad de tiempo, lo cual permite analizar con exclusividad el integrando.

El término en cuestión es  $\vec{E} \cdot (\epsilon - \epsilon_0) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  y tomando un campo en forma de una onda monocromática del tipo  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t)$ , se tiene que el valor de la potencia por unidad de volumen perdida en el dieléctrico viene dada por el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot (\epsilon - \epsilon_0) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= -\vec{E}_0 \exp(-i\omega t) \cdot [\epsilon_1(\omega) + i\epsilon_2(\omega) - \epsilon_0] i\omega \vec{E}_0 \exp(-i\omega t) \\ \text{Re} \left( -\vec{E}_0 \exp(-i\omega t) \cdot [\epsilon_1(\omega) + i\epsilon_2(\omega) - \epsilon_0] i\omega \vec{E}_0 \exp(-i\omega t) \right) &= \\ &= E_0^2 \omega \left( [\epsilon_0 - \epsilon_1(\omega)] \cos \omega t (\text{sen} \omega t) + \epsilon_2(\omega) \cos^2 \omega t \right) \end{aligned}$$

Esta expresión es la disminución de energía en un instante de tiempo. Sin embargo, esta cantidad de energía no tiene mucho sentido puesto que una medida cualquiera se hace en un intervalo de tiempo normalmente mucho mayor que un periodo de oscilación del campo electromagnético. Por lo tanto, lo que tiene verdadero sentido es el valor medio temporal por periodo de la potencia energética perdida debida a la existencia del dieléctrico. Si se hace este promedio temporal, se tiene que la densidad de energía por unidad de tiempo y unidad de volumen viene dada por:

$$\left\langle \vec{E} \cdot (\epsilon - \epsilon_0) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\rangle_T = E_0^2 \omega \left( [\epsilon_0 - \epsilon_1(\omega)] \langle \cos \omega t (\text{sen} \omega t) \rangle_T + \epsilon_2(\omega) \langle \cos^2 \omega t \rangle_T \right)$$

Teniendo en cuenta que  $\langle \cos \omega t \text{sen} \omega t \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega t (\text{sen} \omega t) dt = 0$  y también considerando que:

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle_T = \frac{1}{2} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2}$$

Se tiene que las pérdidas de energía por la propagación de la onda en el dieléctrico vienen a ser:

$$\boxed{\left\langle \vec{E} \cdot (\epsilon - \epsilon_0) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\rangle_T = \frac{1}{2} E_0^2 \omega \epsilon_2(\omega)} \quad (149)$$

En consecuencia se puede decir que la parte real de la función dieléctrica juega el papel de la función dieléctrica propiamente dicha (como cuando  $\Gamma = 0$  que es el caso de los metales perfectos) y que la parte imaginaria da cuenta de las pérdidas de energía electromagnética ante la presencia de campo eléctrico en el material dieléctrico.

Todo lo hecho en este apartado corresponde al capítulo de pérdidas de energía en dieléctricos que es un tema estudiado en el Electromagnetismo [31-32,37]. Sin embargo, lo he querido mostrar para establecer

una vez más el concepto de dualidad que proporciona un análisis con los mismos ingredientes y caminos de actuación pero aplicado a sistemas en los que existan cargas magnéticas efectivas.

Para analizar las pérdidas dieléctricas debido a la existencia de cargas magnéticas, se estudia el caso simétrico al de las cargas eléctricas, es decir, un sistema de cargas magnéticas sumergidas en un aislante eléctrico, tal como son los “spin-ices”. Por lo tanto, he de considerar el siguiente cuadro de elementos correspondientes a los diferentes vectores así como las correspondientes ecuaciones de campo:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} \vec{d}_e \\ \vec{d}_m \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{P}_m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \vec{d}_e &= \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{d}_m &= \varepsilon_0 c \vec{B} + \vec{P}_m \end{aligned} \quad (150)$$

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} \vec{h}_e \\ \vec{h}_m \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_0 c} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\vec{M}_m \\ \vec{0} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \vec{h}_e &= \frac{\vec{E}}{\mu_0 c} + \vec{M}_m \\ \vec{h}_m &= \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} \end{aligned} \quad (151)$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \kappa \vec{M}_m \end{pmatrix} = \frac{n\alpha' |Q|^2}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \vec{M}_e &= 0 \\ \kappa \vec{M}_m &= -\frac{n\alpha' |Q|^2}{c} \vec{E} \end{aligned} \quad (152)$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \kappa \vec{P}_m \end{pmatrix} = n\alpha |Q|^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \vec{P}_e &= 0 \\ \vec{P}_m &= n\alpha |Q|^2 c \vec{B} \end{aligned} \quad (153)$$

Y por otro lado, si se supone que no hay corrientes de cargas eléctricas (los “spin-ices” y los aislantes topológicos no tienen corrientes eléctricas ni polarizaciones eléctricas, puesto que son aislantes eléctricos), las ecuaciones de campo desglosadas a partir de la ecuación (108) son las siguientes:

$$\nabla \wedge \vec{h}_e = -\kappa \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{d}_m}{\partial t} \quad (154)$$

$$\nabla \wedge \vec{h}_m = \frac{\partial \vec{d}_e}{\partial t} \quad (155)$$

Multiplicando escalarmente la primera por  $\mu_0 c \vec{h}_m$  y la segunda por  $\mu_0 c \vec{h}_e$  se obtiene lo siguiente:

$$\mu_0 c \vec{h}_m \cdot \nabla \wedge \vec{h}_e = -\kappa \mu_0 c \vec{h}_m \cdot \vec{J}_m - \mu_0 c \vec{h}_m \cdot \frac{\partial \vec{d}_m}{\partial t}$$

$$\mu_0 c \vec{h}_e \cdot \nabla \wedge \vec{h}_m = \varepsilon_0 \mu_0 c \vec{h}_e \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Y ahora restando la segunda de la primera y teniendo en cuenta el cuadro de arriba:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \vec{E} \wedge \vec{H} \right) + c \kappa \vec{J}_m \cdot \vec{B} + c \nabla \cdot \left( \kappa \vec{M}_m \wedge (\mu_0 \vec{H}) \right) + \frac{1}{c} \kappa \vec{M}_m \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\mu_0}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} + \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \\ = -n\alpha |Q|^2 \frac{\partial (c\vec{B})}{\partial t} \cdot (c\vec{B}) \end{aligned}$$

El modelo de “dumbbells” introducido en la sección 2 es compatible con movimientos propios de un gas de coulomb de cargas magnéticas y ello es coherente con movimientos aleatorios de cargas magnéticas, propios del plasma frío que es el que se constituye en los “spin-ices”. En consecuencia parece razonable considerar que la imanación producida por movimientos circulares de cargas magnéticas de origen

molecular puede ser incompatible con este sistema de cargas magnéticas en estado interaccionante de Coulomb. En consecuencia, parece aceptable asumir que la imanación  $\kappa \vec{M}_m$  es prácticamente nula en estos sistema de "spin-ices". Por ello la última ecuación se reduce a:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) + c\kappa \vec{J}_m \cdot \vec{B} + \frac{\mu_0}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} + \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = -n\alpha |Q|^2 \frac{\partial(c\vec{B})}{\partial t} \cdot (c\vec{B})$$

Que es la dual de la ecuación (148) que corresponde a un sistema similar pero de cargas eléctricas, mientras que éste es constituido por cargas magnéticas. Sin embargo, la expresión  $n\alpha$  es la misma que se da en la fórmula (119). Esta ecuación puede ponerse en forma integral, integrando al volumen del material, y entonces se tiene:

$$\iint_S \vec{E} \wedge \vec{H} \cdot d\vec{S} + \iiint_V \kappa \vec{J}_m \cdot c\vec{B} dV + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \iiint_V (\mu_0 H^2 + \varepsilon_0 E^2) dV \right) = -n\alpha \iiint_V c\vec{B} \cdot \frac{\partial(c\vec{B})}{\partial t} dV$$

El primer término es conocido flujo del vector de Poynting, el segundo es la variación temporal de la energía cinética de las cargas magnéticas, el tercero es la variación temporal de la energía electromagnética y el término correspondiente a la parte derecha de la igualdad constituye la energía perdida por el material al tener una polarizabilidad molecular. Por el paralelismo de ambos planteamientos, en el caso de los "spin-ices" cuando están formados los dipolos magnéticos pero están todavía siendo dipolos ligados, la pérdida de energía por unidad de tiempo y volumen ante la presencia de una onda electromagnética incidente viene a ser:

$$\left\langle c\vec{B} \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{\partial(c\vec{B})}{\partial t} \right\rangle_T = \frac{1}{2} (cB_0)^2 \omega \varepsilon_2(\omega) \tag{156}$$

Donde  $\varepsilon_2(\omega) = \text{Im}(n\alpha)$ . Ahora pasaré a estudiar analíticamente esta polarizabilidad en orden a estudiar las pérdidas dieléctricas de energía:

$$n\alpha = \frac{n|Q|^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} \tag{157}$$

Siendo  $\omega_p^2 = \frac{n|Q|^2}{\varepsilon_0 m}$ .

