ISSN 0494-7304 0132-053x

TARTU ÜLIKOOLI TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТАРТУСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

878

МОНОИДЫ, КОЛЬЦА И АЛГЕБРЫ
MONOIDS, RINGS AND ALGEBRAS

Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid

Труды по математике и механике

TARTU 1990

TARTU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТАРТУСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
Alustatud 1893.a. VIHIK 878 ВЫПУСК Основаны в 1893.г.

МОНОИДЫ, КОЛЬЦА И АЛГЕБРЫ
MONOIDS, RINGS AND ALGEBRAS

Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid
Труды по математике и механике

TARTU 1990

Acta et commentationes universitatis Tartuensis, 878 , 1990, 3-10.

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕДЕЛЫ АЛГЕБР ГЕЛЬФАНДА-МАЗУРА

М.Абель
Лаборатория прикладной математики

Хорошо известно (см.[7,9-11,13-15]), что каждая полная отделимая локально m-выпуклая алгебра является топологически изоморфной проективному пределу банаховых алгебр. Кроме того, в статье [1] (теорема 4) показано, что каждая полная отделимая локально m-(p-псевдовыпуклая) алгебра топологически изоморфна проективному пределу p-банаховых алгебр при $0<p\leq 1$. Поскольку p-банаховы алгебры и отделимые локально m-(p-псевдовыпуклые) алгебры (следовательно, и банаховы алгебры и отделимые локально m-выпуклые алгебры) являются алгебрами Гельфанда-Мазура (см.[3], теорема 3.3), возникает вопрос: является ли алгеброй Гельфанда-Мазура проективный предел каждой проективной системы алгебр Гельфанда-Мазура? Ответ на этот вопрос отрицательный. В книгах [14],с.85, и [15],с.127, приведен пример коммутативной отделимой полной локально выпуклой $\mathbb{C}$-алгебры с непрерывным умножением элементов, которая не является алгеброй Гельфанда-Мазура. Поскольку (см.[12], теорема 2) каждая отделимая полная локально выпуклая алгебра с непрерывным умножением элементов топологически изоморфна проективному пределу локально выпуклых алгебр Фреше (следовательно, алгебр Гельфанда-Мазура), то ясно, что проективный предел алгебр Гельфанда-Мазура не всегда является алгеброй Гельфанда-Мазура. В связи с этим представляет интерес выяснить, какими свойствами должны обладать алгебры Гельфанда-Мазура в проективной системе, чтобы ее проективным пределом была алгебра Гельфанда-Мазура.

1. Пусть A - топологическая алгебра (т.е. линейное то-

пологическое пространство над $\mathbb{K}$ (т.е.над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), которое является ассоциативной алгеброй, умножение элементов (как билинейное отображение $A \times A$ в A) раздельно непрерывно, $\mathrm{hom}A$ - множество всех нетривиальных $\mathbb{K}$-значных гомоморфизмов на A, $M_l(A)$ ($M_r(A)$) - множество всех замкнутых максимальных регулярных левых (соответственно правых) идеалов алгебры A и $M(A) = M_l(A) \cap M_r(A)$.

Топологическая алгебра A называется алгеброй Гельфанда-Мазура, если факторалгебра A/M является топологически изоморфной полю $\mathbb{K}$ для каждого $M \in M(A)$. Основные классы локально псевдовыпуклых алгебр Гельфанда-Мазура приведены в статье [3] (теорема 3.3). Примеры о топологических алгебрах, не являющихся алгебрами Гельфанда-Мазура, приведены в книгах [7], с.214-217, [14], с.83-86, [15], с.127, и [16], с.141-148, а также в статьях [8], с.75, и [17].

Аналогично тому, как и в книге [11], с.68, топологическая алгебра A называется нормальной алгеброй, если каждый ее замкнутый регулярный двусторонний идеал содержится в некотором замкнутом максимальном регулярном двустороннем идеале рассматриваемой алгебры, и Q-алгеброй, если ее множество квазиобратимых (в случае, когда она содержит единицу, то множество обратимых) элементов открыто в алгебре A. Поскольку в Q-алгебрах все максимальные регулярные идеалы замкнуты (см., например, [10], с.67, или [6], с.205), то ясно, что Q-алгебры являются нормальными алгебрами. При этом существуют нормальные алгебры, которые не обязательно являются Q-алгебрами (см. [7], с.231-232).

Кроме того, топологическая алгебра A называется

а) алгеброй Валбрука, если она является такой Q-алгеброй, в которой квазиобращение (в случае алгебр с единицей обращение) элементов непрерывно,

б) локально псевдовыпуклой (локально выпуклой) алгеброй, если она содержит базу окрестностей нуля, состоящую из закругленных псевдовыпуклых[1] (соответственно выпуклых) подмножеств,

в) поглощенно псевдовыпуклой (локально m-псевдовыпуклой) алгеброй, если она содержит базу окрестностей нуля, состоящую из поглощенных закругленных псевдовыпуклых (соот-

[1] Напомним, что множество U псевдовыпукло, если $U + U \subseteq \lambda U$ для некоторого $\lambda \geq 2$.

ветственно идемпотентных закругленных псевдовыпуклых) подмножеств.

Говорят, что элемент a топологической $\mathbb{C}$-алгебры A <u>ограничен</u>, если найдется такое число $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, что множество $\{(a/\lambda)^n : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено в алгебре A.

2. Пусть $\mathfrak{A}$ - направленное (по возрастанию) множество, $(A_\alpha;\ h_\alpha^\beta,\ \mathfrak{A})$ - проективная система топологических алгебр A_α и $\lim A_\alpha$ - ее проективный предел, т.е.
$\lim A_\alpha = \{(a_\alpha) \in \Pi\{A_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\} : h_\alpha^\beta(a_\beta) = a_\alpha$ всякий раз, когда $\alpha \leq \beta\}$. Известно, что $\lim A_\alpha$ может быть пустым множеством. Но в случае, когда каждая алгебра A_α в проективной системе $(A_\alpha,\ h_\alpha^\beta,\ \mathfrak{A})$ содержит единицу e_α и гомоморфизмы h_α^β из A_β в A_α преобразуют единицу в единицу, то $(e_\alpha) \in \lim A_\alpha$.

Пусть далее π_α-проекция прямого произведения $\Pi\{A_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ на A_α и $\mu_\alpha = \pi_\alpha | \lim A_\alpha$ для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$. Тогда μ_α отображает $\lim A_\alpha$ в A_α (не обязательно на A_α). В частности, когда $\mu_\alpha(\lim A_\alpha)$ является всюду плотной в A_α для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$, проективный предел $\lim A_\alpha$ называется <u>строго плотным</u>. Наделив $\lim A_\alpha$ топологией, индуцируемой обычной топологией произведения на $\Pi\{A_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$, и определяя на $\lim A_\alpha$ алгебраические операции поточечно заметим, что $\lim A_\alpha$ является топологической алгеброй.

3. Во-первых, найдем необходимые и достаточные условия для того, чтобы проективный предел топологических алгебр был алгеброй Гельфанда-Мазура.

<u>Теорема.</u> Пусть $(A_\alpha;\ h_\alpha^\beta,\ \mathfrak{A})$ - проективная система (над направленным по возрастанию множеством $\mathfrak{A}$) топологических алгебр A_α. Если $\lim A_\alpha$ непуст, то он является алгеброй Гельфанда-Мазура тогда и только тогда, когда подалгебра $\mu_\alpha(\lim A_\alpha)$ является алгеброй Гельфанда-Мазура для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $A = \lim A_\alpha$ является алгеброй Гельфанда-Мазура. Пусть $\alpha \in \mathfrak{A}$, $A'_\alpha = \mu_\alpha(A)$, $M' \in M(A')$ (если $M(A')$ непусто), u_α - единица в A' по идеалу M' и u - такой элемент в A, что $\mu_\alpha(u) = u_\alpha$. Тогда $u \notin M = \mu_\alpha^{-1}(M')$. Следовательно, M образует в A замкнутый регулярный двусторонний идеал и u является единицей в A по идеалу M.

Пусть теперь I - любой регулярный левый идеал алгебры A, содержащий M. Тогда $M' \subseteq \mu_\alpha(I)$ и $u_\alpha \in \mu_\alpha(I)$, (если $u_\alpha \in$

$\in \mu_\alpha(I)$,то $u_\alpha = \mu_\alpha(i)$ для некоторого $i \in I$. Поскольку $\mu_\alpha(a)-\mu_\alpha(a)u_\alpha \in M'$, то $a - ai \in M$ для каждого $a \in A$. Таким образом каждый элемент $a \in A$ принадлежал бы I, ибо $a = (a-ai) + ai$. Значит $\mu_\alpha(I)$ образует в A' регулярный левый идеал,содержащий M'_α. Так как $M' \in M_l(A')$, то справедливо $M' = \mu_\alpha(I)$. В силу этого, из $I \subseteq (\mu_\alpha^{-1} \circ \mu_\alpha)(I) = M$ следует, что $M = I$. Следовательно, $M \in M_l(A)$. Таким же образом убедимся в том, что $M \in M_r(A)$. Учитывая, что A является алгеброй Гельфанда-Мазура, найдется такой $\phi \in \mathrm{hom}A$, что $M = \ker\phi$. Теперь (ввиду включения $\ker\mu_\alpha \subset \ker\phi$) существует $\varphi_\alpha \in \mathrm{hom}A_\alpha$ такой, что $\phi = \varphi_\alpha \circ \mu_\alpha$. Поскольку $M' \subset \ker\varphi_\alpha$ и идеал $M' \in M(A')$, то $M' = \ker\varphi_\alpha$. Поэтому факторалгебра A'/M' изоморфна полю $\mathbb{K}$. Значит каждый элемент факторалгебры A'/M' представим в виде λe для некоторого $\lambda \in \mathbb{K}$, где e - единица факторалгебры A'/M'. Теперь легко заметить (см., например, [5], с.47), что этот изоморфизм является топологическим. Следовательно, A_α является алгеброй Гельфанда-Мазура.

Предположим теперь, что каждая A' является алгеброй Гельфанда-Мазура. Пусть $M \in M(A)$ (если $M(A)$ непусто) и u - единица алгебры A по идеалу M. Поскольку $u \in M$, то в алгебре A найдется такая окрестность $O(u)$ элемента u,что пересечение $O(u) \cap M$ пусто. Теперь найдутся $\alpha' \in \mathfrak{A}$ и открытое множество $U_{\alpha'}$ в $A_{\alpha'}$ такие, что $u \in \mu_{\alpha'}^{-1}(U_{\alpha'}) \subseteq O(u)$ (см.,например,[4], с.177-178). В силу этого, $U_{\alpha'} \cap A'_{\alpha'}$ является окрестностью элемента $\mu_{\alpha'}(u)$ в алгебре $A'_{\alpha'}$. Если $\mu_{\alpha'}(u) \in M'_{\alpha'} = \mathrm{cl}_{A'_{\alpha'}}\mu_{\alpha'}(M)$, то множество $U_{\alpha'} \cap \mu_{\alpha'}(M)$ непусто. Поэтому найдется $m \in M$ такой, что $m \in \mu_{\alpha'}^{-1}(U_{\alpha'})$, в силу чего $m \in O(u) \cap M$, что невозможно. Значит $\mu_{\alpha'}(u) \in A'_{\alpha'}\backslash M'_{\alpha'}$. В силу этого, $M'_{\alpha'}$ образует в $A_{\alpha'}$ замкнутый регулярный двусторонний идеал и $\mu_{\alpha'}(u)$ является в $A'_{\alpha'}$ единицей по идеалу $M'_{\alpha'}$.

Пусть теперь I - регулярный левый идеал алгебры $A'_{\alpha'}$, содержащий $M'_{\alpha'}$. Тогда $J = \mu_{\alpha'}^{-1}(I) \neq A$ (ибо $\mu_{\alpha'}(u) \notin I$). Поэтому J образует в A регулярный левый идеал и содержит M.

Поскольку $M \in M_l(A)$, то $M = J$. Учитывая это, из $I = \mu_{\alpha'}(J) = \mu_{\alpha'}(M) \subseteq M_{\alpha'}$ следует, что $M'_{\alpha'} = I$. Значит, $M'_{\alpha'} \in M_l(A'_{\alpha'})$. Таким же образом заметим, что $M'_{\alpha'} \in M_r(A'_{\alpha'})$. Поэтому существует $\varphi_{\alpha'} \in \mathrm{hom}A'_{\alpha'}$ такой, что $M'_{\alpha'} = \ker\varphi_{\alpha'}$ (ибо $A'_{\alpha'}$ является алгеброй Гельфанда-Мазура). Теперь уже легко убедиться в том, что $\phi = \varphi_{\alpha'} \circ \mu_{\alpha'} \in \mathrm{hom}A$ и $M = \ker\phi$. Следовательно, A является алгеброй Гельфанда-Мазура.

По теореме 3.3 из статьи [3] справедливо

Следствие 1. Пусть все алгебры A_α в проективной системе $(A_\alpha; h_\alpha^\beta, \mathfrak{U})$ ($\mathfrak{U}$ направлено по возрастанию) принадлежат одному из следующих классов:

а) локально псевдовыпуклые $\mathbb{C}$-алгебры, все элементы которых ограничены,

б) поглощенно псевдовыпуклые (в частности, локально m-псевдовыпуклые) $\mathbb{C}$-алгебры

в) локально выпуклые $\mathbb{C}$-алгебры Валбрука[2].

Если проективный предел $\lim A_\alpha$ этой системы непуст, то он является $\mathbb{C}$-алгеброй Гельфанда-Мазура.

4. Чтобы выяснить, когда строго плотный проективный предел алгебр Гельфанда-Мазура является алгеброй Гельфанда-Мазура, нам понадобится следующая

Лемма. Каждая всюду плотная подалгебра коммутативной нормальной алгебры Гельфанда-Мазура является алгеброй Гельфанда-Мазура.

Доказательство. Пусть A - коммутативная нормальная алгебра Гельфанда-Мазура и B - ее всюду плотная подалгебра. Пусть, далее, $M \in M(B)$ и u - единица в B по идеалу M. Тогда $u \notin M$. Поэтому $u \notin I = cl_A M$. Следовательно, I образует в A замкнутый идеал. Этот идеал регулярен ввиду всюду плотности алгебры B в A. Поскольку A нормальная, то некоторый идеал $J \in M(A)$ содержит I. В силу того, что A является алгеброй Гельфанда-Мазура, найдется такой гомоморфизм $\varphi \in \hom A$, что $J = \ker\varphi$. Положив $\psi = \varphi|B$ заметим, что $\psi \in \hom B$ и $M \in \ker\psi$. Таким образом B является алгеброй Гельфанда-Мазура.

Теперь из теоремы и леммы вытекает

Следствие 2. Пусть $(A_\alpha; h_\alpha^\beta, \mathfrak{U})$ - проективная система ($\mathfrak{U}$ направлено по возрастанию) коммутативных нормальных отделимых алгебр Гельфанда-Мазура A_α. Если ее строго плотный проективный предел непуст, то он является алгеброй Гельфанда-Мазура.

Примечание. Следует отметить, что лемма неверна, если рассматриваемая алгебра не нормальна. В самом деле (см. [13], с.43, или [14], с.83) найдется коммутативная локально выпуклая $\mathbb{C}$-алгебра Фреше (следовательно, алгебра Гельфанда-

---

[2] Известно (см., например, [2], с.20), что все элементы локально выпуклой $\mathbb{C}$-алгебры Валбрука ограничены. Поэтому предположение в) содержится в а).

Мазура (см.[3], теорема 3.3)), которая содержит всюду плотную подалгебру, изоморфную полю $\mathbb{C}(t)$ всех рациональных функций одной комплексной переменной. Нетрудно заметить, что $\mathbb{C}(t)$ не является алгеброй Гельфанда-Мазура.

При этом неизвестно, справедлива ли лемма, если отказаться от коммутативности рассматриваемой алгебры.

Литература

1. А б е л ь М. Проективные пределы топологических алгебр // Уч. зап. Тарт. ун-та - 1989. - Вып.836. - С.3-25.
2. А б е л ь М. Топологические алгебры с непустым спектром // Уч. зап. Тарт. ун-та - 1983. - Вып. 846. - С.11-24.
3. А б е л ь М., К о к к А. Локально псевдовыпуклые алгебры Гельфанда-Мазура // Изв. АН ЭССР. Физ. Матем. - 1988. - Вып. 37. - С.377-386.
4. А л е к с а н д р я н Р. А., М и р з а х а н я н Э. А. Общая топология. - М.: Наука, 1979.
5. Б у р б а к и Н. Топологические векторные пространства. - М.: Изд. иностр. литературы, 1959.
6. Н а й м а р к М. А. Нормированные кольца. - М.: Наука, 1968.
7. B e c k e n s t e i n E., N a r i c i L., S u f f e l Ch. Topological Algebras. - North-Holland Math.Stud. V.24. - Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1977.
8. G r a m a s c h B. Die klasse metrischen linearer Räume L_ϕ // Math. Ann. - 1967. - Bd.171. - S.61-76.
9. H u s a i n T. Multiplicative functionals on topological algebras. - Boston-London-Melbourne: Pitman Advanced Publ. Program, 1983.
10. M a l l i o s A. Topological Algebras. Selected topics. - North-Holland Math.Stud. V.124. - Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1986.
11. M i c h a e l E. A. Locally multiplicatively-convex topological algebras // Mem. Amer. Math. Soc. - 1952. - V.11. - P.1-79.
12. M ü l d n e r T. Projective limits of topological algebras // Colloq. math. - 1975. - V.33. - P.291-294.
13. Ž e l a z k o W. Metric generalisations of Banach al-

gebras. - Rozpr. mat. 47. - Warszawa:PWN, 1965.
14. Ž e l a z k o W. Selected topics in topological algebras. - Lect. Notes. Ser. math. N.31. - Aarhus Univ., 1971.
15. Ž e l a z k o W. On ideal theory in Banach and topological algebras. - Monogr. Inst. mat. // UNAM. - 1984. - V.15. - N.4. - P.1-151.
16. W a e l b r o e c k L. Topological Vector Spaces and Algebras. - Lect. Notes Math. V.230. - Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1973.
17. W i l l i a m s o n J. H. On topologizing the field C(t) // Proc. Amer. Math. Soc. - 1954. - V.5. - P.729-734.

Поступило
30 IX 1989

GELFAND-MAZURI ALGEBRATE PROJEKTIIVSED PIIRID

M.Abel

R e s ü m e e

Leitakse tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et topoloogiliste algebrate projektiivne piir oleks Gelfand-Mazuri algebra. Näidatakse, et kommutatiivsete normaalsete Gelfand-Mazuri algebrate rangelt tihe projektiivne piir on Gelfand-Mazuri algebra.

PROJECTIVE LIMITS OF GELFAND-MAZUR ALGEBRAS

M.Abel

S u m m a r y

Let $\mathbb{K}$ be one of the fields $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, $M_l(A)$ ($M_r(A)$) denote the set of all closed maximal regular left (respectively

right) ideals of A and let $M(A) = M_l(A) \cap M_r(A)$.

We say that A is a Gelfand-Mazur algebra if it is a topological $\mathbb{K}$-algebra (with separately continuous multiplication) in which for each $M \in M(A)$ the quotient algebra A/M is topologically isomorphic to $\mathbb{K}$.

The necessary and sufficient conditions are given for the projective limit of topological algebras to be a Gelfand-Mazur algebra. It is shown that

a) the strictly dense projective limit of commutative normal Gelfand-Mazur algebras is a Gelfand-Mazur algebra and

b) the projective limit of A-pseudoconvex $\mathbb{C}$-algebras, locally m-pseudoconvex $\mathbb{C}$-algebras, locally convex Waelbroeck $\mathbb{C}$-algebras and of such locally pseudoconvex $\mathbb{C}$-algebras, all elements of which are bounded in the sense of Allan, is a Gelfand-Mazur $\mathbb{C}$-algebra.

Acta et commentationes universitatis Tartuensis, 878 , 1990, 11-16.

HEREDITARY AND COHEREDITARY S-SETS

J. Ahsan

QUAID-I-AZAM University, Islamabad, Pakistan

In this note S will denote a monoid, that is, a semigroup with identity 1, and all S-sets are assumed to be right unitary. Let M be a fixed right S-set. An S-set Q is called M-injective if, given an S-monomorphism g of an S-set N_S into M_S , every S-homomorphism $h : N_S \to Q_S$ can be extended to an S-homomorphism $h^*: M_S \to Q_S$ such that $h^*g = h$. Q is called M-projective if given an S-epimorphism g of M_S onto an S-set N_S, every S-homomorphism $h : Q_S \to N_S$ can be lifted to an S-homomorphism $h : Q_S \to M_S$ so that $gh = h$. Thus it follows that Q_S is injective (projective) if and only if Q_S is M-injective (M-projective) for all S-sets M. Moreover, Q_S is quasi-injective (quasi-projective) if and only if Q_S is Q-injective (Q-projective) (cf. [1], [2], [6], [7]). S-injective S-sets need not be injective in the usual sense (See [3], P.272) and are called weakly injective.

Recall that S is right hereditary if each right ideal of S is projective (cf. [4]). Extending this definition to arbitrary S-sets, we define here hereditary S-sets and the dual notion of cohereditary S-sets. We call an S-set M hereditary if every proper S-subset of M is projective. Hence if S is a right hereditary monoid, then all projective S-sets are hereditary. Dually, M is called cohereditary if each proper quotient S-set of M is injective. We call M weakly cohereditary (resp. q-cohereditary) if every proper quotient S-set of M is weakly injective (resp. quasi-injective). Thus if S is a right hereditary monoid then all injective and weakly injective S-sets are weakly cohereditary (cf. [4], P.304).

Lemma 1. For an S-subset $M_o \subseteq M$, every M-projective S-set Q is M_o-projective.

Proof. In order to show that Q is M_o-projective, let there be given an epimorphism $\phi_o : M_o \twoheadrightarrow N_o$ and an S-homomorphism $g : Q \rightarrow N_o$. Let ρ be the relation on M defined by $\rho = \mathrm{Ker}\,\phi_o \cup i$, where $\mathrm{Ker}\,\phi_o$ is the usual kernel congruence. Then ρ is a congruence on M. Let $N = M/\rho$ and $\phi : M \twoheadrightarrow N$ be the natural map. We can identify N_o with the S-subset $M_o/\mathrm{Ker}\,\phi_o$ of the S-set N. Thus the natural map $\phi : M \twoheadrightarrow N$ is an extension of ϕ_o. By the M-projectivity of Q, there exists a homomorphism $f : Q \rightarrow M$ such that the diagram:

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "\phi"'] & N \end{tikzcd}$$

is commutative. But $\phi(f(Q)) = g(Q) \subseteq N_o = M_o/\mathrm{Ker}\,\phi_o$. Hence $f(Q) \subseteq M_o$. Thus f can be regarded as a homomorphism from Q to M_o, showing that Q is M_o-projective.

Lemma 2.(A). Let $\pi : A \twoheadrightarrow B$ be an epimorphism and M an S-act. If every $N \subseteq M$ is A-projective and A is M-injective, then B is M-injective;

(B). Let $k : B \rightarrow A$ be a monomorphism and M an S-act. If every factor of M is A-injective and A is M-projective then B is M-projective.

Proof. (A). Let $k : N \rightarrow M$ be a monomorphism and $f : N \rightarrow B$ a homomorphism. Since N is A-projective, there exists an S-homomorphism $h : N \rightarrow A$ such that $\pi h = f$. Since A is M-injective, there exists an S-homomorphism $\lambda : M \rightarrow A$ such that $\lambda k = h$. Let $\mu = \pi\lambda$. Then $\mu : M \rightarrow B$ is an S-homomorphism, such that $\mu k = \pi\lambda k = \pi h = f$. This proves that B is M-injective.

(B). The proof is dual to that of (A).

Theorem 3. For a projective S-set M, the following conditions are equivalent:

(1) M is hereditary;

(2) Every quotient S-set of an M-injective S-set is M-injective;

(3) Every quotient S-set of an injective S-set is M-injective.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) : This is immediate from part (A) of Lemma 2.

(2) $\Rightarrow$ (3) : clear.

(3) $\Rightarrow$ (1) : In order to show that M is a hereditary S-set, consider an S-monomorphism $k : N \to M$. We must show that N is projective. For this purpose we consider the diagram of Lemma 2. We also observe that by Lemma 4 of [4] , we may assume that A is injective to prove that N is projective. The desired implication now follows from part (B) of Lemma 2.

Corollary ([4] , Theorem 2 (6), P.304). Let S be a monoid. Then S is right hereditary if and only if each quotient S-set of an injective S-set is weakly injective.

Proposition 4. If an S-set M is cohereditary, then every S-subset of an M-projective S-set is M-projective.

Proof. Follows from Part (B) of Lemma 2.

Proposition 5. An injective S-set E is weakly cohereditary if and only if each right ideal I of S is E-projective.

Proof.(1) The "if" part is immediate from(A) of Lemma 2 with N = I, M = S, A = E and B = K, where $\pi : E \twoheadrightarrow K$ is an S-epimorphism.(2) The "only if" part is immediate from (B) of Lemma 2 with N = I. M = S, A = E and B = K.

As an application of the above proposition, we can prove the following.

Proposition 6. Let S be a principal right ideal monoid. Then S is right hereditary if and only if E = E(S), the injective hull of S_S , is weakly cohereditary.

Proof. Suppose E is weakly cohereditary. Then each right ideal I of S is E-projective, by the above proposition. Hence by Lemma 1, I is S-projective. Since I is a principal right ideal of S, there exists an epimorphism $\pi : S \twoheadrightarrow I$. Hence the diagram:

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] \arrow[d, "i"] \\ S \arrow[r, "\pi"'] & I \end{tikzcd}$$

in which α exists, since I is S-projective, commutes. Hence $\pi\alpha = i$. This implies that I is a retract of S, and so I is projective, showing that S is right hereditary. Conversely, if S is right hereditary then E is weakly cohereditary by the corollary to Theorem 3.

Proposition 7. Let S be a monoid. Then the following conditions are equivalent:

(1) Each injective S-set is cohereditary;

(2) Each injective S-set is q-cohereditary.

Proof. (1)$\Rightarrow$(2) is obvious. Hence we need only to prove that (2)$\Rightarrow$(1). Let Q be an injective S-set, and let M be a quotient S-set of Q. In order to prove that M is injective, we show that M is A-injective for all S-sets A. Let $E=E(A)$ be the injective hull of A. Since every injective S-set contains a zero element (See [8],Prop. 4.4(b), P.17), we can form the direct sum $Q \oplus E$. Also, since M is a homomorphic image of Q, M also contains a zero element, and so we can form the direct sum $M \oplus E$. Since $M \oplus E$ is a homomorphic image of the injective S-set $Q \oplus E$, it follows from the hypothesis, that $M \oplus E$ is quasi-injective. This implies that M is E-injective and so M is A-injective. Since A is an arbitrary S-set, M is injective in the usual sence.

We conclude with the following theorem.

Theorem 8. Let S be a monoid. Then the following conditions are equivalent:

(1) Each homomorphic image of a quasi-injective S-setis quasi-injective, S_S is quasi-injective, and S has a unique idempotent;

(2) S is a group;

(3) Each homomorphic image of a quasi-injective S-set is quasi-injective, S has a unique idempotent and it satisfies the descending chain condition on principal right ideals.

Proof. Assume(1).Then S is right hereditary by the above proposition. Since S has a unique idempotent, it follows from ([5] , Prop. 2.5, P.668) that S is left cancellative. Clearly, since S_S is quasi-injective, it is weakly injective. Hence S is a group by ([7] ,Theorem 2.4, P.187).

Let us now assume that S is a group. Then for each S-set A_S and S-subset $X_S \subseteq A_S$, we also have $A \setminus X$ an S-subset of A_S. Let $\phi : X_S \longrightarrow A_S$ be an arbitrarily given S-homomorphism. Define $\psi : A \longrightarrow A$ as follows:

$$\psi(a) = \begin{cases} \phi(a), & \text{if } a \in X \\ a, & \text{if } a \in A \setminus X \end{cases}$$

Clearly, ψ is a correctly defined S-homomorphism, which extends ϕ. Hence A_S is quasi-injective. In particular, S_S is quasi-injective. Since S is a group, it has a unique idempotent. This proves the equivalence of (1) and (2).

(2) $\Longrightarrow$ (3) : clear.

(3) $\Longrightarrow$ (2) : we first observe that S is left cancellative as before. Let $a \in S$. Then we have $aS \supseteq a^2S \supseteq \ldots$ .This implies that $a^n = a^{n+1}t$, for some $n \in \mathbb{N}$ and $t \in S$, since S satisfies the descending chain condition on principal ideals. The fact that S is left cancellative, implies that a is a unit. Therefore, S is a group. This proves the equivalence of (2) and (3).

Acknowledgement: The author wishes to express his deep appreciation to Dr. Peeter Normak for carefully reading this paper, and for suggesting many improvements.

References

1. A h s a n J. Monoids characterized by their quasi-injective S-systems // Semigroup Forum.-1987.-Vol. 36.-P. 285-292.

2. A h s a n J., S a i f u l l a h K. Completely quasi-projective monoids // Semigroup Forum.-1988.-Vol. 38.-P. 123-126.

3. B e r t h i a u m e P. The injective envelope of S-sets // Canad. Math. Bull.-1967.-Vol. 10.-P. 261-273.

4. D o r o f e e v a M. P. Hereditary and semihereditary monoids // Semigroup Forum.-1972.-Vol. 4.-P. 301-311.

5. F e l l e r E. H. On a class of right hereditary semigroups // Canad. Math. Bull.-1975.-Vol. 17.- P. 667-670.

6. L o p e z Jr., A. M. and L u e d e m a n J. K. Quasi-injective S-systems and their S-endomorphism semigroups // Czechoslovak Math. J.-1979.-Vol. 29.-P. 97-104.

7. S a t y a n a r a y a n a M. Quasi and weakly injective S-systems // Math. Nachr.-1976.-Vol. 71.- P. 183-190.

8. W e i n e r t H. J. S-sets and semigroup of quotients // Semigroup Forum.-1980.-Vol. 19.-P. 1-78.

Received
25 IX 1989

PÄRILIKUD JA KOPÄRILIKUD POLÜGOONID

J. Ahsan

R e s ü m e

Autor defineerib pärilikud, kopärilikud, nõrgalt kopärilikud ja q-kopärilikud polügoonid ning leiab mõningad nende tähtsamad omadused.

НАСЛЕДСТВЕННЫЕ И КОНАСЛЕДСТВЕННЫЕ ПОЛИГОНЫ

Дж. Ахсан

Р е з ю м е

Полигон называется наследственным (конаследственным), если все его собственные подполигоны (факторполигоны, соответственно) являются проективными (инъективными). Полигон называется M-инъективным, если он инъективен относительно вложений полигонов в M. Доказывается, что проективный полигон M является наследственным тогда и только тогда когда факторполигоны инъективных полигонов являются M-инъективными. Среди остальных результатов отметим, что из квази-инъективности факторов инъективных полигонов следует наследственность основного моноида.

Acta et commentationes universitatis Tartuensis, 878 , 1990, 17-22.

ОБ FC-ПОДГРУППЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ГРУППЫ СКРЕЩЕННОЙ ГРУППОВОЙ АЛГЕБРЫ

В.Бовди

Ужгородский государственный университет

Пусть $U(K)$ - мультипликативная группа поля K , G - группа, $K_\lambda G$ - скрещенная групповая алгебра группы G и поля K при системе факторов λ, $\{u_g \mid g\in G\}$ - K-базис скрещенной групповой алгебры $K_\lambda G$. Операция умножения базисных элементов определяется следующим образом

$$u_g \cdot u_h = \lambda_{g,h} u_{gh} \qquad (\lambda_{g,h} \in U(K),\ g,h\in G)$$

и система факторов $\lambda = \{\lambda_{a,b} \in U(K) \mid a,b\in G\}$ удовлетворяет соотношению

$$\lambda_{a,b}\lambda_{ab,c} = \lambda_{b,c}\lambda_{a,bc}.$$

Пусть $U(K_\lambda G)$ - мультипликативная группа скрещенной групповой алгебры $K_\lambda G$. Легко видеть, что $\hat{G} = \{\lambda u_a \mid \lambda \in U(K),$ $a\in G\}$ - подгруппа в $U(K_\lambda G)$, а подгруппа $U(K)$ нормальна в $\hat{G}$, факторгруппа $\hat{G}/U(K)$ изоморфна G . Элементы из $U(K_\lambda G)$, имеющие конечное число сопряженных в $U(K_\lambda G)$, образуют подгруппу ΔU в группе $U(K_\lambda G)$. Подгруппа ΔU называется FC-подгруппой группы $U(K_\lambda G)$. В [1] доказывается, что элементы конечного порядка группы ΔU образуют подгруппу $\Delta^+ U$ и факторгруппа абелева без кручения.

В настоящей работе описывается строение группы ΔU. На основании этих результатов получаем ответ о строении мультипликативной группы $U(KG)$ групповой алгебры KG с конечными классами сопряженных элементов, которая была охарактеризована Клиффом и Сегалом [2] и Цассенхаузом.

Если x - нильпотентный элемент кольца $K_\lambda G$, то элемент $y = 1+x$ обратим в $K_\lambda G$ и называется унипотентным элементом группы $U(K_\lambda G)$.

Лемма I. Если скрещенная групповая алгебра $K_\lambda \tilde{G}$ бесконечна, то все унипотентные элементы группы ΔU центральны в ΔU.

Доказательство. Пусть $y = 1 + x$ -унипотентный элемент группы ΔU и существует такое $v \in \Delta U$, что $yv \neq vy$. Согласно теореме Пуанкаре централизатор S подмножества $\{v, y\}$ в группе $\tilde{G}$ является подгруппой конечного индекса в $\tilde{G}$. Так как $\tilde{G}$ бесконечна, то и ее подгруппа S бесконечна и $fy = yf$ для каждого элемента $f \in S$. Поэтому элемент xf нильпотентен и $1 + xf$ обратим в $K_\lambda \tilde{G}$. Легко видеть, что множество

$$\{ (1+xf)^{-1} v (1+xf) \mid f \in S \}$$

состоит из конечного числа элементов. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_t$ - все элементы этого множества и

$$W_i = \{ f \in S \mid (1+xf)^{-1} v (1+xf) = v_i \}.$$

Очевидно, что $S = \bigcup_{i=1}^{t} W_i$ и существует такое j, что W_j - бесконечное множество. Зафиксируем элемент f из W_j. Тогда для любого элемента q из W_j отличного от f, выполняется равенство

$$(1+xf)^{-1} v (1+xf) = (1+xq)^{-1} v (1+xq). \qquad (1)$$

Отсюда следует, что

$$(f-q)(vx - xv) = 0.$$

Так как $q^{-1} f \in \tilde{G}$, то $q^{-1} f = \lambda u_h$, $h \in G$. Поэтому

$$(\lambda u_h - 1)(vx - xv) = 0. \qquad (2)$$

Легко видеть, что $xv - vx = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i u_{g_i} \neq 0$ и из равенства (2) следует

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda \alpha_i u_h u_{g_i} - \sum_{i=1}^{s} \alpha_i u_{g_i} = 0.$$

Отсюда вытекает, что если $h \in G$ удовлетворяет равенству (2), то $g_i = h g_j$ для некоторого j и число таких элементов h конечно. Так как W_j - бесконечное множество, то существуют такое h и различные элементы λ_1 и λ_2 поля K, что $\lambda_1 u_h$, $\lambda_2 u_h$ принадлежат $W_j^{-1} f$. Тогда из равенств $(\lambda_1 u_h - 1)(xv - vx) = 0$, $(\lambda_2 u_h - 1)(xv - vx) = 0$ следует $(\lambda_1 - \lambda_2)(xv - vx) = 0$. Это возможно лишь только в случае, когда $xv = vx$, что противоречит предположению. Лемма доказана.

Пусть H - конечная подгруппа группы ΔU и L_H - подалгебра алгебры $K_\lambda G$, порожденная элементами подгруппы H. Тогда L_H является конечномерной алгеброй над K и ее радикал $\mathcal{J}(L_H)$ есть нильпотентный идеал. Как известно [3], имеют место следующие разложения

$$L_H \cong M(n_1, K_1) \oplus \cdots\cdots \oplus M(n_t, K_t) \tag{3}$$

и

$$L_H/\mathcal{J}(L_H) \cong M(n_1, \mathcal{D}_1) \oplus \cdots \oplus M(n_t, \mathcal{D}_t) \tag{4}$$

где $M(n_i, K_i)$ - полное матричное кольцо размерности n_i^2 над кольцом K_i и $\mathcal{D}_i \cong K_i/\mathcal{J}(K_i)$ - тело. Так как $\mathcal{J}(L_H)$ - нильпотентный идеал, то разложению (4) соответствует следующее разложение в прямое произведение групп

$$U(L_H) \cong GL(n_1, K_1) \times \cdots \times GL(n_t, K_t) . \tag{5}$$

<u>Лемма 2</u>. Пусть $K_\lambda G$ - бесконечная скрещенная групповая алгебра и H - конечная подгруппа в ΔU. Тогда мультипликативная группа $U(L_H)$ алгебры L_H содержится в ΔU и факторгруппа $U(L_H)/(1+\mathcal{J}(L_H))$ абелева.

<u>Доказательство.</u> Пусть $w \in U(K_\lambda G)$ и $u = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i h_i \in U(L_H)$ где $\alpha_i \in K$ и $h_i \in H$. Тогда

$$w^{-1} u w = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i w^{-1} h_i w$$

и множество $\{w^{-1} h_j w \mid w \in U(K_\lambda G), j = 1,2,\ldots,t\}$ состоит из конечного числа элементов. Следовательно, $w^{-1} u w \in \Delta U$.