Es importante establecer la forma analítica de las partes real e imaginaria de  $n\alpha$  ya que según se ha visto con el caso de los dieléctricos de cargas eléctricas, la parte real hace las veces de verdadera función dieléctrica que afecta a las interacciones entre cargas y es una parte importante del índice de refracción dispersivo, y la parte imaginaria da cuenta de las pérdidas energéticas de del dieléctrico ante la presencia del campo electromagnético. En este caso, una vez más se tiene el paralelismo que proporciona la simetría de dualidad. Así, las partes real e imaginaria de la expresión de arriba será:

$$\text{Re}(n\alpha) = \varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \omega_p^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$

$$\text{Im}(n\alpha) = \varepsilon_2 = \varepsilon_0 \omega_p^2 \frac{\Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$

En consecuencia, la pérdida de energía que se pierde, viene dada por:

$$\Delta W = -\frac{1}{2} (cB_0)^2 \varepsilon_0 \omega_p^2 \frac{\Gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \tag{158}$$

Cuyo valor máximo es para la frecuencia del campo electromagnético que coincide con la de la oscilación libre del sistema según la ecuación (151), es decir para  $\omega = \omega_0$ . Este valor de la frecuencia, al ser de pérdida máxima, indica que es la correspondiente a la de mayor absorción de energía por parte del material a costa de la pérdida de energía del sistema electromagnético. Para valores diferentes de la frecuencia de resonancia, la parte imaginaria tiende rápidamente a cero. Entonces el comportamiento dieléctrico del sistema es prácticamente normal, entendiéndose por normal que la función dieléctrica puede considerarse real. En orden a realizar evaluaciones de energía debida a la existencia de momentos dipolares de cargas magnéticas, la expresión (158) puede ponerse de la siguiente forma:

$$\Delta W = -2 \frac{N \mu_\beta^2 n^2}{m l^2} \frac{\Gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} B^2 = \Upsilon \frac{\Gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} B^2; \Upsilon = -2 \frac{N \mu_\beta^2 n^2}{m l^2} \quad (159)$$

Donde, N es el número de dipolos formados que en los "spin-ices"  $\mu_\beta$  es la unidad elemental de momento magnético del electrón (magnetón de Bohr), n es el número de electrones en la capa incompleta de la tierra rara (disprosio, Dy, o Holmio, Ho), m es la masa efectiva de la entidad estructural que constituye la carga magnética, l es la separación del momento dipolar formado por dos cargas magnéticas que viene a ser del orden del amstrong, B es el módulo del campo magnético y  $\Upsilon$  es una constante cuyas unidades son  $[\Upsilon] = [Q]^2 [L]^{-1} [T]^{-2} [M]^{-1}$  y que depende exclusivamente de las características del material. Considerando una frecuencia propia de  $\omega_0 = 2$  (en unidades arbitrarias) y un coeficiente de fricción 4 veces inferior a dicha frecuencia, es decir,  $\Gamma = 0.5$  la forma de dependencia en función de la frecuencia del campo y de la intensidad del mismo, obtengo la siguiente representación:

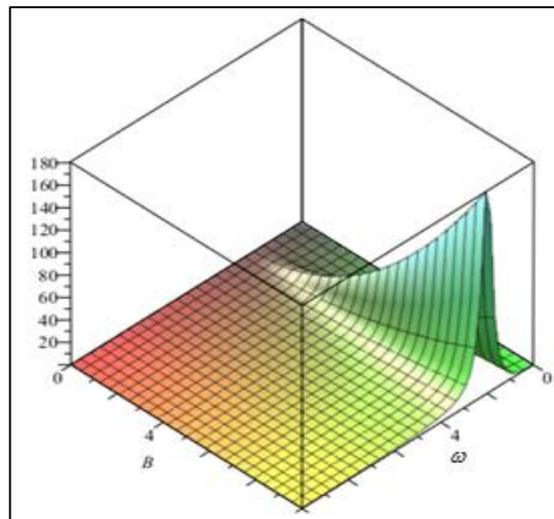


Figura 7.- Pérdidas de energía en un "spin-ice" en función del campo magnético y de la frecuencia.

En esta figura 7 se representan las pérdidas de energía de la expresión (159) para los valores antes citados. Muestra que las pérdidas energéticas son máximas para la frecuencia del campo igual a la frecuencia propia. Estas pérdidas tienden a cero cuando las frecuencias del campo que tienden a cero y cuando tienden a infinito. Además, la dependencia con el campo es en forma parabólica con él. Volviendo a la frecuencia a la que alcanza el máximo, la pérdida de energía del campo coincide con la absorbida por el material, y ésta alcanza el valor de:

$$\Delta W = -\frac{1}{2\Gamma} (cB_0)^2 \epsilon_0 \omega_p^2 = \frac{\Upsilon B^2}{\Gamma} \quad (160)$$

Esta energía máxima cedida por el campo al material es tanto mayor cuanto más débil es la constante de fricción  $\Gamma$ . Esta constante de fricción depende de las pérdidas de momento lineal de las cargas magnéticas producidas por las colisiones y por ello es tanto mayor cuanto menor es el libre recorrido medio.

En consecuencia, midiendo la absorción, se tiene un criterio para determinar el libre recorrido medio que es un parámetro necesario para conocer en general la conductividad del sistema. Esto es así, puesto que los picos de absorción y la intensidad absorbida pueden medirse con relativa facilidad. Además, este parámetro de fricción es tal que determina el ancho de banda de absorción, el cual se define mediante el intervalo que en los extremos del mismo la intensidad es la mitad que en el máximo, es decir,  $\Delta\omega = \Gamma$ .

En el supuesto de tener varias frecuencias propias  $\omega_0 = 2, \omega_1 = 6, \omega_2 = 10$  y usando la expresión para la función dieléctrica con varias frecuencias, se obtiene la siguiente representación.

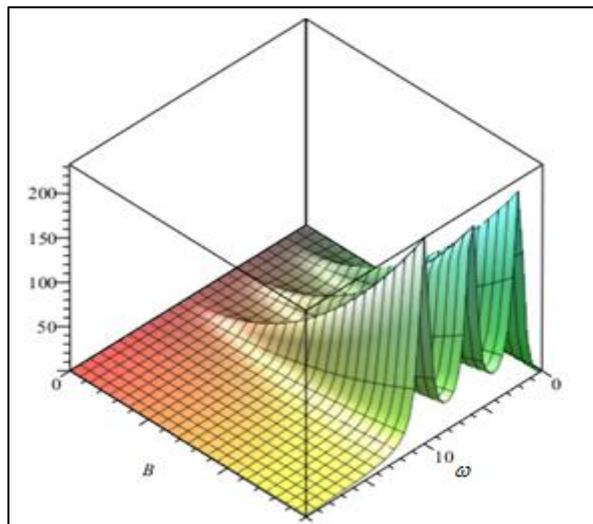


Figura 8.- Pérdida de energía cuando la función dieléctrica tienen varias frecuencias propias.

Esta figura presenta similar resultado a la anterior pero existen tantos máximos como frecuencias propias y aparecen centrados en ellas, un máximo para cada frecuencia. La parte real de la función dieléctrica, tal como ocurre en el Electromagnetismo de cargas eléctricas para pequeñas frecuencias tiende a:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re}[\varepsilon(\omega)] = \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \right)$$

Y para frecuencias grandes tendiendo a infinito la función dieléctrica tiende:  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Re}[\varepsilon(\omega)] = \varepsilon_0$ .

La zona interesante de analizar es, tal como ocurre en el Electromagnetismo, para frecuencias próximas a la de resonancia, ya que para estos valores, la función dieléctrica relativa sufre un cambio brusco de signo, cuya derivada respecto de la frecuencia es muy pronunciada y negativa. Tanto es así que la velocidad de grupo de un paquete de ondas, tal como el de la ecuación general (133), puede tomar valores en la cercanía de la frecuencia de resonancia realmente sorprendentes. No obstante, es preciso tener en cuenta que en el intervalo de frecuencias correspondiente al ancho de banda cercano a la resonancia, la propagación queda perturbada por la fuerte absorción electromagnética que se produce en el material debido a que la parte imaginaria de la función dieléctrica es próxima a los valores máximos.

### 13. Velocidad de grupo.

La velocidad de grupo del paquete de ondas en un medio dispersivo, en general viene dada por [31-37]:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (161)$$

Esta expresión es válida cuando la onda se propague en sistemas con cargas magnéticas, así como la relación entre la frecuencia angular y el módulo del momento lineal [40-43] que viene dado por:

$$\omega = \frac{kc}{n(\omega)} \quad (162)$$

Donde  $n(\omega)$  es el índice real de refracción del medio. Teniendo presente estas dos últimas ecuaciones, se tiene que la velocidad de grupo viene dada por:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n(\omega) + \omega n'(\omega)} = \frac{c}{n_{ef}(\omega)} \quad (163)$$

Donde  $n'(\omega)$  es la derivada de la parte real del índice de refracción cuya relación con la función dieléctrica es la siguiente [31-37]:

$$n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \varepsilon_1(\omega) + \left( \varepsilon_1^2(\omega) + \varepsilon_2^2(\omega) \right)^{1/2} \right)^{1/2}$$

Y por otro lado el coeficiente de absorción viene dado por la siguiente expresión [31-37]:

$$b(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\varepsilon_1(\omega) + \left( \varepsilon_1^2(\omega) + \varepsilon_2^2(\omega) \right)^{1/2} \right)^{1/2}$$

En estas últimas expresiones se cumple lo siguiente [31-37]:

$$n^* = n(\omega) + ib(\omega) = \left( \varepsilon_1(\omega) + i\varepsilon_2(\omega) \right)^{1/2}$$

En consecuencia se puede definir a partir de la ecuación (163), el índice de refracción efectivo como  $n_{ef}(\omega) = n(\omega) + \omega n'(\omega)$ . Con esta expresión se puede entrever la gran influencia que tiene la frecuencia en la zona próxima a la frecuencia de máxima absorción, es decir, en el intervalo del ancho de banda. En este intervalo la derivada puede ser negativa y de módulo muy elevado en relación inversa al ancho de la banda de absorción. Esto implica que puede tomar cualquier valor el índice de refracción efectivo, incluso valores negativos. No obstante, es preciso insistir que en este intervalo del ancho de banda es donde la absorción es tan amplia que implica una dificultad (incluso imposibilidad) de propagación del campo electromagnético. Un análisis numérico permite conocer si existe alguna zona en la que la absorción no es lo suficientemente grande como para anular la propagación. Cuando esto ocurre y el índice de refracción efectivo es negativo, los materiales adquieren propiedades fuera de lo ordinario y se les denomina metamateriales [50-51].

#### 13.1. Resultados cuantitativos.

En este apartado presento algunos resultados ilustrativos de las variables físicas que entran en juego en la determinación de la velocidad de grupo. En primer lugar presento dos ejemplos de funciones dieléctricas determinadas para tres frecuencias propias.

En la primera figura se han utilizado las siguientes frecuencias de oscilación de las cargas,  $\omega_1 = \omega_p$

$$\omega_2 = 3\omega_p \text{ y } \omega_3 = 6\omega_p, \text{ y los parámetros de fricción: } \gamma = \frac{1}{3}\omega_p, \gamma_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}\omega_p \text{ y } \gamma_3 = \frac{\sqrt{2}}{6}\omega_p.$$

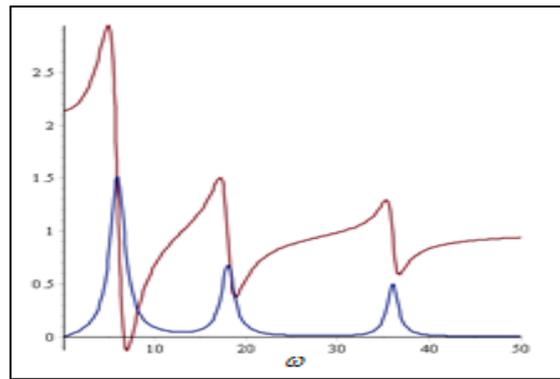


Figura 9.- Parte real (granate) y parte imaginaria (azul) de la función dieléctrica.