Предположим, что в разложении (5) некоторое $n_j > 1$. Если e_{ik} ($i, k = 1,2,\ldots, n_j$) - матричные единицы кольца $M(n_j, K_j)$ то при $i \neq k$ элементы $1 + e_{ik}$ и $1 + e_{ki}$ унипотентны и содержатся в ΔU. Тогда по лемме I элементы центральны, что невозможно, так как они неперестановочны. Следовательно, в (5) $n_j = 1$ для всех $j = 1,2,\ldots,t$ и имеет место разложение

$$U(L_H) \cong U(K_1) \times U(K_2) \times \cdots \times U(K_t)$$

где $\mathcal{D}_i \cong K_i/\mathcal{J}(K_i)$ и $\mathcal{D}_i$ - тело. Как доказано выше $U(L_H) \subset \Delta U$ и поэтому группа $U(K_i)$ и ее факторгруппа $U(K_i)/(1+\mathcal{J}(K_i))$ обладают только конечными классами сопряженных элементов. Известно [4], если $\mathcal{D}_i$ - тело, то в группе $U(\mathcal{D}_i)$ элемент либо централен, либо обладает бесконечным числом сопряженных. Поэтому группа $U(\mathcal{D}_i)$ абелева и в разложении (4) $n_i = 1$ и $\mathcal{D}_i$ - поле. Отсюда вытекает, что группа $U(L_H)/(1+\mathcal{J}(L_H))$ абелева. Лемма доказана.

Теорема I. Пусть $K_\lambda G$ - бесконечная групповая алгебра и $\Delta^+ U$ - подгруппа группы ΔU, состоящая из всех элементов конечного порядка группы ΔU. Тогда коммутант группы $\Delta^+ U$ состоит из унипотентных элементов и содержится в центре группы ΔU.

Доказательство. Если H - конечная подгруппа группы $\Delta^+ U$, то подгруппа $H_1 = H \cap (1 + \mathcal{J}(L_H))$ состоит из унипотентных элементов и по лемме I содержится в центре группы ΔU. Легко видеть, что

$$H/H_1 \cong H/(H \cap (1+\mathcal{J}(L_H))) \cong (H \cdot (1+\mathcal{J}(L_H)))/(1+\mathcal{J}(L_H))$$

и подгруппа $H(1+\mathcal{J}(L_H))$ содержится в $U(L_H)$. По лемме 2 факторгруппа $U(L_H)/(1+\mathcal{J}(L_H))$ абелева. Поэтому и группа H/H_1 абелева и коммутант группы H содержится в H_1 и состоит из унипотентных элементов.

Так как коммутант группы $\Delta^+ U$ является объединением коммутантов конечных подгрупп группы $\Delta^+ U$, то коммутант группы $\Delta^+ U$ состоит из унипотентных элементов и содержится в центре группы ΔU. Теорема доказана.

Теорема 2. Если $K_\lambda G$ - бесконечная скрещенная групповая алгебра и характеристика поля K не делит порядки элементов подгруппы ΔG группы G, то группа $\Delta^+ U$ абелева.

Доказательство. Пусть H - конечная подгруппа коммутанта группы $\Delta^+ U$. Согласно теореме I подгруппа H содержится в центре группы ΔU. Тогда множество $\{u_g^{-1} H u_g \mid g \in \Delta G\}$ состоит из конечного числа подгрупп $H_1, H_2, \ldots, H_t$. Тогда $L = H_1 \cdots H_t$ является конечной подгруппой и L выдерживает все внутренние автоморфизмы вида $\varphi_g(x) = u_g^{-1} x u_g$ кольца $K_\lambda \Delta G$ где $g \in \Delta G$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_s$ - все элементы группы L. Тогда $y_i = x_i - 1$ - нильпотентный элемент и в силу коммутативности L элементы $y_1, y_2, \ldots, y_s$ попарно перестановочны. Поэтому

$$Y = \{\sum_{i=1}^{s} \alpha_i y_i \mid \alpha_i \in K,\ x_i = 1 + y_i \in L\}$$

является нильпотентным подкольцом. Пусть

$$F = \{\sum_{i=1}^{s} \alpha_i y_i z_i \mid \alpha_i \in K,\ x_i = 1 + y_i,\ z_i \in K_\lambda \Delta G\}$$

Докажем, что F - нильпотентный правый идеал алгебры $K_\lambda \Delta G$. Действительно, если $z = \sum_j \beta_j u_{g_j} \in K_\lambda \Delta G$, то

$$y_i z = \sum_j \beta_j u_{g_j} u_{g_j}^{-1} y_i u_{g_j}$$

и $u_{g_j}^{-1} y_i u_{g_j}$ совпадает с одним из элементов $y_1, y_2, \ldots, y_s$.

На основании этого равенства и нильпотентности кольца $\mathfrak{I}$ следует, что F нильпотентное кольцо. Известно [5], что если характеристика поля K не делит порядки элементов группы ΔG, то алгебра $K_\lambda \Delta G$ не содержит нильидеалов. Поэтому $F = 0$ и $L = 1$. Следовательно, коммутант группы $\Delta^+ U$ единичная подгруппа и группа $\Delta^+ U$ абелева. Теорема доказана.

Следствие. Если $K_\lambda G$ - бесконечная скрещенная групповая алгебра, то группа ΔU - разрешимая группа класса не более 3, а ее подгруппа $\Delta^+ U$ - нильпотентная группа ступени не более 2.

Автор выражает глубокую благодарность П.М.Гудивку за руководство работой.

Литература

1. N a u m a n n B. H. Groups with finite classes of conjugate elements// Proc. London Math. Soc.-1951.-Vol.1. -P.178-187.
2. C l i f f G. H., S e h g a l S. K. Group rings whose units form an group// Math.Z.- 1980.-Vol.161.-P. 163-168.
3. Д р о з д Ю. А., К и р и ч е н к о В. В. Конечномерные алгебры.-Киев: Вища школа, 1980.
4. S c o t t W. R. On the multiplicative group of a division ring// Proc. Amer. Math. Soc.-1957.-Vol.8.-P.303-305.
5. P a s s m a n D. S. Radicals of twisted group rings// Proc. London Math. Soc.-1970.-Vol.20.-P.409-437.

Поступило
13 III 1989

RÜHMA KALDALGEBRA
MULTIPLIKATIIVSE RÜHMA FC-ALAMRÜHMAST
V. Bovdi
R e s ü m e e

Olgu $U(K_\lambda G)$ - rühma G üle korpuse K võetud kaldalgebra $K_\lambda G$ multiplikatiivne rühm. Käesolevas töös uuritakse rühma $U(K_\lambda G)$ alamrühma ΔU, mis koosneb $U(K_\lambda G)$ kõigist nendest elementidest, millel on lõplik arv kaaselemente rühmas $U(K_\lambda G)$. Lõplikku järku elemendid rühmas ΔU moodustavad alamrühma $\Delta^+ U$ ning faktorrühm $\Delta U / \Delta^+ U$ on väändeta Abeli rühm.

Tõestatakse, et rühma lõpmatu kaldalgebra $K_\lambda G$ jaoks: (1) rühma $\Delta^+ U$ kommutant koosneb unipotentsetest elementidest ja sisaldub rühma ΔU tsentris; (2) kui arvuga $\mathrm{char}\, K$ ei jagu rühma ΔG ühegi elemendi järk, siis rühm $\Delta^+ U$ on Abeli rühm.

ON THE FC-SUBGROUP OF MULTIPLICATIVE GROUP OF TWISTED GROUP ALGEBRA

V.Bovdi

S u m m a r y

Let $U(K_\lambda G)$ be the multiplicative group of the twisted group algebra $K_\lambda G$ of a group G over a field K. In this paper the subgroup ΔU, consisting of all elements of the unit group $U(K_\lambda G)$ having a finite number of conjugates in $U(K_\lambda G)$, is investigated. Elements of finite order in ΔU form a subgroup $\Delta^+ U$ such that the factor-group $\Delta U/\Delta^+ U$ is torsionfree abelian. It is proved that in the case of $K_\lambda G$ being an infinite twisted group algebra: (1) the commutator subgroup for $\Delta^+ U$ is the set of unipotent elements and is included in the centre of ΔU (2) if $\mathrm{char}\, K$ does not divide orders of elements of ΔG, then $\Delta^+ U$ is abelian.

Acta et commentationes universitatis Tartuensis, 878 , 1990, 23-38.

ON AFFINE COMPLETE VARIETIES GENERATED BY HEMIPRIMAL ALGEBRAS WITH BOOLEAN CONGRUENCE LATTICES

K. Kaarli

Chair of algebra and geometry

In this paper we construct two series of finite hemiprimal algebras with Boolean congruence lattices generating CD (and in general non-arithmetical) affine complete varieties. We show also that if $\mathfrak{A}$ is a finite hemiprimal algebra, $\mathrm{Con}\mathfrak{A} \cong 2^2$ or $\mathrm{Con}\mathfrak{A} \cong 2^3$ and $\mathrm{Var}\mathfrak{A}$ is affine complete then $\mathfrak{A}$ necessarily belongs in one of these series.

1. Introduction.

For an algebra $\mathfrak{A} = (A,F)$ a function $f : A^n \to A$ is called compatible if it is compatible with all congruences of $\mathfrak{A}$. An algebra $\mathfrak{A}$ is called hemiprimal (resp. affine complete) if any compatible function on it is a term function (resp. a polynomial function). Finite simple hemiprimal (resp. affine complete) algebras are called primal (resp. functionally complete). An algebra $\mathfrak{A}$ is called congruence permutable (CP) if its congruences permute pairwisely and congruence distributive (CD) if the lattice $\mathrm{Con}\mathfrak{A}$ is distributive. An algebra which is both CP and CD is called arithmetical. A variety of algebras is called CP (CD, arithmetical, affine complete) if so are all its members.

In [2] Kaarli and Pixley initiated the systematical study of affine complete varieties. One of their central results was the description of arithmetical affine complete varieties of finite type: they are precisely the arithmetical varieties generated by a single finite algebra with no proper subalgebras. On the other hand, it was shown in [2] that an affine complete variety needs not to be arithmetical. More precisely, there was constructed a 3-element non-CP algebra with $\mathbf{Con}\mathfrak{A} \cong \mathbf{2}^2$ and generating a CD affine complete variety. Now it is known that any locally finite affine complete variety is necessarily CD. This result is due to R.McKenzie and is still not published. We are indebted to professor McKenzie who kindly informed us about this important result. Therefore, from our viewpoint, the central problem concerning affine complete varieties is

1.1. Problem. Describe finite algebras $\mathfrak{A}$ in CD varieties generating affine complete varieties.

Of course, from [2] we have a necessary condition: the algebra $\mathfrak{A}$ cannot have proper subalgebras, but this is not sufficient since the variety of bounded distributive lattices is not affine complete. In this example already the generating algebra itself is not affine complete. So the next natural question is: does a finite affine complete algebra in CD variety having no proper subalgebras generate affine complete variety. Unfortunately the answer to this question is negative, too. There is presented an example in the end of this paper showing that affine complete algebras with no proper subalgebras in CD varieties may have non-affine complete quotient algebras. Hence it is necessary to modify our problem as follows.

1.2. Problem. Suppose $\mathfrak{A}$ is a finite algebra with no proper subalgebras all of whose quotient algebras are affine complete. If $\mathbf{Var}\mathfrak{A}$ is CD, is it then affine complete?

If we wish to solve this problem then it is reasonable to start with the hemiprimal case. This is a consequence of the following proposition.

1.3. Proposition. If $\mathfrak{A}$ generates affine complete variety then so does $\mathfrak{A}^+$, the algebra obtained from $\mathfrak{A}$ by adding all constants as nullary operations.

Proof. Using Birkhoff's formula $\mathbf{Var}\mathfrak{A} = \mathbf{HSP}(\mathfrak{A})$ it is easy to understand that for any $\mathfrak{B} \in \mathbf{Var}\mathfrak{A}^+$ there exists an algebra $\mathfrak{C} \in \mathbf{Var}\mathfrak{A}$ such that $\mathfrak{B}$ is obtained from $\mathfrak{C}$ by adding some constants to its type. Hence $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{C}$ have the same congruences and the same polynomial functions as well. So the affine completeness of $\mathfrak{B}$ follows from the same property of $\mathfrak{C}$.

1.4. Corollary. If $\mathfrak{A}$ generates an affine complete variety then it is a reduct of a hemiprimal algebra generating an affine complete variety.

The following easy proposition is useful when one has to prove that a given algebra does not generate an affine complete variety. The proof is straightforward, so we omit it.

1.5. Proposition. If $\mathfrak{A}$ is a hemiprimal algebra in an affine complete variety then all quotient algebras of $\mathfrak{A}$ are hemiprimal, too.

1.6. Corollary. If $\mathfrak{A}$ is a hemiprimal algebra in affine complete variety and θ is a maximal congruence of $\mathfrak{A}$ then $\mathfrak{A}/\theta$ is primal.

Thus, we are interested in finite hemiprimal CD algebras generating affine complete varieties. First of all note that finite hemiprimal arithmetical algebras generate arithmetical varieties ([4], Theorem 3.5) which are affine complete by [2], Theorem 4.1. In particular, if $\mathfrak{A}$ is hemiprimal and $\mathbf{Con}\mathfrak{A}$ is chain then $\mathbf{Var}\mathfrak{A}$ is affine complete. Beside chains, an important class of distributive lattices is that of Boolean lattices. We think it is natural to start the search of CD non-arithmetical algebras generating affine complete varieties just from those with Boolean congruence lattices. It follows from Corollary 1.6 that if such an algebra is hemiprimal then it is a subdirect product of primal algebras. Unfortunately we still are not able to solve even this problem, i.e. we do not have a complete description of finite hemiprimal algebras with Boolean congruence lattices generating affine complete varieties. What we can is to construct two series of such algebras and to prove that in the case $\mathbf{Con}\mathfrak{A} \cong 2^k$, $k = 2, 3$, $\mathfrak{A}$ necessarily belongs to one of these series.

2. The first series.

We start with introducing some terminology which proves to be useful. Let A be a subset in the direct product $A_1\times \ldots \times A_m$. For any subset $J = \{j_1, \ldots, j_k\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$, let $\pi_J : A_1\times \ldots \times A_m \longrightarrow A_{j_1}\times \ldots \times A_{j_k}$ be a canonical projection and denote $A_J = \pi_J(A)$. Let $\bar{J}$ be the complement of

4

J in $\{1,\dots,m\}$. For simplicity we shall write $A_{j_1\dots j_k}$ instead of $A_{\overline{\{j_1,\dots,j_k\}}}$ and $\bar{i}$ instead of $\overline{\{i\}}$. In the sequel A is always a subdirect product in $A_1\times\dots\times A_m$, hence no confusion will appear.

2.1. Definition. Let A be a subset in the direct product of sets $A_1,\dots,A_m$. If $c_i\in A_i$ then a c_i-section of A is the set

$$\{\pi_{\bar{i}}(a_1,\dots,a_m) \mid (a_1,\dots,a_m)\in A \ , \ a_i = c_i\} \ .$$

2.2. Definition. Let A be a subset in the direct product of sets $A_1,\dots,A_m$ and let $i\in\{1,\dots,m\}$, $B\subseteq A_{\bar{i}}$. It is said that B has a lift in A (with respect to c_i) if B is contained in the c_i-section of A .

2.3. Definition. It is said that a subset A in the direct product $A_1\times\dots\times A_m$ has the i-lifting property (with respect of $c_i\in A_i$) if $\pi_{\bar{i}}(A)$ has a lift in A (with respect to c_i).

Let us call two vectors $(x_1,\dots,x_n)$ and $(y_1,\dots,y_n)$ almost equal if $x_i = y_i$ for all but maybe one values of the index i . A vector is called almost constant if it is almost equal with a vector $(x,\dots,x)$. It is said that an algebra satisfies the near unanimity identities if there is an m-ary term t $(m\geq 3)$ such that $t(x_1,\dots,x_m) = x$ whenever the vectors $(x_1,\dots,x_m)$ and $(x,\dots,x)$ are almost equal. Recall that by [3] any algebra satisfying such identities generates a CD variety.

Now we start the construction of our first series of algebras. Take a finite number of finite sets $A_1,\dots,A_m$, $m\geq 2$, each of them having at least two elements and choose in each of them an element $c_i\in A_i$. Let A be a subset in the direct product $A_1\times\dots\times A_m$ satisfying the following conditions:

(i) A is a subdirect product of A_i , $i = 1,\dots,m$;
(ii) for any i , A satisfies the i-lifting property with respect to c_i .

Now, let T be the set of all finitary functions on A which are compatible with kernels of all projections π_i . We are going to prove the

2.4. Theorem. The algebra $\mathfrak{A} = (A,T)$ is hemiprimal, $\mathrm{Con}\mathfrak{A} \cong 2^m$ and $\mathrm{Var}\mathfrak{A}$ is affine complete. Moreover, the clone T is finitely generated and therefore $\mathrm{Var}\mathfrak{A}$ is equivalent to the variety of finite type.

Proof. Claim 1. $\mathrm{Var}\mathfrak{A}$ is CD .

To show this it is enough to prove that $\mathfrak{A}$ satisfies near unanimity identities in $m + 1$ variables. Define on A_i a function t_i by the rule

$$t_i(x_1,\ldots,x_{m+1}) = \begin{cases} x & \text{if the vectors } (x_1,\ldots,x_{m+1}) \text{ and } (x,\ldots,x) \text{ are almost equal,} \\ c_i & \text{otherwise} \end{cases}$$

and let $t = (t_1,\ldots,t_m)$. We have to prove that $t \in T$, i.e. $t(A^{m+1}) \subseteq A$. Take

$$a_i = (a_{i1},\ldots,a_{im}) \in A \ , \quad i = 1,\ldots,m+1 \ ,$$

and prove that $t(a_1,\ldots,a_{m+1}) \in A$. We consider first the case when the values of all t_i are computed by applying the first case of the definition of t_i . That means, for any $j = 1,\ldots,m$ there exists k_j such that all a_{ij} , $i = 1,\ldots,m+1$, $i \neq k_j$, are equal. Since the number of variables $m + 1$ is larger than the number of direct factors m , there exists $l \in \{1,\ldots,m+1\}$ such that $l \neq k_j$ for all $j = 1,\ldots,m$. Hence

$$\begin{aligned} &t(a_1,\ldots,a_{m+1}) = \\ &(t_1(a_{11},\ldots,a_{m+1,1}),\ldots,t_m(a_{1m},\ldots,a_{m+1,m})) = \\ &(a_{l1},\ldots,a_{lm}) = a_l \in A \ . \end{aligned}$$

Now consider the general case assuming that the values of some component functions t_i have to be computed by applying the second case of the definition. It is easy to understand that in this case $t(a_1,\ldots,a_{m+1})$ can be obtained from some a_l by changing some of its entries by c_i . It is clear that the resulting vector still is contained in A .

Claim 2. The equivalence relations $\theta_j = \mathrm{Ker}\pi_j$ are congruences of $\mathfrak{A}$.

This is obvious since all functions $t \in T$ are compatible with kernels of projections π_i , $i = 1,\ldots,m$.

Claim 3. All quotient algebras $\mathfrak{A}_j$ are hemiprimal. In particular, algebras $\mathfrak{A}_i$ are primal.

4*

Take an arbitrary compatible function $f : (A_J)^n \longrightarrow A_J$. Obviously it has then a form $f = (f_j)_{j\in J}$ where each f_j is an n-ary function on A_j . Define then the functions t_i as follows:

$$t_i = \begin{cases} f_i & \text{if } i \in J , \\ c_i & \text{(a constant function) otherwise.} \end{cases}$$

It is easy to see that $t = (t_1, \ldots, t_m) \in T$ proving that f is a term function.

Claim 4. $\mathrm{Con}\mathfrak{A} \cong 2^m$.

Since all algebras $\mathfrak{A}_i$ are simple and $\mathbf{Var}\mathfrak{A}$ is CD, the θ_J , $J \subseteq \{1,\ldots,m\}$, are the only congruences of $\mathfrak{A}$. From conditions (i) and (ii) it follows easily that different subsets J induce different θ_J . This proves the claim.

Claim 5. $\mathbf{Var}\mathfrak{A}$ is affine complete.

Let $\mathfrak{B}$ be an arbitrary algebra in $\mathbf{Var}\mathfrak{A}$. Since $\mathbf{Var}\mathfrak{A}$ is CD, we may assume that $\mathfrak{B}$ is a subdirect product of primal algebras $\mathfrak{A}_i$:

$$\mathfrak{B} \le \mathfrak{A}_1^{I_1} \times \ldots \times \mathfrak{A}_m^{I_m} = \prod_{j\in I} \mathfrak{A}_j ,$$

where $I = I_1 \cup \ldots \cup I_m$ and $\mathfrak{A}_j = \mathfrak{A}_i$ if $j \in I_i$. We may also assume, without loss of generality, that all index sets I_i are non-empty. Indeed, otherwise we can replace $\mathfrak{A}$ by a suitable $\mathfrak{A}_J$, $J \subseteq \{1,\ldots,m\}$. Since $\mathfrak{A}$ is hemiprimal, there is a natural homomorphism $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ and since the index sets I_i are not empty, this homomorphism is 1-1 . Therefore $\mathfrak{A}$ may be considered as a subalgebra in $\mathfrak{B}$.

Let us take an arbitrary n-ary compatible function f on B and let

$$f(A^n) = D = \{d_1, \ldots, d_s\} ,$$

$$d_i = (d_{ij})_{j\in I} .$$

Since f is compatible, it induces a function f_j on A_j for any $j \in I$ and in fact $f = (f_j)_{j\in I}$.

Now define functions

$$t_i : (A_i)^{n+s} \longrightarrow A_i , \quad i = 1,\ldots,m ,$$

by the rule:

$$t_i(x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_s) = \begin{cases} f_j(x_1,\dots,x_n) & \text{if there exists } j \in I_i \text{ so that } (u_1,\dots,u_s) = (d_{1j},\dots,d_{sj}) , \\ c_i & \text{otherwise .} \end{cases}$$

Suppose there exist $j,k \in I_i$ such that $d_{rj} = u_r = d_{rk}$ for $r = 1,\dots,s$. Then, given $x_1,\dots,x_n \in A_i$, we choose $a_l \in A$ so that $a_{lj} = x_l$, $l = 1,\dots,n$, and consequently, $a_{lk} = x_l$, too. (Recall that A is considered as a subset of B.) Let $f(a_1,\dots,a_n) = d_r$. Then

$$f_j(x_1,\dots,x_n) = (f(a_1,\dots,a_n))_j = d_{rj} = u_r =$$
$$d_{rk} = (f(a_1,\dots,a_n))_k = f_k(x_1,\dots,x_n) \ .$$

This proves that the functions t_i are well defined.

Now take $x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_s \in A$ and let

$$x_l = (x_{l1},\dots,x_{lm}) \ , \ u_r = (u_{r1},\dots,u_{rm}) \ ,$$

where $l = 1,\dots,n$, $r = 1,\dots,s$. We wish to prove that $t = (t_1,\dots,t_m) \in T$ and have to show that $t(A^{m+s}) \subseteq A$. First consider the case where, for all i , the first case of the definition of t_i applies. That means each vector $(u_{1i},\dots,u_{si})$ equals to some vector $(d_{1j_i},\dots,d_{sj_i})$ where $j_i \in I_i$, $i = 1,\dots,m$. Let $f(x_1,\dots,x_n) = d_r$. Then

$$t(x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_s) =$$
$$(f_{j_1}(x_{11},\dots,x_{n1}),\dots,f_{j_m}(x_{1m},\dots,x_{nm})) =$$
$$((f(x_1,\dots,x_n))_{j_1},\dots,(f(x_1,\dots,x_n))_{j_m}) =$$
$$(d_{rj_1},\dots,d_{rj_m}) = (u_{r1},\dots,u_{rm}) = u_r \in A \ .$$

Now suppose that, for some i , the first case of the definition of t_i does not apply. It is easy to see that then the resulting vector $t(x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_s)$ is obtained from some vector belonging in A by replacing of some its coordinates by c_i-s . Hence it belongs in A , too.

Claim 6. Var$\mathfrak{A}$ is equivalent to a variety of finite type.

It is sufficient to show that the clone T is finitely generated but the latter follows from Theorem 2.4 of [2] since $\mathfrak{A}$ satisfies the near unanimity identities.

3. The second series.

The construction of the second series of algebras is similar but more complicated as compared with the first one. The difference is that now one of the factors plays a special role.

We take again finite sets $A_0, A_1, \dots, A_m$ $(|A_i| \geq 2)$ and choose $c_i \in A_i$, $i = 1, \dots, m$. The universe of the algebra we are going to construct is again a subset in the direct product $A_0 \times A_1 \times \dots \times A_m$ which has to satisfy the two conditions from the definition of the first series. To formulate two more conditions we need the notion of factor subset: this is any subset in direct product $A_1 \times \dots \times A_m$ having the form $B_1 \times \dots \times B_m$ where $B_i \subseteq A_i$, $i = 1, \dots, m$.

Let A be a subset in $A_0 \times A_1 \times \dots \times A_m$ satisfying the following conditions:

(i) A is a subdirect product of A_i , $i = 0, 1, \dots, m$;

(ii) A satisfies the i-lifting property with respect to c_i , $i = 1, \dots, m$;

(iii) for any $x_0 \in A_0$ the x_0-section of A is contained in a factor subset of $A_1 \times \dots \times A_m$ contained in $A_{1 \dots m}$;

(iv) any factor subset Δ contained in $A_{1 \dots m}$ has a lift in A .

The type T and the algebra $\mathfrak{A}$ are defined exactly in the same way as in the first series. The next lemma will be the main tool in what follows.

<u>3.1. Lemma.</u> Let $f_i : (A_i)^n \longrightarrow A_i$, $i = 1, \dots, m$, be a function such that $\tilde{f} = (f_1, \dots, f_m)$ maps $(A_{1 \dots m})^n$ into $A_{1 \dots m}$. Then there exists $f_0 : (A_0)^n \longrightarrow A_0$ such that $f = (f_0, \tilde{f}) \in T$, i.e. $f(A^n) \subseteq A$.

Proof. Take arbitrary $a_{01}, \dots, a_{0n} \in A_0$ and let Δ_i be a factor subset contained in $A_{1 \dots m}$ and containing the a_{i0}-section of A , $i = 1, \dots, n$. It is easy to see that $\Delta = \tilde{f}(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ is a factor subset contained in $A_{1 \dots m}$, too. Take $b_0 \in A_0$ such that the b_0-section of A contains Δ and define $f_0(a_{01}, \dots, a_{0n}) = b_0$. By this definition the inclusion $f(A^n) \subseteq A$ is straightforward.

Now we prove that Theorem 2.4 holds also for algebra $\mathfrak{A}$ defined in this section. Since the proofs are principally the same, we shall pay attention only to places which do need modification.

Claim 1. Var$\mathfrak{A}$ is CD.

We define the functions t_i , $i = 1,\dots,m$, nearly in the same way as for the first series. The only difference is that now they are $m+2$-ary. For $\tilde{t} = (t_1,\dots,t_m)$ we have the inclusion $\tilde{t}((A_{1\dots m})^{m+2}) \subseteq A_{1\dots m}$. Hence, by Lemma 3.1 there exists $t_o : (A_o)^{m+2} \longrightarrow A_o$ such that $(\tilde{t}_o,\tilde{t}) \in T$. Now define $t_o : (A_o)^{m+2} \longrightarrow A_o$ as follows:

$$t_o(x_1,\dots,x_{m+2}) = \begin{cases} x & \text{if the vectors } (x_1,\dots,x_{m+2}) \text{ and} \\ & (x,x,\dots,x) \text{ are almost equal,} \\ \tilde{t}_o(x_1,\dots,x_{m+2}) & \text{otherwise .} \end{cases}$$

It is easy to understand that $t = (t_o,t_1,\dots,t_m) \in T$. Indeed, let $a_i = (a_{oi},a_{1i},\dots,a_{mi}) \in A$, $i = 1,\dots,m+2$. If $t_o(a_{o1},\dots,a_{o,m+2}) = \tilde{t}_o(a_{o1},\dots,a_{o,m+2})$ then obviously we are done. Otherwise, i.e. if there is $x \in A_o$ such that the vectors $(a_{o1},\dots,a_{o,m+2})$ and $(x,\dots,x)$ almost equal, then

$$t(a_1,\dots,a_{m+2}) =$$
$$(x,t_1(a_{11},\dots,a_{1,m+2}),\dots,t_m(a_{m1},\dots,a_{m,m+2})) .$$

Now, if all the vectors $(a_{j1},\dots,a_{j,m+2})$, $j \geq 1$, are almost constant then $t(a_1,\dots,a_{m+2}) = a_k$ for suitable k and otherwise $t(a_1,\dots,a_{m+2})$ is still obtained from a_k by replacing some of its components a_{jk} by corresponding c_j - s . Hence, $t(a_1,\dots,a_{m+2}) \in A$ again .

Claim 2. The equivalence relations θ are congruences of $\mathfrak{A}$.

Claim 3. For any $J \subseteq \{0,1,\dots,m\}$, the algebra $\mathfrak{A}_J$ is hemiprimal and in particular, the algebras $\mathfrak{A}_i$ are primal.

Let $t = (t_j)_{j\in J}$ be a collection of functions such that $t_j : (A_j)^n \longrightarrow A_j$ and $t((A_J)^n) \subseteq A_J$. We have to define functions $t_i : (A_i)^n \longrightarrow A_i$ for all $i \in \{0,1,\dots,m\}\setminus J$ so that $t = (t_o,t_1,\dots,t_m) \in T$. If $0 \in J$ then we simply define all t_i to be constant: $t_i((A_i)^n) = c_i$. If $0 \notin J$ then we first define again $t_i((A_i)^n) = c_i$ for all $i \notin J$, $i \neq 0$, and obtain in this way $\tilde{t} = (t_1,\dots,t_m)$ such that $\tilde{t}((A_{1\dots m})^n) \subseteq A_{1\dots m}$. Then, using Lemma 3.1 we find $t_o : (A_o)^n \longrightarrow A_o$ such that $t = (t_o,t_1,\dots,t_m) \in T$.

We showed that any function on A_J compatible with kernels of canonical projections is a term function. Obviously this means that all compatible functions are term functions, i.e. $\mathfrak{A}_J$ is hemiprimal. If $J = \{i\}$ then all functions on $\mathfrak{A}_J$ are compatible with kernels of canonical projections, so $\mathfrak{A}_J = \mathfrak{A}_i$ is primal.

Claim 4. The algebra $\mathfrak{A}$ is a subdirect product of algebras $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$.

Claim 5. $\mathrm{Var}\mathfrak{A}$ is affine complete.

The proof is practically the same as that for the first series. The principal difference is in the definition of the function t_0 . It has to be defined as follows. Let the functions $t_1, \ldots, t_m$ be defined already. By Lemma 3.1 there is a function $\tilde{t}_0$ such that $(\tilde{t}_0, t_1, \ldots, t_m) \in T$. Now t_0 is defined by the rule:

$$t_0(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_s) = \begin{cases} f_0(x_1,\ldots,x_n) & \text{if there exists} \\ i \in I_0 & \text{such that} \\ (u_1,\ldots,u_s) = (d_{10},\ldots,d_{s0}) \ ; \\ \tilde{t}_0(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_s) \\ \text{otherwise.} \end{cases}$$

Claim 6. $\mathrm{Var}\mathfrak{A}$ is equivalent to a variety of finite type.

4. Affine complete varieties generated by hemiprimal algebra $\mathfrak{A}$ with $\mathrm{Con}\mathfrak{A} \cong 2^2$ or $\mathrm{Con}\mathfrak{A} \cong 2^3$.

Let $\mathfrak{A}$ be a finite hemiprimal algebra with $\mathrm{Con}\mathfrak{A} \cong 2^2$ such that $\mathrm{Var}\mathfrak{A}$ is affine complete. Then $\mathfrak{A}$ is a subdirect product of simple algebras $\mathfrak{A}_1$ and $\mathfrak{A}_2$. By Proposition 1.4 the algebras $\mathfrak{A}_1$ and $\mathfrak{A}_2$ primal. Applying Lemma 3.2 from [1] we get that there exist $a_1 \in A_1$ and $a_2 \in A_2$ such that $(x,y) \in A$ implies $(a_1,y),(x,a_2) \in A$. Hence A satisfies the i-lifting property for $i = 1, 2$ and therefore the algebra $\mathfrak{A}$ belongs to the first series. We proved

<u>4.1. Theorem.</u> If $\mathfrak{A}$ is a finite hemiprimal algebra generating an affine complete variety and $\mathrm{Con}\mathfrak{A} \cong 2^2$ then $\mathfrak{A}$ belongs to the series of algebras constructed in section 2.

From now on let $\mathfrak{A}$ be a finite hemiprimal algebra with $\mathrm{Con}\mathfrak{A} \cong 2^3$ and $\mathrm{Var}\mathfrak{A}$ affine complete. Applying again Proposition 1.4 we conclude that $\mathfrak{A}$ is a subdirect product of primal algebras $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ and $\mathfrak{A}_3$. We are going to show that $\mathfrak{A}$ belongs to the one of two series of algebras constructed above.

First of all we note that the algebras $\mathfrak{A}_{01}$, $\mathfrak{A}_{02}$, $\mathfrak{A}_{12}$ are hemiprimal (Proposition 1.4) and obviously their congruence lattices are isomorphic to 2^2. From Theorem 4.1 we conclude that the all three algebras belong to our first series and therefore are CD. In particular, there exist $b_1 \in A$ and $b_2 \in A_2$ such that A_{12} has the j-lifting property with respect to b_j, $j = 1, 2$. This means that $(x,y) \in A_{12}$ implies $(b_1,y),(x,b_2) \in A_{12}$. Now we prove some technical lemmas.

<u>4.2. Lemma.</u> If A contains triples (a_0,c_1,c_2) and (a_0,d_1,d_2) such that $(c_1,d_2) \notin A_{12}$ then A satisfies the 0-lifting property.

Proof. Let us enumerate the elements of A_{12} as follows

$$A_{12} = \{(x_{i1},x_{i2}) \mid i = 1,2,\ldots,s\}$$

and let

$$\bar{z}_{jk} = (\underbrace{c_j,\ldots,c_j}_{k-1},d_j,c_j,\ldots,c_j)\ ,$$

$$\mathcal{B}_j = \{\bar{z}_{jk} \mid 1 \le k \le s\} \subseteq (A_j)^s\ ,\quad j = 1,\ 2\ .$$

Now define functions $f_j : (A_j)^s \longrightarrow A_j$, $j = 1, 2$, by the rule

$$f_j(\bar{z}) = \begin{cases} x_{jk} & \text{if } \bar{z} = \bar{z}_k \\ b_j & \text{if } \bar{z} \notin \mathcal{B}_j\ . \end{cases}$$

It is easy to check that then $\bar{f} = (f_1,f_2)$ maps $(A_{12})^s$ into A_{12}. Since $\mathfrak{A}_{12}$ has only trivial congruences, $\bar{f}$ is its compatible function and it has to be a term function. Hence there exists $f_0 : (A_0)^s \longrightarrow A_0$ such that $f = (f_0,f_1,f_2)$ belongs to the type F of the algebra $\mathfrak{A}$. Now it follows from the definition of $\bar{f}$ that $f(A^s)$ contains all triples of the form $(f_0(a_0,\ldots,a_0),x_{1k},x_{2k})$, $1 \le k \le s$. Hence the 0-lifting property is satisfied.

<u>4.3. Lemma.</u> Suppose $\mathfrak{A}$ does not have the 0-lifting property. If $(x,c_1,c_2) \in A$ for all $x \in A_0$ then A_{12} satisfies the j-lifting property with respect to c_j, $j = 1, 2$.

5

Proof. We give the proof only for the case $j = 1$. The other case is similar. Suppose that $(y,c_2) \notin A_{12}$ for some $y \in A_1$. Since A_{12} is a subdirect product in $A_1 \times A_2$, there exists $z \in A_2$ such that $(y,z) \in A_{12}$. But then also there exists $x \in A_0$ such that $(x,y,z) \in A$. By the choice of c_1 and c_2 we also have $(x,c_1,c_2) \in A$. Hence (x,y,z) and (x,c_1,c_2) are in A but $(y,c_2) \notin A_{12}$. By Lemma 4.2 this yields the 0-lifting property for A which contradicts our assumption.

4.4. Lemma. Any factor subset contained in A_{12} has a lift in A.

Proof. Let $c_1 \in A_1$ and $c_2 \in A_2$ be such elements that $(x,c_1,c_2) \in A$ for any $x \in A_0$. Choose $d_j \in A_j$, such that $c_j \neq d_j$, $j = 1, 2$. By Lemma 4.3 then $(c_1,d_2),(c_2,d_1) \in A_{12}$. Obviously there exist $a_0, b_0 \in A_0$ so that (a_0,c_1,d_2) and (b, c, d) are contained in A. Now take a factor subset $\Delta = C_1 \times C_2$ contained in A_{12} and choose an integer n such that $n \geq |C_j|$, $j = 1, 2$. Consider two subsets in $(A_1)^{2n}$ and $(A_2)^{2n}$, correspondingly:

$$\mathcal{B}_1 = \{(\underbrace{c_1,\ldots,c_1}_{n},\underbrace{c_1,\ldots,c_1}_{k-1},d_1,c_1,\ldots,c_1) \mid 1 \leq k \leq n\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{(\underbrace{c_2,\ldots,c_2}_{k-1},d_2,c_2,\ldots,c_2,\underbrace{c_2,\ldots,c_2}_{n}) \mid 1 \leq k \leq n\}.$$

By the choice of n, there exist functions h_j mapping $\mathcal{B}_j$ onto C_j, $j = 1, 2$. Now define functions $f_j : (A_j)^{2n} \longrightarrow A_j$ as follows:

$$f_j(\bar{x}) = \begin{cases} h_j(\bar{x}) & \text{if } \bar{x} \in \mathcal{B}_j, \\ c_j & \text{if } \bar{x} \notin \mathcal{B}_j. \end{cases}$$

Then $\mathcal{F} = (f_1,f_2)$ is a compatible function on A_{12}. Since A_{12} is hemiprimal, $\mathcal{F}$ must be a term function and hence there must exist a $2n$-ary function f_0 on A_0 such that $f = (f_0,f_1,f_2) \in F$. Now consider the set of all elements of the form

$$f((a_0,y_1,z_1),\ldots,(a_0,y_n,z_n),(b_0,y_{n+1},z_{n+1}),\ldots,(b_0,y_{2n},z_{2n}))$$

where

$$y_1 = \ldots = y_n = c_1 \, , \; y_{n+1}, \ldots, y_{2n} \in \{c_1, d_1\} \, ,$$
$$z_1, \ldots, z_n \in \{c_2, d_2\} \, , \; z_{n+1} = \ldots = z_{2n} = d_2 \, .$$

Obviously all these elements are contained in A and have a common component $c_0 = f_0(a_0,\ldots,a_0,b_0,\ldots,b_0)$ in A_0. In particular. from definition of $\mathcal{F}$ it follows easily that the set $\{c_0\}\times\Delta$ is contained among these elements. This proves the Lemma.