Como se ha utilizado una función dieléctrica con tres frecuencias de oscilación, existen tres máximos de absorción y en los correspondientes anchos de banda, la parte real tiene una gran variación con respecto a la frecuencia. Además, la parte imaginaria es siempre positiva debido a que la fricción es siempre tal que el correspondiente coeficiente es positivo.

En el siguiente ejemplo, cuya figura está abajo, se mantienen las mismas frecuencias que en el caso anterior pero los parámetros de fricción se mantienen constantes:

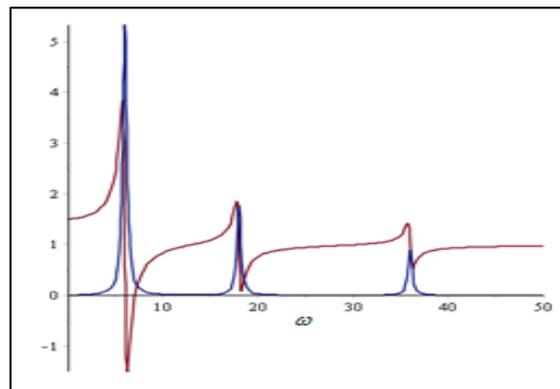


Figura 10.- Parte real e imaginaria de la función dieléctrica, la curva azul es la parte imaginaria y la granate la real.

El segundo paso es la determinación del índice de refracción y el coeficiente de absorción en función de la frecuencia que aparece en la figura 9.

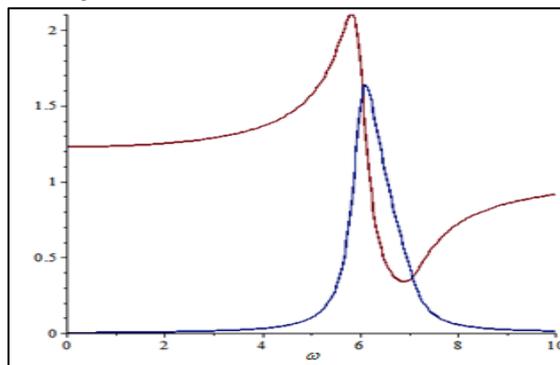


Figura 11.- Índice de refracción (granate) y coeficiente de absorción (azul).

Las curvas de esta figura se han determinado con los mismos parámetros del segundo cálculo de la función dieléctrica. y cuyo paralelismo con las curvas correspondientes a la parte real e imaginaria de la función dieléctrica son evidentes.

De acuerdo con estos resultados el índice de refracción es normal puesto que se mantiene siempre positivo y superior 1. Por lo tanto, la velocidad de propagación es inferior a la de la luz en el vacío para las frecuencias inferiores al valor 4 de la abscisa. Entre los valores 4 y 8, el índice de refracción pasa por valores que implicarían que la velocidad de propagación parece ser superior a la de la luz en el vacío, pero a estas frecuencias la función dieléctrica presenta variabilidad correspondiente a la zona de dispersión anómala. En esta zona de frecuencias, la absorción electromagnética impide la propagación de las ondas. Si para algunos valores de los parámetros característicos del material, el índice de refracción fuese negativo, cosa posible, el material se convertiría en metamaterial.

En cuanto a la velocidad de grupo he realizado una muestra de cómo varía con la frecuencia considerando un coeficiente de fricción  $\gamma = \frac{\sqrt{2}}{6} \omega_p$  y una única frecuencia propia de oscilación  $\omega_0 = 6\omega_p$  :

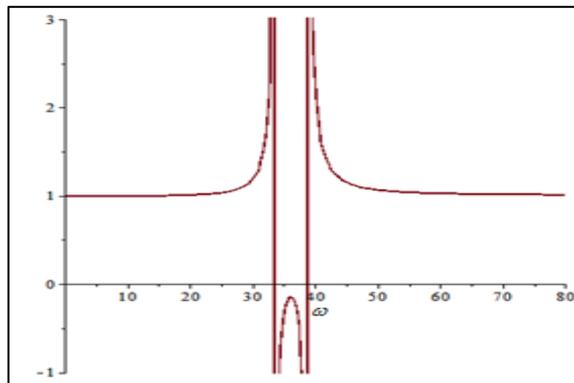


Figura 12.- Velocidad de grupo (ordenada) en función de la frecuencia (abscisa).

Como se puede observar es esta figura, la velocidad, para esta frecuencia de oscilación es ligeramente inferior a la de la luz en el vacío, con la excepción de la zona anómala de dispersión que corresponde a la zona de absorción intensa electromagnética y en consecuencia sin propagación. En la siguiente figura se muestra el resultado de la velocidad de grupo en función de la frecuencia cuando la frecuencia propia de oscilación es  $\omega_0 = \omega_p$  , y la constante de fricción es  $\gamma = \omega_p / 3$  :

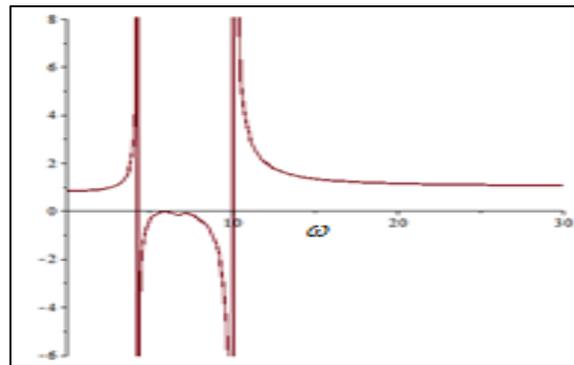


Figura 13.- Velocidad de grupo con una frecuencia  $\omega_0 = \omega_p$  .

En esta figura se aprecia que con la excepción del intervalo entre 5 y 10 en la escala de la abscisas, se tiene que la velocidad de grupo es ligeramente inferior a la velocidad de la luz en el vacío que corresponde a un valor de la ordenada de 1. Los valores infinitos, tanto positivos como negativos corresponden a zonas de dispersión anómala en la que hay una fuerte absorción electromagnética y por ello no existe propagación en el medio material. Entre 5 y 10 en la escala de abscisas la velocidad de

grupo es negativa aunque la cercanía con la zona de absorción anómala no permite concluir que el material se convierte en metamaterial para estas frecuencias. Dado que para que se puedan definir propiedades de un material como comportamiento de metamaterial es necesario que exista una zona de frecuencias cuyo índice de refracción sea negativo y que dicha zona se localice donde no exista una absorción que impida la propagación.

#### 14. Conductividad de “dyones” en el modelo Lorentz-Drude.

Los portadores de cargas sean eléctricas, magnéticas o “dyónicas”, pueden estar en situaciones ligadas a los átomos aun teniendo una cierta conductividad, que procede del hecho de que puedan saltar de átomo a átomo. Pero en el caso de que estos portadores estén en libertad y en consecuencia formen un conductor ante la presencia de campos, sólo les impide ser completamente libres las interacciones entre sus cargas homólogas y en todo caso con los átomos vecinos. Estas colisiones son las que constituyen la resistencia al movimiento de las cargas que define la resistencia eléctrica. El modelo de Lorentz-Drude da cuenta con bastante fidelidad la conductividad en estos casos de semi-libertad de los portadores. Esto trae consigo que la ecuación de movimiento de un “dyon” ante un campo electromagnético toma la forma:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\vec{r}}{dt} = (q, \kappa g) \begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{r}, t) \\ c\vec{B}(\vec{r}, t) \end{pmatrix} \quad (164)$$

Cuando los campos oscilan con rapidez, el desplazamiento puede ser más pequeño que la longitud de onda y entonces se puede considerar la siguiente aproximación para una onda monocromática:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\vec{r}}{dt} = (q, \kappa g) \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ c\vec{B}_0 \end{pmatrix} \exp(-i\omega t)$$

Después de un régimen transitorio, el “dyón” vibrará con la frecuencia del campo, es decir,  $\vec{r} = \vec{r}_0 \exp(-i\omega t)$  y si esta solución se introduce en la ecuación diferencial se obtiene que:

$$\vec{r} = \frac{i}{\gamma - i\omega} \frac{1}{m\omega} (q, \kappa g) \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ c\vec{B}_0 \end{pmatrix} \exp(-i\omega t)$$

La corriente electromagnética debida a los “dyones” de carga  $\begin{pmatrix} q \\ \kappa g \end{pmatrix}$  viene dada por:

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} \vec{J}_e \\ \vec{J}_m \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} q \\ \kappa g \end{pmatrix} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{N/m}{\gamma - i\omega} \begin{pmatrix} q \\ \kappa g \end{pmatrix} (q, \kappa g) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} = \frac{N/m}{\gamma - i\omega} |Q|^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \frac{1}{2} \text{sen} 2\theta \\ \frac{1}{2} \text{sen} 2\theta & \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix}$$

Donde  $|Q|^2 = q^2 + \kappa^2 g^2$ . Por lo tanto, con analogía con la ley de Ohm del Electromagnetismo, se tiene que la conductividad viene dada por:

$$\vec{\sigma} = \frac{N/m}{\gamma - i\omega} |Q|^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \frac{1}{2} \text{sen} 2\theta \\ \frac{1}{2} \text{sen} 2\theta & \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} \quad (165)$$

Para frecuencias muy bajas, el término en derivada segunda suele ser inferior a la fuerza viscosa que es la fuerza con derivada primera de la ecuación diferencial.

Por consiguiente, en este caso tal como ocurre en el caso estático, se tiene una conductividad que viene dada por:

$$\vec{\sigma} = \frac{N}{m\gamma} |Q|^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \frac{1}{2} \text{sen}2\theta \\ \frac{1}{2} \text{sen}2\theta & \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}$$

En el caso de los "spin-ices" donde sólo existen cargas magnéticas efectivas libres se tiene que la conductividad es:

$$\vec{\sigma} = \frac{N/m}{\gamma - i\omega} |Q|^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma \vec{\Theta} (\theta = 90^\circ)$$

En este caso, la conductividad propiamente dicha es como en el caso de electrones:

$$\sigma = \frac{\gamma \frac{N |(\kappa g)|^2}{m}}{\gamma^2 + \omega^2} + i \frac{N(\kappa g)^2 \omega}{\gamma^2 + \omega^2}$$

En el caso que la fuerzas de fricción o viscosidad cuyo valor depende de  $\gamma$ , sea pequeña, entonces la conductividad es imaginaria pura:

$$\sigma = i \frac{N |(\kappa g)|^2}{\omega} \frac{m}{\omega}$$

Y teniendo presente que el vector de ondas se relaciona con la conductividad mediante la siguiente expresión:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \quad (166)$$

El índice de refracción de una onda electromagnética viene dado por:

$$n = \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \quad (167)$$

Donde  $\omega_p^2 = \frac{N \kappa^2 g^2}{m \epsilon_0} = \frac{N K^2 g^2}{m \mu_0}$ .