4.5. Theorem. If $\mathfrak{A}$ is a finite hemiprimal algebra with $\mathrm{Con}\mathfrak{A} \cong 2^3$ and $\mathrm{Var}\mathfrak{A}$ is affine complete then $\mathfrak{A}$ belongs to the one of two series of algebras constructed in this paper.

Proof. As it was proved above $\mathfrak{A}$ is a subdirect product of primal algebras $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$ and $\mathfrak{A}_2$. By Lemma 3.2 from [1] there exist $c_1 \in A_1$ and $c_2 \in A_2$ such that (x,c_1,c_2) is contained in A for all $x \in A_0$. Then, if A does not have the 0-lifting property, by Lemma 4.3 the following implication is true:

$$(x,c_1,c_2),(x,d_1,d_2) \in A \Rightarrow (c_1,d_2) \in A_{12} \, .$$

This means that the condition (iii) from the definition of the second series is satisfied. From Lemma 4.4 it follows that the condition (iv) is satisfied, too. Hence. it remains to prove that A has the j-lifting property for $j = 1, 2$, too. We give a proof only for the case $j = 1$, the other case is similar.

By Lemma 4.4 we may assume that $A_{02} \neq A_0\times A_2$. Take a pair $(a_0.a_2) \in A_{02}$ and let again $c_1 \in A_1$ and $c_2 \in A_2$ be such elements that $(x,c_1,c_2) \in A$ for all $x \in A_0$. Then, obviously. $(a_0,c_1,c_2) \in A$ and by Lemma 4.3 also (b_0,c_1,a_2) is contained in A. By Lemma 4.2 $(a_0,c_1,a_2),(b_0,c_1,a_2) \in A$ and $(a_0.a_2) \in A_{02}$ yield the 1-lifting property for A. This proves the Theorem.

5. Examples.

All examples of algebras considered here have the form $\mathfrak{A} = (A,T)$ where A is a subset in the direct product of certain sets A_i and T consists of all finitary functions on A compatible with projection kernels.

5.1. $A = A_1 \times \ldots \times A_m$ and $A_1, \ldots, A_m$ are arbitrary finite sets with at least 2 elements. This is an extremal case, belonging to the first series. The algebras $\mathfrak{A}$ obtained in this way are direct products of independent primal algebras $\mathfrak{A}_i$, $i = 1,\ldots,m$, and hence they generate arithmetical varieties. It can be easily verified that these are the only algebras constructed in this paper and generating arithmetical varieties.

5.2. $A_1 = A_2 = \{0,1\}$, $A = \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$. We get again an algebra belonging to the first series. It is exactly the algebra presented in example 2.2 of [2].

5.3. $A_0 = A_1 = A_2 = \{0,1\}$, $A = \{(0,0,0),(0,0,1),(1,0,0),(1,1,0)\}$. The algebra $\mathfrak{A}$ obtained in this way does not belong to the first series but does belong to the second one.

5.4. $A_1 = A_2 = \{0,1,2\}$, $A = \{(0,1),(0,2),(1,1),(1,0),(2,0)\}$. We shall prove that now $\mathrm{Var}\mathfrak{A}$ is not affine complete though $\mathfrak{A}$ is hemiprimal and $\mathrm{Var}\mathfrak{A}$ is CD.

Let f be a ternary majority function on A_1 such that $f(x,y,z) = 1$ whenever $|\{x,y,z\}| = 3$. We show that (f,f) is contained in T and hence $\mathrm{Var}\mathfrak{A}$ is CD. Take arbitrary $(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2) \in A$ and let $(d_1,d_2) = (f(a_1,b_1,c_1), (f(a_2,b_2,c_2))$. We have to show that $(d_1,d_2) \in A$. If both $\{a_1,b_1,c_1\}$ and $\{a_2,b_2,c_2\}$ have less than three elements, i.e. we can apply in both cases the majority property of f then (d_1,d_2) equals to the one of given pairs (a_1,a_2), (b_1,b_2), (c_1,c_2) and hence is contained in A. If both $\{a_1,b_1,c_1\}$ and $\{a_2,b_2,c_2\}$ have exactly three elements then $(d_1,d_2) = (1,1) \in A$. It remains to consider the case

$$|\{a_1,b_1,c_1\}| < 3 \quad \text{and} \quad |\{a_2,b_2,c_2\}| = 3$$

(the opposite one is similar). Assume without loss of generality that $(a_2,b_2,c_2) = (0,1,2)$. Now $d_2 = 1$, $c_1 = 0$ and if $(d_1,d_2) \notin A$ then $d_1 = 2$ implying $a_1 = b_1 = 2$. But then $(b_1,b_2) = (2,1) \notin A$, a contradiction.

Let us show that $\mathfrak{A}_1$ is simple (similarly one can show that $\mathfrak{A}_2$ is simple, too). First consider the pair of functions (f_1,f_2) defined by $f_1(0) = f_1(1) = 0$, $f_1(2) = 1$ and

$f_2(\{0,1,2\}) = 1$. Obviously $(f_1, f_2) \in T$ and therefore f_1 is a term function on $\mathfrak{A}_1$. This shows that the subsets $\{1,2\}$ and $\{0,2\}$ cannot be congruence classes of $\mathfrak{A}_1$. Similarly, another pair of functions $g_1(0) = 1$, $g_1(1) = g_1(2) = 2$, $g_2(\{0,1,2\}) = 0$ shows that the subset $\{0,1\}$ cannot be a congruence class of $\mathfrak{A}_1$.

Suppose now that Var$\mathfrak{A}$ is affine complete. Then, by Corollary 1.6, $\mathfrak{A}_1$ has to be primal. Hence, by Lemma 3.2 of [1] there must exist $b \in A_2$ such that all elements (a,b) with $a \in A_1$ are contained in A . However this contradicts the definition of A .

References

1. K a a r l i K. On varieties generated by functionally complete algebras // Submitted in Algebra Universalis.
2. K a a r l i K., P i x l e y A. Affine complete varieties // Algebra Universalis.- 1987.- Vol. 20.- P.- 74-90.
3. M i t s c h k e A. Near unanimity identities and congruence distributivity of equational classes // Algebra Universalis.-1978.- Vol. 8.- P. 29-32.
4. P i x l e y A. Completeness in arithmetical algebras // Algebra Universalis.- 1972.- Vol. 2.- P. 179-198.

Received
16 X 1989

AFIINSELT TÄIELIKEST MUUTKONDADEST, MIS ON TEKITATUD BOOLE'I KONGRUENTSIDE VÕREGA HEMIPRIMAALSETE ALGEBRATE POOLT

K.Kaarli

R e s ü m e e

Käesolevas artiklis konstrueeritakse kaks lõplike hemiprimaalsete algebrate seeriat, mille kongruentsid moodustavad Boole'i võre ja mis tekitavad afiinselt täieliku muutkonna. Samuti näidatakse, et kui lõpliku hemiprimaalse algebra kongruentside võre on isomorfne võrega 2^2 või võrega 2^3 ja see algebra tekitab afiinselt täieliku muutkonna, siis see algebra kuulub ühte neist kahest seeriast.

ОБ АФФИННО ПОЛНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ ХЕМИПРИМАЛЬНЫМИ АЛГЕБРАМИ С БУЛЕВОЙ РЕШЕТКОЙ КОНГРУЭНЦИЙ

К. Каарли

Р е з ю м е

В настоящей работе строятся две серии конечных хемипримальных алгебр с булевыми решетками конгруэнций, которые порождают аффинно полные многообразия. Также доказывается, что каждая конечная хемипримальная алгебра, решетка конгруэнций которой изоморфна решетке 2^2 или решетке 2^3, обязательно принадлежит одной из этих двух серий, если только она порождает аффинно полное многообразие.

Acta et commentationes universitatis Tartuensis, 878 , 1990, 39-52.

ПЕРЕБРАСЫВАЕМЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ

У.Кальюлайд

Кафедра алгебры и геометрии

Данная статья преследует двоякую цель.

Во-первых, здесь дается развернутое изложение некоторых рассуждений работы [14] - с целью использовать это как базисный материал для ссылок в дальнейших публикациях автора по полугрупповым кольцам. Во-вторых, будут указаны некоторые новые приложения понятия перебрасываемости элементов кольца. В частности, описание С.Миховским [7] строго регулярных групповых колец здесь получено как следствие теоремы П.Менала, [14]. При этом важно подчеркнуть: ответ на вопрос о том, будет ли данное групповое кольцо $k[G]$ дуокольцом или нет - зависит не только от теоретико-группового строения группы G и характеристики поля k, но также и от других арифметических и алгебраических обстоятельств. Примеры такого рода в теории групповых колец не очень многочисленны.

§ 1. Предварительные результаты

1. Пусть R - ассоциативное кольцо с единицей. Элемент $x \in R$ называется справа (слева) R-перебрасываемым, если $Rx \subseteq xR$ $(xR \subseteq Rx)$. Если перебрасываемы справа (слева) все элементы из R, то кольцо R называется правым (левым) дуокольцом (также субкоммутативным справа (слева) кольцом). Кольцо, одновременно являющееся правым и левым дуокольцом, называется дуокольцом (также субкоммутативным кольцом).

Это понятие введено Феллером [12] в 1958 г., потом это изучали Барбилиан, Кох, Куртер и др. Перебрасываемые элементы полугрупп и колец появляются и у Кона [11]. При этом, в изучении арифметики некоммутативных колец особо важны те перебрасываемые элементы, что не являются делителями нуля в R - они называются инвариантными элементами кольца

R. Такие элементы образуют полугруппу, которую обозначим $\mathcal{I}(R)$.

2. Заметим, что в правом дуокольце всякий правый идеал будет двусторонним. Действительно, пусть $\mathcal{J} \leqslant R$ - правый идеал в правом дуокольце R. Тогда для всех $i \in \mathcal{J}$, $r \in R$ существует такой $r' \in R$, что $ri = ir'$ и поэтому $ri \in \mathcal{J}$. Это показывает, что $\mathcal{J}$ - левый идеал в R. Аналогично, в левом дуокольце всякий левый идеал будет двусторонним. Следовательно, в дуокольце все идеалы являются двусторонними. Верно и обратное - если в некотором кольце R с единицей всякий правый (левый) идеал будет двусторонним, то такое кольцо будет правым (левым) дуокольцом. Действительно, если например в кольце R всякий правый идеал двусторонний, то таковым будет, в частности, главный правый xR для всякого элемента $x \in R$, т.е. $R \cdot xR \subseteq xR$, откуда следует $Rx \subseteq Rx \cdot R \subseteq xR$. Следовательно, $Rx \subseteq xR$ имеет место для всех $x \in R$. Таким же образом рассуждаем в "левом" случае.

В результате приходим к выводу, что правое (левое) дуокольцо можно определить как ассоциативное кольцо с единицей, в котором каждый правый (левый) идеал является двусторонним. Именно так определяет эти кольца Кох.

3. В том случае, когда R - групповое кольцо группы G над полем k, отметим два важных момента.

Во-первых, если $R = k[G]$ будет правым дуокольцом, то оно будет одновременно и левым дуокольцом и наоборот. Для доказательства можно воспользоваться антиизоморфизмом $*$ кольца R, $(\sum_g x_g g)^* = \sum_g x_g g^{-1}$: например, при $xR \subseteq Rx$ имеются соотношения вида $xy = y' \cdot x$, откуда следует $y^* \cdot x^* = x^* \cdot (y')^*$. Если учесть, что y^* пробегает всё $k[G]$ в то же время, когда y пробегает всё $k[G]$, то выводим $Rx^* \subseteq x^*R$. Аналогично доказывается импликация $Rx \subseteq xR \Rightarrow x^*R \subseteq Rx^*$. Таким образом, для групповых колец понятия левого и правого дуокольца неразличимы. И в то же время, имеются левые дуокольца, не являющиеся правыми и наоборот, даже среди конечномерных k-алгебр - соответствующие примеры приводит Р.Куртер (1982).

Во-вторых, если дуокольцами являются групповые кольца $k[H]$ для всех конечнопорожденных подгрупп H, $H \leqslant G$, то таково же и кольцо $k[G]$. Действительно, возьмем произвольные элементы $x = \sum_{g \in G} x_g g$ и $y = \sum_h y_h h$ из $k[G]$.

Рассмотрим подгруппу $H \doteq \langle Supp\, x \cup Supp\, y \rangle$; она конечнопорождена. Согласно условию, кольцо $k[H]$ субкоммутативно. Поэтому для элементов x и y в нём существует такой $y' \in k[H]$, что $xy = y'x$. Отсюда следует, что субкоммутативно и кольцо $k[G]$. Верно и обратное: если $k[G]$ субкоммутативно, то таково же и подкольцо $k[H]$ для всех конечнопорожденных подгрупп H, $H \leqslant G$. Чтобы доказать это утверждение, фиксируем полную систему представителей $\mathcal{T} = \{t_i \mid i \in I\}$ для разложения $G = \bigcup_{t \in \mathcal{T}} tH$ группы G в смежные классы по H; считаем здесь $t_0 = 1$. Это позволяет рассматривать $k[G]$ как правый $k[H]$-модуль с базой $\mathcal{T}$; поэтому всякий элемент z из $k[G]$ однозначно представляется в виде $\sum_i t_i z_i$, $z_i \in k[H]$. Для любых x и y из $k[H]$ существует (ввиду субкоммутативности $k[G]$) такой элемент $y' = \sum t_i y_i$, $y_i \in k[H]$, что $xy = y' \cdot x = (\sum_i t_i y_i) \cdot x = \sum_i t_i (y_i x)$. Заметим, что xy и все элементы $y_i x$ лежат в $k[H]$, а элементы t_i, $i \in I$, образуют базис $k[H]$-модуля $k[G]$. Поэтому $xy = \sum_i t_i (y_i x)$ влечет равенство нулю коэффициентов при всех t_i $(i \neq 0)$. Таким образом, $xy = y_0 x$, $y_0 \in k[H]$. Это рассуждение показывает, что $k[H]$ субкоммутативно.

4. Рассмотрим групповое кольцо $R = k[G]$ неабелевой группы G над полем k, являющееся дуокольцом. В дуокольце все идеалы - двусторонние. Следовательно, это же верно для всех (правых) идеалов группового кольца R вида ωH, $H \leqslant G$, порожденных всеми $h - 1$, $h \in H$. Из этого следует инвариантность всех подгрупп H в G:

$$\forall g \in G, h \in H, \ 1 - g^{-1}hg = g^{-1}(1-h)g \in \omega H \Rightarrow g^{-1}hg \in H.$$

Неабелевы группы, в которых инвариантны все подгруппы, называются гамильтоновыми и их строение известно: G будет локально конечной группой, являющейся прямым произведением группы V кватернионов 8-го порядка, абелевой группы E экспонента 2 и абелевой группы A_1, все элементы которой имеют нечётные порядки; [8], стр. 213.

Следовательно, можно предполагать, что $G = A \times V$, где A - весь абелев прямой множитель и V - группа кватернионов,

$$V \doteq \langle a, b \mid a^4 = 1,\ a^2 = b^2,\ ba = a^{-1}b \rangle.$$

5. Оказывается, в случае $\operatorname{char} k \neq 2$ групповая алгебра $k[V]$ распадается в прямую композицию двух подко-

лец $k[V] = P(k) \oplus V(k)$, где $P = P(k) = k \oplus k \oplus k \oplus k$ - прямая композиция четырёх полей, изоморфных k, а $V(k)$ - алгебра кватернионов относительно пары (-I, -I) над полем k; [I], стр. 300. Непосредственно из определений следует, что $P \oplus V(k)$ субкоммутативно в точности тогда, когда $V(k)$ субкоммутативно – ибо P коммутативно как прямая композиция полей. В то же время имеет место следующая альтернатива: если $\operatorname{char} k \neq 2$, то алгебра $V(k)$ либо является телом (для этого необходимо и достаточно, чтобы форма $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ не представляла (нетривиально) нуля в поле k), либо $V(k) \cong M_2(k)$; [I], стр. 267. Заметим, что в любом теле для любых двух ненулевых элементов x и y имеем $x \cdot y = y \cdot y^{-1} x y$ и $x \cdot y = xyx^{-1} \cdot x$, а в алгебре $M_2(k)$ все матрицы вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ образуют левый, но не правый, идеал. Это рассуждение показывает, что тело субкоммутативно, а $M_2(k)$ - нет.

6. Из сказанного в предыдущем пункте видно, что на обилие перебрасываемых элементов в групповом кольце $k[G]$ влияют не только строение группы G и $\operatorname{char} k$, но и некоторые другие арифметические и алгебраические обстоятельства для k и G. Опираясь на указанную в пункте 5 альтернативу, добавим еще один пример.

То, что $V(k)$ - тело при $k = \mathbb{Q}$ - общеизвестный факт. Однако, уже в случае $k = \mathbb{Q}(i)$ имеется нетривиальное представление нуля $0 = 1^2 + i^2 + 0^2 + 0^2$ в $\mathbb{Q}(i)$. Следовательно, $V(\mathbb{Q}(i))$ - не тело. Но тогда, согласно альтернативе, имеем $V(\mathbb{Q}(i)) \cong M_2(\mathbb{Q}(i))$, т.е. $V(\mathbb{Q}(i))$ дуокольцом не является.

7. Поле k, $\operatorname{char} k = p > 2$, содержит простое подполе $\mathbb{Z}_p$. Если $k[G]$ является дуокольцом, то ввиду соотношения

$$k[G] \cong k \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[G]$$

дуокольцом должно быть также $\mathbb{Z}_p[G]$, что в свою очередь влечёт субкоммутативность кольца $V(\mathbb{Z}_p)$ ввиду соотношения

$$\mathbb{Z}_p[G] \cong P(\mathbb{Z}_p) \oplus V(\mathbb{Z}_p).$$

Следовательно, препятствием субкоммутативности кольца $k[G]$ служит выполнение условия, при котором $V(\mathbb{Z}_p)$ дуокольцом не является. Выше было отмечено, что при $p \neq 2$ таким условием является представимость нуля в $\mathbb{Z}_p$ формой $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Из известной в теории чисел теоремы Лагранжа следует, что всякое (простое) число $p>2$ имеет целочисленное представление $p=c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2$; при этом ясно, что не все соотношения $c_i \equiv 0 \pmod p$, $i \in \{0,1,2,3\}$, выполняются. Другими словами, в $\mathbb{Z}_p$ элемент $\bar{0}$ формой $x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2$ представляется нетривиально: $\bar{0}=\bar{c}_0^2+\bar{c}_1^2+\bar{c}_2^2+\bar{c}_3^2$, причём существует i , что $\bar{c}_i \neq \bar{0}$.

В итоге доказано, что групповые кольца $k[G]$ при $\mathrm{char}\, k \notin \{0,2\}$ не могут быть дуокольцами.

§ 2. Теорема Менала - случай нулевой характеристики

8. Из результатов П.Менала [I4] вытекает описание субкоммутативных групповых колец над полями. Оно может быть сформулировано в виде следующей теоремы.

Теорема I. Пусть k - поле и G - неабелева группа. Групповое кольцо $k[G]$ будет дуокольцом в точности тогда, когда выполнено одно из следующих двух условий:

(I) $\mathrm{char}\, k=0$, G - гамильтонова группа, $G=E\times A_1\times V$ и для всякого нечётного n , являющегося порядком некоторого $x\in A_1$, алгебра кватернионов $V(k(\xi_n))$ является телом; здесь ξ_n - примитивный корень n-ой степени из единицы над k .

(2) $\mathrm{char}\, k=2$ и G - гамильтонова группа вида $G=A_1\times V$, где A_1 - абелева группа, все элементы которой имеют нечётный порядок, а поле k и все поля $k(\xi_n)$ не содержат примитивного кубического корня из единицы; здесь ξ_n - примитивный корень n-ой степени из единицы над k , при $n=o(x)$ для элементов $x\in A_1$.

Достаточно детальное и по возможности замкнутое доказательство этой теоремы дается ниже для полей k характеристики 0 . Случай поля характеристики 2 содержится в последующей публикации автора на эту тему. Впервые теорема I доказана в [I4] .

9. Необходимость. Пусть $\mathrm{char}\, k=0$. Допустим, что $k[G]$ субкоммутативно. Тогда группа G гамильтонова и для всякой конечнопорожденной подгруппы $H\leqslant G$ субкоммутативным будет кольцо $k[H]$. Рассмотрим здесь подгруппы вида $H=\langle x\rangle\times V$, $x\in A_1$; обозначим $n=o(x)$. Согласно Дескинсу & др. (см. [I7] , стр. 48),

$$k[\langle x\rangle] \cong \bigoplus_{d|n} k(\xi_d),$$

где ξ_d есть примитивный корень d-ой степени из единицы. Поэтому имеем

$$k[\langle x\rangle \times V] \cong k[\langle x\rangle] \otimes_k k[V] \cong$$
$$\cong [\bigoplus_{d/n} k(\xi_d)] \otimes_k [(k\oplus k\oplus k\oplus k)\oplus V(k)] =$$
$$= \ldots \oplus (k(\xi_d)\otimes_k V(k))\oplus \ldots = \ldots \oplus V(k(\xi_d))\oplus \ldots$$

Субкоммутативность кольца $k[\langle x\rangle \times V]$ влечет субкоммутативность множителей $V(k(\xi_d))$ прямой композиции при всех d, $d/\sigma(x)$, $x\in A_1$. В частности, это значит, что все алгебры $V(k(\xi_n))$, $n=\sigma(x)$, $x\in A_1$, являются телами.

10. Перед тем, как привести доказательство достаточности условия (I), напомним один необходимый в дальнейшем факт о групповых кольцах абелевых групп. Именно, пусть k - поле характеристики $\neq 2$ и $C_2=\langle t \mid t^2=1\rangle$ - циклическая группа 2-го порядка. Верны соотношения: (I) $k[C_2]\cong$ $\cong k\oplus k$; (2) $k[C_2\times C_2]\cong k\oplus k\oplus k\oplus k$, и обще, для элементарной абелевой 2-группы $E^*=C_2\times\ldots\times C_2$ верно $k[E^*]\cong \underbrace{k\oplus\ldots\oplus k}_{2^m \text{ раз}}$. Действительно, (I): в групповом кольце $k[C_2]$ элементы $\frac{1}{2}(1-t)$ и $\frac{1}{2}(1+t)$ являются ортогональными идемпотентами. Следовательно, $k[C_2]\cong$ $\cong \frac{1}{2}(1-t)\cdot k[C_2]\oplus \frac{1}{2}(1+t)k[C_2]$. Остается заметить, что отображения соответственно первого и второго множителя рассматриваемой прямой композиции на кольцо k, задаваемые формулами, соответственно, $\frac{1}{2}(1+t)(\alpha+\beta t)\mapsto \alpha+\beta$ и $\frac{1}{2}(1-t)(\alpha+\beta t)\mapsto \alpha-\beta$, являются изоморфизмами (колец).

(2) Заметим, что рассуждением (I) выводится также $k[C_2\times C_2]=k[C_2][C_2]\cong k[C_2]\oplus k[C_2]\cong$ $\cong (k\oplus k)\oplus(k\oplus k)=k\oplus k\oplus k\oplus k$. Продолжая подобное рассуждение, выводим и общий случай.

11. <u>Достаточность</u>. Пусть $\operatorname{char} k=0$. Допустим, что k и G удовлетворяют условиям (I). Это означает, что G - гамильтонова группа, $G=E\times A_1\times V$, и все алгебры $V(k(\xi_n))$, $n=\sigma(x)$, $x\in A_1$ являются телами. Покажем, что $k[G]$ является дуокольцом.

Для этого достаточно проверить, что дуокольцами являются групповые кольца (над k) всех неабелевых конечнопорожденных подгрупп в G. Но всякая такая подгруппа в G является конечной, имеет вид $\langle V, c_1,\ldots, c_k\rangle$ с элементами $c_1, \dots, c_K$ из централизатора подгруппы V. Такая подгруппа может быть представлена в том же виде, что и G, $\langle V, c_1, \dots, c_K \rangle = E^* \times A_1^* \times V$, где E^* - элементарная абелева 2-группа, а A_1^* - конечная абелева группа нечётного порядка; [8], стр. 215. Заметим также, что для прямой композиции коммутативных колец $K = K_1 \oplus K_2$ и произвольной группы G имеем

$$K[G] \cong K_1[G] \oplus K_2[G],$$

ибо отображение

$$\sum_i (z_1^{(i)}, z_2^{(i)}) g_i \longmapsto \Big(\sum_i z_1^{(i)} g_i, \sum_i z_2^{(i)} g_i\Big)$$

задает указанный изоморфизм.

Имеем

$$k[E^* \times A_1^* \times V] \cong k[E^*][A_1^* \times V] \cong$$
$$\cong \underbrace{(k \oplus \dots \oplus k)}_{2^n \text{ раз}}[A_1^* \times V] \cong \underbrace{k[A_1^* \times V] \oplus \dots \oplus k[A_1^* \times V]}_{2^n \text{ раз}}$$

Следовательно, для субкоммутативности кольца $k[E^* \times A_1^* \times V]$ как прямой композиции достаточна субкоммутативность прямого множителя $k[A_1^* \times V]$. Имеем

$$k[A_1^* \times V] \cong k[A_1^*] \otimes_k k[V] \cong k[A_1] \otimes_k (k \oplus k \oplus k \oplus k \oplus V(k))$$
$$\cong (k[A_1^*] \otimes_k k) \oplus \dots \oplus (k[A_1^*] \otimes_k k) \oplus (k[A_1^*] \otimes_k V(k)) \cong$$
$$\cong k[A_1^*] \oplus \dots \oplus k[A_1^*] \oplus ((\oplus_d m_d k(\xi_d)) \otimes_k V(k)) \cong$$
$$\cong k[A_1^*] \oplus \dots \oplus k[A_1^*] \oplus (\dots \oplus V(k(\xi_d)) \oplus \dots).$$

В этих вычислениях использовался результат Дескинса & др. (см. [17], стр. 48): имеется изоморфизм колец $k[A_1^*] \cong \oplus_d m_d k(\xi_d)$; в этой формуле ξ_d есть примитивный корень d-ой степени из единицы, число $m_d \cdot [k(\xi_d) : k]$ указывает число элементов порядка d в A_1^*, а $m_d k(\xi_d)$ обозначает прямую композицию m_d экземпляров кольца $k(\xi_d)$. В полученной в итоге этих вычислений прямой композиции колец первые четыре сомножителя - абелевы, а последующие множители $V(k(\xi_d))$ - тела ввиду выполнения условий (I) теоремы I, и тем самым они также будут дуокольцами. Но тогда дуокольцом является и вся прямая композиция $k[E^* \times A_1^* \times V]$, откуда ввиду второго замечания пункта 3 следует субкоммутативность всего кольца $k[G]$.

Этими рассуждениями теорема I доказана в случае полей k нулевой характеристики.

§ 3. Перебрасываемые элементы в регулярных кольцах

12. Напомним, что ассоциативное кольцо R называется строго регулярным, если для всех $a\in R$ существует $x\in R$, что $a=a^2x$. Характеризацией таких колец занимались Андрунакиевич (1964), Лух (1964), Шайн (1966), Лайош-Сас (1970) и др.

Нетрудно понять, что строго регулярное кольцо не содержит нильпотентных элементов, а поэтому регулярно. То, что эти последние два условия равносильны строгой регулярности кольца, есть содержание теоремы Форсайта - Маккоя: регулярное кольцо без нильпотентных элементов является строго регулярным. Добавим, что в силу нижеследующей леммы (см. пункт 13) для доказательства этой теоремы достаточно проверить, что регулярное кольцо R без нильпотентных элементов является дуокольцом. Последнее утверждение можно доказать следующим рассуждением. Пусть $a\in R$; существует $b\in R$, что $a=aba$. Обозначим $e=ab$; проверяется непосредственно, что для любого $r\in R$, $0=(er-ere)^2$, откуда следует $er=ere$. Аналогично выводится $re=ere$ и в результате имеем $eR=Re$. С другой стороны, можно доказать $aR=eR$ и $Ra=Re$. Следовательно, $aR=Ra$ для любого $a\in R$.

13. <u>Лемма</u>. Строго регулярное кольцо является регулярным дуокольцом и наоборот.

<u>Доказательство</u>. Если кольцо R строго регулярно, то (согласно [9], теоремы 3.2 и 3.4) оно является регулярным и субкоммутативным. Наоборот, если R - регулярное дуокольцо, то для любого $a\in R$ существует $y\in R$, что $a=aya$ и $x\in R$, что $ya=ax$. Теперь имеем $a=$
$= a(ya)=a(ax)=a^2x.$

14. В работе [13] Лайоша - Саса доказана теорема: ассоциативное кольцо строго регулярна в точности тогда, когда мультипликативная полугруппа этого кольца является полуструктурой групп.

Совсем просто доказывается (следуя [13]), что ассоциативное кольцо R, мультипликативная полугруппа S которого - полуструктура групп, является строго регулярным. Обратное утверждение доказывается в [13] с помощью довольно длинной цепи проверок и вычислений. П о к а ж е м , что этот результат легко следует из общеизвестных фактов о полугруппах.

Пусть R строго регулярно. Из определений и леммы вытекает, что мультипликативная полугруппа S кольца R является регулярной и субкоммутативной полугруппой. В субкоммутативной полугруппе коммутируются любые два идемпотента. Действительно, для идемпотентов $e, f \in S$ существуют в S элементы f' и f'', что $ef = f'e$ и $ef'' = fe$, откуда следуют $ef = f'e = efe$ и $efe = ef'' = fe$. Выводим $ef = efe = fe$. Следовательно, S является регулярной полугруппой, в которой коммутируются любые два идемпотента. Такая полугруппа S, однако, инверсна ([6], стр. 50, теор. I.17). Кроме того, в субкоммутативной полугруппе S каждый идеал является двусторонним. Одновременное выполнение этих последних двух условий влечёт, что S является полуструктурой групп (см. [6], т. I, стр. 173, упр. 2).

15. В работе [7] С.Миховски содержится следующее о п и с а н и е строго регулярных групповых колец: групповое кольцо $k[G]$ строго регулярно в точности тогда, когда выполнено условие (I) теоремы I. Укажем новый путь для вывода этого результата, основанный на сформулированных выше лемме и теореме Менала.

С л у ч а й $\operatorname{char} k = 0$. Если $k[G]$ строго регулярно, то оно субкоммутативно. Условие (I) вытекает из теоремы I. Обратно, пусть условие (I) теоремы I выполнено. Тогда $k[G]$ является дуокольцом. Согласно критерию регулярности (групповое кольцо $k[G]$ регулярно в точности тогда, когда R регулярно, G локально конечна и порядок всех элементов из G обратим в R ; см. [16], стр. 141, теорема 18) $k[G]$ является также регулярным кольцом. Действительно, этот критерий применим, ибо группа G, будучи гамильтоновой, является локально конечной и порядки всех её элементов обратимы в поле k.

С л у ч а й $\operatorname{char} k = 2$. Рассуждая от противного, докажем, что в рассматриваемом случае строго регулярных групповых колец нет. Допустим, что $k[G]$ строго регулярно. Лемма (из пункта 13) дает, что это кольцо субкоммутативно и регулярно. Первое влечет (согласно условию (2) в теореме I), что группа G представляется в виде прямого произведения абелевой группы A, каждый элемент которой имеет нечётный порядок, и группы кватернионов V. Второй вывод в лемме означает, что кольцо $k[G]=k[A\times V]\cong$ $\cong k[A][V]$ регулярно. Согласно цитированному выше критерию регулярности $k[A]$ должно быть регулярным (что в рассматриваемом случае действительно так) и порядки всех элементов из V должны быть обратимы в $k[A]$. Однако, последнее не так: 2 и 4 необратимы в $k[A]$ ввиду $\mathrm{char}\, k=2$. Противоречие.

В случае $\mathrm{char}\, k>2$ также нет строго регулярных групповых колец, ибо по теореме Менала нет в этом случае даже дуоколец $k[G]$. Эти рассуждения доказывают теорему Миховски.

§ 4. Об одном кольце без нетривиальных перебрасываемых элементов.

I6. До сих пор рассматривались кольца, богатые относительно перебрасываемых элементов - дуокольца. Рассмотрим теперь противоположный случай - кольцо без нетривиальных перебрасываемых элементов.

Пусть k - поле, а F - свободный моноид с элементами счётного множества $X=\{x_1,x_2,\dots\}$ в качестве системы свободных образующих. Полугрупповое кольцо $k[F]$ делителей нуля не содержит, а поэтому все перебрасываемые элементы кольца $k[F]$ являются инвариантными. Однако, в работе [I0] Бергмана - Левина отмечается, что полугрупповое кольцо $k[F]$ является левым и правым FI-кольцом без нетривиальных инвариантных справа элементов. Для этого кольца $k[F]$ верна

<u>Теорема 2.</u> Полугруппа собственных специальных идеалов кольца $k[F]$ свободна.

<u>Доказательство</u>. Согласно теореме 5 из [I0], полугруппа $\mathcal{R}$ всех ненулевых двусторонних идеалов кольца R свободна с множеством всех неразложимых собственных идеалов кольца $R=k[F]$ в качестве системы свободных образующих. Далее заметим, что произведение собственных специальных идеалов кольца R будет снова собственным специальным идеалом в R и этим в $\mathcal{R}$ выделяется подполугруппа γ таких идеалов. Теорема будет доказана, если для любых идеалов A и B из $\mathcal{R}$ таких, что $AB\in\gamma$, мы покажем $A\in\gamma$ и $B\in\gamma$. Это последнее утверждение и будем доказывать.

Заметим, что из однозначности разложения идеала $A\in\gamma$

на неразложимые множители вытекает инвариантность всех этих множителей относительно всякого специального автоморфизма кольца R. Название "специальные" носят те автоморфизмы (эндоморфизмы) кольца R, которые индуцированы автоморфизмами (эндоморфизмами) моноида F.

Далее, удобно ввести следующее понятие. Эндоморфизм кольца R назовем особым, если он индуцирован таким эндоморфизмом η моноида F, что $X \subset X^{\eta}$. Покажем, что для любого особого эндоморфизма $\eta : R \to R$ имеем $A \subset A^{\eta}$. Действительно, пусть u – любой элемент в A, а подмножество $S=\{x_1,\dots,x_n\} \subset X$ такое, что $u \in k[x_1,\dots,x_n]$. В силу особости η существуют такие $x_{i'} \in X$, что $x_{i'}^{\eta} = x_i$, $i \in n$. Рассмотрим подстановку γ на X такую, что $x_i^{\gamma} = x_{i'}$, $i \in n$, и продолжим ее до автоморфизма R. Ясно, что γ является специальным автоморфизмом R и согласно сделанному выше замечанию имеем поэтому $A^{\gamma} = A$. По нашей конструкции $u = u^{\gamma\eta}$; следовательно, $u = u^{\gamma\eta} \in A^{\gamma\eta} = A^{\eta}$. Этим $A \subset A^{\eta}$ доказано.

Завершаем теперь доказательство основного утверждения. Из особости η и специальности идеала AB вытекает

$$AB \supset (AB)^{\eta} = A^{\eta}B^{\eta} \supset A^{\eta}B \supset AB,$$

а тем самым и соотношение $AB = A^{\eta}B$. Особость η влечёт также $R^{\eta} = R$. Поэтому A^{η} – идеал в R, и теперь из свободы полугруппы $\mathcal{R}$ следует, в частности, что $A = A^{\eta}$. Далее, пусть μ – любой специальный эндоморфизм кольца R. Для всякого $u \in A$ можно построить особый эндоморфизм $\eta : R \to R$, совпадающий с μ на элементе u. Действительно, для всех $x_i \in S$ полагаем $x_i\eta = x_i\mu \in F$, а на дополнении $X \setminus S$ определяем η как произвольную сюръекцию $X \setminus S \twoheadrightarrow X$. Полученное таким образом отображение $\eta : X \to F$ продолжим до специального эндоморфизма $\eta : R \to R$, который будет особым по построению. Имеем $u^{\mu} = u^{\eta} \in A^{\eta} = A$, что доказывает специальность идеала A.

Аналогично доказывается специальность B. Теорема 2 доказана.

Добавим, что теорема 2 допускает иную формулировку – как утверждение о свободе полугруппы многообразий представлений (над полем k) полугрупп, и в этом виде была доказана с помощью техники треугольных произведений; [5].

17. Изложенные выше рассуждения приводят к з а д а ч е : описать все субкоммутативные косые групповые кольца* $k \triangleleft G$. Интересна и более простая з а д а ч а описания субкоммутативных скрещенных групповых колец ** ; см. определения в [15]. В этой связи было бы интересно знать ответ на в о п р о с : Каков критерий регулярности косого группового кольца $K \triangleleft G$ при K - коммутативное кольцо, а G - группа? Рискнем спросить, имеется ли нечто (и что именно?) в роли альтернативы, описанной в пункте 5, для $k \triangle V$; для $k^t[V]$?

Ставим также в о п р о с об описании субкоммутативных полугрупповых колец $k[S]$. К этой теме автор намерен вернуться в одной из последующих публикаций.

Заметим, что свойство субкоммутативности сохраняется при эпиморфизмах колец. Таким образом, для всех неабелевых групп G групповое кольце $\mathbb{Z}[G]$ субкоммутативным не является, ибо допускает эпиморфизм на групповое кольцо $\mathbb{Z}_p[G], p \neq 2$. Поэтому возникает естественная з а д а ч а описания полугруппы перебрасываемых элементов кольца $\mathbb{Z}[G]$, и обще - групповых колец $K[G]$, где K - любая область. Добавим, что такая задача ставилась уже для $V(\mathbb{Z})$; см. [11], стр. 155. Интересен здесь вопрос о том, как именно зависит субкоммутативность кольца $K[G]$ от других арифметических и алгебраических обстоятельств, помимо несуществования "плохих редукций" $K \to k$, где k - поле с $\operatorname{char} k \neq 0, 2$.

Литература

1. Б у р б а к и Н. Алгебра (алгебраические структуры). - Москва, 1962.
2. К а л ь ю л а й д У. Э. К двум результатам о строго регулярных кольцах // Конф. "Теорет. и прикл. вопросы математики", Тарту: Тез. докл. - 1985. - С. 67-69.
3. К а л ь ю л а й д У. Э. О свободе полугруппы специальных идеалов // Конф. "Методы алгебры и анализа", Тарту: Тез. докл. - 1983. - С. 10-12.

---

* Skew group rings (- the twisting is trivial);

** twisted group rings (- the action is trivial).

4. К а л ь ю л а й д У. Э. Замечание о субкоммутативных кольцах // XVIII Всесоюзная алгебраическая конференция, Кишинев : Тез. сообщ. - 1985. - С. 227.

5. К а л ь ю л а й д У. Э. Треугольные произведения представлений полугрупп и ассоциативных алгебр // Успехи матем. наук - 1977. - № 4 - С. 253-254.

6. К л и ф ф о р д А., П р е с т о н Г. Алгебраическая теория полугрупп. - Москва, 1972.

7. М и х о в с к и С. В. О строго регулярных групповых кольцах // Bull. de l'Inst. Math., Acad. Sci. Bulgare - 1971. - vol. 14. - C. 67-71.

8. Х о л л М. Теория групп. - Москва, 1962.

9. A r e n s R., K a p l a n s k y I. Topological representations of algebras // Trans. Amer. Math. Soc. - 1948. - vol. 63. - P. 457-481.

10. B e r g m a n G., L e w i n J. The semigroup of ideals of a fir is (usually) free // J.London Math. Soc. - 1975. - vol. 11. - P. 21-31.

11. C o h n P. Free rings and their relations. - London - N.Y., Acad. Press, 1971.

12. F e l l e r E. Properties of primary noncommutative rings // Trans. Amer. Math. Soc. - 1958. - vol. 89, No 1. - P. 79-91.

13. L a j o s S., S z a s z F. Characterizations of strongly regular rings, II // Proc. Japan Acad. - 1970. - vol. 46. - P. 287-289.

14. M e n a l P. Group rings in which every left ideal is a right ideal // Proc. Amer. Math. Soc. - 1979. - vol. 76. - P. 204-208.

15. P a s s m a n D. Group rings, crossed products and Galois theory // Notes from Mankato Conference - Preprint, 1985.

16. R i b e n b o i m P. Rings and modules. - N. Y. - London, Interscience Publ., 1969.

17. S e h g a l S. Topics in group rings. - N. Y., Marcel Dekker, 1978.

Поступило
11 XII 1989

RÜHMARINGIDE ÜMBERTÕSTETAVAD ELEMENDID

U.Kaljulaid

R e s ü m e e

Kõnesolevas artiklis antakse uued tõestused mitmetele tulemustele rühmaringide teoorias. Sealhulgas näidatakse uus tee täiesti regulaarsete rühmaringide kirjelduse saamiseks (S.Mihovski tulemus). Kõiki neid ühendavaks jooneks on ümbertõstetava elemendi mõiste süstemaatiline kasutamine. Püstitatud on ka mitmeid uusi ülesandeid.

TRANSFERABLE ELEMENTS IN GROUP RINGS

U.Kaljulaid

S u m m a r y

Modified proofs are given to some known results about group rings, among them to S.Mihovski's result giving description of strongly regular group rings. The common feature of these proofs is systematic exploitation of the notion of transferable element in a ring. Somewhat more direct and detailed proof in characteristic 0 case to P. Menal's theorem about group rings is presented here also. Some new questions about transferable elements are formulated.

Acta et commentationes universitatis Tartuensis, 878 , 1990, 53-58.

A CHARACTERIZATION OF THE PRINCIPALLY WEAKLY INJECTIVITY OF THE WREATH PRODUCT OF ACTS

R.Kaschek
Oldenburg University, FRG

In [3] one sufficient and two necessary conditions for the wreath product of acts to be principally weakly injective (pwi) are given. In the present paper a new necessary and sufficient condition for any act over a monoid to be pwi is given. With help of this a necessary and sufficient condition for the wreath product of acts to be pwi is derived. For undefined notions and terminology see [2] and [3].

(1) Definition

Let M be a monoid, $J \in M$-act and $m \in M$, $j \in J$. Define the congruences $\alpha_m := \{(m',m'') \in M^2 | m'm = m''m\}$ and $\beta_j := \{(m',m'') \in M^2 | m'j = m''j\}$. Further define $K_J(m) := \{j \in J | \alpha_m \subseteq \beta_j\}$. Obviously $K_J(m)$ is the set of elements of J that appear as an image of m under a morphism $\varphi : Mm \to J$.

(2) Theorem

Let M be a Monoid and $J \in M$-act. Then J is pwi iff for all $m \in M$ we have $K_J(m) = mJ$.

Proof

Let J be pwi and $m \in M$. It suffices to show that $K_J(m) \subseteq mJ$ holds. Thus let $j \in K_J(m)$ then $\alpha_m \subseteq \beta_j$ and we can define the morphism $\varphi : Mm \to J$, $m'm \mapsto m'j$. Because of J is pwi there is an extension σ of φ from M to J. Therefore $j = \varphi(m) = \sigma(m) = m\sigma(1) \in mJ$. Now let for all $m \in M$ hold $K_J(m) = mJ$. Let $m \in M$ and $\varphi : Mm \to J$ a morphism. It suffices to show that there is a morphism σ extending φ to M. Let $j = \varphi(m)$ then $\alpha_m \subseteq \beta_j$ and therefore $j \in K_J(m) = mJ$. Thus there is an element $j' \in J$ such that $j = mj'$. Now the morphism $\sigma : M \to J$, $m' \mapsto m'j'$ has the required property.

(3) Remark

In [1] an act J over a monoid M is defined to be coflat iff for $m \in M$, $j \in J$ from $j \notin mJ$ it follows, that there are elements $k,l \in M$ such that $km = lm$ and $kj \neq lj$ hold. Obviously, as was stated in corollary 3.5 of [1] we have that J is coflat iff J is pwi.

In what follows let R,S be momoids and $A \in R$-act, $B \in S$-act. Let T be the wreath product of R by S over A. Let $A \times B$ be the wreath product of acts A and B. For elements $a \in A$, $(p,f) \in T$ let $p^{-1}(a) := \{a' \in A \mid a = pa'\}$ and $\overline{K}(f(p^{-1}(a))) := \{b \in B \mid$ For all $s,t \in S$ the following implication holds: If for all $a' \in p^{-1}(a)$ the equation $sf(a') = tf(a')$ holds, then $sb = tb$ holds$\}$.

(4) Conclusion

The act $A \times B$ is pwi iff for all $(a,b) \in A \times B$, $(p,f) \in T$ from $(a,b) \in K_{A \times B}(p.f)$ it follows, that $p^{-1}(a) \neq \emptyset$ and $b \in f(p^{-1}(a))B$ hold.

(5) Remark

From (4) it is easy to obtain the results proved in [3]. But because the condition of (4) is rather close to that of (2) and does not carry over the condition pwi from $A \times B$ to its factors it is necessary to find a more natural condition to characterize when $A \times B$ is pwi. For this the following lemma and conclusion are useful.

(6) Lemma

Let $(a,b) \in A \times B$, $(p,f) \in T$. We have $(a,b) \in K_{A \times B}(p,f)$ iff $a \in K_A(p)$ and $b \in \overline{K}(f(p^{-1}(a)))$ hold.

Proof

For to prove the necessity of the condition let $(a,b) \in K_{A \times B}(p.f)$. Let

$s,t \in S$ such that for all $a' \in p^{-1}(a)$ we have $sf(a') = tf(a')$. For $u \in \{s,t\}$ define the following mapping:

$$g^u : A \to S, \ \alpha \mapsto \begin{cases} u, \text{ if } \alpha = a \\ 1, \text{ otherwhise} \end{cases}$$

Then for all $\alpha \in A$ we have $g^s(p\alpha)f(\alpha) = g^t(p\alpha)f(\alpha)$. Therefore we have $(g^s)_p f = (g^t)_p f$ and thus $(1,g^s)(p,f) = (1,g^t)(p,f)$. From this we see that $sb = g^s(a)b = g^t(a)b = tb$ holds. Thus $b \in \bar{K}(f(p^{-1}(a)))$. Now let for $q,r \in R$ hold $qp = rp$. Then $(q,c_1)(p,f) = (r,c_1)(p,f)$ and therefore $qa = ra$ thus $a \in K_A(p)$. Now for to prove the sufficiency of the condition assume it to hold. If for elements $(q,g),(r,h) \in T$ we have the equation $(q,g)(p,f) = (r,h)(p,f)$, then we have $(qp,g_p f) = (rp,h_p f)$. Therefore for all $a' \in p^{-1}(a)$ we have $g(a)f(a') = h(a)f(a')$. From this we get $g(a)b = h(a)b$ and therefore $(q,g)(a,b) = (r,h)(a,b)$ thus $(a,b) \in K_{A\times B}(p,f)$.

(7) Conclusion

For all $(a,b) \in A\times B$, $(p,f) \in T$ we have $(a,b) \notin K_{A\times B}(p,f)$ or $p^{-1}(a) \neq \emptyset$ or b is a zero of B.

Proof

Let $(a,b) \in A\times B$, $(p,f) \in T$ such that $(a,b) \in K_{A\times B}(p,f)$ and $p^{-1}(a) = \emptyset$. Then from (6) we see that $b \in \bar{K}(f(p^{-1}(a)))$ and obviously we have $f(a') = sf(a')$ for all $a' \in p^{-1}(a)$ and $s \in S$. Therefore $b = sb$ for all $s \in S$ and thus b is a zero.

(8) Theorem

The wreath product $A\times B$ of A and B is pwi iff the following assertions hold:

a) B is pwi.

b) B has no zero or A is pwi.

c) For all $a \in A$ and $(p,f) \in T$ we have $p^{-1}(a) = \emptyset$ or $\bar{K}(f(p^{-1}(a))) = \bigcup_{a' \in p^{-1}(a)} K_B(f(a'))$.

Proof

For to prove the necessity of the condition let $A \times B$ be pwi. Then from proposition 1 of [3] it follows that B is pwi. If B has no zero then from proposition 2 of [3] it follows that A is pwi. Now let $a \in A$, $(p,f) \in T$. Assume $p^{-1}(a) \neq \emptyset$ and $b \in \overline{K}(f(p^{-1}(a)))$. It suffices to show that there is an element $a' \in p^{-1}(a)$ such that $b \in K_B(f(a'))$. From (6) we see that $(a,b) \in K_{A \times B}(p,f)$ and from (2) we see that there is an element $a' \in p^{-1}(a)$ such that $b \in f(a')B$. Because of B is pwi this implies $b \in K_B(f(a'))$. For to show the sufficiency of the condition assume it to hold. Let $(p,f) \in T$ and $(a,b) \in K_{A \times B}(p,f)$. If B has no zero then from (7) it follows $p^{-1}(a) \neq \emptyset$. If A is pwi then from (6) and (2) it follows $p^{-1}(a) \neq \emptyset$. Thus by assumption we have $\overline{K}(f(p^{-1}(a))) = \bigcup_{a' \in p^{-1}(a)} K_B(f(a'))$. From (4) we get that $A \times B$ is pwi.

(9) Corollary

Let R be injective on A and B an act with zero. Then $A \times B$ is pwi iff A and B are pwi.

(10) Corollary

Let R be injective on A and B an act without zero then $A \times B$ is pwi iff B is pwi

(11) Corollary

Let S be a right cancellative monoid and B an act without zero. Then $A \times B$ is pwi iff A and B are pwi

(12) Example

The following example shows that it is not necessary for $A \times B$ to be pwi that A is pwi.
Let R be the monoid of the positive integers with the usual multiplication. Let $r \in R \setminus \{1\}$ then $A = Rr$ is not pwi. Because otherwhise we would have the following equation $K_A(r) = rA = rRr = r^2R$ and thus for every morphism $\varphi : Rr \to A$ we would have $\varphi(r) \geq r^2$. But obviously the identity on Rr is a morphism. Because of R is cancellative we have that R is

injective on A. Now let X be a set with two elements x_1, x_2. Let S be the monoid of transformations of X. Then $S = \{c_1, c_2, id, v\}$ with $c_i : X \to X$, $x \mapsto x_i$, $v : X \to X$, $x_i \mapsto x_{3-i}$ for $i \in \{1,2\}$. The principal ideals of S obviously are Sc_1, Sc_2, Sid, Sv and clearly we have $Sc_1 = Sc_2 = \{c_1, c_2\}$ and $Sid = Sv = S$. For to show that $B := X$ is pwi it suffices to show that every morphism $\varphi : Sc_1 \to B$ can be extended to a morphism $\sigma : S \to B$. But it is easy to show that the only morphism $\varphi : Sc_1 \to B$ is the following one:

$$\varphi : Sc_1 \to B,\ c_1 \mapsto x_1,\ c_2 \mapsto x_2.$$

Obviously φ is extended by the following mapping

$$\sigma : S \to B,\ c_1 \mapsto x_1,\ c_2 \mapsto x_2,\ id \mapsto x_1,\ v \mapsto x_2.$$

Now it is easy to show that σ is a morphism and therefore B is pwi. From 10 we see that $A \times B$ is pwi.

References

1. G o u l d V. The Characterization of Monoids by Properties of Their S-systems // Semigroup Forum.-1985.-Vol.32.-P.251-265.
2. K i l p M., K n a u e r U. Characterization of Monoids by Properties of Faithful and Strongly Faithful Acts // TÜ Toimetised.-1987.-Vol.764.-P.39-48.
3. K i l p M., K u b j a s A. Wreath Products of Acts Over Monoids III. Principally Weakly Injective Acts // TÜ Toimetised.-1987.-Vol.764.-P.49-52.

Received

11 V 1989

SPETSIAALSELT NÕRGALT INJEKTIIVSE POLÜGOONIDE PÕIMIKKORRUTISE KIRJELDUS

R.Kaschek

R e s ü m e e

Leitakse tarvilikud ja piisavad tingimused polügoonide A ja B põimikkorrutise $A \times B$ spetsiaalselt nõrgaks injektiivsuseks (SNI). Näidatakse, et selleks A ei pruugi olla SNI. tuuakse vastav näide.

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СПЕЦИАЛЬНО СЛАБОЙ ИНЪЕКТИВНОСТИ СПЛЕТЕНИЯ ПОЛИГОНОВ

Р.Кашек

Р е з ю м е

Находятся необходимые и достаточные условия для специально слабой инъективности (ССИ) сплетения $A \times B$ полигонов A и B. Показывается, что для этого полигон A не обязан быть ССИ, приводится соответствующий пример.

Acta et commentationes universitatis Tartuensis, 878, 1996, 59-66.

WREATH PRODUCTS OF ACTS OVER MONOIDS: IV. PRINCIPALLY WEAKLY FLAT ACTS

M.Kilp
Chair of algebra and geometry

In this note we continue the investigation of wreath products of left acts over monoids. This investigation was started by Normak in [5]. He gave necessary and sufficient conditions for a wreath product of acts to be projective or strongly flat. In [4] and [2] conditions for wreath products of acts to be regular, inverse, torsion free, and divisible are found. In [3] one sufficient and two necessary conditions for a wreath product of acts to be principally weakly injective are given. In [1] a necessary and sufficient condition for a wreath product of acts to be principally weakly injective is presented. In this paper we present some results on wreath products of acts concerning principally weakly flat acts.

We recall some definitions which will be necessary in the sequel.

R and S will always be monoids. A left R-act is a set A upon which R acts unitarily on the left (Notation: ${}_R A$). Homomorfisms of left acts are defined in a obvious way. Analogously right R-acts are defined.

Let X, Y be sets. By $F(X,Y)$ we denote the set of all mappings $f: X \to Y$. By c_y, $y \in Y$, we denote the mapping in $F(X, Y)$ with $c_y(x) = y$ for all $x \in X$. Let $T = T(R,S,A) = R \times F(A,S)$ be the wreath product of a monoid R with a monoid S by a left R-act A. We recall that T is a monoid where multiplication is defined by

$$(r,f)(p,g) = (rp, f_p g)$$

with

$$(f_p g)(a) = f(pa) g(a)$$

for all $a \in A$, $r, p \in R$, $f, g \in F(A,S)$. If A is a left R-act and B is a left S-act then the wreath product $A wr B$ of acts A and B is the set $A \times B$

endowed with the action

$$(r,f)(a,b) = (ra, f(a)b)$$

for all $r \in R$, $a \in A$, $b \in B$, $f \in F(A,S)$. This makes $A \operatorname{wr} B$ to be a left T-act.

Let B be a right S-act and M a left S-act. On the Cartesian product $B \times M$ we consider the smallest equivalence relation generated by $(bs,m) \equiv (b,sm)$, $s \in S$, $b \in B$, $m \in M$. The set of classes of this equivalence is said to be the tensor product of the acts B and M and is denoted by $B \otimes_S M$. The class containing the element (b,m) is denoted by $b \otimes m$. Two elements $b_1 \otimes m_1$ and $b_2 \otimes m_2$ in the tensor product $B \otimes_S M$ are equal if and only if there exists a finite sequence of pairs from $B \times M$ and elements of S such that the first pair is (b_1,m_1), the last is (b_2,m_2) and from every pair we pass to the following pair by a transfer of an element of S, i.e. passing from the pair (bs,m) to the pair (b,sm) or vice versa. If M is a fixed left act, then $\otimes_S M$ is a functor from the category of all right S-acts to the category of sets.

A left S-act M is flat if the functor $\otimes_S M$ preserves all inclusions $A \subseteq B$ where A and B are right S-acts.

A left S-act M is weakly flat (w. flat) if the functor $\otimes_S M$ preserves all inclusions $I \subseteq S$ where I is a right ideal of S.

A left S-act M is principally weakly flat (p. w. flat) if the functor $\otimes_S M$ preserves all inclusions $sS \subseteq S$ where $s \in S$.

It follows from the last definition that M is p. w. flat if $sm_1 = sm_2$, where $s \in S$, $m_1, m_2 \in M$, always implies $s \otimes m_1 = s \otimes m_2$ in the tensor product $sS \otimes_S M$.

Proposition 1. If the wreath product $A \operatorname{wr} B$ is p.w. flat then ${}_RA$ and ${}_SB$ are p.w. flat.

P r o o f. Assume that the wreath product $AwrB$ of a left R-act A and a left S-act B is p.w. flat T-act, T being the wreath product of the monoid R with the monoid S by the left R-act A. Let $ra_1 = ra_2$ for $r \in R, a_1, a_2 \in A$. Let $b \in B$ be a fixed element. Then

$$(r, c_1)(a_1, b) = (r, c_1)(a_2, b)$$

in $AwrB$. Since $AwrB$ is p.w. flat we have

$$(r, c_1) \otimes (a_1, b) = (r, c_1) \otimes (a_2, b)$$

in $(r, c_1)T \otimes (AwrB)$. This means that from the pair $((r, c_1), (a_1, b))$ one can go over to the pair $((r, c_1), (a_2, b))$ in $(r, c_1)T \times (AwrB)$ by transfers of elements of T. All pairs from the sequence connecting pairs $((r, c_1), (a_1, b))$ and $((r, c_1), (a_2, b))$ are of the form

$$((r, c_1)(r', f'), (a', b')) = ((rr', f'), (a', b'))$$

where $r, r' \in R$, $f' \in F(A, S)$, $a' \in A$, $b' \in B$.

Call the pair (rr', a') from $rR \times A$ the pair corresponding to the pair $((rr', f'), (a', b'))$.

Consider now two pairs, say $((rr', f'), (a', b'))$ and $((rr'', f''), (a'', b''))$ connected by a transfer by the element $(p, g) \in T$. It is routine to check that then the corresponding pairs (rr', a') and (rr'', a'') are connected by the transfer by the element $p \in R$.

Since the pair corresponding to $((r, c_1), (a_1, b))$ is (r, a_1) and the pair corresponding to $((r, c_1), (a_2, b))$ is (r, a_2) this means that we can go in $rR \times A$ from the pair (r, a_1) over to the pair (r, a_2) by transfers of elements of R. It follows that the left R-act A is p.w. flat.

We shall show now that ${}_SB$ is p.w. flat. Let $sb_1 = sb_2$ for $s \in S$, $b_1, b_2 \in B$. We have to show that $s \otimes b_1 = s \otimes b_2$ in $sS \otimes_S B$. Let $a \in A$ be a fixed element. From $sb_1 = sb_2$ it follows that

$$(1, c_s)(a, b_1) = (1, c_s)(a, b_2)$$

in $AwrB$. Since $AwrB$ is p.w. flat this implies

$$(1, c_s) \otimes (a, b_1) = (1, c_s) \otimes (a, b_2)$$

in the tensor product $(1, c_s)T \otimes (A\, wr\, B)$. This means that we can go in $(1, c_s)T \times (A\, wr\, B)$ by means of a sequence of pairs and transfers of elements of T from the pair $((1, c_s), (a, b_1))$ to the pair $((1, c_s), (a, b_2))$. All pairs in this sequence have to be of the form

$$((1, c_s)(r, f), (a', b')) = ((r, c_s f), (a', b')),$$

$(r, f) \in T$. Call the pair $(s f(a'), b')$ from $sS \times B$ the pair corresponding to the pair $((r, c_s f), (a', b'))$. Let now $((r, c_s f), (a', b'))$ and $((p, c_s g), (a'', b''))$ be pairs connected by the transfer by an element $(q, h) \in T$. It is again easy to check that then corresponding pairs $(s f(a'), b')$ and $(s g(a''), b'')$ are connected by the transfer by $h(a')$ or $h(a'')$ (depending from the direction of original transfer). Since the pair corresponding to $((1, c_s), (a, b_1))$ is (s, b_1) and the pair corresponding to $((1, c_s), (a, b_2))$ is (s, b_2) this means that we can go in $sS \times B$ from the pair (s, b_1) to the pair (s, b_2) by transfers of elements of S. It follows that the left S-act B is p.w. flat.

Let A be a left R-act. We say that R acts injectively on A if $ra_1 = ra_2$, $r \in R$, $a_1, a_2 \in A$, always implies $a_1 = a_2$. It is obvious that if R acts injectively on A then ${}_R A$ is p.w. flat.

Denote for any $a, x \in A$ by φ_x^a the mapping from A to S defined by

$$\varphi_x^a(y) = \begin{cases} x, & y = a \\ 1, & y \neq a \end{cases}.$$

Proposition 2. If R acts injectively on ${}_R A$ and ${}_S B$ is p.w. flat then $A\, wr\, B$ is p.w. flat.

P r o o f. Let $(r, f)(a_1, b_1) = (r, f)(a_2, b_2)$, $r \in R$, $f \in F(A, S)$, $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$. This means that $ra_1 = ra_2$ and $f(a_1)b_1 = f(a_2)b_2$. Since R acts injectively on A we have $a_1 = a_2$. Denote $a_1 = a_2 = a$. Since B is p.w. flat it follows from $f(a)b_1 = f(a)b_2$ that $f(a) \otimes b_1 = f(a) \otimes b_2$ in $sS \otimes B$.

This means that we can go in ${}_sS \times B$ from the pair $(f(a), b_1)$ by a sequence of pairs and transfers of elements from S to the pair $(f(a), b_2)$. All pairs in this sequence are of the form $(f(a)x, c)$, $x \in S$, $c \in B$.

Call $((r, f\varphi^a_x), (a,c)) = ((r,f)(1, \varphi^a_x), (a,c)) \in$

$\in (r,f)T \times (A\, wr\, B)$ the pair corresponding to the pair $(f(a)x, c)$. Let $(f(a)x, c)$ and $(f(a)x', c')$, $x' \in S$, $c' \in B$ be connected by a transfer by an element $u \in S$. We shall show that corresponding pairs $((r, f\varphi^a_x), (a,c))$ and $((r, f\varphi^a_{x'}), (a, c'))$ are connected by a transfer by an element of T. Indeed, if $f(a)x = f(a')x'u$ and $uc = c'$ then $(r, f\varphi^a_x) =$

$= (r, f\varphi^a_{x'})(1, \varphi^a_u)$ and $(1, \varphi^a_u)(a,c) = (a, c')$. If $c = uc'$ and $f(a)xu = f(a)x'$ then $(a,c) = (1, \varphi^a_u)(a, c')$ and $(r, f\varphi^a_x)(1, \varphi^a_u) = (r, f\varphi^a_{x'})$. Since the pair $((r,f), (a, b_1))$ corresponds to the pair $(f(a_1), b_1)$ and the pair $((r,f), (a, b_2))$ corresponds to the pair $(f(a_2), b_2)$ this means that $(r,f) \otimes (a_1, b_1) = (r,f) \otimes (a_2, b_2)$ in $(r,f)T \otimes (A\, wr\, B)$.

It follows from the definition of w. flat acts that a left S-act B is w. flat if $s_1 b_1 = s_2 b_2$, $s_1, s_2 \in S$, $b_1, b_2 \in B$, always implies $s_1 \otimes b_1 = s_2 \otimes b_2$ in $(s_1 S \cup s_2 S) \otimes_S B$.

<u>Proposition 3</u>. Assume that R does not act injectively on ${}_RA$. If $A\, wr\, B$ is p.w. flat then ${}_SB$ is w. flat.

<u>P r o o f</u>. Let $s_1 b_1 = s_2 b_2$, $s_1, s_2 \in S$, $b_1, b_2 \in B$. If $s_1 = s_2 = s$ then by the proof of Proposition 1 we have $s_1 \otimes b_1 = s_2 \otimes b_2$ in $sS \otimes B$. So we assume $s_1 \neq s_2$. Let $a_1, a_2 \in A$, $r \in R$ be such that $ra_1 = ra_2$ but $a_1 \neq a_2$. Define $f \in F(A,S)$ such that

$$f(a) = \begin{cases} s_1, & a \neq a_2 \\ s_2, & a = a_2 \end{cases}.$$

Then $(r,f)(a_1,b_1) = (r,f)(a_2,b_2)$. Since $A\,wr\,B$ is p.w. flat $(r,f)\otimes(a_1,b_1) = (r,f)\otimes(a_2,b_2)$ in $(r,f)T\otimes(A\,wr\,B)$. This means that we can go from the pair $((r,f),(a_1,b_1))$ in $(r,f)T\times(A\,wr\,B)$ to the pair $((r,f),(a_2,b_2))$ by a sequence of pairs of elements and transfers of elements of T. All pairs in our sequence are of the form

$$((r,f)(p,g),(c_1,d_1)) = ((rp,f_p g),(c_1,d_1)).$$

Call $(f(pc_1)g(c_1),d_1)\in(s_1 S\cup s_2 S)\times B$ the pair corresponding to the pair $((rp,f_p g),(c_1,d_1))$. Let

$$((rp,f_p g),(c_1,d_1)) \quad \text{and} \quad ((rq,f_q h),(c_2,d_2)),$$

$q\in R$, $h\in F(A,S)$, $c_2\in A$, $d_2\in B$, be connected by a transfer by an element $(r',f')\in T$. We shall show that then corresponding pairs $(f(pc_1)g(c_1),d_1)$ and $(f(qc_2)h(c_2),d_2)$ are connected by a transfer by an element of S. Let, first, $(rp,f_p g) = (rq,f_q h)(r',f')$ and $(r',f')(c_1,d_1) = (c_2,d_2)$. This means that $rp = rqr'$, $f_p g = (f_q h)_{r'} f'$, $r'c_1 = c_2$ and $f'(c_1)d_1 = d_2$.

Particularly, $f(pc_1)g(c_1) = f(qr'c_1)h(r'c_1)f'(c_1) = f(qc_2)h(c_2)f'(c_1)$ and $f'(c_1)d_1 = d_2$. This means that we could go from the pair $(f(pc_1)g(c_1),d_1)$ to the pair $(f(qc_2)h(c_2),d_2)$ by a transfer by the element $f'(c_1)$.

Let now $(c_1,d_1) = (r',f')(c_2,d_2)$ and $(rp,f_p g)(r',f') = (rq,f_q h)$. This means that $c_1 = r'c_2$, $d_1 = f'(c_2)d_2$, $rpr' = rq$ and $(f_p g)_{r'} f' = f_q h$. Particularly, $d_1 = f'(c_2)d_2$ and $f(pr'c_2)g(r'c_2)f'(c_2) = f(qc_2)h(c_2) = f(pc_1)g(c_1)f'(c_2)$. This means that we could go from the pair $(f(pc_1)g(c_1),d_1)$ to the pair $(f(qc_2)h(c_2),d_2)$ by a transfer by the element $f'(c_2)$.

Since the pair $(s_1,b_1) = (f(a_1),b_1)$ corresponds to the pair $((r,f),(a_1,b_1))$ and the pair $(s_2,b_2) = (f(a_2),b_2)$ corresponds to the pair $((r,f),(a_2,b_2))$ this means that $s_1\otimes b_1 = s_2\otimes b_2$ in $(s_1 S\cup s_2 S)\otimes B$.

References

1. K a s c h e k R. A characterization of the principally weakly injectivity of the wreath product of acts // Tartu Ülikooli Toimetised.-1990.-Vol. 878 .-P. 53-58.
2. K i l p M., K n a u e r U., M i k h a l e v A. Wreath products of acts over monoids: II. Torsion free and divisible acts // J. Pure and Appl.Algebra.-1989.-Vol. 58.-P. 19-27.
3. K i l p M., K u b j a s A. Wreath products of acts over monoids: III. Principally weakly injective acts// Tartu Ülikooli Toimetised.-1987.-Vol. 764.-P. 49-52.
4. K n a u e r U., M i k h a l e v A. Wreath products of acts over monoids: I. Regular and inverse acts// J. Pure and Appl. Algebra.-1988.-Vol. 51.-P. 251-260.
5. N o r m a k P. Strong flatness and projectivity of the wreath products of acts // Abelevye Gruppy i Moduli.-Tomsk, 1982.-P. 158-165 (in Russian).

Received
29 XI 1989

POLÜGOONIDE PÕIMIKKORRUTISED:
IV. SPETSIAALSELT NÕRGALT LAMEDAD POLÜGOONID

M.Kilp

R e s ü m e e

Näidatakse, et polügoonide põimiku $A\,wr\,B$ spetsiaalsest nõrgast lamedusest järeldub nii A kui ka B spetsiaalne nõrk lamedus. Kui toime polügoonil A on injektiivne ja B on spetsiaalselt nõrgalt lame, siis on põimik $A\,wr\,B$ spetsiaalselt nõrgalt lame.

СПЛЕТЕНИЯ ПОЛИГОНОВ НАД МОНОИДАМИ
IУ СПЕЦИАЛЬНО СЛАБО ПЛОСКИЕ ПОЛИГОНЫ

М.Кильп

Р е з ю м е

Доказано, что из специальной слабой плоскостности сплетения $A\,wr\,B$ полигонов A и B следует специальная слабая плоскость как полигона A, так и полигона B. Если действие на полигоне A инъективно и B - специально слабо плоский полигон, то сплетение $A\,wr\,B$ - специально слабо плоский полигон.

Acta et commentationes universitatis Tartuensis, 878 , 1990, 67-82.

СОВМЕСТНЫЙ СПЕКТР И ПРОДОЛЖЕНИЕ ГОМОМОРФИЗМОВ

А.Кокк
Лаборатория прикладной математики

Во многих работах (см. например [3,6,15,16] и имеющуюся там библиографию) изучались различные совместные спектры для семейств элементов банаховой алгебры. Данное изложение, которое опирается, в основном, на работы [23,26] и [17], позволяет перенести некоторые результаты из [4], связанные с продолжением гомоморфизмов подалгебр банаховой алгебры, на более общий случай.

Пусть $\mathbb{K}$ - поле $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, A - $\mathbb{K}$-алгебра с единицей e_A, $\nu : \alpha \longrightarrow \alpha e_A$ - алгебраический изоморфизм $\mathbb{K}$ в A $(\alpha \in \mathbb{K})$ и HomA - множество всех нетривиальных гомоморфизмов A на $\mathbb{K}$, наделенное слабой топологией. Пусть, далее, $\mathbb{N}_n = \{1,2,\dots,n\}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, $[S]$ - подалгебра алгебры A, порожденная подмножеством $S \subset A$ и элементом e_A, S^n - прямое произведение n экземпляров S,

$$c(S) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n,$$

$[a] = [\bigcup_{k=1}^{n} \{a_k\}]$ для каждого $a = (a_1,a_2,\dots,a_n) \in A^n$, θ_A - нулевой элемент алгебры A и $C(A^n,A)$ - алгебра всех A-значных отображений на A^n (относительно поточечных операций). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}_n$ через x_k будем обозначать отображение A^n на A, определяемое условием

$$x_k((a_1,a_2,\dots,a_n)) = a_k \quad ((a_1,a_2,\dots,a_n) \in A^n) ,$$

а через $P(A^n)$ - подалгебру алгебры $C(A^n,A)$, порожденную отображениями x_k $(k \in \mathbb{N}_n)$.

<u>Определение</u>. Отображение sp на $c(A)$, ставящее каждому

элементу $a = (a_1,a_2,\dots,a_n) \in A^n$ $(n \in \mathbb{N})$ в соответствие подмножество (необязательно непустое) $sp(a) \subset \mathbb{K}^n$, будем называть <u>совместным спектром</u> на $\mathbb{K}$-алгебре A, если для всех $n \in \mathbb{N}$ и $a = (a_1,a_2,\dots,a_n) \in A^n$ выполнены условия

A1) $sp((a_1,a_2,\dots,a_n,e_A)) \supset$

$$\supset \{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,1) \in \mathbb{K}^{n+1}: (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in sp(a)\}$$

и

A2) если $p(a) = \theta_A$ $(p \in P(A^n))$ и $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in sp(a)$, то $p((\alpha_1 e_A,\alpha_2 e_A,\dots,\alpha_n e_A)) = \theta_A$.

Следующий результат указывает на связь между совместным спектром и пространствами гомоморфизмов конечно порожденных подалгебр.

<u>Теорема 1</u>. Пусть A - $\mathbb{K}$-алгебра с единицей, sp - совместный спектр на A и $a = (a_1,a_2,\dots,a_n) \in A^n$ $(n \in \mathbb{N})$ такое семейство, что множество $sp(a)$ непусто. Тогда для каждого набора $\bar\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in sp(a)$ существует гомоморфизм $\Lambda(\bar\alpha) \in Hom[a]$ такой, что $\Lambda(\bar\alpha)(a_k) = \alpha_k$ с $k \in \mathbb{N}_n$. При этом отображение $\bar\alpha \longrightarrow \Lambda(\bar\alpha)$ является гомеоморфизмом пространства $sp(a)$ в $Hom[a]$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in sp(a)$. Согласно условию A1), $\bar\alpha_1 = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,1) \in sp(a_1)$, где $a_1 = (a_1,a_2,\dots,a_n,e_A)$. Если $p_1(a_1) = p_2(a_1)$ для некоторых $p_1,p_2 \in P(A^{n+1})$, то, по условию A2), имеем

$$(p_1 - p_2)((\alpha_1 e_A,\alpha_2 e_A,\dots,\alpha_n e_A,e_A)) = \theta_A.$$

Значит, на алгебре $[a]$ можно определить равенством

$$\Lambda(\bar\alpha)(p(a_1)) = \nu^{-1}(p((\alpha_1 e_A,\alpha_2 e_A,\dots,\alpha_n e_A,e_A))) \quad (p \in P(A^{n+1}))$$

отображение $\Lambda(\bar\alpha)$. Поскольку $\Lambda(\bar\alpha)(e_A) = 1$ и $\Lambda(\bar\alpha)$ является линейным и мультипликативным на $[a]$, то $\Lambda(\bar\alpha) \in Hom[a]$. Значит, для каждого $\bar\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in sp(a)$ найдется гомоморфизм $\Lambda(\bar\alpha) \in Hom[a]$ такой, что $\Lambda(\bar\alpha)(a_k) = \alpha_k$. При этом ясно, что отображение $\varphi : \bar\alpha \longrightarrow \Lambda(\bar\alpha)$ $(\bar\alpha \in sp(a))$ является взаимно однозначным на $sp(a)$.

В следующем покажем, что φ есть гомеоморфизм пространства $sp(a)$ в $Hom[a]$. Для этого убедимся сначала, что при всех p из $P(A^{n+1})$ справедливо следующее утверждение:

(1.1) для каждых $\varepsilon > 0$ и $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ существует число $\delta > 0$ такое, что

$$|\nu^{-1}(p(\beta_1 e_A,\beta_2 e_A,\dots,\beta_n e_A,e_A) - p(\alpha_1 e_A,\alpha_2 e_A,\dots,\alpha_n e_A,e_A))| < \varepsilon$$

как только $|\alpha_i - \beta_i| < \delta$ $(i \in \mathbb{N}_n)$.

Если $p = \alpha x_i$ $(\alpha \in \mathbb{K}, i \in \mathbb{N}_{n+1})$, то справедливость утверждения (1.1) очевидна. Далее, если (1.1) справедливо для некоторых $p_1,p_2 \in P(A^{n+1})$, то оно справедливо и для p_1+p_2. Кроме того, как легко заметить, (1.1) справедливо и для p_1p_2, ибо

$$|\nu^{-1}((p_1p_2)(x) - (p_1p_2)(y))| \le$$

$$\le |\nu^{-1}(p_1(x) - p_1(y))|\ |\nu^{-1}(p_2(x) - p_2(y))| +$$

$$+ |\nu^{-1}(p_1(x))|\ |\nu^{-1}(p_2(x) - p_2(y))| +$$

$$+ |\nu^{-1}(p_2(x))|\ |\nu^{-1}(p_1(x) - p_1(y))|$$

$(x,y \in \nu(\mathbb{K})^{n+1})$. Значит, для всех $p \in P(A^{n+1})$ справедливо утверждение (1.1).