En el extremo opuesto, para frecuencias bajas, la fuerzas de rozamiento predominan sobre las de inercia, y en este caso la conductividad es real y su expresión tiende al valor de la conductividad en campo estático:

$$\sigma = \frac{N |(\kappa g)|^2}{m\gamma}$$

### 15. Ondas transversales en plasmas.

Como ya mencione en la introducción, un plasma es un sistema neutro en carga pero con cargas positivas y negativas que pueden moverse más o menos libremente. La definición de plasma ideal, es el modelo "jellium" [46] que lo constituye un plasma donde la densidad de carga negativa es compensada con otra positiva de tal forma que la interacción repulsiva entre cargas del mismo signo es compensada con la interacción atractiva con las cargas de signo contrario, de tal forma que ambas cargas pueden

evolucionar libremente en el seno del sistema. Aunque esta aproximación “jellium” es objeto de estudio de sofisticadas teorías cuánticas, se puede encontrar versiones simplificadas en el llamado enlace metálico que es objeto de estudio de física elemental [47] según el cual las cargas negativas son libres o casi libres dentro de los metales.

Cuando se produce una perturbación desde el exterior mediante un campo externo u onda electromagnética, el sistema tiende a oscilar en orden a restablecer el equilibrio de neutralidad. Las oscilaciones que se producen se denominan oscilaciones del plasma. Los plasmas pueden ser plasmas fríos, calientes, de cargas eléctricas y, últimamente desde 2009, de cargas magnéticas [27]. Existen hipótesis sobre la posibilidad de que en los aceleradores a gran energía, a la que todavía no se ha llegado, se formen por colisión protón-protón a energías de tera-electrón-voltios, plasmas magnéticos calientes. Sin embargo, lo que en este trabajo estoy estudiando son los plasmas fríos de cargas magnéticas que según ya he explicado previamente se están generando en el seno de los “spin-ices”. No obstante, como estoy introduciendo propiedades duales, inicialmente, en primer lugar, analizaré cómo se propagan ondas transversales en plasmas de cargas eléctricas tipo “jellium” y después pasaré a estudiar, con condiciones similares, la propagación de ondas electromagnéticas en plasmas formados por cargas magnéticas.

### 15.1. Ondas transversales en plasmas eléctricos.

En el caso de plasma de cargas eléctricas y considerando la última fórmula del índice de refracción, para ondas de alta frecuencia, el índice de refracción es real y las ondas se propagan libremente en el medio conductor, sin embargo para frecuencias inferiores a la frecuencia propia del plasma, el índice de refracción es imaginario puro y por consiguiente las correspondientes ondas que inciden sobre el plasma se reflejarán en la superficie.

Un experimento [34] que permite conocer algunas propiedades del plasma y, por lo tanto, las correspondientes propiedades duales en plasmas magnéticos, es hacer incidir una onda electromagnética transversal en el recinto del plasma a la vez que se somete al mismo a un campo magnético estático e intenso en la dirección de propagación de la onda electromagnética. El experimento permite comprobar cómo se modifica en este caso el índice de refracción de la onda transversal. Los puntos de partida de este caso son un plasma diluido de cargas eléctricas con densidad uniforme y ondas transversales que, como digo, se propagan en la dirección del campo estático magnético intenso. Se debe suponer, por simplificación y sin demasiada pérdida de generalidad, que el movimiento de las cargas se debe al campo eléctrico de la onda y al campo magnético-estático, y que éste es mucho más intenso que el propio de la onda, y además que la onda se propaga manteniendo sus características de transversalidad. De esta forma las ecuaciones que se consideran en este experimento son las siguientes:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} = q \vec{E}_0 e^{i\omega t} + q \mu_0 \vec{v} \wedge \vec{H}_0 \quad (168)$$

En el caso en que los movimientos de las cargas sean inferiores al libre recorrido medio, se puede considerar  $\gamma=0$ . Además, se tiene en cuenta que  $\vec{H}_0 = H_0 \vec{e}_z$

Por otro lado, considerando, las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (169)$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (170)$$

Ha de tenerse en cuenta que una onda transversal tiene la situación dinámica en un plano de fase que en este caso será perpendicular a  $\vec{H}_0$ . En consecuencia, se asume que la situación dinámica de las partículas en ese plano de fase (que se toma como plano XOY) en el que los campos sólo varían con respecto al eje z. Con estas condiciones se tiene que:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + i \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_0 \left( \frac{\partial H_y}{\partial t} - i \frac{\partial H_x}{\partial t} \right)$$

Y de la segunda ecuación, teniendo en cuenta que  $\vec{J} = Nq \frac{d\vec{r}}{dt}$  y las mismas condiciones usadas en la ecuación anterior, se tiene que:

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + i \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_y - iJ_x + \varepsilon_0 \left( \frac{\partial E_y}{\partial t} - i \frac{\partial E_x}{\partial t} \right)$$

Si se hacen las siguientes definiciones:  $E = E_x + iE_y$ ;  $H = H_x + iH_y$  y  $u = x + iy$ , las ecuaciones diferenciales necesarias para solucionar este caso son:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = i\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \quad (171)$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = -i\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} - iNq \frac{du}{dt} \quad (172)$$

La ecuación (168) con estos cambios de variable se puede expresar:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + i \frac{q\mu_0 H_0}{m} \frac{du}{dt} = \frac{q}{m} E \quad (173)$$

Se prueban como soluciones de estas ecuaciones, las funciones siguientes:

$$\begin{aligned} E &= A \exp(\mp i[\omega t - kz]) \\ H &= B \exp(\mp i[\omega t - kz]) \\ u &= C \exp(\mp i[\omega t - kz]) \end{aligned} \quad (174)$$

Que corresponderían a ondas polarizadas circularmente dextrógiras y levógiras. Si las soluciones de prueba (174) son incluidas en las ecuaciones diferenciales (171-173), obtengo las siguientes ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} -\frac{q}{m} A + C(-\omega^2 \pm \omega\omega_B) &= 0 \\ kA + i\mu_0\omega B &= 0 \\ \varepsilon_0\omega A + ikB + Nq\omega C &= 0 \end{aligned} \quad (175)$$

Sistema de ecuaciones homogéneo cuyas incógnitas son A, B y C, y que para que tenga solución diferente de la trivial (A=B=C=0) es necesario y suficiente que:

$$\begin{vmatrix} -\frac{q}{m} & 0 & -\omega^2 \pm \omega\omega_B \\ k & i\omega\mu_0 & 0 \\ \varepsilon_0\omega & ik & Nq\omega \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante se obtiene que [34]:

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_B)} \quad (176)$$

Donde  $n$  es el índice refracción de la onda transversal en el plasma. La expresión (176) del índice de refracción se diferencia de la obtenida anteriormente (167) en el efecto que produce el campo magnético en la dirección de propagación de la onda a través de la frecuencia de precesión  $\omega_B$ . Además es de interés que el plasma ante las condiciones puestas en el planteamiento inicial es birrefringente, puesto que el índice de refracción de las ondas levógiras y dextrógiras es diferente. Además este resultado de índice de refracción depende de la dirección del campo exterior constante y por tanto la propagación de la onda transversal viene a ser anisótropa. Esto es así porque al modificar la dirección del campo externo, las ecuaciones diferenciales (168) y la (173) tienen soluciones diferentes, lo cual afecta al valor del índice de refracción. Por otro lado, se tiene que el resultado de la expresión indica que para los valores de  $\omega$  que satisfacen la inecuación  $\omega^2 \pm \omega\omega_B - \omega_p^2 < 0$ , el índice de refracción es imaginario puro y esto se traduce que no existe propagación electromagnética en el plasma y que toda la energía queda reflejada en su superficie. Este ejemplo no sólo tiene sentido en el laboratorio, que también, sino que existe en la naturaleza un sistema en el que se puede aplicar este caso de propagación en plasma. Es el caso de la incidencia de ondas electromagnéticas en el plasma que se forma en la atmósfera ionizada que constituye un plasma casi neutro [34], siendo el campo magnético terrestre el que puede actuar en un plano de fase. Esta incidencia perpendicular de este campo constante en el tiempo se produce en la cercanía de los polos magnéticos de la Tierra.

## 15.2. Ondas transversales en plasmas de cargas magnéticas.

Este ejemplo de propagación es un claro y nuevo ejemplo de propiedades de un sistema dual utilizando propiedades análogas con simetría de dualidad. En los “spin-ices”, en el seno del cristal, las entidades cuyo comportamiento es asimilable al de las cargas magnéticas se constituyen, como ya se ha dicho repetidas veces en este trabajo, en un plasma más o menos diluido de monopolos magnéticos. Estos monopolos, que proceden de los dipolos en forma de cuerdas de Dirac, al separarse espacialmente tienen comportamiento ante el campo magnético exterior como si de un plasma neutro de cargas magnéticas se tratara. Y tal como he explicado en la sección 7, para cada carga positiva existe una carga negativa con la misma masa efectiva y cuyos movimientos ante el campo magnético externo son de sentidos contrarios. Además, de acuerdo con la forma de la fuerza de Lorentz para cargas magnéticas, para obtener la forma dual del fenómeno, el campo magnético del caso del plasma electrónico (sección 15.1), debe sustituirse por un campo exterior eléctrico intenso cuya dirección debe ser paralela a la propagación de la onda electromagnética que debe hacerse incidir sobre el sistema. Por otro lado, este plasma magnético presenta una tercera diferencia esencial respecto del plasma electrónico. En este último, la masa de las cargas negativas, es decir, electrones son al menos 1500 veces menores que las de las cargas positivas que son iones, formados por núcleos atómicos. Por tanto, el movimiento de las cargas positivas y su influencia sobre la onda electromagnética es sensiblemente inferior. Por ello, en el apartado anterior de plasma electrónico se obvia el movimiento de los iones y la formación de las corrientes iónicas. Por el contrario, en el plasma magnético, la masa efectiva de las cargas positivas y negativas es, como ya he dicho en este apartado, necesariamente la misma y en consecuencia se debe considerar el grado de libertad de los dos tipos de cargas, así como la influencia de las dos corrientes. Esto implica que existen cuatro ecuaciones diferenciales en este caso en lugar de las tres del caso eléctrico estudiado en la sección anterior. Además deben considerarse las ecuaciones correspondientes tomándolas de las generales dadas en las expresiones (39-42), considerando que ahora existen dos

corrientes magnéticas, las procedentes de las cargas magnéticas positivas y negativas. Además, no deben considerarse corrientes eléctricas, puesto que en los “spin-ices” y en los aislantes topológicos no existen movimientos de cargas eléctricas. Considerando todo ello, las ecuaciones a resolver, teniendo presente que estoy tomando en consideración una onda plana transversal en un plano de fase y un campo eléctrico intenso perpendicular a dicho plano y por lo tanto paralelo al vector de propagación, son las siguientes:

$$\nabla \wedge \vec{E} = -NKg \left( \frac{d\vec{r}_+}{dt} - \frac{d\vec{r}_-}{dt} \right) - \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (177)$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (178)$$

$$m \frac{d^2 \vec{r}_+}{dt^2} + \gamma m \frac{d\vec{r}_+}{dt} = Kg \vec{H} - \frac{KgE_0}{\mu_0 c^2} \frac{d\vec{r}_+}{dt} \wedge \vec{e}_z \quad (179)$$

$$m \frac{d^2 \vec{r}_-}{dt^2} + \gamma m \frac{d\vec{r}_-}{dt} = -Kg \vec{H} + \frac{KgE_0}{\mu_0 c^2} \frac{d\vec{r}_-}{dt} \wedge \vec{e}_z \quad (180)$$

Donde N es densidad de partículas,  $Kg$  es el módulo de carga magnética en las unidades apropiadas,  $\vec{r}_+$  es el radio vector de la carga magnética positiva,  $\vec{r}_-$  es el radio vector de la carga magnética negativa y  $E_0$  es el módulo del campo eléctrico exterior cuya dirección es la del vector  $\vec{e}_z$ .

Tal como se hace en el caso anterior de plasma electrónico, he de asumir que la dinámica fundamental de las cargas magnéticas se circunscribe al plano de fase y además que el campo eléctrico que ejerce la aceleración sobre las cargas magnéticas es el campo exterior estático. Estas condiciones no son inesperadas, ya que son las duales de las asumidas en el plasma electrónico. Evidentemente esto no proporciona una solución específica general. La solución general implicaría que se tendrían que considerar las 12 ecuaciones diferenciales que en forma vectorial son las (177-180), y por consiguiente, se deberían resolver las doce incógnitas que aparecen en las mismas. Las condiciones antes consideradas en el plasma electrónico se vuelven a tomar en cuenta pero de forma dual. Las funciones de prueba son similares a las utilizadas en el caso anterior y son las siguientes 8 soluciones:

$$\vec{E} = (\vec{e}_x E_x + \vec{e}_y E_y) \exp[\mp i(\omega t - kz)]$$

$$\vec{H} = (\vec{e}_x H_x + \vec{e}_y H_y) \exp[\mp i(\omega t - kz)]$$

$$\vec{r}_+ = (\vec{e}_x x_+ + \vec{e}_y y_+) \exp[\mp i(\omega t - kz)]$$

$$\vec{r}_- = (\vec{e}_x x_- + \vec{e}_y y_-) \exp[\mp i(\omega t - kz)]$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left( -\frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left( -\frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

$$\frac{d\vec{r}_+}{dt} \wedge \vec{e}_z = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left( \frac{dy_+}{dt} \right) + \vec{e}_y \left( -\frac{dx_+}{dt} \right)$$

$$\frac{d\vec{r}_-}{dt} \wedge \vec{e}_z = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left( \frac{dy_-}{dt} \right) + \vec{e}_y \left( -\frac{dx_-}{dt} \right)$$

Introduciendo las funciones de prueba en las ecuaciones diferenciales, considerando las expresiones de arriba y tomando los cambios de variable similares a los realizados en el apartado del plasma electrónico:

$$E = E_x + iE_y$$

$$H = H_x + iH_y$$

$$u_+ = x_+ + iy_+$$

$$u_- = x_- + iy_-$$

Se tiene las siguientes ecuaciones diferenciales para las ondas polarizadas circularmente en el plano de fase:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = -i\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \tag{181}$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = iNKg \left( \frac{du_+}{dt} - \frac{du_-}{dt} \right) + i\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \tag{182}$$

$$\frac{d^2 u_+}{dt^2} + \gamma \frac{du_+}{dt} = \frac{Kg}{m} H + i\omega_E \frac{du_+}{dt} \tag{183}$$

$$\frac{d^2 u_-}{dt^2} + \gamma \frac{du_-}{dt} = -\frac{Kg}{m} H - i\omega_E \frac{du_-}{dt} \tag{184}$$

Donde  $\omega_E = \frac{K|g|E_0}{m\mu_0 c^2}$  se denomina frecuencia de precesión debida al campo externo perpendicular al plano de fase.

Se ha de considerar, de forma similar al caso del plasma electrónico, las siguientes soluciones de prueba:

$$E = A \exp(\mp i[\omega t - kz]) = A \exp\left(\mp i\left[\omega t - n \frac{\omega}{c} z\right]\right)$$

$$H = B \exp(\mp i[\omega t - kz]) = B \exp\left(\mp i\left[\omega t - n \frac{\omega}{c} z\right]\right)$$

$$u_+ = C \exp(\mp i[\omega t - kz]) = C \exp\left(\mp i\left[\omega t - n \frac{\omega}{c} z\right]\right)$$

$$u_- = D \exp(\mp i[\omega t - kz]) = D \exp\left(\mp i\left[\omega t - n \frac{\omega}{c} z\right]\right)$$

Siendo  $n = c/v$  el índice de refracción del sistema físico. Si se desarrollan estas funciones de prueba, es fácil ver que la correspondiente al signo más implica una polarización circular dextrógira y la de signo menos levógira. Efectivamente, desarrollando como ejemplo el campo eléctrico mediante la fórmula de Euler, se obtiene las siguientes expresiones de las partes real e imaginaria.

$$E = (E_x + iE_y) \exp[\mp i(\omega t - kz)] = E_x \cos[\mp(\omega t - kz)] + E_y \cos[\mp(\omega t - kz \mp \pi/2)] + i\{E_x \text{sen}[\mp(\omega t - kz)] + E_y \text{sen}[\mp(\omega t - kz \mp \pi/2)]\}$$

Y siguiendo el criterio de considerar la parte real, la solución con signo más corresponde a una polarización circular o elíptica (en función de si las componentes  $E_x$  y  $E_y$  son iguales o diferentes de tamaño) dextrógira. Esto es así porque en la evolución temporal, el vector suma de las dos señales va girando en sentido de las agujas del reloj. Del mismo modo, la de signo menos corresponde a una polarización circular o elíptica levógira porque su evolución temporal hace girar el vector suma de las dos señales en la dirección de movimiento contrario de las agujas del reloj.

Al introducir las funciones de prueba en las ecuaciones diferenciales se convierten en las siguientes ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} \pm ikB \pm \epsilon_0 A &= 0 \\ \pm ikA \mp NKg\omega C \pm NKg\omega D \mp \mu_0\omega B &= 0 \\ -\omega^2 C \mp i\gamma\omega D - \frac{Kg}{m} B \mp \omega_E\omega C &= 0 \\ -\omega^2 C \mp i\gamma\omega D + \frac{Kg}{m} B \pm \omega_E\omega D &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema homogéneo de ecuaciones donde las incógnitas son A, B, C y D puede tener solución diferente de la trivial A=0, B=0, C=0 y D=0, si y sólo si se cumple la condición de que el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas se anula, y ante esta condición se tiene la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} \pm\epsilon_0\omega & \pm ik & 0 & 0 \\ \pm ik & \mp\mu_0\omega & \mp NKg\omega & \pm NKg\omega \\ 0 & -\frac{Kg}{m} & -\omega^2 \mp i\gamma\omega \mp \omega\omega_E & 0 \\ 0 & \frac{Kg}{m} & 0 & -\omega^2 \mp i\gamma\omega \pm \omega\omega_E \end{vmatrix} = 0$$

Por otro lado, si se considera que el recorrido de las cargas definidos en las variables  $u_{\pm}$  es inferior al libre recorrido medio de dichas cargas entre dos posibles colisiones sucesivas, entonces  $\gamma$  puede considerarse nula (esta condición se cumple en los plasmas diluidos). Por el contrario en caso de plasmas densos, debe tomarse en cuenta el valor de la fuerza de fricción que viene determinada por el parámetro  $\gamma$ .

Desarrollando el determinante, obtengo la siguiente condición para la existencia de soluciones de las ecuaciones diferenciales que determinan la propagación electromagnética de ondas transversales en plasma magnético sometido a un campo eléctrico intenso perpendicular al plano de fase.

Esta condición queda explicitada en la siguiente expresión cuando  $\omega \gg \gamma$ :

$$k^2 \approx \frac{\omega^2}{c^2} \mp \frac{2\omega_p^2 \omega^4}{c^2 \left[ (\omega^2 \pm i\gamma\omega)^2 - \omega^2 \omega_E^2 \right]} \quad (185)$$

Lo cual implica una función dieléctrica:

$$\begin{aligned} n^2 &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx 1 \mp \frac{2\omega_p^2 \omega^2}{\left[ (\omega^2 \pm i\gamma\omega)^2 - \omega^2 \omega_E^2 \right]} = 1 \mp \frac{2\omega_p^2}{\left[ \omega^2 - \omega_E^2 - \gamma^2 \pm i2\gamma\omega \right]} \\ &= 1 \mp 2\omega_p^2 \frac{\omega^2 - \omega_E^2 - \gamma^2}{(\omega^2 - \omega_E^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} + i2\omega_p^2 \frac{2\gamma\omega}{(\omega^2 - \omega_E^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (186)$$

Esta expresión de la función dieléctrica contiene tres parámetros libres que dependen de las propiedades y condiciones del plasma, las frecuencias  $\omega_p$  (frecuencia propia de oscilación del plasma) y  $\omega_E$  (frecuencia de precesión producida por el campo eléctrico externo) y  $\gamma$ . Si se considera un plasma diluido en el que la fuerza de fricción tiende a cero por ser mayor el libre recorrido medio, se tiene que:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 \mp \frac{2\omega_p^2}{\omega^2} \left( 1 - \frac{\omega_E^2}{\omega^2} \right)^{-1} \quad (187)$$

Donde se debe recordar que  $\omega_p^2 = \frac{NK^2 g^2}{\mu_0 m}$  es el cuadrado de la frecuencia del plasma magnético y

$\omega_E = \frac{K|g|E_0}{m\mu_0 c^2}$  es la frecuencia de precesión producida por el campo externo sobre cada una de las

cargas magnéticas cuyo módulo es  $|g|$ . La expresión de la función dieléctrica (187) tiene un punto singular para  $\omega = \omega_E$  en el que la expresión diverge. Esto debe ser interpretado por el hecho de que para esa frecuencia de precesión producida por el campo eléctrico externo, la parte imaginaria de la función dieléctrica (186) tiende a  $i \frac{\omega_p^2}{\gamma\omega_E}$ . Consecuentemente, en plasmas diluidos tales como son los que se producen en los "spin-ices", en los que se puede asumir que  $\gamma \rightarrow 0$ , la absorción electromagnética es muy elevada para  $\omega = \omega_E$ , lo cual hace que la onda para esa frecuencia queda reflejada en la superficie.