Пусть теперь $\bar\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in sp(a)$ и O_0 - любая окрестность элемента $\varphi(\bar\alpha)$ в пространстве $\mathrm{Hom}[a]$. Тогда найдутся $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$, и отображения $p_k \in P(A^{n+1})$ с $k \in \mathbb{N}_m$ такие, что

$$O_1 = \bigcap_{k=1}^{m} \{\Lambda \in \mathrm{Hom}[a] : |(\Lambda - \varphi(\bar\alpha))(p_k(a_1))| < \varepsilon\} \subset O_0.$$

Из сказанного выше вытекает теперь, что

$$|\nu^{-1}(p_k(\beta_1 e_A,\beta_2 e_A,\dots,\beta_n e_A,e_A)-p_k(\alpha_1 e_A,\alpha_2 e_A,\dots,\alpha_n e_A,e_A))| < \varepsilon$$

для всех $k \in \mathbb{N}_m$ и $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ из $U = O(\alpha_1,\delta)\times\dots\times O(\alpha_n,\delta)$, где $O(\alpha_i,\delta) = \{\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha - \alpha_i| < \delta\}$ и $\delta > 0$ - некоторое число. Следовательно, для всех $\bar\beta \in U \cap sp(a)$ справедливо равенство

$$|(\varphi(\bar\beta) - \varphi(\bar\alpha))(p_k(a_1))| < \varepsilon.$$

Таким образом, φ является непрерывным в любой точке $\bar\alpha \in sp(a)$.

Пусть $\Lambda_0 \in \Delta = \varphi(sp(a))$ и V - любая окрестность элемента $\varphi^{-1}(\Lambda_0)$ в топологии пространства $ap(a)$. Тогда

$$\mathrm{sp}(a) \bigcap (O(\Lambda_0(a_1),\varepsilon_1)\times\ldots\times O(\Lambda_0(a_n),\varepsilon_1) \subset V$$

для некоторого числа $\varepsilon_1 > 0$. Положив

$$O_2 = \bigcap_{k=1}^{n} \{\Lambda \in \Delta : |(\Lambda - \Lambda_0)(a_k)| < \varepsilon_1\}$$

заметим, что $\varphi^{-1}(\Lambda) \in V$ для всех $\Lambda \in O_2$. Но это означает непрерывность отображения φ^{-1} в точке Λ_0. Теорема доказана.

Пусть sp - совместный спектр на $\mathbb{K}$-алгебре A с единицей и пусть $\tau(a) = \varphi(\mathrm{sp}(a))$ для всех $a \in c(A)$, $(\mathrm{sp}(a) \neq \emptyset)$, где φ - гомеоморфизм $\mathrm{sp}(a)$ на $\mathrm{Hom}[a]$, определенный в теореме 1. Тогда

В1) $\tau(a) \subset \mathrm{Hom}[a]$ $(a \in c(A))$;

В2) $\tau((a_1,a_2,\ldots,a_n,e_A)) \supset \tau(a)$ $\quad (a = (a_1,a_2,\ldots,a_n) \in A^n,\ n \in \mathbb{N})$.

Наоборот. Если τ - отображение на $c(A)$ такое, что справедливы условия В1) и В2), то, определив на $c(A)$ отображение sp с условием[1] $a \longrightarrow \hat{a}(\tau(a))$ $(a = (a_1,a_2,\ldots,a_n) \in A^n)$, где $\hat{a}(\tau(a)) = \{\hat{a}(\Lambda) = (\Lambda(a_1),\Lambda(a_2),\ldots,\Lambda(a_n)) \in \mathbb{K}^n : \Lambda \in \tau(a)\}$, заметим, что sp является совместным спектром на A. Итак, справедлива

<u>Теорема 2</u>. Пусть A - $\mathbb{K}$-алгебра с единицей и sp - совместный спектр на A. Тогда на $c(A)$ существует отображение τ, удовлетворяющее условиям В1), В2) и

В3) $\hat{a}(\tau(a)) = \mathrm{sp}(a)$ $(a \in c(A))$.

При этом, если множество $\mathrm{sp}(a)$ непусто, то пространства $\tau(a)$ и $\mathrm{sp}(a)$ гомеоморфны.

Наоборот. Если τ - отображение на $c(A)$ такое, что выполнены условия В1) и В2), то на A существует совместный спектр sp такой, что $\mathrm{sp}(a) = \hat{a}(\tau(a))$ $(a \in c(A))$.

$\mathbb{K}$-алгебра A называется <u>топологической $\mathbb{K}$-алгеброй</u>, если на A задана топология, относительно которой A является линейным топологическим пространством над $\mathbb{K}$ и умножение элементов алгебры A (как билинейное отображение $A\times A$ в A) раздельно непрерывно.

---

[1] Если множество $\tau(a)$ пусто, то считаем, что и множество $\hat{a}(\tau(a))$ пусто.

Топологическая $\mathbb{K}$-алгебра A с единицей называется:

<u>Q-алгеброй</u>, если множество $\mathrm{Inv}A$ обратимых элементов алгебры A открыто в рассматриваемой топологии алгебры A;

<u>алгеброй Гельфанда-Мазура</u> (кратко GM-алгеброй), если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ и факторалгебра A/M по любому двустороннему замкнутому максимальному (как левому так и правому) идеалу топологически изоморфна полю $\mathbb{C}$.

Обозначим через $\mathrm{comm}A$ коммутаторный идеал алгебры A, т.е. двусторонний идеал алгебры A, порожденный множеством $\{ab - ba : a,b \in A\}$; а если A - топологическая $\mathbb{K}$-алгебра, то через $\mathrm{hom}A$ - подмножество тех гомоморфизмов из $\mathrm{Hom}A$, которые непрерывны на A и через $\overline{\mathrm{comm}A}$ - замыкание коммутаторного идеала $\mathrm{comm}A$ в алгебре A. Хорошо известно, что $\mathrm{Hom}A = \mathrm{hom}A$ если A является Q-алгеброй (см.,например, [22], с.72). Однако, существуют топологические $\mathbb{K}$-алгебры с непустым множеством гомоморфизмов $\mathrm{Hom}A$, множество непрерывных гоморфизмов $\mathrm{hom}A$ которых пусто (см. [9,21]). Далее, если множество гомоморфизмов $\mathrm{Hom}A$ непусто ($\mathrm{hom}A$ непусто), то $\mathrm{comm}A \neq A$ ($\overline{\mathrm{comm}A} \neq A$), ибо $\mathrm{comm}A \subset \ker\Lambda$ ($\overline{\mathrm{comm}A} \subset \ker\Lambda'$) для каждого $\Lambda \in \mathrm{Hom}A$ ($\Lambda' \in \mathrm{hom}A$) и, положив $\tau(a) = \mathrm{Hom}[a]$ для всех $a \in c(A)$, заметим, что, согласно теореме 2, имеет место:

(3.1) на A существует совместный спектр sp такой, что множество $\mathrm{sp}(a)$ непусто для всех $a \in c(A)$.

Оказывается, что в случае Q-алгебр, являющихся и GM-алгебрами, справедливо и обратное утверждение.

<u>Теорема 3</u>. Пусть A - Q-алгебра с единицей, которая является и GM-алгеброй. Тогда условия (3.1),

(3.2) множество $\mathrm{Hom}[a]$ непусто ($a \in c(A)$),

(3.3) $\mathrm{comm}[a] \neq [a]$ ($a \in c(A)$),

(3.4) $\mathrm{comm}A \neq A$,

(3.5) $\overline{\mathrm{comm}A} \neq A$,

(3.6) множество $\mathrm{hom}A$ непусто,

(3.7) множество $\mathrm{hom}[a]$ непусто ($a \in c(A)$)

и

(3.8) $\overline{\mathrm{comm}}[a] \neq [a]$ ($a \in c(A)$)

равносильны.

<u>Доказательство</u>. Как было установлено выше, импликации

(3.2) → (3.3), (3.7) → (3.8) и (3.6) → (3.1) справедливы. Импликации (3.1) → (3.2), (3.4) → (3.5) и (3.5) → (3.6) справедливы соответственно по теореме 1 настоящей работы, теоремы 24.6.4 из [7] и следствию 4.1 из [1]. Так как справедливость импликаций (3.6) → (3.7) и (3.8) → (3.3) очевидна, то остается показать справедливость импликации (3.3) → (3.4). Для этого допустим, что commA = A. Тогда

$$e_A = \sum_{k=1}^{n} a_k(b_k c_k - c_k b_k)d_k$$

для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и элементов $a_k, b_k, c_k, d_k \in A$ с $k \in \mathbb{N}_n$. Значит, comm[h] = [h], где $h = (a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n, c_1, c_2, \ldots, c_n, d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Но это невозможно. Следовательно, commA ≠ A, что и надо было установить. Теорема доказана.

Пусть теперь $n, k \in \mathbb{N}$ такие, что $k \le n$. Через π_k^n будем обозначать проекцию $\mathbb{K}^n$ на $\mathbb{K}^k$, т.е.

$$\pi_k^n((\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n)) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$$

$$((\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n).$$

Говорят, что совместный спектр sp на топологической алгебре A <u>обладает свойством проекции</u>, если для всех $n, k \in \mathbb{N}$ $(k \le n)$ и $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A^n$ справедливо

$$sp((a_1, a_2, \ldots, a_k)) = \pi_k^n(sp(a)).$$

Рассмотрим также следующие условия:

A3) множество sp(a) непусто и компактно для всех $a \in c(A)$;

A4) для всех $m \in \mathbb{N}$, $(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in A^m$ и чисел $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таких, что $1 + n + k \le m$ из $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m) \in sp((a_1, a_2, \ldots, a_m))$ следует, что $(\alpha_{1+n}, \ldots, \alpha_{1+n+k}) \in sp((a_{1+n}, \ldots, a_{1+n+k}))$.

<u>Теорема 4</u>. Пусть A – $\mathbb{K}$-алгебра с единицей и sp – совместный спектр на A, удовлетворяющий условиям A3) и A4). Тогда существует непустое компактное подмножество $\Delta \subset$ HomA такое, что $\hat{a}(\Delta) \subset sp(a)$ для всех $a \in c(A)$. При этом следующие условия равносильны:

(4.1) совместный спектр sp обладает свойством проекции;

(4.2) $sp(a) = \hat{a}(\Delta)$ $(a \in c(A))$.

<u>Доказательство</u>. Пусть для всех $m \in \mathbb{N}$ и $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

таких, что $1 + n + k \leq m$, $\pi^m_{n,k}$ - проекция A^m на A^{k+1} такая, что

$$\pi^m_{n,k}((a_1,a_2,\ldots,a_m)) = (a_{1+n},\ldots,a_{1+n+k})$$

для всех $a = (a_1,a_2,\ldots,a_m) \in A^m$ и пусть τ - отображение на $c(A)$, удовлетворяющее условиям B1) - B3). Легко установить, что множество $c(A)$ направлено отношением $\leq$, определенным так: $a \leq b$ $(a,b \in c(A))$ в том и только в том случае, когда найдутся числа $m \in \mathbb{N}$ и $n,k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такие, что $a = \pi^m_{n,k}(b)$. По условию A4) ясно, что для любых $a,b \in c(A)$ таких, что $a \leq b$, отображение сужения $\mu(b,a)$ пространства $\tau(b)$ в $\mathrm{Hom}[a]$, определяемое равенством[2] $\mu(b,a)(\Lambda) = \Lambda|[a]$ $(\Lambda \in \tau(b))$, удовлетворяет условию $\mu(b,a)(\tau(b)) \subset \tau(a)$. При этом $\mu(b,a)\circ\mu(c,b) = \mu(c,a)$ для любых $a,b,c \in c(A)$ таких, что $a \leq b \leq c$, и $\mu(a,a)(\Lambda) = \Lambda$ для любых $a \in c(A)$ и $\Lambda \in \tau(a)$. Таким образом, семейство $S = \{\tau(a),\mu(b,a),c(A)\}$ есть обратный спектр пространств $\tau(a)$. В силу условия A3) можно теперь утверждать, что предел P обратного спектра S непуст и компактен, т.е. существует непустое компактное подмножество

$$P \subset \prod_{a \in c(A)} \tau(a)$$

такое, что $\mu(b,a)(f(b)) = f(a)$ для всех $f \in P$ и $a,b \in c(A)$, удовлетворяющих неравенству $a \leq b$ (см., например, [8], с. 222). Далее, для любых $a \in A$ и $f \in P$ положим $\Lambda_f(a) = \hat{a}(f(a))$. Если теперь $a,b \in A$, $c = ab$ и $d = (a,b,ab)$, то

$$\Lambda_f(c) = \hat{c}(f(c)) = \hat{c}(f(d)) = \hat{a}(f(d))\hat{b}(f(d)) =$$
$$= \hat{a}(f(a))\hat{b}(f(b)) = \Lambda_f(a)\Lambda_f(b) \qquad (f \in P).$$

Значит, отображение Λ_f мультипликативно на A. Аналогично установим и линейность Λ_f. Значит, $\Lambda_f \in \mathrm{Hom}A$ для всех $f \in P$. При этом $(\Lambda_f(a_1),\Lambda_f(a_2),\ldots,\Lambda_f(a_n)) \in sp(a)$ $(a = (a_1,a_2,\ldots,a_n) \in A^n)$, поскольку $f(a) \in \tau(a)$ и $\hat{a}_i(f(a)) = \hat{a}_i(f(a_i))$ $(f \in P,\ i \in \mathbb{N}_n)$. Пусть $\Delta = \{\Lambda_f\colon f \in P\}$. Так как отображение $f \longrightarrow \Lambda_f$ является непрерывным отображением P на Δ, множество Δ непусто и компактно и, как уже было отмечено, $\hat{a}(\Delta) \subset sp(a)$ $(a \in c(A))$.

Пусть, наконец, выполнено и условие (4.1). Тогда все

---

[2] Через $\Lambda|[a]$ обозначается ограничение гомоморфизма $\Lambda \in \mathrm{Hom}[b]$ на алгебру $[a]$.

связующие отображения $\mu(b,a)$ являются отображениями "на" и, следовательно, для всех $a \in c(A)$ проекция $f \longrightarrow f(a)$ множества P в $\tau(a)$ также является отображением "на" (см. [8], с.223). Поэтому, если $\bar{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \in sp(a)$ для некоторого набора $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n) \in A^n$, то найдутся $\Lambda \in \tau(a)$ и $f \in P$ такие, что $f(a) = \Lambda$ и $\Lambda(a_i) = \alpha_i$ с $i \in \mathbb{N}_n$. Теперь $\hat{A}_f(a_i) = \hat{a}_i(f(a)) = \Lambda(a_i) = \alpha_i$ с $i \in \mathbb{N}_n$ и, поэтому, $\hat{a}(A_f) = \bar{\alpha}$.

Справедливость импликации (4.2) $\Rightarrow$ (4.1) очевидна. Теорема доказана.

<u>Замечание 1</u>. Пусть sp - совместный спектр на $\mathbb{K}$-алгебре A с единицей. Нетрудно проверить, что тогда и отображение $a \longrightarrow \overline{sp(a)}$ $(a \in c(A))$, где $\overline{sp(a)}$ - замыкание множества $sp(a)$ в $\mathbb{K}^n$, является совместным спектром на A. Кроме того, если совместный спектр sp удовлетворяет условию A4), то этому условию удовлетворяет и совместный спектр $a \longrightarrow \overline{sp(a)}$ $(a \in c(A))$.

<u>Замечание 2</u>. Следует отметить, что если sp - совместный спектр на $\mathbb{K}$-алгебре A с единицей и $\Delta \subset \mathrm{Hom}A$ - такое непустое компактное подмножество, что справедливо условие (4.2), то, как легко вытекает из следующей леммы, это множество Δ определено однозначно.

<u>Лемма 1</u>. Пусть A - $\mathbb{K}$-алгебра с единицей, $S \subset A$ - непустое подмножество, $\Delta \subset \mathrm{Hom}A$ - компактное подмножество и пусть λ - отображение S в $\mathbb{K}$ такое, что

$$(\lambda(s_1),\lambda(s_2),\ldots,\lambda(s_n)) \in \hat{s}(\Delta) \quad (s = (s_1,s_2,\ldots,s_n) \in c(S)).$$

Тогда отображение λ продолжается до гомоморфизма $\bar{\lambda} \in \Delta$.

<u>Доказательство</u>. Положив $\Delta_s = \{\Lambda \in \Delta : \Lambda(s) = \lambda(s)\}$ для каждого $s \in S$, заметим, что семейство множеств $\{\Delta_s\}$ $(s \in S)$ является центрированным семейством замкнутых в Δ множеств и, следовательно (см. [8], с.196), найдется гомоморфизм

$$\bar{\lambda} \in \bigcap_{s \in S} \Delta_s \subset \Delta,$$

который и является продолжением функции λ. Лемма доказана.

Из теоремы 4 получим:

<u>Следствие 1</u>. Пусть A - $\mathbb{K}$-алгебра с единицей. Пространство HomA непусто тогда и только тогда, когда на A существует совместный спектр sp, удовлетворяющий условиям

A3) и A4).

<u>Следствие 2</u>. Пусть A - $\mathbb{K}$-алгебра с единицей и sp - совместный спектр на A, удовлетворяющий условиям A3), A4) и (4.1). Если $\hat{a}(\mathrm{Hom}A) \subset sp(a)$ для всех $a \in c(A)$, то $sp(a) = \hat{a}(\mathrm{Hom}A)$ для всех $a \in c(A)$.

<u>Следствие 3</u>. Пусть A - $\mathbb{K}$-алгебра с единицей, $S \subset A$ - непустое подмножество и λ - отображение S в $\mathbb{K}$. Отображение λ продолжается до гомоморфизма $\bar{\lambda} \in \mathrm{Hom}A$ тогда и только тогда, когда на A существует совместный спектр sp, удовлетворяющий условиям A3), A4) и (4.1) такой, что $(\lambda(s_1), \lambda(s_2),\ldots,\lambda(s_n)) \in sp(s)$ для всех $s = (s_1,s_2,\ldots,s_n) \in c(S)$.

Обозначим для каждого подмножества S из A через $L(S)$ - линейную оболочку в A множества $S \cup \{e_A\}$ и через $L(S)^*$ - алгебраическое сопряженное пространства $L(S)$. Следующий результат в несколько ином виде доказан в [2], с.194.

<u>Лемма 2</u>. Пусть A - $\mathbb{K}$-алгебра с единицей, $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n) \in A^n$ и $\Delta \subset \mathrm{Hom}[a]$ непустое подмножество. Пусть, далее, $\lambda \in L(a)^*$ (здесь $L(a) = L(\bigcup_{i=1}^{n}\{a_i\})$) такой гомоморфизм, что $\lambda(b) \in \hat{b}(\Delta)$ для всех $b \in L(a)$. Если

$$\left\{ \frac{\Lambda(b)}{\Lambda(a_k) - \lambda(a_k)} \;\middle|\; \Lambda \in \Delta,\ \Lambda(a_k) \neq \lambda(a_k) \right\} \neq \mathbb{K}$$

для всех $k \in \mathbb{N}_n$, $k > 1$ и $b \in L(\bigcup_{i=1}^{k-1}\{a_i\})$, то найдется гомоморфизм $\Lambda \in \Delta$ такой, что $\Lambda(a_k) = \lambda(a_k)$ с $k \in \mathbb{N}_n$.

Теперь, по лемме 2, из теоремы 4 вытекает

<u>Следствие 4</u>. Пусть A - $\mathbb{K}$-алгебра с единицей и sp - совместный спектр на A такой, что выполнены условия A3), A4) и (4.1), $S \subset A$ - непустое подмножество и пусть $\lambda \in L(S)^*$. Если $\lambda(b) \in sp(b)$ для всех $b \in L(S)$ и множество $sp(s)$ счетно для всех $s \in S$, то функционал λ продолжается до гомоморфизма $\bar{\lambda} \in \mathrm{Hom}[S]$.

<u>Следствие 5</u>. Пусть A и B - $\mathbb{K}$-алгебры, T - гомоморфизм A в B такой, что $T(e_A) = e_B$ и sp - совместный спектр на B, удовлетворяющий условиям A3), A4) и (4.1), и пусть Λ - некоторый гомоморфизм из $\mathrm{Hom}A$. Равносильны следующие утверждения:

(а) $\Lambda = \lambda \circ T$ для некоторого гомоморфизма $\lambda \in \mathrm{hom}B$ такого, что $\lambda(b) \in sp(b)$ $(b \in c(B))$;

(б) $\hat{a}(\Lambda) \in sp((T(a_1),T(a_2),\ldots,T(a_n)))$ $(a = (a_1,a_2,\ldots, a_n) \in A^n,\ n \in \mathbb{N})$.

Доказательство. Импликация (а) $\Rightarrow$ (б) очевидна.

(б) $\Rightarrow$ (а). Так как ядро $\ker T$ гомоморфизма T содержится в $\ker\Lambda$, то на $T(A) \subset B$ можно определить гомоморфизм Λ' с условием $\Lambda'(T(a)) = \Lambda(a)$ $(a \in A)$. Остается применить следствие 3 и лемму 1.

Следствие 6. Пусть A – $\mathbb{K}$-алгебра с единицей и sp – совместный спектр на A, удовлетворяющий условию A4). Тогда равносильны следующие утверждения:

(а) существует гомоморфизм $\Lambda \in \mathrm{Hom}A$ такой, что $\hat{a}(\Lambda) \in \overline{sp(a)}$ для любых $a \in c(A)$;

(б) для каждого $a \in A$ найдется число $N_a > 0$ такое, что множество $\overline{sp(a)} \cap \prod_{k=1}^{n} O(0,N_{a_k})$ непусто для всех $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n) \in c(A)$.

Доказательство. Импликация (а) $\Rightarrow$ (б) очевидна.

(б) $\Rightarrow$ (а). Положим

$$sp_0(a) = \{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \in \overline{sp(a)} : |\alpha_k| < N_{a_k} \text{ с } k \in \mathbb{N}_n\},$$

где $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n) \in c(A)$. Тогда, как легко установить (см. замечание 1), $\overline{sp_0}$ является совместным спектром на A, удовлетворяющим условиям A3) и A4). Согласно теореме 4, найдется теперь гомоморфизм $\Lambda \in \mathrm{Hom}A$ такой, что $\hat{a}(\Lambda) \in \overline{sp_0(a)} \subset \overline{sp(a)}$ для всех $a \in c(A)$. Следствие доказано.

Пусть A - $\mathbb{K}$-алгебра с единицей. Для всех $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n) \in A^n$ $(n \in \mathbb{N})$ положим

$$\sigma_l^A(a) = \{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \sum_{k=1}^{n} b_k(a_k - \alpha_k e_A) \neq e_A \text{ для всех } b_1,b_2,\ldots,b_n \in A\},$$

$$\sigma_r^A(a) = \{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \sum_{k=1}^{n} (a_k - \alpha_k e_A)b_k \neq e_A \text{ для всех } b_1,b_2,\ldots,b_n \in A\},$$

$$\sigma^A(a) = \sigma_l^A(a) \cup \sigma_r^A(a)$$

Легко убедиться, что отображения σ^A, σ_l^A и σ_r^A удовлетворяют условию A1). Но они удовлетворяют и условию A2), что легко вытекает из следующего результата (см. [18], с. 99).

Лемма 3. Пусть A - $\mathbb{K}$-алгебра с единицей, $n \in \mathbb{N}$, $p \in P(A^n)$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$ и $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$. Тогда существуют элементы $b_k, c_k \in A$ с $k \in \mathbb{N}_n$ такие, что

$$p(a) - p((\alpha_1 e_A, \alpha_2 e_A, \dots, \alpha_n e_A)) = \sum_{k=1}^{n} b_k(a_k - \alpha_k e_A) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (a_k - \alpha_k e_A)c_k.$$

Совместные спектры $\sigma^A(a)$, $\sigma_l^A(a)$ и $\sigma_r^A(a)$ для набора $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ элементов банаховой алгебры введены в [10]. Следует отметить, что иногда эти совместные спектры называются совместными спектрами Харта, так как их довольно тщательно изучил Р.Харт (см. [18,19,20]).

Следствие 7. Пусть A - $\mathbb{K}$-алгебра с единицей. Если множество $\sigma^A(a)$ ограничено для всех $a \in A$, то множество HomA непусто в том и только в том случае, когда $\sigma^A(a)$ непусто для всех $a \in c(A)$.

Пусть, наконец, A - Q-алгебра с единицей над $\mathbb{K}$ такой, что множество HomA непусто, $r_A(a)$ - спектральный радиус элемента $a \in A$ в алгебре A, т.е.

$$r_A(a) = \sup \{ |\alpha| : \alpha \in \sigma^A(a) \},$$

C(HomA,$\mathbb{K}$) - алгебра всех $\mathbb{K}$-значных непрерывных функций на[3] HomA, наделенная равномерной топологией и пусть $\hat{A} = \{\hat{a} : a \in A\} \subset C(\mathrm{Hom}A, \mathbb{K})$. Хорошо известно, что если A является и почти коммутативной[4] GM-алгеброй, то $\sigma^A(a) = \hat{a}(\mathrm{Hom}A)$ для всех $a \in c(A)$ (ср. [22], с. 308).

Следствие 8. Пусть A - $\mathbb{C}$-алгебра , B - почти коммутативная GM-алгебра, которая является и Q-алгеброй и пусть T - гомоморфизм из A в B такой, что $T(e_A) = e_B$. Если

(a) подалгебра $\{ \hat{b} \in \hat{B} : b = T(a),\ a \in A \} \subset C(\mathrm{Hom}B, \mathbb{C})$ всюду плотна в $\hat{B}$

и

---

[3] Если A является Q-алгеброй с единицей, то пространство HomA компактно (см.,например, [22], с.187).

[4] Алгебра A называется почти коммутативной, если фактор-алгебра A/RadA алгебры A по радикалу Джекобсона RadA коммутативна.

(б) $r_A(a) = r_B(T(a))$ для всех $a \in A$,

то отображение $T^* : \Lambda \longrightarrow \Lambda\circ T$ из HomB в HomA есть гомеоморфизм пространства HomB на HomA.

Доказательство. Покажем, во-первых, что T^* - отображение "на". Так как $\sigma^B(b) = \hat{b}(\mathrm{Hom}B)$ для всех $b \in c(B)$, то, согласно следствию 5, достаточно убедиться в том, что $\hat{a}(\mathrm{Hom}A) \subset \sigma^B((T(a_1),T(a_2),\dots,T(a_n)))$ $(a = (a_1,a_2,\dots,a_n) \in A^n$. Предположим противное. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} b_k(T(d_k) - \Lambda_0(d_k)e_B) = e_B$$

для некоторых $\Lambda_0 \in \mathrm{Hom}A$, $b_k \in B$ и $d_k \in A$ $(k \in \mathbb{N}_n)$ и если $\varepsilon > 0$ - любое число, то (согласно условию (а)) найдутся $c_k \in A$ $(k \in \mathbb{N}_n)$ такие, что

$$\sup\{|\lambda(b_k - T(c_k))| : \lambda \in \mathrm{Hom}B\} < \varepsilon.$$

Теперь для всех $\lambda \in \mathrm{Hom}B$ имеем

$$|\lambda(T(e_A - \sum_{k=1}^{n} c_k g_k))| \le \sum_{k=1}^{n} |\lambda(T(g_k))|\,|\lambda(b_k - T(c_k))| \le$$

$$\le n\varepsilon \max\{r_B(T(g_k)) : k \in \mathbb{N}_n\},$$

где $g_k = d_k - \Lambda_0(d_k)e_A$ $(k \in \mathbb{N}_n)$. Но, поскольку

$$1 = \Lambda_0(e_A - \sum_{k=1}^{n} c_k g_k) \le r_B(T(e_A - \sum_{k=1}^{n} c_k g_k)) =$$

$$= \sup\{|\lambda(T(e_A - \sum_{k=1}^{n} c_k g_k))| : \lambda \in \mathrm{Hom}B\}$$

для всех $c_k \in A$ с $k \in \mathbb{N}_n$, то это невозможно. Следовательно, $\hat{a}(\mathrm{Hom}A) \subset \sigma^B((T(a_1),T(a_2),\dots,T(a_n)))$ для всех $a = (a_1,a_2,\dots,a_n) \in A^n$, т.е. отображение T^* сюръективно.

Далее, используя условие (а) заметим, что T^* взаимно однозначно на HomB и, так как пространство HomB компактно и отображение T^* непрерывно, то T^* является гомеоморфизмом HomB на HomA (см., например, [8], с. 199).

Следствие 9. Пусть A и B - GM-алгебры с единицей, которые являются и Q-алгебрами и пусть T - гомоморфизм из A в B такой, что $T(e_A) = e_B$. Если алгебра B почти коммутативна и выполнено условие (а) из следствия 8, то следующие утверждения равносильны:

(б) $r_A(a) = r_B(T(a))$ для всех $a \in A$;

(в) $\sigma^A(a) = \sigma^B(T(a))$ для всех $a \in A$.

Доказательство. (б) $\Rightarrow$ (в). Убедимся сначала, что и алгебра A является почти коммутативной. В самом деле, если $a,b,c \in A$ - любые элементы, то

$$r_A(c(ab - ba)) = \sup\{|\lambda(T(c(ab - ba)))| : \lambda \in \mathrm{Hom}B\} = 0$$

и, поэтому, $ab - ba \in \mathrm{Rad}A$ для всех $a,b \in A$ (см., например, [5], с. 196). Остается применить следствие 8.

В заключение отметим, что теоремы 3 и 4 и следствия 1-9 усиливают соответствующие результаты из [4,11,12,13,14,24,25] (см., также, [5], с. 242-244, 254).

Литература

1. А б е л ь М., К о к к А. Локально псевдовыпуклые алгебры Гельфанда-Мазура // Изв. АН ЭССР. Физ. Мат.- 1988.- Т. 37.- С. 377-386.
2. В а й с И., К р у п н и к Н. Я. Продолжение предсимвола // Semin. Anal.: Oper. Equat. and Numer. Anal., 1986-1987.- Berlin, 1987.- С. 191-203.
3. И с а е в Г. А., Ф а й н ш т е й н А. С. О совместных спектрах конечных коммутативных семейств // Спектральная теория операторов и ее приложения.- 1980.- Т. 3.- С. 222-257.
4. К о к к А. Совместный спектр и продолжение гомоморфизмов топологических алгебр // Уч. зап. Тарт. ун-та.- 1989.- Т. 836.- С. 95-110.
5. Н а й м а р к М. А. Нормированные кольца. - М.: Наука, 1968.
6. Х е л е м с к и й А. Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах.- М.: Изд. Московского ун-та, 1986.
7. Х и л л е Э., Ф и л л и п с Р. Функциональный анализ и полугруппы.- М.: Изд. иностр. лит., 1962.
8. Э н г е л ь к и н г Р. Общая топология.- М.: Мир, 1986.
9. A r e n s R. The space L^ω and convex topological rings // Bull. Amer. Math. Soc.- 1946.- Vol. 52.- P. 931-935.
10. B o n s a l l F. F., D u n c a n J. Numerical ranges

of operators on normed spaces and elements of normed algebras.- Cambridge, 1971.

11. B r a n d e n b u r g L. H. On identifying the maximal ideals in Banach algebras // J. Math. Anal. and Appl.- 1975.- Vol. 50.- P. 485-510.

12 C o r a c h G., M a e s t r i p i e r i A. Extension of characters and generalized Shilov boundaries // Rev. Union. mat. argent.- 1986.- Vol. 32.- P. 211-216.

13. C o r a c h G., S u a r e z F. D. Generalized rational convexity in Banach algebras // Trab. mat. Inst. argent. mat.- 1987.- No. 112.- P. 1-41.

14. C o r a c h G., S u a r e z F. D. Extension of characters in commutative Banach algebras // Stud. math.- 1987.- Vol. 85.- P. 199-202.

15. C u r t o R. E. Connections between Harte and Taylor spectra // Rev. roum. math. pures et appl.- 1986.- Vol. 31.- P. 203-215.

16. D a s h A. T. Joint Browder spectra and tensor products // Bull. Austral. Math. Soc.- 1985.- Vol. 32.- P. 119-128.

17. F o n g C.-K., S o ł t y s i a k A. Existence of a multiplicative functional and joint spectra // Stud. math.- 1985.- Vol. 81.- P. 213-220.

18. H a r t e R. E. Spectral mapping theorems // Proc. Roy. Irish Acad.- 1972.- Vol. A72.- P. 89-107.

19. H a r t e R. E. The spectral mapping theorem for quasicommuting systems // Proc. Roy. Irish Acad.- 1973.- Vol. A73.- P. 7-18.

20. H a r t e R. E. Tensor products, multiplication operators and the spectral mapping theorem // Proc. Roy. Irish Acad.- 1973.- Vol. A73.- P. 285-302.

21. K h a l e e l u l l a S. M. Counterexamples in Topological Vector Spaces.- Berlin-Heidelberg : Springer Verlag, 1982.

22. M a l l i o s A. Topological Algebras. Selected Topics. - Amsterdam-New York: North-Holland Publ. Company, 1986.

23. S ł o d k o w s k i Z., Ż e l a z k o W. On joint spectra of commuting families of operators // Stud. math.- 1974.- Vol. 50.- P. 127-148.

24. S o ł t y s i a k A. A note on the almost left and right spectra of R.Harte // Comment. Math. Univ.

Carolinae.- 1989.- Vol. 30.- P. 317-320.

25. Müller V., Sołtysiak A. Spectrum of generators of a noncommutative Banach algebra // Stud. math.- 1989.- Vol. 93.- P. 87-95.

26. Żelazko W. An axiomatic approach to joint spectra I // Stud. math.- 1979.- Vol. 64.- P. 249-261.

Поступило
24 XI 1989

ÜHISSPEKTER JA HOMOMORFISMIDE JÄTKAMINE

A. Kokk

Resümee

Käesolevas töös on uuritud ühikuga $\mathbb{K}$-algebral ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{C}$) aksiomaatiliselt defineeritud ühisspektri ja selle algebra homomorfismide ruumi vahekorda.

Esmalt kirjeldatakse seost ühikuga $\mathbb{K}$-algebral määratud ühisspektri ja selle algebra lõplikult tekitatud alamalgebrate homomorfismide ruumide vahel.

Seejärel näidatakse, et topoloogilisel Gelfand-Mazuri Q-algebral leidub mittetriviaalne homomorfism siis ja ainult siis, kui selline homomorfism leidub igal lõplikult tekitatud alamalgebral.

Töö põhitulemus on toodud teoreemis 4, mis muuhulgas väidab, et ühikuga $\mathbb{K}$-algebra A omab mittetriviaalset homomorfismi parajasti siis, kui leidub algebral A määratud ühisspekter sp nii, et $sp((a_1,a_2,\dots,a_n)) \subset \mathbb{K}^n$ on mittetühi ja tõkestatud iga $(a_1,a_2,\dots,a_n) \in A^n$ korral.

Teoreemist 4 on järeldustena saadud ka rida tarvilikke ja piisavaid tingimusi alamalgebra homomorfismi jätkamiseks kogu algebrale.

11

JOINT SPECTRUM AND EXTENSION OF HOMOMORPHISMS

A.Kokk

S u m m a r y

The theory of joint spectrum for elements of unital Banach algebra has been studied by several authors (see, for example, [15,16,16,24,25]).

In this note we present some considerations concerning the axiomatic concept of a joint spectrum introduced by Z.Słodkowski and W.Żelazko [23,26].

We first establish a relation between the joint spectrum on a unital $\mathbb{K}$-algebra A ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$) and spaces of non-zero homomorphisms of finitely generated subalgebras of A.

Moreover, it is shown that a topological Gelfand-Mazur Q-algebra possesses a non-zero homomorphism if and only if a non-zero homomorphism (not necessarily continuous) exists on every finitely generated subalgebra of A.

For our present purpose, the most important result is Theorem 4, which states that a unital $\mathbb{K}$-algebra A has a non-zero homomorphism if and only if there exists a joint spectrum sp on A such that $sp((a_1,a_2,\dots,a_n)) \subset \mathbb{K}^n$ is non-void and bounded for every $(a_1,a_2,\dots,a_n) \in A^n$.

Finally, we derive from Theorem 4 a series of consequences, which provide necessary and sufficient conditions for a homomorphism on a subalgebra B of A to have an extension to A.

Acta et commentationes universitatis Tartuensis, 878, 1990, 83-80.

PP ENDOMORPHISM MONOIDS OF ACTS

P.Normak
Tallinn Teacher Training Institute

There is a great number of papers devoted to the homological classification of monoids, that is, to the determination of properties of a monoid S by the properties of certain classes of S-acts.

In this paper we lead our investigation to finding out some endo-homological properties of monoids. This means the determination of properties of S by certain properties of endomorphism monoids of S-acts. In [3] it is proved that End F_ξ (F_ξ - a free left S-act with ξ generators, ξ an arbitrary cardinal number) is regular iff S is regular and every left ideal of S with η generators is principal for all $1 \leq \eta \leq \xi$. By [6], S is a Baer (Rickart) monoid iff End$F$ is (F an arbitrary free left S-act).

In the present paper PP endomorphism monoids of projective and injective acts are taken into consideration. It is proved that S is left (semi)hereditary iff $\mathrm{End}_S P$ is left PP for every (finitely generated) projective left S-act ${}_S P$. It is also proved that $\mathrm{End}_S Q$ is right PP for every injective left S-act Q iff all factor acts of any injective left S-act is injective.

1. Preliminaries

In the following, S will always denote a monoid. A left S-act A is a set on which S acts unitarily from the left: $1a=a$ and $(st)a=s(ta)$ for $1,s,t\in S$, $a\in A$. An act with one generating element is called <u>cyclic</u> and a left (right) ideal with one generating element - <u>principal</u>. The projective and injective acts are defined as usual. An element $s \in S$ is called <u>right</u> e-<u>cancellable</u> if $es = s$ and from $xs = ys$, $x, y \in S$, it follows that $xe = ye$. A monoid is called left (<u>semi</u>)<u>hereditary</u> if all its (finitely generated) left ideals are projective. A monoid S is called <u>left PP</u> if all its principal left ideals are projective (as left S-acts). The category of all left S-acts is denoted by S-Act. A left S-act G is called <u>generator</u> if for different S-homomorphisms $\alpha, \beta : X \longrightarrow Y$ there exists a homomorphism $\gamma : G \longrightarrow X$ such that $\gamma\alpha \neq \gamma\beta$. The injective envelope of an S-act A is denoted by $E(A)$ coproduct of acts by $\amalg$ and the Rees factor act of X and Y by X/Y. An S-act is called <u>weakly</u> (f-)<u>injective</u> if it is injective relative to monomorphisms of (finitely generated) left ideals of S into S.