Un análisis de la propagación en función del índice de refracción puede hacerse a partir de la ecuación (186), la cual da dos soluciones del índice de refracción. Como elemento fundamental dentro de este análisis debe considerarse que la onda de polarización dextrógira deberá tener parte imaginaria negativa, mientras que la levógira lo deberá tener positiva, esto es así porque en caso contrario la onda en el medio sería exponencialmente creciente según progresase en el interior del plasma. El índice de refracción que será complejo viene dado por:

$$n = \sqrt{a + ib} = (a^2 + b)^{1/4} \left( \pm \cos \left[ \frac{1}{2} \operatorname{art} g \frac{b}{a} \right] \pm i \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{art} g \frac{b}{a} \right] \right) \quad (188)$$

Esta expresión (188) contiene dos soluciones procedentes de extraer la raíz cuadrada de la ecuación (186), y he de tener en cuenta que a y b tienen las siguientes expresiones:

$$a = 1 \mp \frac{2\omega_p^2 (\omega^2 - \omega_E^2 - \gamma^2)}{(\omega^2 - \omega_E^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \tag{189}$$

$$b = 2\omega_p^2 \frac{2\gamma\omega}{(\omega^2 - \omega_E^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \tag{190}$$

La expresión con signo más de  $a$  en la ecuación (189) corresponde a la polarización circular dextrógira de la onda electromagnética y la que lleva el signo menos corresponde a la levógira.

Las dos soluciones del índice de refracción son  $n_1$  y  $n_2$ :

$$n_1 = a_1 + ib_1 = (a^2 + b)^{1/4} \left( \cos \left[ \frac{1}{2} \operatorname{art} g \frac{b}{a} \right] + i \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{art} g \frac{b}{a} \right] \right)$$

$$n_2 = a_2 + ib_2 = (a^2 + b)^{1/4} \left( -\cos \left[ \frac{1}{2} \operatorname{art} g \frac{b}{a} \right] - i \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{art} g \frac{b}{a} \right] \right)$$

Para entender esto mejor es preciso considerar el índice de refracción (188) en las fases de las ondas dextrógira y levógira. De esta forma, en una levógira con índice  $n'$ , la fase es:

$$\exp \left( -i \left[ \omega t - n' \frac{\omega}{c} z \right] \right) = \exp \left[ -i \left( \omega t - a' \frac{\omega}{c} z \right) \right] \exp(-b' z)$$

donde  $n'$  puede tomar uno de los dos valores  $n_1$  o  $n_2$ . Y en consecuencia el valor de  $b'$  deberá ser positivo para que la onda tenga una amplitud exponencialmente decreciente (y no creciente) al entrar en el material. En el caso de la dextrógira la fase de la onda vendrá dada por:

$$\exp \left( i \left[ \omega t - n' \frac{\omega}{c} z \right] \right) = \exp \left[ i \left( \omega t - a' \frac{\omega}{c} z \right) \right] \exp(b' z)$$

Y en este caso  $b'$  deberá ser negativo en orden a que la onda pueda ser exponencial decreciente, dado que en caso contrario la onda violaría el principio de conservación de la energía y se violaría el principio de conservación de la energía.

Teniendo en cuenta lo anterior se puede hacer la siguiente clasificación de situaciones dependiendo de los valores de las partes real e imaginaria de cada una de las soluciones del índice de refracción  $n$  procedente de la ecuación (188). Se obtiene la siguiente tabla:

Onda dextrógira						Onda levógira					
$a_1$	$b_1$	Tipo	$a_2$	$b_2$	Tipo	$a_1$	$b_1$	Tipo	$a_2$	$b_2$	Tipo
>0	>0	No	<0	<0	Metam	>0	>0	Mnor	<0	<0	No
<0	>0	No	>0	<0	Mnor	<0	>0	Metam	>0	<0	No
<0	<0	Metam	>0	>0	No	<0	<0	No	>0	>0	Mnor
>0	<0	Mnor	<0	>0	No	>0	<0	No	<0	>0	Metam

La primera fila corresponde a las partes reales e imaginarias de las dos soluciones. Las dos primeras columnas son los posibles signos de estas partes real e imaginaria de la primera solución. La tercera columna corresponde al carácter del material cuando se incide con una onda cuya frecuencia implica los signos de las partes reales e imaginarias de las dos primeras columnas. El significado de las abreviaturas Mnor=material normal en cuanto al índice efectivo de refracción; Metam=metamaterial por tener el índice efectivo de refracción negativo; No=solución inválida por proporcionar la parte imaginaria una onda exponencial creciente al entrar en el material violando el principio de conservación de la energía.

**16. Frenado eléctrico dual del magnético.**

Este ejemplo simple de aplicación de la fuerza de Lorentz, se basa en que las cargas del conductor sufren una variación de velocidad [43], tal como se ha visto en el apartado de “magnetricity”. En el Electromagnetismo estándar si se considera que son los electrones los que se mueven en un conductor con carga  $-|e|$  cuando un disco metálico gira en presencia de un campo magnético con la misma dirección que el eje de giro, el disco sufre un frenado que se denomina magnético, pues es el campo magnético el que genera la fuerza de frenado. En la figura 14 el disco gira con velocidad angular  $\vec{\omega} = -\omega \vec{e}_z$ . Los electrones en el interior del disco conductor se mueven con una velocidad lineal  $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ , siendo  $\vec{r}$ , el radio vector en coordenadas cilíndricas del electrón medido desde el centro del disco. Debido a la fuerza de Lorentz, los electrones sufren una variación de velocidad cuya expresión es:

$$\delta \vec{v} = \frac{-|e|}{m_e} \omega (-\vec{e}_z \wedge \vec{r}) \wedge \vec{B} \delta t = \frac{|e| \omega B}{m_e} r \delta t \tag{191}$$

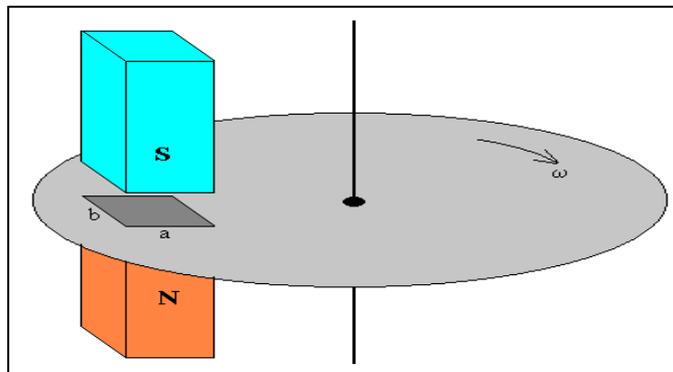


Figura 14.- Disco girando ante la presencia del campo magnético.

El disco metálico gira, el campo magnético, que es perpendicular a él, mueve las cargas positivas con velocidad radial dirigida al centro y en consecuencia se genera una fuerza tangencial en el sentido contrario a la velocidad lineal que lleva el sistema giratorio. Resultado el disco se frena.

Debido a esta variación de velocidad, cada electrón sufre una fuerza:

$$\delta \vec{F} = \frac{e^2}{m_e} \omega B^2 r \delta t \vec{e}_\phi \tag{192}$$

Teniendo presente que el vector unitario azimutal en las coordenadas cilíndricas tiene la dirección de avance en sentido contrario al de la velocidad angular, la fuerza es de frenado que siendo debido al campo magnético se puede denominar como fuerza de frenado magnético.

Si ahora se supone que el disco es un material del que se sospecha que tiene cargas efectivas magnéticas, por ejemplo que estuviera constituido de un material similar a los “spin-ices”, se tendría el mismo efecto pero con campo eléctrico en lugar de con campo magnético. Este experimento podría servir de detección de posibles materiales con entidades estructurales cuyo comportamiento fuese similar a las cargas magnéticas.

En este caso y teniendo en cuenta la fuerza de Lorentz generalizada de la ecuación (33), se llega fácilmente a que la variación de velocidad de las cargas magnéticas en este caso sería:

$$\delta \vec{v} = \frac{Kg}{m_m \mu_0 c^2} \omega E r \delta t \quad (193)$$

Y en consecuencia la fuerza que surgiría sobre estas cargas magnéticas sería:

$$\delta \vec{F} = \frac{(Kg)^2}{m_m (\mu_0 c^2)^2} \omega E^2 r \delta t \vec{e}_\phi \quad (194)$$

Lo cual, de igual forma que en el caso magnético, indica que existe una fuerza de frenado que en este caso es eléctrico y cuyo mecanismo es dual con el frenado magnético. Este efecto de frenado que afecta a las entidades estructurales que se comportan como cargas magnéticas, depende de la masa de éstas, de tal forma que a menor masa el frenado es mayor puesto que la variación de la velocidad de la ecuación (193) es inversamente proporcional a la masa de estas entidades. La masa de estas cargas magnéticas es una masa efectiva que depende de su energía que ha de venir determinada mediante la ecuación de Schrodinger. Para evaluar el efecto macroscópico de frenado es necesario contabilizar el frenado sobre todas las cargas existentes en el sistema, es decir, en el disco. Por ello este frenado es tan efectivo cuanto mayor sea la densidad de portadores de carga magnética. Es necesario enfatizar que el frenado tiene el mismo efecto sobre las cargas positivas que sobre las negativas, y esto es así, obviamente, tanto en el frenado eléctrico como en el magnético. Por ello una estimación aproximada del frenado eléctrico considerando que la densidad de portadores de carga magnética es uniforme dentro del material, vendrá dado por la siguiente expresión:

$$\delta \vec{F}_T = \delta t \vec{e}_\phi \frac{2\pi h N R^3}{3\Omega} \frac{(KgE)^2}{m_m (\mu_0 c^2)^2} \omega \quad (195)$$

Siendo  $\delta \vec{F}_T$  la fuerza de frenado para un intervalo de tiempo  $\delta t$ ,  $h$  es el grosor del disco,  $\Omega$  es el volumen del disco que está afectado por el campo eléctrico, y  $N$  es la densidad de portadores.

Para ver la evolución temporal del movimiento del disco, se debe suponer una determinada geometría en la disposición del campo eléctrico sobre el disco que debe ser frenado. No obstante, en cualquier caso habría que aplicar las leyes de la dinámica de rotación. Un caso simple que permite obtener un resultado rápido es si se considera un mecanismo en el que todas partículas están bajo el efecto del campo eléctrico el mismo tiempo, es decir,  $\tau = \delta t$ , entonces la ecuación (195) se sustituye por la siguiente:

$$\vec{N} = \vec{e}_z \frac{\pi h N (KgER^2)^2 \tau}{2\Omega m_m (\mu_0 c^2)^2} \omega = -I \frac{d\omega}{dt} \vec{e}_z \quad (196)$$

Donde  $\vec{N}$  es el momento de la fuerza total que afecta al movimiento del disco e  $I$  es el momento de inercia del disco. Integrando la ecuación (196), se tiene que la velocidad de rotación en el tiempo sigue la siguiente ley de evolución temporal:

$$\omega(t) = \omega_0 \exp\left(-\frac{\pi h N \tau R^4 (Kg)^2 E^2}{2I \Omega m_m (\mu_0 c^2)^2} t\right) \quad (197)$$

Es decir, el frenado eléctrico como el magnético sigue una ley de decrecimiento exponencial tanto más lento cuanto mayor es el momento de inercia y por ende la masa del disco y tanto más rápido cuanto mayor es la densidad de portadores de carga magnética y obviamente, cuanto mayor es el campo eléctrico el decaimiento de la velocidad angular es más acentuada.

## 17. Conclusiones y perspectivas.

Este trabajo ha pretendido ser una introducción al estudio del Electromagnetismo dentro de la teoría clásica (en oposición a la teoría cuántica) en el supuesto caso de que existan cargas magnéticas en el interior de los materiales sólidos, líquidos o gaseosos. Para ello, he utilizado el concepto de “dyon”, como entidad física que puede contener bien carga eléctrica, carga magnética o las dos simultáneamente, representando para ello la carga en un plano de carga bien sea plano en dos dimensiones (o plano complejo). En este plano, en las abscisas (o recta real) se representan las cargas eléctricas que están cuantizadas y en las ordenadas (o recta imaginaria) las cargas magnéticas que no lo están. En consecuencia, una carga genérica será un punto de dicho plano: las cargas eléctricas se representarán como  $(\pm n, 0)$  o en forma compleja,  $(\pm n + 0i)$ ; las cargas magnéticas  $(0, x)$  o  $(0 + ix)$ , siendo  $x$  un número real cualquiera. Los “dyones” en general se representan como  $(\pm n, x)$  o  $(\pm n + ix)$ . De esta forma, toda la teoría inicial de la primera parte y parte de la segunda se generaliza al caso en el que los componentes (cuerpos o entidades estructurales) electromagnéticos puedan ser cargas con carga eléctrica y carga magnética.

Con esta idea de la representación de la carga se justifican las ecuaciones de los campos y la fuerza de Lorentz genérica, así como la energía y momento del campo electromagnético. Con este planteamiento es de interés introducir la simetría de dualidad, según la cual, si a los electrones y protones que están asignados en el plano “dyónico” en el eje de abscisas o recta real se les produce un giro de un determinado ángulo con respecto al origen, estas partículas elementales se convierten en “dyones” con carga eléctrica y magnética, de tal forma que si se utilizan las ecuaciones de campo generalizadas, la fenomenología del Electromagnetismo no variaría. De esta forma se pone de manifiesto el carácter convencional de considerar la carga del electrón o del proton como unidades de carga eléctrica negativa y positiva, respectivamente.

Un punto importante, que es necesario resaltar es en que si bien es cierto, la simetría de las ecuaciones de los campos es mayor en el caso de cargas “dyónicas” que en el caso de tener cargas eléctricas, esta simetría no es total. En el lado izquierdo de la igualdad de la ecuación del rotacional del campo eléctrico, aparecen signos menos tanto en el corriente de cargas magnéticas como en la derivada del campo magnético con el tiempo. Esto tiene que ser así para que se cumpla el principio de conservación de la energía. El signo menos que aparece en la corriente es como si se dijera el complemento de la ley de Lenz generalizada, pues las consecuencias de este signo menos son equivalentes a la de esta ley.

Es necesario poner énfasis en que la inspiración y motivación del trabajo es la existencia de recientes resultados experimentales, según los cuales, determinadas modificaciones de la estructura magnética en determinados materiales generan unas entidades que se comportan como si tuvieran carga magnética. Estos materiales son de dos clases: los denominados “spin-ices” y los aislantes topológicos. Este estudio, aunque permitiría realizar análisis sobre los segundos está dirigido fundamentalmente, aunque no exclusivamente, hacia las propiedades de los primeros. En estos “spin-ices” las cargas magnéticas efectivas no son partículas elementales sino entidades estructurales microscópicas que se comportan como “dyones” que se representan en el eje de ordenadas o recta imaginaria.

Las cargas magnéticas en los “spin-ices” quedan definidas por la forma de la estructura magnética de pirocloro cuyo proceso de formación tiene tres pasos fundamentales a partir del estado inicial. Este estado inicial está formado por moléculas cuyo elemento más relevante, y que da sentido a la fenomenología magnética, es la posición de los iones de Lantánido (disprosio o holmio), que se ubican en

los vértices de tetraedros. Cada vértice es compartido por tetraedros contiguos y los momentos magnéticos de las capas atómicas incompletas de los correspondientes iones de Lantánido quedan de tal forma que dos momentos magnéticos entran hacia el tetraedro dirigido hacia su centro y otros dos salen en la misma dirección pero en sentido contrario. El primer paso en la formación de las cargas magnéticas es la inversión de uno de los momentos magnéticos, lo cual implica que los tetraedros que lo comparten pasan a tener, uno de ellos tres momentos en dirección de entrada y uno de salida y el tetraedro contiguo tres de salida y uno de entrada. Esto según el modelo de “dumbbells” es la formación de un dipolo confinado. El segundo paso del proceso consiste en la progresión de la inversión a lo largo de sucesivos tetraedros contiguos, lo cual crea la “cuerda de Dirac”. Este segundo paso deja al sistema con una serie de cuerdas de Dirac de mayor y menor longitud coexistiendo con dipolos confinados. El tercer paso del proceso es cuando la longitud es tan grande que la interacción entre los momentos magnéticos positivos y negativos tiende a cero por la distancia. Entonces, se forman monopolos magnéticos de diferente signo, pero libres, coexistiendo con cuerdas de mayor o menor longitud y todavía dipolos confinados.

En esta situación he analizado las diferencias entre los campos de Maxwell o campos macroscópicos y los moleculares que son los que tienen significado en cuanto a que son los campos que se crean alrededor de cada monopolo en estado libre o cuasi-libre, es decir no confinado. Cuando predomina la situación de monopolos libres, el sistema se asemeja a un plasma magnético.

En las diferentes fases de formación de cargas he descrito las respuestas lineales a partir de las generales de los sistemas “dyónicos”, la conductividad, la función dieléctrica y la permeabilidad magnética. Así, como también la matriz de propagación de las ondas electromagnéticas tanto en medios no dispersivos como en medios dispersivos.

He analizado el fenómeno de la “magnetricity” o movimiento de cargas magnéticas libres ante la presencia de campos magnéticos externos como propiedad dual de la “electricity” y una posible consecuencia que es el apantallamiento del campo magnético en recintos cerrados rodeados de materiales con este tipo de cargas. Este apantallamiento será posible siempre y cuando el número de portadores magnéticos (monopolos) sea suficiente como para anular el campo magnético exterior mediante su disposición geométrica, situación que queda favorecida ante la intensidad del campo exterior puesto que éste tiende a romper los dipolos confinados. Este proceso es claramente dual con el existente de apantallamiento del campo eléctrico en los conductores de carga eléctrica.

Siguiendo en la tarea de determinar propiedades duales en sistemas con cargas magnéticas, comparándolas con las correspondientes en sistemas con cargas eléctricas móviles, he analizado las pérdidas dieléctricas de materiales cuando contienen cargas magnéticas cuyo resultado es el dual con lo que ocurre cuando existen sólo cargas eléctricas. He analizado la propagación de ondas electromagnéticas tanto en sistemas infinitos (en recintos no cerrados) no dispersivos como en dispersivos. He determinado el índice de refracción de una onda EM transversal y un campo eléctrico constante en la dirección de propagación de la onda, teniendo su dual comportamiento de una onda transversal incidiendo en plasmas eléctricos con ayuda de un campo magnético en la dirección de propagación de dicha onda. En este caso la dualidad no lleva a comportamiento exactamente similar. Las diferencias de un caso y otro se comprueban en la determinación en su diferente índice de refracción. En el plasma eléctrico surge la birrefringencia anisótropa de las ondas con propagación levógira, cuyo índice de refracción es menor que el que corresponde a la onda con polarización dextrógira. En el plasma magnético, no existe birrefringencia, pues para las frecuencias cuya propagación es posible con una polarización es reflejada la otra polarización. Además en este caso de plasma magnético puede surgir

para determinadas frecuencias la posibilidad de obtener índices de refracción negativos para ambos casos de polarización.

Por último, he analizado el frenado eléctrico en discos compuestos de materiales con cargas magnéticas en completa dualidad al existente frenado magnético en conductores de cargas eléctricas determinando en un caso sencillo la evolución temporal, exponencialmente decreciente, de la velocidad angular del disco.

En cuanto al capítulo de perspectivas, aunque ya he comentado algo en el punto 1.3, quisiera remarcar que éstas van en tres direcciones:

A) Continuar estudiando y extendiendo el Electromagnetismo dual dentro de la Física Clásica en temas como la propagación electromagnética en medios confinados en los que existan materiales en los que haya cargas magnéticas o entidades estructurales, móviles o no, que se comporten como monopolos magnéticos.