We recall the following facts:

<u>1.1. Lemma</u>([4]. Proposition 1). A principal left ideal Ss, $s \in S$, is projective if and only if s is right e-cancellable for some $e \in S$.

<u>1.2. Lemma</u>([4]. Corollary 2). A monoid S is left PP if and only if every principal left ideal of S is generated by a right e-cancellable element for some $e \in S$.

<u>1.3. Lemma</u>([1]. Theorem 1). A monoid S is left semihereditary (hereditary) if and only if S is left PP and incomparable principal left ideals are disjoint (and the monoid S satisfies the ascending chain condition for principal left ideals).

<u>1.4. Lemma</u>([1]. Theorem 2). The following conditions for a monoid S are equivalent:

1) S is left (semi)hereditary;

2) all (finitely generated) subacts of any projective S-act are projective;

2. PP endomorphism monoids of projective acts

In this section we consider PP endomorphism monoids of (cyclic, finitely generated) projective acts.

First we present some lemmas.

<u>2.1. Lemma</u>. Let $A \in S$-Act and $\varphi \in \mathrm{End}\, A$. If $(A)\varphi$ is projective, then φ is right $\varphi\mu$-cancellable, where $\mu : (A)\varphi \longrightarrow A$ is a monomorphism.

<u>Proof</u>. By projectivity of $(A)\varphi$ we have that there exists a monomorphism $\mu : (A)\varphi \longrightarrow A$ such that $\mu\varphi = id_{(A)\varphi}$. We

have that $(\varphi\mu)\varphi=\varphi(\mu\varphi)=\varphi$. Let now $\alpha\varphi=\beta\varphi$ for some $\alpha,\beta\in \mathrm{End}\,A$. Then $\alpha(\varphi\mu)=(\alpha\varphi)\mu=(\beta\varphi)\mu=\beta(\varphi\mu)$.

2.2. Lemma. Let $A\in S$-Act and $\varphi\in \mathrm{End}\,A$. If $\varphi^2=\varphi$ then $\varphi: A\to(A)\varphi$ is a retraction.

Proof. Let $a\in(A)\varphi$ and $i:(A)\varphi\to A$ an injection. Then there exists an $x\in A$ such that $a=(x)\varphi$. We have $(a)i\varphi=(x)\varphi i\varphi=(x)\varphi^2=(x)\varphi=a$.

2.3. Lemma. Let $G\in S$-Act be a generator and $\varphi\in \mathrm{End}\,G$ be e-cancellable for some $e\in \mathrm{End}\,G$. Then there exists a retraction $G\to(G)\varphi$.

Proof. By Lemma 2.2 it sufficies to show that $(G)\varphi\cong(G)e$. Define a mapping $\alpha:(G)e\to(G)\varphi$ setting $((g)e)\alpha=(g)\varphi$. If $(g_1)e=(g_2)e$ then $(g_1)\varphi=(g_1)e\varphi=(g_2)e\varphi=(g_2)\varphi$. Hence α is a correctly defined homomorphism. Obviously α is an epimorphism. Let now $(g_1)\varphi=(g_2)\varphi$ for some elements $g_1,g_2\in G$. By [5, Proposition 4.1] there exists an epimorphism $\varepsilon: G\to S$. Let $(g)\varepsilon=1$ for an element $g\in G$. Define homomorphisms $x,y: S\to G$ setting $(s)x=sg_1$ and $(s)y=sg_2$. Then $\varepsilon x\varphi=\varepsilon y\varphi$ and hence $\varepsilon xe=\varepsilon ye$ from which we get $xe=ye$ and therefore $(g_1)e=(1)xe=(1)ye=(g_2)e$. Hence α is an isomorphism. From Lemma 2.2 it follows that $(G)\varphi\cong(G)e$ is a retract of G.

2.4. Proposition. Let $e:F\to P$ be a retraction with F free. If $\mathrm{End}\,F$ is a left PP-monoid then so is $\mathrm{End}\,P$.

Proof. Let $a\in \mathrm{End}\,P$ be an element and let $xa=ya$ for some elements $x,y\in \mathrm{End}\,P$. Denote with i the embedding $P\to F$. Then $ie=1_P$. From the equality $xa=ya$ we have $exieai=eyieai$. By Lemma 1.2 there exists an element $f\in \mathrm{End}\,F$ such that

$$exif=eyif \tag{1}$$

and $fei\cdot eai=feai=eai=1_F\cdot eai$. Using once more Lemma 1.2 we get $feif=1_Ff=f$. Now we have $ifea=ifeaie=ieaie=a$ and, by equality (1), $xife=iexife=ieyife=yife$. Hence a is right ife-cancellable and therefore $\mathrm{End}\,P$ is a left PP-monoid by Lemma 1.2.

2.5. Theorem. A monoid S is left PP if and only if $\mathrm{End}\,P$ is left PP for every cyclic projective S-act P.

Proof. Sufficiency follows from the isomorphism $\mathrm{End}\,S\cong S$.

Necessity. Let S be a left PP-monoid and P a cyclic projective left S-act. Let $\varphi\in \mathrm{End}\,P$. Then $(P)\varphi\subseteq P\subseteq S$ is a cyclic left S-act and therefore projective.

From Lemma 2.1 we get that φ is right e-cancellable for some element $e \in \mathrm{End}\,P$. Hence $\mathrm{End}\,P$ is left PP, by Lemma 1.2.

Because $\mathrm{End}\,Se \cong eSe$ for an idempotent ([5], Lemma 5.2), we get from Lemma 1.2 the following

2.6. Corollary. A monoid S is left PP if and only if eSe is left PP for every idempotent $e \in S$.

2.7. Theorem. The following properties of a monoid S are equivalent:

1) S is left semihereditary;

2) $\mathrm{End}\,P$ is left PP for every finitely generated projective left S-act P;

3) $\mathrm{End}\,F$ is left PP for every finitely generated free left S-act F.

Proof. The implication 2) $\Rightarrow$ 3) is obvious.

3) $\Rightarrow$ 1). Let I be a finitely generated left ideal of S and let $\pi: F \to I$ be an epimorphism, where F is a finitely generated free left S-act. Let $i: I \to F$ be an inclusion. Because F is a generator and $\mathrm{End}\,F$ left PP by hypothesis, we get from Lemma 1.2 that $\pi i \in \mathrm{End}\,F$ is right e-cancellable for some idempotent $e \in \mathrm{End}\,F$ and from Lemma 2.3 that $I \cong (F)\pi i$ as a retract of a free S-act, is projective.

1) $\Rightarrow$ 2). Let S be a left semihereditary monoid and P a finitely generated projective left S-act. Let $\varphi \in \mathrm{End}\,P$. Then $(P)\varphi \subseteq P$ and $(P)\varphi$ is finitely generated. By Lemma 1.4 we have that $(P)\varphi$ is projective and by Lemma 2.1 that φ is right e-cancellable for some element $e \in \mathrm{End}\,P$. From Lemma 1.2 we get that $\mathrm{End}\,P$ is left PP

Replacing finitely generated projective (free) left S-acts in Theorem 2.7 by arbitrary projective (free) left S-acts we get the following

2.8. Theorem. The following properties of a monoid are equivalent:

1) S is left hereditary;

2) $\mathrm{End}\,P$ is left PP for every projective left S-act P;

3) $\mathrm{End}\,F$ is left PP for every free left S-act F.

Theorems 2.7 and 2.8 can be generalized. Call a monoid c-hereditary (c an arbitrary cardinal number) if all its c-generated left ideals are projective. Then we have the following

2.9. Theorem. The following properties of a monoid S are equivalent:

1) S is left C-hereditary;

2) $\operatorname{End} P$ is left PP for every C-generated projective left S-act P;

3) $\operatorname{End} F$ is left PP for every C-generated free left S-act F.

Next we construct a left hereditary monoid S and a finitely generated projective left S-act P such that $\operatorname{End} P$ is not semi-hereditary.

2.9. Example. Let $S=\{0;1\}$ and $P=S\amalg\theta$, where θ is a one-element left S-act. Then $\operatorname{End} P$ is isomorphic to the following monoid $E=\{x;y;z;\omega;a;1\}$:

$\cdot$	x	y	z	ω	a	1
x	x	x	ω	ω	x	x
y	x	y	z	ω	x	y
z	x	z	y	ω	x	z
ω	x	ω	x	ω	x	ω
a	x	x	ω	ω	a	a
1	x	y	z	ω	a	1

Then Ey and Ea are incomparable with $Ey\cap Ea\neq\emptyset$. By Lemma 1.3 the monoid E is not left semihereditary.

The following essential problem arises: could the conditions 2) and 3) in Theorems 2.7 and 2.8 be strengthened restricting the class of all (finitely generated) projective left S-acts, for example, to the class of all cyclic left S-acts. A partial answer follows in the

2.10. Proposition. Let S be a monoid with central idempotents. Then S is left (semi)hereditary if and only if $\operatorname{End} P$ is left (semi)hereditary for every cyclic projective left S-act P.

Proof. Sufficiency follows from the isomorphism $\operatorname{End} S\cong S$.

Necessity. Let P be a cyclic projective left S-act. Then $P\cong Se$ for an idempotent $e\in S$ ([5], Theorem 3.7). By Theorem 2.5 we have that $eSe\cong \operatorname{End} P$ is a left PP monoid. Let now $I_1, I_2\subseteq eSe$ be noncomparable principal left ideals and let $I_i'=\{s\in S\mid ese\in I_i\}$, $i=1,2$. It is easy to show that I_1' and I_2' are incomparable left ideals of S, hence disjoint. This follow $I_1\cap I_2=\emptyset$. Let now $I_1\subseteq I_2\subseteq\ldots$ be an ascending chain of principal left ideals in eSe. Then $I_1'\subseteq I_2'\subseteq\ldots$, where $I_i'=\{s\in S\mid ese\in I_i\}$ is an ascending chain of principal left ideals in S. The rest follows from Lemma 1.3.

3. PP endomorphism monoids of injective acts

In the ring and module theory, the analogue of Theorem 2.8 can be dualized: in [7] it is shown that a ring R is left hereditary if and only if $\mathrm{End}\, Q$ is right semihereditary for every injective left R-module Q. As we see from the following, respective duality takes place for monoids and acts as well.

<u>3.1. Theorem</u>. $\mathrm{End}\, Q$ is a right PP-monoid for every injective left S-act Q if and only if all factor acts of any injective left S-act are injective.

<u>Proof. Necessity</u>. Let Q' be an injective left S-act and $\varphi: Q' \longrightarrow A$ an epimorphism. Let $Q = E(Q' \amalg A \amalg E(E(A)/A))$. By injectivity of Q' there exists a retraction $\varrho: Q \longrightarrow Q'$ and hence $\varrho\varphi: Q \longrightarrow A$ is an epimorphism. If $i: A \longrightarrow Q$ is an embedding then $\varrho\varphi i \in \mathrm{End}\, Q$. By Lemma 1.2 $\varrho\varphi i$ is left e-cancellable for some idempotent $e \in \mathrm{End}\, Q$. From Lemma 2.2 we get that $(Q)e$ as a retract of Q is injective. We have $A = (A)i = (Q)\varrho\varphi i = (Q)\varrho\varphi i e \subseteq (Q)e$. By injectivity of $(Q)e$ we have that $E(A) \subseteq (Q)e$ and that there exists a retraction $\pi_1: (Q)e \longrightarrow E(A)$. Let $\pi_2: E(A) \longrightarrow E(A)/A$ be a canonical epimorphism and $i_1: E(A)/A \longrightarrow Q$ an embedding. We have the following diagram

$$\begin{tikzcd}
Q' \arrow[r, "\varphi"] & A \arrow[dl, "i"'] & & & \\
Q \arrow[u, "\varrho"] \arrow[r, "e"] & (Q)e \arrow[r, "\pi_1"] & E(A) \arrow[r, "\pi_2"] & E(A)/A \arrow[r, "i_1"] & Q
\end{tikzcd} .$$

Denote the zero $(A)\pi_2 i_1$ in Q with z. Let $\theta: Q \longrightarrow Q$ be a zero homomorphism such that $(Q)\theta = z$. Then $\varrho\varphi i e\pi_1\pi_2 i_1 = \varrho\varphi i\theta$ from which we get $e\pi_1\pi_2 i_1 = e \cdot e\pi_1\pi_2 i_1 = e\theta = \theta$. Suppose that there exists an element q in $E(A)$ A. Then we have $(q)e\pi_1\pi_2 i_1 \neq z = (q)\theta$ a contradiction. Hence $E(A) = A$ and therefore A is injective.

<u>Sufficiency</u>. Let Q be an injective left S-act and $\alpha \in \mathrm{End}\, Q$. By hypothesis $(Q)\alpha$ is injective, hence there exists a retraction $\pi: Q \longrightarrow (Q)\alpha$. Denote $e = \pi i$ where $i: (Q)\alpha \longrightarrow Q$ is the injection. Then $\alpha e = \alpha\pi i = \alpha$ Let now

$\beta, \gamma \in$ End Q be endomorphisms such that $\alpha\beta = \alpha\gamma$. Then $(q)\beta = (q)\gamma$ for every $q \in (Q)\alpha$. Because $(Q)\alpha = (Q)e$ we get that $e\beta = e\gamma$. Hence α is left e-cancellable and therefore End Q is right PP by Lemma 1.2.

Because S is left hereditary if and only if all factor acts of any left injective S-act are weakly injective [1, Lemma 1.4], we have the following

3.2. Corollary.(of. [1], Corollary to Theorem 2). If $End\,Q$ is a right PP-monoid for every injective left S-act Q then S is left hereditary.

From Theorem 3.1 and Theorems 1 and 5 of [2] it follows that Corollary 3.2 is not invertible.

The question arises whether there exists a convenient subclass $\mathfrak{A}$ of all injective left S-acts (for example: all injective cogenerators, all character acts of projective right S-acts etc.) such that left hereditary of S is equivalent to the right PP property of $End\,Q$ for all acts from $\mathfrak{A}$.

References

1. D o r o f e e v a M. P. Hereditary and semihereditary monoids// Semigroup Forum. - 1972. -V.4.-P. 301-311.
2. D o r o f e e v a M. P. Injective and flat acts over hereditary monoids// Vestn. MGU. Ser. mat.,mech. 1973. - № 1.- P. 47-51 (Russian).
3. F l e i s c h e r V. G. On endomorphisms of free acts// Tartu Ülik. Toimetised.-1974.- V.336.- P.189-205 (Russian).
4. K i l p M. On homological classification of monoids by properties of their left ideals// Tartu Ülik. Toimetised.- 1974.-V.336.-P.178-188.
5. K n a u e r U. Projectivity of acts and Morita equivalence of monoids//Semigroup Forum.- 1972.-V.3.-P.359-370.
6. K n a u e r U. A note on Baer monoids// Semigroup Forum. -1976/77.-V.2.- P. 143-148.
7. L e n z i n g H. Halberbliche Endomorphiemenringe//Math. Z.-1970.-V.118.- P.219-240.

Received
13 III 1989

POLÜGOONIDE PP ENDOMORFISMIMONOIDID

P.Normak

R e s ü m e e

Artiklis näidatakse, et monoid S on vasakult (pool) pärilik parajasti siis kui $End_S P$ on vasakult PP-monoid kõikide (lõplikult moodustatud) projektiivsete vasakpoolsete S-polügoonide P korral. $End_S Q$ on PP-monoid paremalt kõikide injektiivsete vasakpoolsete S-polügoonide Q korral parajasti siis, kui injektiivsete vasakpoolsete S-polügoonide faktorid on injektiivsed.

PP-МОНОИДЫ ЭНДОМОРФИЗМОВ ПОЛИГОНОВ

П.Нормак

Р е з ю м е

Моноид называется левым PP-моноидом, если все его главные левые идеалы проективны. Моноид называется (полу)наследственным слева, если все его (конечно порожденные) левые идеалы проективны. Показано, что моноид S является (полу)наследственным слева тогда и только тогда, когда $End_S P$ является правым PP-моноидом для всех проективных (конечно порожденных) левых S-полигонов P. $End_S Q$ является правым PP-моноидом для всех инъективных левых S-полигонов Q тогда и только тогда, когда гомоморфные образы инъективных левых S-полигонов инъективны.

Acta et commentationes universitatis Tartuensis, 878, 1990, 91-102.

МОНОИДЫ СТРОГИХ ЭНДОМОРФИЗМОВ ОБОБЩЕННЫХ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРАФОВ

У.Нуммерт
Лаборатория прикладной математики

Понятие лексикографического произведения графов впервые появилось в 1959 г. в работе [3] Ф.Харари. Им же был поставлен вопрос о том, в каких случаях группа автоморфизмов такого произведения является сплетением групп графов-сомножителей. Ответ на этот вопрос впоследствии был получен Г.Сабидусси ([8], [9]) и (в обобщенной форме) Г.Хеммингером ([4], [5]). Аналогичная проблема для моноидов строгих эндоморфизмов рассматривалась в работах [6], [7] У.Кнауэра и в статье [1] автора.

Настоящая статья по существу является продолжением работы [1]. Выясненная в [1] связь между моноидом строгих эндоморфизмов конечного графа и группой автоморфизмов его фактора используется для "поднятия" результата Р.Хеммингера ([5]) на случай строгих эндоморфизмов. Приводится также критерий S-несжимаемости обобщенного лексикографического произведения конечных графов.

1. Предварительные сведения.

Графы рассматриваем неориентированные, без петель и кратных ребер. Множества *вершин* и *ребер* графа X обозначим соответственно через $V(X)$, $E(X)$ (вместо $x \in V(X)$ будем писать $x \in X$). Граф X является *конечным*, если конечно множество $V(X)$; *связным*, если для любых вершин $x,x' \in X$, $x \neq x'$ найдутся вершины $z_0,\ldots,z_n \in X$ такие, что $z_0=x$, $z_n=x'$, $[z_i,z_{i-1}] \in E(X)$ при $i=1,\ldots,n$; и *полным*, если $[x,x'] \in E(X)$ при любых $x,x' \in X$,

$x \neq x'$. Полный граф на n вершинах будем обозначать через K_n. *Дополнением* графа X называется граф $\overline{X}$ с $V(\overline{X})=V(X)$, $E(\overline{X})=\{[x,x'] : x \neq x', [x,x'] \notin E(X)\}$. Дополнение к полному графу назовем *вполне несвязным*. Отметим, что всегда по крайней мере один из графов X, $\overline{X}$ является связным.

Граф Y является *подграфом* графа X, если $V(Y) \subseteq V(X)$ и $E(Y)$ есть ограничение $E(X)$ на подмножество $V(Y)$. Максимальные связные подграфы графа называются его *(связными) компонентами*. *Окрестностью* вершины $x \in X$ назовем множество $N(x)=\{x' \in X : [x,x'] \in E(X)\}$. Вершина x с $N(x)=\varnothing$ называется *изолированной*.

Отображение $\varphi : X \to Y$ называется *гомоморфизмом* графов, если $[x,x'] \in E(X)$ влечет $[\varphi(x),\varphi(x')] \in E(X)$. Гомоморфизм φ является *строгим*, если $[y,y'] \in E(Y)$ влечет $[x,x'] \in E(X)$ для всех $x,x' \in X$ таких, что $\varphi(x)=y$, $\varphi(x')=y'$. Биективный строгий гомоморфизм называется *изоморфизмом*. Множества всех гомоморфизмов, всех строгих гомоморфизмов и всех изоморфизмов из X в Y обозначим соответственно через $\mathrm{Hom}(X,Y)$, $\mathrm{SHom}(X,Y)$ и $\mathrm{Isom}(X,Y)$. В случае $X=Y$ говорим о *(строгих) эндоморфизмах* и *автоморфизмах* и употребляем обозначения $\mathrm{End}(X)$, $\mathrm{SEnd}(X)$ и $\mathrm{Aut}(X)$. Очевидно, что $\mathrm{End}(X)$ и $\mathrm{SEnd}(X)$ — моноиды, $\mathrm{Aut}(X)$ — группа, и $\mathrm{Aut}(X)=\mathrm{Aut}(\overline{X})$. Моноиды $\mathrm{End}(X)$ и $\mathrm{SEnd}(X)$, вообще говоря, при переходе к дополнительному графу не сохраняются.

Граф X называется *S-несжимаемым*, если $\mathrm{Aut}(X)=\mathrm{SEnd}(X)$.

Определим на множестве вершин графа X отношение эквивалентности R, положив xRx', если $N(x)=N(x')$. *Фактор-графом* графа X назовем граф $\mathcal{F}(X)$ с множеством вершин $V(X)/R$ и множеством ребер $E(\mathcal{F}(X))=\{[R_x,R_{x'}] : [x,x'] \in E(X)\}$. Отметим, что графы X и $\mathcal{F}(X)$, а также $\overline{X}$ и $\overline{\mathcal{F}(X)}$ связны или несвязны одновременно.

Обобщенным лексикографическим произведением графов X, Y_x $(x \in X)$ называется граф $Z=X[(Y_x)_{x \in X}]$ с множеством вершин $V(Z)=\{(x,y) : x \in X, y \in Y_x\}$ и множеством ребер $E(Z)=\{[(x,y),(x',y')]$: либо $[x,x'] \in E(X)$, либо $x=x'$, $[y,y'] \in E(Y_x)\}$. *Простое лексикографическое произведение* получим, если $Y_x \cong Y$ при всех $x \in X$.

Пусть Φ, Θ некоторые моноиды преобразований на множествах вершин графов X, Y соответственно. *Сплетением* $\Phi \,\mathrm{wr}\, \Theta$ назовем моноид, построенный на множестве $\Phi \times F(V(X),\Theta)$, с умножением $(\varphi,f)(\psi,g)=(\varphi\psi,f_\psi g)$ (здесь $F(V(X),\Theta)$ — множество всех отображений из $V(X)$ в Θ и $f_\psi g(x)=f(\psi(x))g(x)$ при $x \in X$). Моноид $\Phi \,\mathrm{wr}\, \Theta$, действуя на множестве $V(X) \times V(Y)$ по правилу

$(\varphi,f)(x,y)=(\varphi(x),f(x)y)$, может рассматриваться как моноид преобразований графа $X[Y]$.

Пусть теперь X, Y_x $(x\in X)$ графы, Φ некоторый моноид преобразований графа X, и $\mathcal{K}_S$, $\mathcal{K}_G$ малые категории с $Obj(\mathcal{K}_S)=$ $=Obj(\mathcal{K}_G)=\{Y_x : x\in X\}$, $Mor(Y_x, Y_{x'})=SHom(Y_x, Y_{x'})$ в категории $\mathcal{K}_S$ и $Mor(Y_x, Y_{x'})=Isom(Y_x, Y_{x'})$ в категории $\mathcal{K}_G$. Далее через $\mathcal{K}$ обозначим любую из категорий $\mathcal{K}_S$, $\mathcal{K}_G$. Рассмотрим в множестве $\Phi\times F(Obj(\mathcal{K}),Mor(\mathcal{K}))$ подмножество $T = \{ (\varphi,f) : \varphi\in\Phi,$ $f:Obj(\mathcal{K})\to Mor(\mathcal{K})$, $f(Y_x)\in Mor(Y_x,Y_{\varphi(x)})$ при всех $x\in X$ $\}$. Множество T с умножением $(\varphi,f)(\psi,g)=(\varphi\psi,f_\psi g)$ (где $f_\psi g(Y_x)=$ $=f(Y_{\psi(x)})g(Y_x)$) образует моноид Φ **wr** $\mathcal{K}$ — *сплетение моноида* P *с малой категорией* $\mathcal{K}$ (более общие определения см. в работе [2] В.Фляйшера). Этот моноид может рассматриваться как моноид преобразований графа $X[(Y_x)_{x\in X}]$ (действие определяется так же, как в случае простого лексикографического произведения).

В заключение раздела отметим некоторые простые факты:

<u>1.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ.</u> Для любых графов X, Y_x $(x\in X)$ имеют место включения:

(i) $Aut(X)\,\mathbf{wr}\,\mathcal{K}_G \subseteq Aut(X[(Y_x)_{x\in X}])$;

(ii) $SEnd(X)\,\mathbf{wr}\,\mathcal{K}_S \subseteq End(X[(Y_x)_{x\in X}])$.

Доказательство. (ii) Пусть $Z=X[(Y_x)_{x\in X}]$, $\varphi\in SEnd(X)\,\mathbf{wr}\,\mathcal{K}_S$, т.е. $\varphi=(\psi,f)$, где $\psi\in SEnd(X)$, $f(x)\in SHom(Y_x, Y_{\psi(x)})$ при всех $x\in X$. Если теперь $[(x,y),(x',y')]\in E(Z)$, то либо $[x,x']\in E(X)$, $[\psi(x),\psi(x')]\in E(X)$ и $[\varphi(x,y),\varphi(x',y')]\in E(Z)$, либо $x=x'$ и $[y,y']\in E(Y_x)$, что влечет $[f(x)y,f(x)y']\in E(Y_x)$ и снова $[\varphi(x,y),\varphi(x',y')]\in E(Z)$.

(i) Обозначим $Z=X[(Y_x)_{x\in X}]$. Пусть $\varphi=(\psi,f)\in Aut(X)\,\mathbf{wr}\,\mathcal{K}_G$. Биективность отображения φ сразу следует из биективности отображений ψ и $f(x)$ при всех $x\in X$. По (ii) φ — эндоморфизм. Пусть теперь $[\varphi(x,y),\varphi(x',y')]\in E(Z)$. Если $[\psi(x),\psi(x')]\in E(X)$, то $[x,x']\in E(X)$ и $[(x,y),(x',y')]\in E(Z)$. Если $\psi(x)=\psi(x')$, то в силу инъективности ψ имеем $x=x'$, и $[f(x)y,f(x')y']\in E(Y_x)$ влечет $x=x'$ и $[y,y']\in E(Y_x)$ (т.к. $f(x)$ изоморфизм).

X[Y,W]

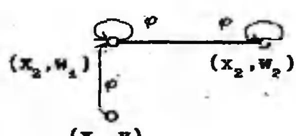

Рис. 1.

1.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Элемент сплетения $SEnd(X)wr\mathcal{K}_S$ не обязан быть *строгим* эндоморфизмом графа $X[(Y_x)_{x\in X}]$. Например, пусть $X=\overline{K_2}$, $Y=K_1$, $W=K_2$, $\psi(x_1)=\psi(x_2)=x_2$, $f(x_2)=id_W$ и $f(x_1)$ отображает единственную вершину графа Y в любую из вершин графа W (см. рис.1). Тогда $\varphi=(\psi,f)\in SEnd(X)wr\mathcal{K}_S$, но φ не является строгим эндоморфизмом графа $X[Y,W]$.

1.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X, Y_x $(x\in X)$ любые графы. Если $SEnd(X[(Y_x)_{x\in X}])\subseteq SEnd(X)wr\mathcal{K}_S$, то $Aut(X[(Y_x)_{x\in X}])=Aut(X)wr\mathcal{K}_G$.

Доказательство. Пусть $Z=X[(Y_x)_{x\in X}]$, $\varphi\in Aut(Z)$, тогда по условию $\varphi=(\psi,f)$, $\varphi^{-1}=(\psi',g)$, где $\psi,\psi'\in SEnd(X)$ и $f(x)\in SHom(Y_x,Y_{\psi(x)})$, $g(x)\in SHom(Y_x,Y_{\psi'(x)})$ при всех $x\in X$. Из $\varphi^{-1}\varphi=\varphi\varphi^{-1}=id_Z$ следует $\psi\psi'=\psi'\psi=id_X$, т.е. ψ биективно и $\psi'=\psi^{-1}$. Инъективность отображения $f(x)$ при любом $x\in X$ прямо следует из инъективности отображения φ. Допустим, что найдется $y\in Y_{\psi(x)}$ такой, что $y\notin Im\ f(x)$. Тогда $(\psi(x),y)\notin Im\ \varphi$, получим противоречие. Итак, $f(x)$ также биекции при всех $x\in X$. Предложение доказано.

2. S-несжимаемость обобщенных лексикографических произведений.

В этом разделе приводим необходимые и достаточные условия для S-несжимаемости обобщенного лексикографического произведения конечных графов в терминах S-несжимаемости графов-сомножителей. Этот результат обобщает теорему 4 из [1]; там же доказывается следующий простой факт ([1], леммы 3,3а):

2.1. ЛЕММА. (i) Пусть X любой граф, $x,x'\in X$ и $\varphi\in SEnd(X)$. Если $\varphi(x)=\varphi(x')$, то $N(x)=N(x')$;

(ii) Конечный граф X S-несжимаем тогда и только тогда, когда $N(x)\neq N(x')$ для любой пары разных вершин $x,x'\in X$.

2.2. ЛЕММА. Пусть $x,x'\in X$, $y\in Y_x$, $y'\in Y_{x'}$. Равенство $N(x,y)=N(x',y')$ выполняется в $X[(Y_x)_{x\in X}]$ тогда и только тогда, когда либо $x=x'$, $N(y)=N(y')$, либо $x\neq x'$, $N(x)=N(x')$, и вершины y и y' изолированы.

Доказательство. Обозначим $Z=X[(Y_x)_{x\in X}]$. Пусть $N(x,y)=N(x',y')$. Допустим, что $N(x)\neq N(x')$, т.е. найдется $z\in X$, $[z,x]\in E(X)$, $[z,x']\notin E(X)$. Если $z\neq x'$, то для любого $w\in Y_z$ имеем $[(z,w),(x,y)]\in E(Z)$, но $[(z,w),(x',y')]\notin E(Z)$, противоречие. Если же $z=x'$, то $[(x,y),(x',y')]\in E(Z)$, что также противоречит условию $N(x,y)=N(x',y')$. Итак, $N(x)=N(x')$. Если теперь $x\neq x'$, то $[x,x']\notin E(X)$, и для любого $w\in Y_x$ с $[w,y]\in E(Y_x)$ имеем

$[(x,w),(x,y)]\in E(Z)$, но $[(x,w),(x',y')]\notin E(Z)$. Стало быть, в этом случае y (и аналогично y') должен быть изолированным. Если же $x=x'$, то $[w,y]\in E(Y_x)$, $[w,y']\notin E(Y_x)$ влечет $[(x,w),(x,y)]\in E(Z)$, но $[(x,w),(x',y')]\notin E(Z)$. Итак, в этом случае должно быть $N(y)=N(y')$.

Обратно, если $x=x'$, $N(y)=N(y')$ и $[(z,w),(x,y)]\in E(Z)$, то либо $z=x$, $[w,y]\in E(Y_x)$, $[w,y']\in E(Y_x)$ и $[(z,w),(x',y')]\in E(Z)$, либо $[z,x]\in E(X)$, $[z,x']\in E(X)$ и снова $[(z,w),(x',y')]\in E(Z)$. Если же $x\neq x'$, $N(x)=N(x')$ и вершины y,y' изолированы, то $[(z,w),(x,y)]\in E(Z)$ влечет $[z,x]\in E(X)$, $[z,x']\in E(X)$ и $[(z,w),(x',y')]\in E(Z)$. В обоих случаях получим $N(x,y)=N(x',y')$.

<u>2.3. ТЕОРЕМА.</u> Пусть X, Y_x ($x\in X$) — конечные графы. Граф $X[(Y_x)_{x\in X}]$ S-несжимаем тогда и только тогда, когда все графы Y_x S-несжимаемы, и для каждой пары различных вершин $x,x'\in X$ с $N(x)=N(x')$ хотя бы один из графов Y_x, $Y_{x'}$ не содержит изолированных вершин.

Доказательство. Пусть граф $X[(Y_x)_{x\in X}]$ S-несжимаем. Если некоторый граф Y_x не является S-несжимаемым, то по лемме 2.1 (ii) найдутся вершины $y,y'\in Y_x$, $y\neq y'$, с $N(y)=N(y')$. Но тогда по лемме 2.2 имеем $N(x,y)=N(x,y')$, что противоречит S-несжимаемости графа $X[(Y_x)_{x\in X}]$. Если же $x,x'\in X$, $N(x)=N(x')$ и $y\in Y_x$, $y'\in Y_{x'}$ — изолированные вершины, то опять по лемме 2.2 имеем $N(x,y)=N(x',y')$. Обратно, если $X[(Y_x)_{x\in X}]$ не является S-несжимаемым, то по лемме 2.1 (ii) найдутся вершины $x,x'\in X$, $y\in Y_x$, $y'\in Y_{x'}$ такие, что $N(x,y)=N(x',y')$. Если $x=x'$, $y\neq y'$, то по лемме 2.2 имеем $N(y)=N(y')$, т.е. Y_x не является S-несжимаемым. Если же $x\neq x'$, то опять по лемме 2.2 получим, что $N(x)=N(x')$ и вершины $y\in Y_x$ и $y'\in Y_{x'}$ изолированы.

Отметим, что S-несжимаемый граф не может содержать более одной изолированной вершины (т.к. все изолированные вершины Н-эквивалентны).

3. Моноиды строгих эндоморфизмов обобщенных лексикографических произведений.

Как было отмечено выше (см. замечание 1.2), сплетение $SEnd(X)wr\mathcal{K}_S$ не всегда вкладывается в моноид $SEnd(X[(Y_x)_{x\in X}])$. Выясним сначала, при каких условиях такое вложение имеет место. Отметим, что в случае простого лексикографического произведения этот вопрос решен в [1] (теоремы 3, 3а); в общем случае ответ получается значительно более громоздким.

Пусть X, Y_x ($x\in X$) графы, $Z=X[(Y_x)_{x\in X}]$. Строгий эндоморфизм $\psi\in SEnd(X)$ назовем *Z-допустимым* , если множество $SHom(Y_x, Y_{\psi(x)})$ непусто при любом $x\in X$. Очевидно, что Z-допустимые строгие эндоморфизмы и только они встречаются в качестве первых компонент элементов сплетения $SEnd(X) wr \mathcal{K}_S$.

<u>3.1. ТЕОРЕМА.</u> Пусть X, Y_x ($x\in X$) — графы, $Z=X[(Y_x)_{x\in X}]$. Имеем $SEnd(X) wr \mathcal{K}_S \subseteq SEnd(Z)$ тогда и только тогда, когда для любых $x,x'\in X$ таких, что xRx', $x\neq x'$, любого Z-допустимого $\psi\in SEnd(X)$ такого, что $\psi(x)=\psi(x')=z$, и любых $\alpha\in SHom(Y_x, Y_z)$, $\beta\in SHom(Y_{x'}, Y_z)$ множества $Im\,\alpha$ и $Im\,\beta$ принадлежат различным компонентам графа Y_z .

Доказательство. Достаточность. Обозначим $Z=X[(Y_x)_{x\in X}]$. Пусть $\varphi\in SEnd(X) wr \mathcal{K}_S$, т.е. $\varphi=(\psi,f)$, где $\psi\in SEnd(X)$ и $f(x)\in SHom(Y_x, Y_{\psi(x)})$ при $x\in X$. В силу предложения 1.1 (ii) имеем $\varphi\in End(Z)$. Пусть теперь $[\varphi(x,y),\varphi(x',y')]\in E(Z)$. Если $[\psi(x),\psi(x')]\in E(X)$, то $[x,x']\in E(X)$, т.к. ψ — строгий эндоморфизм графа X, и $[(x,y),(x',y')]\in E(Z)$. Если же $\psi(x)=\psi(x')=z$ и $[f(x)y, f(x')y']\in E(Y_z)$, то по лемме 2.1 (i) имеем xRx'. Допустим, что $x\neq x'$, тогда получим противоречие с условием теоремы при $\alpha=f(x)$, $\beta=f(x')$. Итак, должно быть $x=x'$; теперь $f(x)=f(x')\in SHom(Y_x, Y_z)$ влечет $[y,y']\in E(Y_z)$ и $[(x,y),(x',y')]\in E(Z)$.

Необходимость. Пусть ψ — некоторый Z-допустимый строгий эндоморфизм X , $\psi(x)=\psi(x')=z$, $x\neq x'$ и $[\alpha(y),\beta(y')]\in E(Y_z)$ при некоторых $\alpha\in SHom(Y_x, Y_z)$, $\beta\in SHom(Y_{x'}, Y_z)$. Положим $f(x)=\alpha$, $f(x')=\beta$; при $u\neq x,x'$ выберем в качестве $f(u)$ любой элемент из $SHom(Y_u, Y_{\psi(u)})$ (это возможно ввиду Z-допустимости ψ). Имеем $\varphi=(\psi,f)\in SEnd(X) wr \mathcal{K}_S$ и $[(x,y),(x',y')]\in E(Z)$, но $[\varphi(x,y),\varphi(x',y')]=[(z,\alpha(y)),(z,\beta(y'))]\in E(Z)$, т.е. $\varphi\notin SEnd(Z)$.

<u>3.2. СЛЕДСТВИЕ.</u> Если $R=\Delta$ на X , то выполняется $SEnd(X) wr \mathcal{K}_S \subseteq SEnd(X[(Y_x)_{x\in X}])$ для любых графов Y_x ($x\in X$).

Переходим к нахождению условий для обратного включения: $SEnd(X[(Y_x)_{x\in X}]) \subseteq SEnd(X) wr \mathcal{K}_S$. Дальнейшие рассуждения существенно опираются на следующий общий результат (см. [1], леммы 8, 9):

<u>3.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ.</u> Пусть X — граф, имеющий конечное число R-классов. Отображение $\psi: V(X) \longrightarrow V(X)$ является строгим эндоморфизмом графа X тогда и только тогда, когда оно индуцирует подстановку на R-классах графа X, являющуюся автоморфизмом графа $\mathcal{F}(X)$.