B) Analizar el campo de radiación de sistemas con cargas magnéticas tanto en las antenas de emisión y recepción como en la influencia e interacción de este campo radiativo en los materiales con cargas magnéticas.

C) Realizar una prospectiva sobre la posibilidades de los “spin-ices” como materiales para construir dispositivos magnetrónicos equivalentes a los electrónicos. Este punto es más complicado pues requiere por un lado, profundizar en el estudio teórico del comportamiento microscópico (probablemente dentro de la Física Cuántica y del Estado Sólido) de los materiales en los que existen monopolos magnéticos y, por otro lado, pensar de forma realista en la posibilidad de construir de forma empírica los elementos necesarios para construir dichos dispositivos. En cualquier caso, es necesario que la investigación experimental sobre materiales similares a los “spin-ices” y los aislantes topológicos continúe con la intensidad que existe en este momento, ya que esto permitirá justificar el esfuerzo de proseguir en una materia que, en mi opinión, puede llegar a ser aplicable en la Ingeniería de Telecomunicación y Electrónica.

## 18. Bibliografía.

- [1] Peregrinus P. "The letter of Petrus peregrinus" translated by B. Arnold (McGraw Publishing Company 1904)
- [2] Curie M.P. "Sur la possibilité d'existence de la conductibilité magnétique et du magnetisme libre" Seances de la Societé Française de Physique, 76-77 1894.
- [3] Dirac, P. A. M., "Quantized Singularities in the Electromagnetic Field," Proc. Roy. Soc., Vol. A133, 60, 1931.
- [4] Jordan, P., "The Dirac magnetic pole," Ann. Physik, Vol. 32, 66, 1938.
- [5] Hooft, G. 't, "Magnetic monopoles in unified gauge theories," Nuclear Physics 79, 276--284, 1974.
- [6] Polyakov, A. M., "Particle spectrum in quantum field theory," JETP Lett., Vol. 20, 194--195, 1974.
- [7] Cabrera, B., "First Results from a Superconductive Detector for Moving Magnetic Monopoles," Phys. Rev. Lett., Vol. 48, 1378--1381, 1982.
- [8] Balestra, S., G. Giacomelli, M. Giorgini, L. Patrizii, V. Popa, Z. Sahnoun, and V. Togo, "Magnetic Monopole Bibliography-II," arXiv: 1105.5587v1 [hep-ex], 27 May 2011, y referencias dadas en este papel. M. Lublinsky, C. Ratti, and E. Shuryak, "Radiation of an electric charge in the field of a magnetic monopole", Phys. Rev. D, 81, 014008 2010. M. Detrixhe et. Al. (ANITA Collaboration), "Relativistic magnetic monopole seach with the ANITA-II balloon-borne radio interferometer", Phys. Rev. D, 83, 023513 2011.
- [9] Castelnovo, C., R. Moessner, and S. L. Sondhi, "Magnetic monopoles in spin ice" (see complementary material published in the same journal where the equivalence between Hamiltonians (1) and (2) is demonstrated) Nature, Vol. 451, 42--45, 2008.
- [10] Sondhi, S., "Wien route to monopoles," Nature, Vol. 461, 888--889, 2009.
- [11] Fennel, T., P.P. Deen, A.R. Wildes, K. Achmalz, D. Prabhakaran, A. T. Boothroyd, R.J. Aldus, D.F. McMorrow, and S.T. Bramwell, "Magnetic Coulomb Phase in the spin ice  $Ho_2Ti_2O_7$ ". Science, 326, 415-417 2009
- [12] Qi, X.-L., R. Li, J. Zang, and S.-C. Zhang, "Inducing a Magnetic Monopole with Topological Surface States," Science, Vol. 323, 1184--1187, 2009. X.L. Qi, S.C. Zhang. "Topological insulators and superconductors", Rev. Mod. Phys., 83, 1057 (2011.)
- [13] Morris, D. J. P., D. A. Tennant, S. A. Grigera, B. Klemke, C. Castelnovo, R. Moessner, C. Czternasty, M. Meissner, K. C. Rule, J.-U. Hoffmann, K. Kiefer, S. Gerischer, D. Slobinsky, and R. S. Perry, "Dirac Strings and Magnetic Monopoles in the Spin Ice  $Dy_2Ti_2O_7$ ," Science, Vol. 326, 411--414, 2009.
- [14] Bramwell, S. T., S. R. Giblin, S. Calder, R. Aldus, D. Prabhakaran, and T. Fennel, "Measurement of the charge and current of magnetic monopoles in spin ice," Nature, Vol. 461, 956--960, 2009, S.T. Bramwell and M.J.P. Gingras, Science, 294, 1495 (2001).
- [15] Giblin, S. R., S. T. Bramwell, P. C. W. Holdsworth, D. Prabhakaran, and I. Terry, "Creation and measurement of long-lived magnetic monopole currents in spin ice," Nature Phys., Vol. 7, 252--258, 2011.
- [16] Bandyopadhyay S., and M. Cahay, "Introduction to Spintronics" CRC Press 2008
- [17] Onsager L.J. "Derivations from Ohm's law in weak electrolytes" J. Chem. Phys. 2, 599-615 (1934).
- [18] Mol L.A.S., W.A. Moura-Melo, and A.R. Pereira, "Conditions for the magnetic monopoles in nanoscale square arrays of dipolar spin-ice," Phys. Rev. B, Vol. 82, 054434-1--6, 2010.
- [19] Mellado P., O. Petrova, Y. Shen, and O. Tchernyshyov, "Dynamics of Magnetic charges in artificial spin ice," Phys. Rev. Lett., Vol. 105, 187206-1--4, 2010.
- [20] Tchernyshyov O., "No longer on thin ice," Nature Phys. Vol. 6, 323--324, 2010.
- [21] Umul Y. Z., "Rigorous expressions for the equivalent edge currents," Progress In Electromagnetics Research B, Vol. 15, 77--94, 2009.
- [22] Umul Y. Z., "Electric charges that behave as magnetic monopoles," Progress In Electromagnetics Research Letters, Vol. 18, 19--28, 2010.
- [23] Araque-Quijano J. L. and G. Vecchi, "Field and source equivalence in source reconstruction on 3D surfaces," Progress In Electromagnetics Research Vol. 103, 67--100, 2010.
- [24] Ladak, S., D. E. Read, G. K. Perkins, L. F. Cohen, and W. R. Branford, "Direct observation of magnetic monopole defects in an artificial spin-ice system," Nature Phys., Vol. 6, 359--363, 2010.
- [25] Gingras, M.J., "Observing Monopoles in a magnetic Analog of Ice," Science, Vol. 326, 375--376, 2009.

- [26] Mengotti, E., L. J. Heyderman, A. F. Rodriguez, F. Nolting, R. V. Hugli, and H.-B. Braun, "Real-space observation of emergent magnetic monopoles and associated Dirac strings in artificial kagome spin ice," *Nature Phys.*, Vol. 7, 68--74, 2011.
- [27] Bonitz, M., "A plasma of magnetic monopoles," *Nature Phys.*, Vol. 7, 192--194, 2011.
- [28] Jaubert, L. D. C., and P. C. W. Holsworth, "Signature of magnetic monopole and Dirac string dynamics in spin ice," *Nature Phys.*, Vol. 5, 258--261, 2009.
- [29] Milton K.A. "Theoretical and experimental status of magnetic monopoles" *Rep. Prog. Phys.* 69, 1637-1711 (2006)
- [30] Sternberg N. and A. I. Smolyakov, "Resonant transparency of a three-layer structure containing the dense plasma region," *Progress In Electromagnetics Research*, Vol. 99, 37--52, 2009.
- [31] Elliot, R. S., "Electromagnetics", McGraw-Hill, 1966.
- [32] Kittel, C. "Introduction to Solid State Physics", 6th Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
- [33] Landau, L. D., E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, "Electrodynamics of Continuous Media", 2n edition, Elsevier, 1993.
- [34] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, 3rd edition, John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [35] Costa-Quintana y F. López-Aguilar "Interacción electromagnética: Teoría Clásica", Ed. Reverté (2007)
- [36] Fowles G.R. "Introduction to Modern Optics", Dover Publications Inc. 1975)
- [37] Lorrain, P. and D. R. Corson, *Electromagnetics fields and waves*, Freeman, 1988.
- [38] Cumings, J., "Artificial ice goes thermal," *Nature Phys.*, Vol. 7, 7--8, 2011.
- [39] Bramwell, S. T. and M. J. P. Gingras "Spin ice state in frustrated magnetic pyrochlore materials," *Science*, Vol. 294, 1495--1501, 2001.
- [40] Costa-Quintana, J. and F. López-Aguilar, "Extended classical electrodynamics with magnetic monopoles," *F. E. Journal of Mechanical Engineering and Physics*, Vol. 1, 19--56, 2010.
- [41] Costa-Quintana J. and F. López-Aguilar, "Propagation of electromagnetic waves in material media with magnetic monopoles," *Progress In Electromagnetics Research*, Vol. 110, 267--295, 2010.
- [42] Costa-Quintana J. and F. López-Aguilar, "Fresnel coefficients in materials with magnetic monopoles," *Optics Express*, Vol. 19, 3742--3757, 2011.
- [43] Costa-Quintana and F. López-Aguilar, "Molecular EM fields and dynamical responses in solids with magnetic charges", *Progress In Electromagnetics Research*, Vol. 121, 159-179 2011.
- [44] Costa-Quintana J. and F. López-Aguilar "Extended Lagrangian formalisms for dyons and some applications to solid systems under external fields" *Annals of Physics (New-York)* 327, 1948-1961, 2012
- [45] Shnir, Y. M., "Magnetic monopoles", Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [46] Mahan G.D. "Many-particle physics" Kluwer Academic/Plenum Publishers (3ª edición) (2000).
- [47] Tipler P.A. y G. Mosca "Physics for Scientists and Engineers, sixth edition" Edición en español Editorial Reverté, 2010.
- [48] Pollard, S.D., V. Volkov, and Y. Zhu, "Propagation of magnetic charge monopoles and Dirac flux strings in an artificial spin-ice lattice" *Phys. Rev. B.* 85, 180402 (2012).
- [49] Página web:  
<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/inducccion/foucault/foucault.htm#Modelo%20simple%20que%20calcula%20la%20fuerza%20de%20frenado>.
- [50] Pendry J.B. "Negative refraction makes a perfect lens" *Physical Review Letters* 85, 3966 (2000)
- [51] D.R. Smith, J.B. Pendry and M.C.K. Wiltshire "Metamaterials and negative refractive index" *Science*, 305, 5685 (2004).

Fernando López Bara