<u>3.4. ЛЕММА.</u> Пусть X, Y_x ($x\in X$) — графы, $Q_x=\mathcal{F}(Y_x)$; $\mathcal{K}_G$ и $\mathcal{L}_G$ — соответсвенно категории, соответствующие графам X, Y_x

и X, Q_x ($x \in X$). Пусть выполнено одно из условий:

(i) $\mathrm{Aut}(X)\mathbf{wr}\mathcal{K}_G = \mathrm{Aut}(X[(Y_x)_{x\in X}])$;

(ii) $\mathrm{Aut}(X)\mathbf{wr}\mathcal{L}_G = \mathrm{Aut}(X[(Q_x)_{x\in X}])$.

Тогда отображение

$$\varphi : \mathcal{F}(X[(Y_x)_{x\in X}]) \longrightarrow X[(Q_x)_{x\in X}] \quad : \quad \varphi(R_{(x,y)}) = (x, R_y)$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Обозначим $Z=X[(Y_x)_{x\in X}]$, $W=X[(Q_x)_{x\in X}]$. Чтобы проверить корректность определения φ, достаточно показать, что каждый R-класс графа Z целиком находится внутри некоторого Y_x, т.е. равенство $N(x,y)=N(x',y')$ в Z влечет $x=x'$. В самом деле, пусть $N(x,y)=N(x',y')$, $x\neq x'$. Тогда в силу леммы 2.2 вершины y, y' изолированы в Y_x, $Y_{x'}$ соответственно. Ясно, что $\pi(y)$, $\pi(y')$ также изолированы в Q_x, $Q_{x'}$ (здесь π естественная проекция графа на его фактор), и $N(x,\pi(y))=N(x',\pi(y'))$ в графе W. Но тогда отображение $\alpha : Z \longrightarrow Z$, меняющее между собой (x,y), (x',y') и оставляющее остальные вершины на месте, является автоморфизмом графа Z, не принадлежащим $\mathrm{Aut}(X)\mathbf{wr}\mathcal{K}_G$, и аналогично, отображение $\beta : W \longrightarrow W$, меняющее между собой $(x,\pi(y))$, $(x',\pi(y'))$, принадлежит $\mathrm{Aut}(W)\setminus\mathrm{Aut}(X)\mathbf{wr}\mathcal{L}_G$.

То, что φ является изоморфизмом, прямо вытекает из леммы 2.2 и определения фактор-графа.

Далее рассмотрим только конечные графы. Строгий эндоморфизм (автоморфизм) графа $Z=X[(Y_x)_{x\in X}]$ назовем *естественным*, если для любого $x\in X$ найдется $x'\in X$ такой, что $\varphi(Y_x)\subseteq Y_{x'}$.

<u>3.5. ЛЕММА.</u> Пусть X, Y_x ($x\in X$) — любые графы, $Z=X[(Y_x)_{x\in X}]$.

(i) $\mathrm{Aut}(Z)=\mathrm{Aut}(X)\mathbf{wr}\mathcal{K}_G$ тогда и только тогда, когда все автоморфизмы графа Z естественны ;

(ii) если графы X, Y_x конечны, то $\mathrm{SEnd}(Z)\subseteq\mathrm{SEnd}(X)\mathbf{wr}\mathcal{K}_S$ тогда и только тогда, когда все строгие эндоморфизмы графа Z естественны.

Доказательство. (ii) Пусть $\varphi\in\mathrm{SEnd}(X[(Y_x)_{x\in X}])$ естественный строгий эндоморфизм, т.е. для любого $x\in X$ найдется $z\in X$ такой, что $\varphi(Y_x)\subseteq Y_z$. Тогда $\varphi(x,y)=(\psi(x),f(x)y)$, где $\psi(x)=z$. Нужно показать, что $\psi\in\mathrm{SEnd}(X)$, и для всех $x\in X$ $f(x)\in\mathrm{SHom}(Y_x, Y_{\psi(x)})$. Пусть $[x,x']\in E(X)$ и $y\in Y_x$, $y'\in Y_{x'}$. Так как графы конечны, то без ограничения общности можно считать $\varphi^2=\varphi$. Если $[x,\psi(x)]\in E(X)$, то $[(x,y),(\psi(x),f(x)y)]\in E(Z)$

и $[(\psi(x),f(x)y),(\psi(x),f(x)y)]\notin E(Z)$, противоречие. Итак, $[x,\psi(x)]\notin E(X)$ и $[x',\psi(x')]\notin E(X)$. Если теперь $\psi(x)=\psi(x')$, то $[x,\psi(x')]\notin E(X)$, $x\neq\psi(x')$, и $[(x,y),(\psi(x'),f(x')y')]\notin E(Z)$. Но с другой стороны, имеем $[(x,y),(x',y')]\in E(Z)$, откуда $[(\psi(x),f(x)y),(\psi(x'),f(x')y')]\in E(Z)$. Так как $\varphi^2=\varphi$ и φ — строгий эндоморфизм, то это приводит к противоречию. Стало быть, $\psi(x)\neq\psi(x')$, и $[\psi(x),\psi(x')]\in E(X)$. Обратно, $[\psi(x),\psi(x')]\in E(X)$ влечет $[(\psi(x),f(x)y),(\psi(x'),f(x')y')]\in E(Z)$, $[(x,y),(x',y')]\in E(Z)$ и $[x,x']\in E(X)$. Пусть теперь $y,y'\in Y_x$, $[y,y']\in E(Y_x)$. Тогда получим $[(x,y),(x,y')]\in E(Z)$, $[(\psi(x),f(x)y),(\psi(x),f(x)y')]\in E(Z)$ и $[f(x)y,f(x)y']\in E(Y_{\psi(x)})$. Обратно, если $[f(x)y,f(x)y']\in E(Y_{\psi(x)})$, то получим $[(\psi(x),f(x)y),(\psi(x),f(x)y')]\in E(Z)$, $[(x,y),(x,y')]\in E(Z)$ и $[y,y']\in E(Y_x)$.

(i) Если φ — автоморфизм, то φ^{-1} также автоморфизм, и имеем $\varphi=(\psi,f)$, $\varphi^{-1}=(\psi',g)$, $\psi\psi'=\psi'\psi=\mathrm{id}_X$, т.е. ψ биекция. Теперь рассуждение пункта (ii) можно провести без предположения о конечности рассматриваемых графов, т.к. оно потребовалось только при доказательстве того, что $\psi(x)\neq\psi(x')$ в случае $[x,x']\in E(X)$. Итак, ψ — автоморфизм, $f(x)$ — строгие гомоморфизмы. Инъективность отображений $f(x)$ следует из биективности φ. Если существует $y\in Y_{\psi(x)}$, $y\notin \mathrm{Im}\, f(x)$, то ввиду инъективности ψ получим $(\psi(x),y)\notin \mathrm{Im}\,\varphi$, противоречие.

Импликации в другую сторону очевидны.

Следующая теорема указывает способ "поднятия" результатов о группе автоморфизмов лексикографического произведения графов на случай его моноида строгих эндоморфизмов.

<u>3.6. ТЕОРЕМА.</u> Пусть X, Y_x $(x\in X)$ — конечные графы, $Q_x=\mathcal{F}(Y_x)$ и $\mathcal{L}_G$ — категория, соответствующая графам X, Q_x $(x\in X)$. Имеем $\mathrm{SEnd}(X[(Y_x)_{x\in X}])\leq \mathrm{SEnd}(X)\,\mathbf{wr}\,\mathcal{K}_S$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(X[(Q_x)_{x\in X}])=\mathrm{Aut}(X)\,\mathbf{wr}\,\mathcal{L}_G$.

Доказательство. Обозначим $Z=X[(Y_x)_{x\in X}]$, $W=X[(Q_x)_{x\in X}]$. Пусть $\mathrm{SEnd}(Z)\leq\mathrm{SEnd}(X)\,\mathbf{wr}\,\mathcal{K}_S$, тогда по предыдущей лемме все строгие эндоморфизмы графа Z естественны. В силу предложения 1.3 имеем $\mathrm{Aut}(Z)=\mathrm{Aut}(X)\,\mathbf{wr}\,\mathcal{K}_G$, поэтому по лемме 3.4 (i) имеем $\mathcal{F}(Z)\cong W$, причем любой R-класс графа Z целиком содержится в некотором Y_x. С учетом теоремы 3.3 получим, что все автоморфизмы графа W естественны, а это по лемме 3.5 влечет равенство $\mathrm{Aut}(W)=\mathrm{Aut}(X)\,\mathbf{wr}\,\mathcal{L}_G$.

Обратно, если $\mathrm{Aut}(W)=\mathrm{Aut}(X)\,\mathbf{wr}\,\mathcal{L}_G$, то по лемме 3.4 (ii) имеем $\mathcal{F}(Z)\cong W$, и все R-классы Z содержатся внутри подграфов Y_x . Теперь естественность всех автоморфизмов графа W влечет естественность всех строгих эндоморфизмов графа Z , и получим $SEnd(Z) \subseteq SEnd(X) \mathbf{wr} \mathcal{K}_S$.

3.7. СЛЕДСТВИЕ. Для конечных графов X, Y_x ($x \in X$) естественность всех автоморфизмов графа $X[(\mathcal{F}(Y_x))_{x \in X}]$ влечет естественность всех автоморфизмов графа $X[(Y_x)_{x \in X}]$.

Доказательство. Вытекает из последней леммы и предложения 1.3.

Для формулировки окончательного результата (аналога теоремы 2.21 из работы [5] Р.Кеммингера) требуется ввести некоторые понятия.

Пусть X, Y — графы. Отображение $\varphi: X \to Y$ назовем ***строгим почти-гомоморфизмом***, если при $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$, $y \neq y'$ и $\varphi(x)=y$, $\varphi(x')=y'$ имеем $[y,y'] \in E(Y)$ тогда и только тогда, когда $[x,x'] \in E(X)$. (Это понятие отличается от понятия строгого гомоморфизма, используемого в настоящей работе, тем, что допускается "склеивание" смежных вершин.)

Разбиение $\mathfrak{U}=\{A_\alpha : \alpha \in \Omega\}$ множества вершин графа X назовем ***правильным***, если для любых $\alpha \in \Omega$ и $a, a' \in A_\alpha$ имеем $N(a) \setminus A_\alpha = N(a') \setminus A_\alpha$. ***$\mathfrak{U}$-фактором*** графа X назовем граф $\mathcal{F}_{\mathfrak{U}}(X)$, имеющий множество вершин $\mathfrak{U}$ и множество ребер $E(\mathcal{F}_{\mathfrak{U}}(X)) = \{ [A_\alpha, A_\beta] :$ существуют $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$ с $[a,b] \in E(X)$ $\}$. (Определение корректно в силу правильности разбиения $\mathfrak{U}$.)

Отметим, что разбиение множества вершин любого графа на R-классы является правильным, и соответствующий $\mathfrak{U}$-фактор является фактор-графом в смысле определения, приведенного в разделе 1.

Вершину $a \in X$ назовем *точкой инверсии* графа $Z=X[(Y_x)_{x \in X}]$, если $|V(X)|>1$, вершина a изолирована либо в X, либо в $\overline{X}$, и $Y_a \cong \overline{X[(Y'_x)_{x \in X}]}$, где $Y'_x \cong Y_x$ при $x \neq a$.

3.8. ТЕОРЕМА. Пусть X, Y_x ($x \in X$) — конечные графы, $Q_x = \mathcal{F}(Y_x)$, $Z=X[(Y_x)_{x \in X}]$, $W=X[(Q_x)_{x \in X}]$. Имеем включение $SEnd(Z) \subseteq SEnd(X) \mathbf{wr} \mathcal{K}_S$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(i) если $N(x)=N(x')$, $x \neq x'$ и $Q_x \cong Q_{x'}$, то графы Y_x , $Y_{x'}$ связны;

(ii) если $N(x) \cup \{x\} = N(x') \cup \{x'\}$, $x \neq x'$ и $Q_x \cong Q_{x'}$, то графы $\overline{Y_x}$, $\overline{Y_{x'}}$ связны ;

(iii) если $\mathfrak{U}$ — собственное (т.е. отличное от $\{V(X)\}$) правильное разбиение графа X и $\sigma: V(X) \to \mathfrak{U}$ — строгий почти-гомоморфизм графа X на граф $\mathcal{F}_{\mathfrak{U}}(X)$ такой, что графы $L_{\mathbf{v}}(A)$ и

$L_W(\sigma^{-1}(A))$ изоморфны при всех $A\in\mathfrak{U}$, то все такие изоморфизмы $\sigma_A:L_W(A)\to L_W(\sigma^{-1}(A))$ естественны ;

(iv) граф W не имеет точек инверсии.

<u>3.9. СЛЕДСТВИЕ.</u> Пусть X, Y_x — конечные графы, xRx' в X и Y_x , $Y_{x'}$ имеют собственные (т.е. не равные всему графу) компоненты V_x , $V_{x'}$ такие, что $SHom(V_x,V_{x'})$ и $SHom(V_{x'},V_x)$ не пусты. Тогда $SEnd(X[(Y_x)_{x\in X}])$ содержит строгие эндоморфизмы, не являющиеся естественными.

Доказательство. Пусть $Q_x=\mathcal{F}(Y_x)$, $W=X[(Q_x)_{x\in X}]$, и π — естественная проекция графа на его фактор. Покажем, что $\pi(V_x)\cong\pi(V_{x'})$. Действительно, рассмотрим граф Z , являющийся несвязным объединением V_x и $V_{x'}$. Ввиду сделанных предположений существует строгий эндоморфизм графа Z , отображающий компоненты V_x и $V_{x'}$ друг в друга. Так как $\pi(V_x)$ и $\pi(V_{x'})$ являются компонентами графа $\mathcal{F}(Z)$, то в силу теоремы 3.3 и того очевидного факта, что любой изоморфизм переводит компоненты графа на компоненты, найдется $\varphi\in Aut(W)$ с $\varphi(\pi(V_x))=\pi(V_{x'})$, $\varphi(\pi(V_{x'}))=\pi(V_x)$.

Рассмотрим теперь разбиение $\mathfrak{U}$ графа X , состоящее из множества $A=\{x,x'\}$ и одноэлементных множеств $\{z\}$ при $z\neq x,x'$. Так как xRx', то разбиение $\mathfrak{U}$ является правильным. В роли отображения σ возьмем естественную проекцию, тогда изоморфизм $\sigma_A:L_W(A)\to L_W(A)$, отображающий $\pi(V_x)$, $\pi(V_{x'})$ друг на друга и оставляющий остальные вершины на месте, не является естественным, т.е. условие (iii) теоремы 3.8 не выполнено.

Литература

1. Н у м м е р т У. О моноиде строгих эндоморфизмов сплетения графов // Мат. заметки. - 1987. - Т.41, №6. - С.844-853.
2. Ф л я й ш е р В. О сплетениях моноидов с категориями // Изв. АН ЭССР. Физ. Матем. - 1986. - Т.35, №3. - С.237-243.
3. H a r a r y F. On the group of the composition of two graphs // Duke Math. J. - 1959. - Vol.26, N1. - P.29-34.
4. H e m m i n g e r R. L. The lexicographic product of graphs // Duke Math. J. - 1966. - Vol.33, N3. P.499-501.
5. H e m m i n g e r R. L. The group of an X-join of graphs

// J. Combin. Th. - 1968. - Vol.5, N3. - P.408-418.

6. K n a u e r U. Unretractive and S-unretractive joins and lexicographic products of graphs // J. Graph Th. - 1987. - Vol.11, N3. - P.429-440.
7. K n a u e r U., N i e p o r t e M. Endomorphisms of graphs. I. The monoid of strong endomorphisms // Arch. Math., to appear.
8. S a b i d u s s i G. The composition of graphs // Duke Math. J. - 1959. - Vol.26, N4. - P.693-696.
9. S a b i d u s s i G. The lexicographic product of graphs // Duke Math. J. - 1961. - Vol.28, N4. - P.573-578.

Поступило
29 X 1989

GRAAFIDE ÜLDISTATUD LEKSIKOGRAAFILISTE KORRUTISTE RANGETE ENDOMORFISMIDE MONOIDID

U.Nummert

R e s ü m e e

Artiklis leitakse tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et lõplike graafide üldistatud leksikograafilise korrutise rangete endomorfismide monoid:

a) sisalduks vasakpoolse komponendi rangete endomorfismide monoidi ja teatud väikese kategooria põimikus;

b) sisaldaks nimetatud põimikut;

c) langeks kokku üldistatud leksikograafilise korrutise automorfismide rühmaga.

MONOIDS OF STRONG ENDOMORPHISMS OF GENERALIZED LEXICOGRAPHIC PRODUCTS OF GRAPHS

U.Nummert

S u m m a r y

Let X, Y_x $(x\in X)$ be finite undirected graphs without loops and multiple edges, and let $\mathcal{K}_S$ denote the small category with $Obj(\mathcal{K}_S)=\{Y_x : x\in X\}$, $Mor(Y_x, Y_{x'})=SHom(Y_x, Y_{x'})$. Necessary and sufficient conditions are given for both of the inclusions $SEnd(X)\,wr\,\mathcal{K}_S\subseteq SEnd(X[(Y_x)_{x\in X}])$, $SEnd(X[(Y_x)_{x\in X}])\subseteq$

$\leq SEnd(X)\,wr\,\mathcal{X}_S$ to hold.

It is also proved that the generalized lexicographic product of finite graphs X, Y_x $(x \in X)$ is S-unretractive iff all of the graphs Y_x are, and for any pair of distinct vertices $x, x' \in X$ with equal neighbourhoods the graphs Y_x, $Y_{x'}$ contain no isolated vertices.

Acta et commentationes universitatis Tartuensis, 878 , 1990, 103-114.

ON EVEN DOUBLY STOCHASTIC MATRICES WITH MINIMAL EVEN PERMANENT

A.Rämmer
Chair of Algebra and Geometry

The permanent function has been studied for more than a century, mainly because of its effective applications in linear algebra and combinatorial theory. The development of the theory of permanents has been very rapid during the last thirty years.

Let X be a square matrix of size n with entries x_{ij} (all matrices considered in this article are real and of square type). The permanent of matrix X is defined by

$$\text{per } X = \sum_{\sigma} x_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{n\sigma(n)} ,$$

where σ runs through all permutations of $\{1,\ldots,n\}$. In this paper we are going to describe some propositions of the even permanent. The even permanent of matrix X we define by

$$\text{per}^{+}X = \sum_{\sigma'} x_{1\sigma'(1)} \cdot \ldots \cdot x_{n\sigma'(n)} ,$$

where σ' runs through all even permutations of $\{1,\ldots,n\}$. Analogically, the odd permanent of matrix X we define by

$$\text{per}^{-}X = \sum_{\sigma''} x_{1\sigma''(1)} \cdot \ldots \cdot x_{n\sigma''(n)} ,$$

where σ'' runs through all odd permutations of $\{1,\ldots,n\}$.

A matrix X is called doubly stochastic if every entry x_{ij} is nonnegative and all the row and column sums of X are equal to 1. One of the most fundamental results about doubly stochastic matrices is Birkhoff's theorem which states that the set of all doubly stochastic matrices is a convex polyhedron with the permutation matrices as vertices. In this paper we shall consider the even permanent of the doubly stochastic matrices. A matrix X is said to be even doubly stochastic if it is expressable as a convex combination of even permutation matrices. If matrix X is expressable as a convex combination of odd permutation matrices , we call it odd doubly stochastic.

A diagonal of matrix X is a set of its elements containing exactly one element from each row and column, i,e. entries $x_{1\sigma(1)},\dots,x_{n\sigma(n)}$, where σ is a permutation of $\{1,\dots,n\}$. If σ is an even permutation, the diagonal is called even, otherwise we call it odd.

§1. Properties of Even Permanent

We prove some properties of even permanent useful for us in the next chapter.

Proposition 1. If P and Q are permutation matrices of the same parity, then

$$\mathrm{per}^{+}X = \mathrm{per}^{+}PXQ. \tag{1}$$

Proof. We use the fact that the parity of permutation matrix changes if we multiply it by transposition matrix. Also, a well-known fact is that an arbitrary even (odd) permutation matrix is expressable as a product of even (odd) number of transposition matrices. Hence, let L be an even diagonal of matrix X. If we multiply matrix X on the left by

1)an even permutation matrix P, then the diagonal L changes to the even diagonal of matrix PX ;

2)an odd permutation matrix P, the diagonal L changes to the odd diagonal of matrix PX.

As we assumed permutation matrices P and Q must have the same parity. In the first case Q must be an even permutation too, therefore the diagonal L changes into the even diagonal of matrix PXQ. In the second case Q is an odd permutation matrix. Thus the diagonal L changes into the even diagonal of matrix PXQ.

We have shown that an arbitrary even diagonal of matrix X is transferred to an even diagonal of matrix PXQ by permutation matrices of the same parity. Thus $\mathrm{per}^{+}X \le \mathrm{per}^{+}PXQ$. Moreover, one can also prove that $\mathrm{per}^{+}PXQ \le \mathrm{per}^{+}X$. Therefore (1) holds.

Corollary 2. If P and Q are the permutation matrices of different parity, then

$$\mathrm{per}^{+}X = \mathrm{per}\ PXQ.$$

There is the Laplace formula for permanent of square matrix

$$\operatorname{per}X = \sum_{\beta\in Q_{r,n}} \operatorname{per}X(\alpha|\beta) \cdot \operatorname{per}X[\alpha|\beta], \tag{2}$$

where $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in Q_{r,n}$ and

$Q_{r,n} = \{(\omega_1, \dots, \omega_r) \mid \omega_i\text{-integers};\ 1 \le \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_r \le n\}$;

([4].Theorem 2.2). Here we denoted by $X[\alpha|\beta]$ the matrix with the rows of matrix X with their indexes from the sequence $\alpha \in Q_{r,n}$ and the columns of matrix X with their indexes from the sequence $\beta \in Q_{r,n}$. As well, the rest of rows and columns of matrix X form the matrix $X(\alpha|\beta)$. Our aim is to prove the corresponding formula for an even permanent.

<u>Proposition 3.</u> For any $\alpha \in Q_{r,n}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{per}^+X = &\sum_{\beta\in Q_{r,n},\ \tilde\alpha+\tilde\beta=2k} (\operatorname{per}^+X(\alpha|\beta)\cdot\operatorname{per}^+X[\alpha|\beta]+\operatorname{per}^-X(\alpha|\beta)\cdot\operatorname{per}^-X[\alpha|\beta]) + \\ &+ \sum_{\beta\in Q_{r,n},\ \tilde\alpha+\tilde\beta=2k+1} (\operatorname{per}^+X(\alpha|\beta)\cdot\operatorname{per}^-X[\alpha|\beta]+\operatorname{per}^-X(\alpha|\beta)\cdot\operatorname{per}^+X[\alpha|\beta])\end{aligned} \tag{3}$$

where $\tilde\alpha = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$ and $\tilde\beta = \sum_{i=1}^{r} \beta_i$ (k is a natural number).

<u>Proof</u>. Replacing $\operatorname{per} Y = \operatorname{per}^+Y + \operatorname{per}^-Y$ into formula (2) we have

$$\begin{aligned}\operatorname{per}^+X + \operatorname{per}^-X = &\sum_{\beta\in Q_{r,n}}(\operatorname{per}^+X(\alpha|\beta)\cdot\operatorname{per}^+X[\alpha|\beta]+\operatorname{per}^-X(\alpha|\beta)\cdot\operatorname{per}^-X[\alpha|\beta]) \\ &+ \sum_{\beta\in Q_{r,n}}(\operatorname{per}^+X(\alpha|\beta)\cdot\operatorname{per}^-X[\alpha|\beta]+\operatorname{per}^-X(\alpha|\beta)\cdot\operatorname{per}^+X[\alpha|\beta]).\end{aligned}$$

Notice that for any α and β either

$$\operatorname{per}^+X(\alpha|\beta)\cdot\operatorname{per}^+X[\alpha|\beta]+\operatorname{per}^-X(\alpha|\beta)\cdot\operatorname{per}^-X[\alpha|\beta] \le \operatorname{per}^+X \quad \text{or}$$

$$\operatorname{per}^+X(\alpha|\beta)\cdot\operatorname{per}^-X[\alpha|\beta]+\operatorname{per}^-X(\alpha|\beta)\cdot\operatorname{per}^+X[\alpha|\beta] \le \operatorname{per}^+X.$$

Indeed, by exchanging rows and columns in X it can be achieved that the rows $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ move to the first r rows and the columns $\beta_1, \dots, \beta_r$ move to the first r columns. The result is obtainable by transferring only neighboring rows and columns all together by $(\alpha_1-1)+\dots+(\alpha_r-r)+(\beta_1-1)+\dots+(\beta_r-r) = \sum_{i=1}^{r}(\alpha_i-i)+\sum_{i=1}^{r}(\beta_i-i)$ transpositions. So we have multiplied matrix X on the left and on the right with some permutation matrices (denote them P and Q). Thus P and Q have the same parity if $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i = \tilde\alpha$ and $\sum_{i=1}^{r}\beta_i = \tilde\beta$ have the same parity. By Proposition 1 and Corollary 2 if

1) $\tilde\alpha + \tilde\beta$ is even ,then

$$per^+X(\alpha|\beta)\cdot per^+X[\alpha|\beta]+per^-X(\alpha|\beta)\cdot per^-[\alpha|\beta] \le per^+X$$

and other members

$$per^+X(\alpha|\beta)\cdot per^-X[\alpha|\beta]+per^-X(\alpha|\beta)\cdot per^+X[\alpha|\beta] \le per^-X$$

2) $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$ is odd, then

$$per^+X(\alpha|\beta)\cdot per^-X[\alpha|\beta]+per^-X(\alpha|\beta)\cdot per^+X[\alpha|\beta] \le per^+X$$

and other members

$$per^+X(\alpha|\beta)\cdot per^+X[\alpha|\beta]+per^-X(\alpha|\beta)\cdot per^-X[\alpha|\beta] \le per^-X.$$

Hence summing up all the members of per^+X , we get

$$\sum_{\beta\in Q_{r,n},\,\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}=2k}(per^+X(\alpha|\beta)\cdot per^+X[\alpha|\beta]+per^-X(\alpha|\beta)\cdot per^-X[\alpha|\beta]) + \sum_{\beta\in Q_{r,n},\,\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}=2k+1}(per^+X(\alpha|\beta)\cdot per^-X[\alpha|\beta]+per^-X(\alpha|\beta)\cdot per^+X[\alpha|\beta]) =per^+X$$

where we have denoted some natural number by k.

Corollary 4. For any $\beta \in Q_{r,n}$ we have the formula

$$per^+X= \sum_{\alpha\in Q_{r,n},\,\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}=2k}(per^+X(\alpha|\beta)\cdot per^+X[\alpha|\beta]+per^-X(\alpha|\beta)\cdot per^-X[\alpha|\beta]) + \sum_{\alpha\in Q_{r,n},\,\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}=2k+1}(per^+X(\alpha|\beta)\cdot per^-X[\alpha|\beta]+per^-X(\alpha|\beta)\cdot per^+X[\alpha|\beta]) .$$

In the case of r=1 we define

$$\overline{per^+X(i|j)}= \begin{cases} per^+X(i|j), i+j=2k \\ per^-X(i|j), i+j=2k+1 \end{cases}$$

Using Proposition 3 and Corollary 4 we get (considering $per^+X[i|j]=x_{ij}$, $per^-X[i|j]=0$)

$$per^+X = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\cdot \overline{per^+X(i|j)} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\cdot \overline{per^+X(i|j)}.$$

The permanent of matrix X+Y can be calculated according to the following formula ([4],Theorem 2.1.4):

$$per\ (X+Y) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{\alpha,\beta\in Q_{r,n}} perX(\alpha|\beta)\cdot perY[\alpha|\beta] . \tag{4}$$

Combining formulas (3) and (4) we prove the following

Proposition 5. The even permanent of matrix X+Y is expressed by

$$per^+(X+Y)=\sum_{r=0}^{n} (\sum_{\alpha,\beta\in Q_{r,n},\,\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}=2k}(per^+X(\alpha|\beta)\cdot per^+Y[\alpha|\beta]+ per^-X(\alpha|\beta)\cdot per^-Y[\alpha|\beta])+ \sum_{\alpha,\beta\in Q_{r,n},\,\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}=2k+1}(per^+X(\alpha|\beta)\cdot per^-Y[\alpha|\beta]+per^-X(\alpha|\beta)\cdot per^+Y[\alpha|\beta])) , \tag{5}$$

where k has been chosen to be a positive integer.

Proof. The even permanent of matrix X+Y consists of the sum the terms of which are products of the entries from even diagonal of matrix X+Y. Replacing per $Z = \mathrm{per}^+Z+\mathrm{per}^-Z$ into (4) we get

$$\mathrm{per}^+(X+Y) + \mathrm{per}^-(X+Y)=\sum_{r=0}^{n} (\sum_{\alpha,\beta\in Q_{r,n}} \mathrm{per}^+X(\alpha|\beta)\cdot \mathrm{per}^+Y[\alpha|\beta]+$$

$$+ \mathrm{per}^-X(\alpha|\beta)\cdot \mathrm{per}^-Y[\alpha|\beta]) + \mathrm{per}^+X(\alpha|\beta)\cdot \mathrm{per}^-Y[\alpha|\beta]) +$$

$$+ \mathrm{per}^-X(\alpha|\beta)\cdot \mathrm{per}^+Y[\alpha|\beta]).$$

The other way round, arbitrary term of $\mathrm{per}^+(X+Y)$ is $(x_{1\sigma(1)}+y_{1\sigma(1)})\cdot\ldots\cdot(x_{n\sigma(n)}+y_{n\sigma(n)})$ where σ is a even permutation. Therefore term $x_{1\sigma(1)}\cdot\ldots x_{r\sigma(r)}\cdot y_{r+1\sigma(r+1)}\cdot\ldots\cdot y_{n\sigma(n)}$ belongs to $\mathrm{per}^+(X+Y)$. Consequently , transferring matrix X+Y in the form , where $\alpha,\beta \in Q_{r,n}$ are the first r rows and columns , we get for any r the following

1) if $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = 2k$ then

$$\mathrm{per}^+X(\alpha|\beta)\cdot \mathrm{per}^+Y[\alpha|\beta]+ \mathrm{per}^-X(\alpha|\beta)\cdot \mathrm{per}^-Y[\alpha|\beta] \le \mathrm{per}^+(X+Y)$$

and $\mathrm{per}^+X(\alpha|\beta)\cdot \mathrm{per}^-Y[\alpha|\beta]+ \mathrm{per}^-X(\alpha|\beta)\cdot \mathrm{per}^+Y[\alpha|\beta] \le \mathrm{per}^-(X+Y)$.

2) if $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = 2k+1$ then

$$\mathrm{per}^+X(\alpha|\beta)\cdot \mathrm{per}^-Y[\alpha|\beta]+ \mathrm{per}^-X(\alpha|\beta)\cdot \mathrm{per}^+Y[\alpha|\beta] \le \mathrm{per}^+(X+Y)$$

and $\mathrm{per}^+X(\alpha|\beta)\cdot \mathrm{per}^+Y[\alpha|\beta]+\mathrm{per}^-X(\alpha|\beta)\cdot \mathrm{per}^-Y[\alpha|\beta] \le \mathrm{per}^-(X+Y)$.

Summing up the corresponding members we get (5).

§2. Minimizing matrix

In this chapter we describe the even doubly stochastic matrix with the smallest even permanent. Let denote by Ω_{A_n} - the set of even doubly stochastic matrixes. A matrix $A \in \Omega_{A_n}$ such that $\mathrm{per}^+A = \min\{ \mathrm{per}^+S \mid S \in \Omega_{A_n} \}$ is called <u>minimizing matrix</u>.

E.g. , if n = 1 then $\Omega_{A_1} = \{(1)\}$ and if n = 2 , then $\Omega_{A_2} = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$. Hence, the minimizing matrix is uniquely defined and then we assume n > 2. One can easily prove that in case of n = 3 the minimizing matrix is $A = J_3$ (J_n is the matrix with all entries equal to 1/n). First let us give a preliminary result. Matrix X is said to be <u>partly decomposable</u> if there exist permutation matrices P and Q such that

$$PXQ = \begin{bmatrix} B & C \\ D & D \end{bmatrix}$$

where B is k*k and D is (n-k)*(n-k) matrix with k∈{1,...,n}. Otherwise , matrix X is said to be <u>fully indecomposable</u>.

Lemma 6. The following statements are equivalent ($n>2$):

1) matrix X is partly decomposable ;

2) there exist even permutation matrices P and Q such that

$$PXQ = \begin{pmatrix} B & C \\ D & D \end{pmatrix}$$

Proof. Obviously , 2) implies 1).

Let 1) be satisfied. Then X can be transformed to $PXQ = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ by some P and Q . If P and Q are even permutation matrices , then 2) follows. Let P or Q be odd. Then we exchange in matrix PXQ two rows and columns with their indexes smaller (or greater) than k. The new matrix $P'\cdot P\cdot X\cdot Q = (P'\cdot P)\cdot X\cdot Q$ or $P\cdot X\cdot Q\cdot Q' = P\cdot X\cdot(Q\cdot Q')$ satisfies the second statement . If P and Q both are odd permutation matrices then we can show analogously that 2) holds. Consequently , 1) implies 2).

It follows from ([4], theorem 3.3.1) that in (1) matrix C must be zero matrix in the case of doubly stochastic matrix.

Theorem 7. Let A be minimizing matrix . If A is fully indecomposable matrix, then for $a_{hk} > 0$ $\overline{\mathrm{per}}^+A(h|k) = \mathrm{per}^+A$.

Proof. Denote $Z = \{(i,j) \mid a_{ij} = 0\}$ and define $C(A)$ to be $C(A) = \{ X = (x_{ij}) \in \Omega_{A_n} \mid x_{ij} = 0 \text{ if } (i,j) \in Z \}$.

Matrix A gives the minimum of even permanent function and is an interior point in $C(A)$. Use now Lagrange method and obtain the function

$$F(X) = \mathrm{per}^+X - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big(\sum_{k=1}^{n} x_{ik} - 1\Big) - \sum_{j=1}^{n} \mu_i\Big(\sum_{k=1}^{n} x_{ki} - 1\Big).$$

If $(i,j) \in Z$ then

$$\partial F(X)/\partial x_{ij} = \overline{\mathrm{per}}^+X(i|j) - \lambda_i - \mu_j .$$

Hence , we have $\overline{\mathrm{per}}^+A(i|j) = \lambda_i + \mu_j$. Thus

$$\mathrm{per}^+A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \overline{\mathrm{per}}^+A(i|j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot(\lambda_i + \mu_j) = \lambda_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot\mu_j$$

and

$$\mathrm{per}^+A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \overline{\mathrm{per}}^+A(i|j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot(\lambda_i + \mu_j) = \mu_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\lambda_i .$$

Denoting $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_n)$, $e = (1,\dots,1)$,we have

$$\mathrm{per}^+A\cdot e = \lambda + A\cdot\mu \qquad (7)$$

and

$$\mathrm{per}^+A\cdot e = A^T\cdot\lambda + \mu . \qquad (8)$$

Multiplying (7) by A^T gives us

$$per^+ A \cdot e = A^T \cdot \lambda + A^T \cdot A \cdot \mu . \qquad (9)$$

From (8) and (9) we get $A^T \cdot A \cdot \mu = \mu$. Analogically $A \cdot A^T \cdot \lambda = \lambda$. The matrix A is fully indecomposable (as we assumed), therefore $A^T \cdot A$ and $A \cdot A^T$ are fully indecomposable (see [4] , exercise 3.11). Hence $A^T \cdot A$ and $A \cdot A^T$ have eigenvalue 1 with multiplicity 1 belonging to the eigenvector e (see [2]). Hence , both λ and μ are multiples of e , i.e. $\lambda = c \cdot e$ and $\mu = d \cdot e$. If $(i,j) \in Z$, then $per^+A(i|j) = \lambda_i + \mu_j = c+d$. Finally, $per^+A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, per^+A(i|j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (c+d) = c+d = per^+A(i|j)$ for every $(i,j) \in Z$. This proves the assertion .

<u>Theorem 8.</u> Minimizing matrix is fully indecomposable .

<u>Proof</u>. In the case n = 3 $\min\{ per^+X \mid X \in \Omega_{A_3} \} = per^+J_3$, where J_3 is fully indecomposable . Hence , we may assume that $n \geq 4$.

Let A be a minimizing matrix in Ω_{A_n} and suppose A not to be fully indecomposable . The matrix A is expressable in form

$$A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot P_j \qquad (10)$$

with $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ and all P_j being even permutation matrices.

Let us observe some even diagonal A_i , elements determined by the positions of ones in permutation matrix P_i .

Now let us prove that we may assume $k \neq 1$. Indeed , if $k = 1$, then $\min\{ per^+X \mid X \in \Omega_{A_n} \} = 1 \cdot \min\{per^+X | X \in \Omega_{A_{n-1}} \}$ and we may consider $(n-1) * (n-1)$ minimizing matrix A'. Observe three possible cases .

A) $n > 4$ and A' is partly decomposable matrix . I.e. A' is expressable in form $\begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$

where B' is $k' * k'$ submatrix with $1 \leq k' \leq (n-1)/2$. Then A is expressable in form

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ & B' & \\ 0 & & C' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} B'' & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

where B'' and C' are $t * t$ matrices for suitable t , $t \geq 2$.

B) $n > 4$ and A' is <u>fully</u> indecomposable matrix . By Theorem 7 if $a'_{ij} > 0$ then $per^+A'(i|j) = per^+A'$. Now , multiplying A on the left and on the right with suitable permutation matrices P_1 and P_2 of the same parity we get A in the form

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1 & & \\ \vdots & y & x_2 & \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Here elements x_1 , x_2 belong to the diagonal A_1 and y is a suitable chosen positive element . Next we define a matrix

$$D(\varepsilon) = P_1AP_2 - \varepsilon \cdot (E_{11}+E_{22}+E_{33}) + \varepsilon \cdot (E_{13}+E_{21}+E_{32}) ,$$

where we have taken $0 < \varepsilon < \min(x_1,x_2)$. Denoting

$$P_i' = P_1P_iP_2 - \varepsilon\cdot(E_{11}+E_{22}+E_{33}) + \varepsilon\cdot(E_{13}+E_{21}+E_{32}) ,$$

it follows that $D(\varepsilon) \in \Omega_{A_n}$ - really ,

$$D(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \cdot P_1 \cdot P_j \cdot P_2 - \varepsilon \cdot P_1 \cdot P_i \cdot P_2 + \varepsilon \cdot P_i' =$$

$$= \sum_{j=1, j\neq i}^{s} \lambda_j \cdot P_1 \cdot P_j \cdot P_2 + (\lambda_i - \varepsilon) \cdot P_1 \cdot P_i \cdot P_2 + \varepsilon \cdot P_i' .$$

Proposition 5 gives us

$$\text{per}^+D(\varepsilon) = \text{per}^+A - \varepsilon\cdot\text{per}^+A(1|1) - \varepsilon\cdot\text{per}^+A(2|2) - \varepsilon\cdot\text{per}^+A(3|3) +$$

$$+ \varepsilon\cdot\text{per}^+A(1|3) + \varepsilon\cdot\text{per}^+A(2|1) + \varepsilon\cdot\text{per}^+A(3|2) + \varepsilon^2\cdot z =$$

$$= \text{per}^+A - \varepsilon\cdot\text{per}^+A(1|1) - \varepsilon\cdot\text{per}^+A(2|2) - \varepsilon\cdot\text{per}^+A(3|3) +$$

$$+ \varepsilon\cdot\text{per}^+A(3|2) + \varepsilon^2\cdot z = \text{per}^+A - 2\cdot\varepsilon\cdot\text{per}^+A + \varepsilon^2\cdot z ,$$

where z is a suitable real number . Here we have also used the Frobenius - Koenig theorem (see e.g.[4], Theorem 3.2.1) and Theorem 7 . Let us consider two different cases .

a) if $z < 0$, then $\text{per}^+D(\varepsilon) < \text{per}^+A$

b) if $z > 0$, then let $\varepsilon < 2\cdot\text{per}^+A/z$. It follows

$$\text{per}^+D(\varepsilon) = \text{per}^+A - \varepsilon\cdot(2\cdot\text{per}^+A - \varepsilon\cdot z) < \text{per}^+A$$

We get the contradiction to the fact that A is minimizing matrix in Ω_{A_n} . Thus it must be $k \neq 1$ in this case .

c) $n = 4$. Assume now $k=1$. Then it follows

$$\min_{X \in \Omega_{A_4}} \text{per}^+X = 1\cdot\min_{X\in\Omega_{A_3}} \text{per}^+X = \text{per}^+J_3 .$$ At the same time

$\text{per}^+J_4 < 1\cdot \text{per}^+J_3$ and $J_4 \in \Omega_{A_4}$. A contradiction .

It is proved that $k \neq 1$ must occur in this case also .

The matrix A can be transformed to the form (1) by permutation matrices of the same parity so that some two elements from the even diagonal A_i lie on the (k-1). and k. positions of the main diagonal .

If $n-k \geq 4$, then one can find such permutation matrices of the same parity that two elements from even diagonal A_1 lie on the (k+1). and (k+2). positions of the main diagonal and the minimizing matrix has the form (1) .

In the case $n-k = 3$ it follows $k = 2$ or $k = 3$ so first k elements of A_i lie on the main diagonal of A . Hence , transforming the elements of A_i from $(k+1)$. and $(k+2)$. row to the $(k+1)$. and $(k+2)$. positions of the main diagonal , we see that the element of A_i from $(k+3)$. row lies on the main diagonal of the transformed matrix . As even diagonal A_i turns into an even diagonal , the initial matrix is now multiplied by permutation matrices of the same parity .

Thus the matrix A can be transformed by permutation matrices of the same parity into the form (1) , where some elements from the even diagonal A_i of the initial matrix go to the $(k-1)$. , k. , $(k+1)$. , $(k+2)$. positions of the main diagonal of the transformed matrix . Next define matrix

$$G(\varepsilon) = P\cdot A\cdot Q - \varepsilon\cdot(E_{k-1,k-1}+E_{k,k}+E_{k+1,k+1}+E_{k+2,k+2}) + \\ + \varepsilon\cdot(E_{k-1,k+2}+E_{k,k+1}+E_{k+1,k}+E_{k+2,k-1})$$

with ε being a real number such that

$$0 < 2\cdot\varepsilon < \min(a_{k-1\ k-1}, a_{k\ k}, a_{k+1\ k+1}, a_{k+2\ k+2}, \lambda_i) .$$

Let E_{st} be $n*n$ matrix with $e_{st}= 1$ and all other entries being zeros . We have $G(\varepsilon) \in \Omega_n^A$. Really , denoting

$$P_1= E_{11}+E_{22}+\ldots+E_{k-2,k-2}+E_{k-1,k+1}+E_{k,k+1}+E_{k+1,k}+E_{k+2,k-1}+ \\ E_{k+3,k+3}+\ldots+E_{nn} ,$$

the matrix $G(\varepsilon)$ turns to be expressable as a convex combination of even permutation matrixes :

$$G(\varepsilon) = P\cdot A\cdot Q - \varepsilon\cdot P\cdot P_i\cdot Q + \varepsilon\cdot P_1 = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j\cdot P\cdot P_j\cdot Q - \varepsilon\cdot P\cdot P_i\cdot Q \\ + \varepsilon\cdot P_1 = \sum_{j=1, j\neq i}^{s} \lambda_j\cdot P\cdot P_j\cdot Q +(\lambda_i-\varepsilon)\cdot P\cdot P_i\cdot Q+ \varepsilon\cdot P_1 .$$

Denote $A' = P\cdot A\cdot Q$. Using Propositions 1 and 5 we have

$$\begin{aligned}
per^+G(\varepsilon) = {} & per^+A + \varepsilon\cdot[per\ A'(k-1|k+2) + per^-A'(k|k-1) + \\
& + per^-A'(k+1|k) + per^-A'(k+2|k-1) - per^+A'(k-1|k-1) - \\
& - per^+A'(k|k) - per^+A'(k+1|k+1) - per^+A'(k+2|k+2)] + \\
& +\varepsilon^2\cdot[per^+A'(k-1,k|k-1,k) + per^+A'(k-1,k+1|k-1,k+1) + \\
& + per^+A'(k+1,k+2|k+1,k+2) + per^+A'(k,k+1|k,k+1) + \\
& + per^+A'(k,k+2|k,k+2) + per^+A'(k+1,k+2|k+1,k+2) + \\
& + per^-A'(k-1,k|k+1,k+2) + per^-A'(k-1,k+1|k,k+2) + \\
& + per^-A'(k-1,k+2|k-1,k+2) + per\ A'(k,k+1|k,k+1) + \\
& + per^-A'(k,k+2|k-1,k+1) + per^-A'(k+1,k+2|k-1,k) - \\
& - per^-A'(k-1,k|k-1,k+1) - per^-A'(k-1,k+1|k-1,k) - \\
& - per^-A'(k,k+2|k+1,k+2) - per^-A'(k+1,k+2|k,k+2) - \\
& - per^+A'(k,k+2|k-1,k) - per^+A'(k-1,k|k,k+2) - \\
& - per^+A'(k-1,k+1|k+1,k+2) -per^+A'(k+1,k+2|k-1,k+2)] + \\
\varepsilon^3\cdot & [per^+A'(k-1,k,k+1|k,k+1,k+2)+per^+A'(k-1,k,k+2|k-1,k,k+2) +
\end{aligned}$$

$$
\begin{gathered}
+\operatorname{per}^{+}A'(k-1,k+1,k+2|k-1,k,k+2)+\operatorname{per}^{+}A'(k,k+1,k+2|k-1,k,k+2)\ + \\
-\operatorname{per}^{+}A'(k-1,k,k+1|k-1,k,k+1,)-\operatorname{per}^{+}A'(k-1,k,k+2|k-1,k,k+2)\ - \\
-\operatorname{per}^{+}A'(k-1,k+1,k+2|k-1,k+1,k+2)-\operatorname{per}^{+}A'(k,k+1,k+2|k,k+1,k+2)- \\
-\operatorname{per}^{-}A'(k-1,k,k+2|k-1,k,k+1)-\operatorname{per}A'(k,k+1,k+2|k,k+1,k+2)\ - \\
-\operatorname{per}A'(k-1,k,k+2|k-1,k,k+2)-\operatorname{per}^{-}A'(k-1,k+1,k+2|k-1,k+1,k+2)+ \\
+\operatorname{per}A'(k-1,k,k+2|k-1,k+1,k+2)+\operatorname{per}^{-}A'(k-1,k+1,k+2|k-1,k,k+2)+ \\
+\operatorname{per}^{-}A'(k-1,k,k+2|k,k+1,k+2)+\operatorname{per}^{-}A'(k,k+1,k+2|k-1,k,k+1)]\ + \\
+\quad \varepsilon^{4}\cdot[2\cdot\operatorname{per}^{+}A'(k-1,k,k+1,k+2|k-1,k,k+1,k+2)\ + \\
+\ 2\cdot\operatorname{per}^{-}A'(k-1,k,k+1,k+2|k-1,k,k+1,k+2)] = \\
=\operatorname{per}^{+}A'-\varepsilon\cdot[\operatorname{per}^{+}A'(k-1|k-1)+\operatorname{per}^{+}A'(k|k)+\operatorname{per}^{+}A'(k+1|k+1)\ + \\
+\operatorname{per}^{+}A'(k+2|k+2)]+\varepsilon^{2}\cdot[\operatorname{per}^{+}A'(k-1,k|k-1,k)\ + \\
+\operatorname{per}^{+}A'(k-1,k+1|k-1,k+1)+\operatorname{per}^{+}A'(k,k+2|k,k+2)\ + \\
+\operatorname{per}^{+}A'(k+1,k+2|k+1,k+2)+\operatorname{per}^{-}A'(k-1,k+1|k,k+2)\ + \\
+\operatorname{per}^{-}A'(k,k+2|k-1,k+1)+\operatorname{per}A'(k-1,k+2|k-1,k+2)\ + \\
+\operatorname{per}A'(k,k+1|k,k+1)-\varepsilon^{3}\cdot[\operatorname{per}A'(k-1,k,k+1|k-1,k,k+1)\ + \\
+\operatorname{per}A'(k-1,k,k+2|k-1,k,k+2)+\operatorname{per}A'(k-1,k+1,k+2|k-1,k+1,k+2)\ + \\
+\operatorname{per}A'(k,k+1,k+2|k,k+1,k+2)]\ + \\
\varepsilon^{4}\cdot[2\cdot\operatorname{per}A'(k-1,k,k+1,k+2|k-1,k,k+1,k+2)]\ .
\end{gathered}
$$

We have used here the Frobenius - Koenig theorem ([4], Theorem 3.2.1) to get the previous equality . In view of preliminary results ([4], Theorem 2.1.2)

$$
\begin{gathered}
\varepsilon^{3}\cdot[\operatorname{per}A'(k-1,k,k+1|k-1,k,k+1) = \\
=\varepsilon^{3}\cdot\sum_{l=1,\,l\neq k-1,k,k+1}^{n} a_{k+2,l}\cdot\operatorname{per}A'(k-1,k,k+1,k+2|k-1,k,k+1,l)\ \geq \\
\geq\varepsilon^{3}\cdot a_{k+2,k+2}\cdot\operatorname{per}A'(k-1,k,k+1,k+2|k-1,k,k+1,k+2)\ > \\
> 2\cdot\varepsilon^{4}\cdot\operatorname{per}A'(k-1,k,k+1,k+2|k-1,k,k+1,k+2)\ .
\end{gathered}
$$

Denoting by x and y the sums behind ε and ε^2 in the previous formula for $G(\varepsilon)$, we get

$$\operatorname{per}^{+}G(\varepsilon) < \operatorname{per}^{+}A - \varepsilon\cdot x + \varepsilon^{2}\cdot y\ .$$

Notice that $x > 0$ and $y > 0$, this follows from the construction of $G(\varepsilon)$. Let us take $\varepsilon < x/y$. Then

$$\operatorname{per}^{+}G(\varepsilon) < \operatorname{per}^{+}A - \varepsilon\cdot(x-\varepsilon\cdot y) < \operatorname{per}^{+}A\ ,$$

but this contradicts to our assumption of A being minimizing matrix .

Theorem 9. Let A be a minimizing matrix. If $a_{hk}>0$, then

$$\operatorname{per}^{+}A(h|k) = \operatorname{per}^{+}A.$$

Proof. This theorem is a consequence of Theorem 7 and Theorem 8 .

Theorem 10. Minimizing matrix is a convex combination of at least three even permutation matrices .

Proof. Clearly , the minimizing matrix cannot be an even permutation matrix , for the minimizing matrix is fully indecomposable . Assume on the contrary that some minimizing matrix A is a convex combination of two even permutation matrices i.e. $A = \lambda\cdot P + \mu\cdot Q$ with $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$ and P , Q are even permutation matrices . As the matrix A is fully indecomposable it must have at least two nonzero elements in each row and in each column . Clearly , matrix A has exactly two positive elements in every row and every column , therefore

$$\mathrm{per}^{+}A = \lambda^{n} + \mu^{n} = \lambda^{n} + (1-\lambda^{n}) \ .$$

Hence matrix A is minimizing matrix

$$\partial \mathrm{per}^{+}A/\partial\lambda = n\cdot\lambda^{n-1} - n\cdot(1-\lambda)^{n-1} = 0$$

and thus it follows $(1-\lambda)^{n-1} = \lambda^{n-1}$. In our case $\lambda = \mu = 1/2$, $\mathrm{per}^{+}A = 1/2^{n} + 1/2^{n} = 1/2^{n-1}$. We prove by induction on n that

$$n!/(2\cdot n^{n}) < 1/2^{n-1} \quad (n > 2) \qquad (11)$$

This formula is of course true for n = 1 and n = 2 , but we don't need these cases. Indeed for n = 3 we have $2\cdot 3/(2\cdot 27) = 1/9 < 1/4$. This calculation shows that (11) is true for n = 3 . Assume that (11) is true for n = k-1 . It follows that

$$k!/(2\cdot k^{k}) = (k-1)!/(2\cdot k^{k-1}) = (k-1)!/(2\cdot((k-1)+1)^{k-1}) =$$
$$=(k-1)!/(2\cdot[(k-1)^{k-1}+(k-1)\cdot(k-1)^{k-2}+(k-1)\cdot(k-2)\cdot(k-1)^{k-3}/2+\ldots$$
$$\ldots\ldots+1]) < (k-1)!/(2\cdot 2\cdot(k-1)^{k-1}) < 1/(2\cdot 2^{k-2}) = 1/2^{k-1}.$$

Now observe that $\mathrm{per}^{+}J_{n} = n!/(2\cdot n^{n}) < 1/2^{n-1} = \mathrm{per}^{+}A$, at the same time $J_{n} \in \Omega_{A_{n}}$. So we have reached the contradiction with the assumption that A is minimizing . Consequently , the minimizing matrix must be a convex combination of at least three even permutation matrices.

References

1. L i n t H. The van der Waerden conjecture: two proofs in one year // Math. Intell.-1982.-V.4,N.2.-P.72-77.
2. M a r c u s M., N e w m a n M. Permanents of doubly stochastic matrices // Proc. Symp. Appl. Math.: Combinatorical Analysis.-1960.-V.10.-P.169-174.
3. Е г о р ы ч е в Г. П. Доказательство гипотезы ван дер Вардена для перманентов // Сиб. мат. журн. -1981.-Т.12, №6.-С.65-71.
4. М и н к Х. Перманенты.-М.:Мир,1982.-215С.

Received
27 VI 1989

MINIMAALSE PAARISPERMANENDIGA PAARISBISTOHHASTILISTEST MAATRIKSITEST

A.Rämmer

R e s ü m e e

Käesolevas töös uuritakse paarispermanent-funktsiooni. Tõestatakse mõned paarispermanendi omadused. Samuti uuritakse paarispermanendi miinimumi paarisbistohhastiliste maatriksite hulgal, kirjeldatakse minimiseerivat paarisbistohhastilist maatriksit.

О ЧЕТНО ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ МАТРИЦАХ С МИНИМАЛЬНЫМ ЧЕТНЫМ ПЕРМАНЕНТОМ

А.Ряммер

Р е з ю м е

Теория перманентов дважды стохастических матриц и (0,1)-матриц стала сейчас существенной и активной частью того раздела линейной алгебры и комбинаторики, где рассматриваются матричные задачи.

В данной работе исследуется новое понятие четного перманента. Матрицу с неотрицательными вещественными элементами назовем <u>четно-бистохастической</u>, если ее можно представить в виде выпуклой комбинации матриц четных перестановок. Доказаны некоторые свойства четного перманента. Четным перманентом $n\times n$ матрицы X называется сумма $\operatorname{per}^+X = \sum_{\sigma'} x_{1\sigma'(1)}\cdots x_{n\sigma'(n)}$ где указанные слагаемые суммируются по всем перестановкам множества $\{1,\ldots,n\}$.

<u>Предложение 1.</u> Если P и Q матрицы перестановок с одинаковой четностью, тогда $\operatorname{per}^+X = \operatorname{per}^+PXQ$.

<u>Предложение 3.</u> Пусть фиксирована последовательность индексов $\alpha \in Q_{r,n}$. Тогда имеет место формула (3).

<u>Предложение 5.</u> Справедлива формула (5).

Доказаны некоторые свойства четно дважды стохастической матрицы с минимальным четным перманентом.

<u>Теорема 8.</u> Минимизирующая матрица является вполне неразложимой.

<u>Теорема 9.</u> Если A минимизирующая матрица, то из $a_{ij}>0$ следует $\operatorname{per}^+A(i|j) = \operatorname{per}^+A$.

<u>Теорема 10.</u> Минимизирующая матрица является выпуклой комбинацией не менее трех четных матриц перестановок.

Acta et commentationes universitatis Tartuensis, 878 , 1990, 115-136.

k-СБАЛАНСИРОВАННЫЕ КОЛЬЦА

А. Сакс
Кафедра математики ЭСХА

В настоящей работе продолжается исследование аффинной полноты модулей (см. [1],[2]). Рассматриваются только левые унитарные модули над ассоциативным кольцом с единицей. Как обобщение сбалансированного кольца вводятся понятия k-сбалансированного и ω-сбалансированного колец (k - натуральное число больше единицы).

Получено описание ω-сбалансированных колец в одном классе нетеровых колец:

Теорема 1.3. Пусть R - нетерово кольцо с нулевым пересечением степеней радикала. Тогда следующие условия равносильны:

(А) R - ω-сбалансированное кольцо;

(Б) R - линейно компактно в дискретной топологии.

Доказывается, что класс k-сбалансированных колец является собственным подклассом (k+1)-сбалансированных колец (k=2,3,...). Основной результат дает описание k-сбалансированных колец в одном классе локальных колец:

Теорема 3.14. Пусть R - коммутативное локальное кольцо с нулевым квадратом радикала Джекобсона J, причем поле R/J=Q содержит не менее, чем k элементов (k≥3) . Тогда следующие твердения равносильны:

(а) R является (k-1)-сбалансированным;

(б) $\dim_Q J < n_k = 2+\ldots+k$.

1. ω-сбалансированные кольца

Если не оговорено противное, пользуемся теми же обозначениями, что и в [2].

Для фиксированного R-модуля M обозначим $R'=\mathrm{End}_R M$, $R''=\mathrm{End}_{R'} M$. Канонический гомоморфизм $R\to R''$ обозначим через φ. Пусть k - натуральное число. Определим для R-модуля M множество

$$T(k)=\{t\in R'' \mid \forall A\subset M\ (|A|=k \Rightarrow \exists r\in R: \forall a\in A\ ta=ra)\}.$$

Очевидно, $T(k)$ - подкольцо в R'' и имеют место включения

$$\varphi(R)\subset\ldots\subset T(3)\subset T(2)\subset R''.$$

Как известно, R-модуль M называется сбалансированным, если $\varphi(R)=R''$. Мы будем называть модуль M k-сбалансированным, если $\varphi(R)=T(k)$, где k - натуральное число и ω-сбалансированным, если $\varphi(R)=\bigcap_{k\in N}T(k)=T(\omega)$. Таким образом, каждый сбалансированный R-модуль является k-сбалансированным при любом $k>1$, а последний в свою очередь ω-сбалансированным. Кольцо R называется сбалансированным (k-сбалансированным), если каждый R-модуль является таким; строго k-сбалансированным, если R является k-сбалансированным, но не $(k-1)$-сбалансированным.

Ввиду этих определений предложение 2.5 из [2] получит вид:

Предложение 1.1. Пусть $n\geq 2$ - натуральное число. R-модуль M^n является аффинно полным тогда и только тогда, когда модуль M n-сбалансирован.

Следствие 1.2. R-модуль M является ω-сбалансированным тогда и только тогда, когда M локально аффинно полон.

Кольцо R называется линейно компактным (в дискретной топологии), если любая система

$$\begin{cases} x-x_i\in K_i, \\ i\in I, \end{cases}$$

где K_i - левые идеалы кольца R, каждая конечная подсистема которого разрешима, сама разрешима.

Получено описание нетеровых ω-сбалансированных колец, пересечение степеней радикала Джекобсона в которых равно нулю.

Теорема 1.3. Пусть R - нетерово кольцо с нулевым пересечением степеней радикала. Тогда следующие условия равносильны:

(А) R - ω-сбалансированное кольцо;

(Б) R - линейно компактно в дискретной топологии.

Доказательство. (А)=>(Б). В силу предложения 3.2 из [2] кольцо R является полным в радикальной топологии, а в силу теоремы 3.1 из [2] R/J является артиновым. Теперь из теоремы

16 в [3] получим, что R является линейно компактным в дискретной топологии.

(Б)=>(А). Допустим, что R не является ω-сбалансированным и покажем, что R не может тогда быть линейно компактным. Если R не является ω-сбалансированным, то существует R-модуль M, так что $M^{(\omega)}$ не является аффинно полным. Из-за следствия 1.2 существует $g\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}} T(k)\setminus\varphi(R)$. Пусть $g(m)=x_m m$, где $x_m\in R$, и обозначим A_m=Anпm . Тогда система

$$\begin{cases} x-x_m\in A_m, \\ m\in M \end{cases}$$

не имеет решения, хотя ее каждая конечная подсистема разрешима. Таким образом, R не является линейно компактным. Теорема 1.3 доказана.

Как видно из доказательства импликации (Б)=>(А), здесь не требовалось ни нетеровости, ни условия о пересечении степеней радикала в кольце R, приведенные в теореме 1.3. Таким образом, имеет место

Предложение 1.4. Линейно компактное в дискретной топологии кольцо является ω-сбалансированным.

2. k-сбалансированные кольца

В этом параграфе начато исследование k-сбалансированных колец, где k - натуральное число не меньше двух. В силу предложения 1.1 это такие кольца, k-тая прямая степень любого модуля над которыми является аффинно полным.

В известных до сих пор случаях (абелевых групп, векторных пространств, модулей над сбалансированным кольцом) для любого модуля, конечная прямая степень которого аффинно полна, уже прямой квадрат является аффинно полным. Тут естественным образом возникает вопрос:

существуют ли k-сбалансированные кольца, k>2, не являющиеся 2-сбалансированными.

Мы покажем, что уже среди коммутативных локальных колец имеются k-сбалансированные кольца, k>2, не являющиеся 2-сбалансированными.

Приведем сперва одно определение, которое оказывается очень полезным при изучении коммутативных локальных k-сбалансированных колец.

Определение. Систему k×n матриц $A^s=(a_{sij})$, $s=1,\dots,t$, элементами из поля Q назовем критической, если $a_{111}=1$,

$a_{s11}=0$, $s\geq 2$, и при $B=(1,0,\dots,0)^T$ выполняются следующие условия:

K1. система линейных уравнений

$$\begin{cases} M(A^sX-a_{s11}B) = 0 , \\ s=1,\dots,t \end{cases}$$

разрешима при любой $(k-1)\times k$ матрице M,

K2. система линейных уравнений

$$\begin{cases} A^sX-a_{s11}B = 0 , \\ s=1,\dots,t \end{cases}$$

противоречива.

Теперь покажем, как с помощью критической системы матриц можно построить строго k-сбалансированные кольца.

<u>Предложение 2.1.</u> Пусть R - коммутативное локальное кольцо, $R/J=Q$, и найдется натуральное число p , так что $\dim J^p/J^{p+1} = r\geq n$. Если существует критическая система $k\times n$ матриц $A^1,\dots,A^k$ над полем Q, то найдется R-модуль S, так что $\tau(S)=k$.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим сперва случай, когда $J^{p+1}=0$ и $r=n$. Тогда J^p - векторное пространство над Q размерности n. Обозначим его базис через $\{w_1,\dots,w_n\}$. Рассмотрим R-модуль $S=R^k/V$, где

$$V = \langle \sum_{i=1}^{k}\dotplus(\sum_{j=1}^{n} q_{ij}w_j) \mid q_{ij}\in Q \text{ , выполняется (1)}\rangle,$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} a_{sij}q_{ij}=0, \\ s=1,\dots,k, \end{cases} \tag{1}$$

где a_{sij} - элементы матриц $A^1,\dots,A^k$.

Докажем, что $T(k-1)\neq R$ (если $T(k-1)=R$, то $\tau(S)\leq k-1$). Пусть $s_i = (0\dotplus\dots\dotplus 0\dotplus 1\dotplus 0\dotplus\dots\dotplus 0)+V\in S$ (на i-том месте стоит единица). Очевидно, множество $\{s_1,\dots,s_k\}$ является системой образующих модуля S. Обозначим через e_i образ элемента s_i при естественном гомоморфизме $S\to S/JS$. Тогда множество $\{e_1,\dots,e_k\}$ является базисом векторного пространства S/JS над полем Q.

Поскольку $J^{p+1}=0$, то J^pS является векторным пространством над Q. Определим линейное отображение $g:S/JS\to J^pS$ по формулам:

$g(e_1)=w_1\dotplus 0\dotplus\dots\dotplus 0+V$, $g(e_2)=\dots=g(e_k)=0+V$.

Покажем, что при любых $m^1,\dots,m^{k-1}\in S/JS$ существует

$w=\sum_{j=1}^{n} x_j w_j \in J^p$, $x_j \in Q$, так что $g(m^t)=wm^t$. Пусть $m^t=\sum_{i=1}^{k} m_{ti} e_i$, $t=1,\dots,k-1$ и $Y=(y_1,\dots,y_n)^T$ – решение системы K1 при матрице $M=(m_{ij})$. Покажем, что тогда можем брать $w=y_1w_1+\dots+y_nw_n$.

Поскольку

$$g(m^t)=m_{t1}w_1+0+\dots+0+V \quad \text{и} \quad wm^t=\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{j=1}^{n} y_j w_j\Big)m_{ti}+V ,$$

то равенство $g(m^t)=wm^t$ равносильно

$$\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{j=1}^{n} y_j w_j\Big)m_{ti}-[m_{t1}w_1+0+\dots+0]\in V , \tag{2}$$

откуда

$$[(y_1-1)m_{t1}w_1+\sum_{j=2}^{n} y_j m_{t1} w_j]+\sum_{i=2}^{k}\Big(\sum_{j=1}^{n} y_j m_{ti} w_j\Big) \in V .$$

Теперь из определения векторного пространства V получим

$$\begin{cases} \sum_{j=2}^{k}\sum_{j=2}^{n} a_{sij} m_{ti} y_j + a_{s11} m_{t1}(y_1-1)+\sum_{j=2}^{n} a_{s1j} m_{t1} y_j = 0 , \\ s=1,\dots,k, \end{cases}$$

причем это должно иметь место при каждом $t=1,\dots,k-1$. Таким образом, мы получим, что равенство $g(m^t)=wm^t$ имеет место тогда и только тогда, когда разрешима система

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} a_{sij} m_{ti} y_j = a_{s11} m_{t1} , \\ s=1,\dots,k , \quad t=1,\dots,k-1 . \end{cases} \tag{3}$$

Записывая эту систему в матричном виде получим систему K1. Поскольку $Y=(y_1,\dots,y_n)^T$ был решением этой системы, то $g(m^t)=wm^t$ для всех $t=1,\dots,k-1$.

Из условия K2 получим, что если $m^t=e_t$, то система (3), где $t=1,\dots,k$, противоречива. Следовательно, не существует $w\in J^p$, так что $g=w$.

Определим теперь $f\in F(1,S)$ формулой $f(s)=g(s+JS)$. Тогда в силу доказанного относительно g имеем $f\in T(k-1)\setminus T(k)$. Следовательно, $T(k-1)\neq R$ и $\tau(S)>k-1$. Так как модуль S порождается k элементами, то $\tau(S)=k$.

В общем случае определим R-модуль $S=R^k/V'$, где $V'=V+V_1$, $V_1=\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{j=n+1}^{r} Qw_j+J^{p+1}\Big)$. Тогда $\mathrm{Ann}S=V_1$ и можем рассмотреть S как $R_1 = R/\mathrm{Ann}V_1$-модуль, а R_1 удовлетворяет требованиям первой части доказательства. Предложение 2.1 доказано.

Оказывается, что в случае, когда R - коммутативное локальное кольцо с нулевым квадратом радикала Джекобсона, то доказанное в предложении 2.1 утверждение допускает обращение.

Предложение 2.2. Пусть R - коммутативное локальное кольцо с нулевым квадратом радикала Джекобсона, $R/J=Q$, $\dim_Q J = n$. Тогда следующие утверждения равносильны:

(А) существует R-модуль S, так что $\tau(S)\geq k>2$;

(Б) существует критическая система $k\times n$ матриц $A^1,\ldots,A^t$ над Q.

Доказательство.

(А)=>(Б) Допустим, что существует R-модуль S, так что $\tau(S)\geq k$. Тогда найдутся $f\in T(k-1)\setminus T(k)$ и элементы $u_1,\ldots,u_k\in S$, так что ни при одном $r\in R$ не выполняется $f(u_i)=ru_i$, $i=1,\ldots,k$. Таким образом, можем ограничиться рассмотрением случая $S=\langle u_1,\ldots,u_k\rangle$. Обозначим базис радикала J через $\{w_1,\ldots,w_n\}$, тогда любой модуль S с k порождающими можно представить в виде $S=R^k/V$, как и в доказательстве предложения 2.1.

Докажем, что $f|_{JS}$ - полиномиальная функция. Так как $f\in T(k-1)$, то легко заметить, что $f|_{JS}\in C(1,JS)^{\circ}$ (см. доказательство предложения 2.5 в [2]). Поскольку JS - векторное пространство над Q и каждое векторное пространство размерности больше единицы является аффинно полным, то $f|_{JS}$ - полиномиальная функция и можем брать $f(JS) = 0$. Если же $\dim JS=1$, то заметим, что сужение $f|_{JS}$ принадлежит к второму централизатору JS. В силу теоремы плотности $f|_{JS}$ - полиномиальная функция и опять можем брать $f(JS)=0$. Таким образом, для любого $m\in S$ действие функции f равносильна с умножением на какой-то элемент из радикала J. Так как S/JS - тоже векторное пространство над Q, то f определяет линейное отображение $S/JS\to JS$, которое будем обозначать той же буквой f.

Пусть $\{e_1,\ldots,e_k\}$ - базис векторного пространства S/JS, где e_i получены из элементов системы образующих модуля S как и в доказательстве предложения 2.1. Поскольку $f\in T(k-1)$, то для любых k-1 элементов $x_1,\ldots,x_{k-1}\in S$ существует $r\in R$, так что $f(x_i)=rx_i$. Следовательно, можем брать сужение функции f на подпространство $\langle e_2,\ldots,e_k\rangle$ равным нулю, а

$$f(e_1) = \sum_{i=1}^{n} b_j w_j \dotplus 0 \dotplus \ldots \dotplus 0 \ , \quad b_j\in Q \ .$$

Допустим, что базис в J выбран так, что $b_1=1$,

$b_2=\ldots=b_n=0$. Если $m=\sum_{i=1}^{k} m_i e_i$, $m_i \in Q$, то $f(m)=m_1 w_1 + 0 + \ldots + 0$.

С другой стороны, для данной m существует $w=\sum_{j=1}^{n} x_j w_j \in J$, $x_j \in Q$, так что $f(m)=wm$. Таким образом, получим включение (2), где вместо y_j имеем x_j, а вместо m_{ti} - m_i. Учитывая определение векторного пространства V, получим, как и в доказательстве предложения 2.1, систему (3) (без $t=1,\ldots,k-1$) с теми-же поправками на y_j и m_{ti}. Обозначая через

$A^s=(a_{sij})$, $X=(x_1,\ldots,x_n)^T$, $B=(1,0\ldots,0)^T$

можем последнюю систему писать в виде

$$\begin{cases} f(m_1,\ldots,m_k)(A^sX-a_{s11}B)=0, \\ s=1,\ldots,t. \end{cases} \tag{4}$$

Поскольу $f \in T(k-1)$, то система (4) должна иметь решение при любых $m^1,\ldots,m^{k-1}$, где $m^i=(m_{i1},\ldots,m_{ik})$. Обозначая через $M=(m_{ij})$ и получим систему K1, которая разрешима при каждой матрице M. Таким образом матрицы $A^1,\ldots,A^t$ удовлетворяют условию K1.

Поскольку $f \notin T(k)$, то система (4) не может иметь решения в случае $m^i=e_i$, $i=1,\ldots,k$, т.е. взяв в качестве матрицы M единичную матрицу порядка k, получим систему K2, которая не имеет решения. Следовательно, матрицы $A^1,\ldots,A^t$ удовлетворяют условия K2. Заметим, что если $a_{s11}=0$ для всех s, то система K2 является однородной и всегда имеет решение. Следовательно, можем предположить, что $a_{111}\neq 0$. Учитывая значение матриц $A^1,\ldots,A^t$, можем получить после линейных преобразований $a_{111}=1$, $a_{s11}=0$, $s=2,\ldots,t$. Таким образом, система матриц $A^1,\ldots,A^t$ является критической.

(Б)=>(А) является частным случаем предложения 2.1. Предложение 2.2 доказано.

3. Строго k-сбалансированные кольца существуют

В этом параграфе приведем некоторые свойства критических систем матриц, с помощью которых получим описание строго k-сбалансированных локальных колец R, квадрат радикала Джекобсона которых равен нулю в случае, если поле Q=R/J содержит не меньше чем k элементов.

Наша цель: выяснить, при каких значениях параметров k,n,t существуют системы критических матриц. Приведем сперва некоторые результаты, облегчающие проверку критичности системы матриц.

Лемма 3.1. Условие K1 выполняется тогда и только тогда, когда система K1 разрешима для любой матрицы вида

$$M_u = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & & 0 & c_1 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & c_2 & & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & & 1 & c_{u-1} & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 1 \end{matrix} \right\| ,$$

где $u>2$ и $c_1, \ldots, c_{u-1} \in Q$.

Доказательство. Если предположить, что система K1 не имеет решения при некоторой матрице M, ранг которой меньше чем k-1, то она не имеет решения и при матрице M1, в котором сохранены линейно независимые строки из M и добавлены такие строки, что ранг M1 равен k-1. Заметим, что если первый столбец матрицы M является нулевым, то система является однородной и всегда разрешима. Таким образом, можно ограничиться такими матрицами M, ранг которых максимален и первый столбец ненулевой. Теперь утверждение леммы следует из того, что произвольная такая $(k-1)\times k$ матрица допускает представление в виде CM_u, где C подходящая регулярная матрица. Лемма 3.1 доказана.

Будем говорить, что $k\times t$ матрица $L=(l_{ij})$ является допустимой для системы матриц $A^1,\ldots,A^t$, если

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{k} l_{ij}A_{ij} = 0 \quad \text{и} \quad l_{11} = 1 ,$$

где через A_{ij} обозначено j-ая строка матрицы A^i.

Лемма 3.2. Условие K2 выполняется для системы матриц $A^1,\ldots,A^t$ тогда и только тогда, когда существует допустимая матрица L. Следовательно, для любой критической системы матриц существует допустимая матрица.

Доказательство. Заметим, что в системе уравнений K2 неоднородным является только это уравнение, которое определяется первой строкой матрицы A^1. Следовательно, для того, чтобы вся система K2 не имела решения, необходимо и достаточно, что первую строку матрицы A^1 можно выразить линейной комбинацией остальных строк A_{ij} , $(i,j)\neq(1,1)$. Это и равносильно существованию допустимой матрицы L. Лемма 3.2 доказана.

Рассмотрим теперь некоторые преобразования критических систем матриц, сохраняющие критичность системы.

Лемма 3.3. Система матриц, полученная из критической системы матриц путем элементарных преобразований, кроме умножения матрицы A^1 на скаляр и добавления A^1 к другим матрицам, является критической.

Доказательство. Поскольку критичность системы матриц определена условиями на разрешимость систем линейных уравнений K1 и K2 и указанные элементарные преобразования переводят эти системы уравнений в системы, эквивалентные исходным системам, то эти преобразования сохраняют критичность системы матриц. Требование относительно матрицы A^1 нужно для того, чтобы сохранялись условия $a_{111}=1$, $a_{s11}=0$, $s=2,\dots,t$. Лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4. Система матриц, полученная из критической системы матриц путем одинаковых элементарных преобразований строк всех матриц, кроме добавления первой строки к другим, добавления других строк к первой строке и умножения первой строки на скаляр, является критической.

Доказательство. Названные элементарные преобразовния со строками матриц A^s реализует регулярная $k\times k$ матрица $V=(v_{ij})$, где $v_{11}=1$, $v_{1j}=v_{j1}=0$, $j=2,\dots,k$, т.е. новая система матриц имеет вид $A^{\circ 1},\dots,A^{\circ t}$, где $A^{\circ s}=VA^s$, $s=1,\dots,t$. Тогда легко видить, что $a_{s11}{}^{\circ}=a_{s11}$ и следовательно для новой системы матриц система уравнений K1 имеет вид

$$\begin{cases} M(VA^sX-a_{s11}B) = 0 , \\ s=1,\dots,t. \end{cases}$$

Если предположить, что эта система не имеет решения при некотором $M=M_1$, то система K1 неразрешима при $M=M_1V$, так как $Va_{s11}B=a_{s11}B$. Система уравнений K2 имеет для новой системы матриц вид

$$\begin{cases} VA^sX-a_{s11}B=0, \\ s=1,\dots,t. \end{cases}$$

Если предположить, что эта система разрешима, то система уравнений K2 разрешима и для исходной системы матриц. Действительно, учитывая, что сейчас $VB=B$, получим, что эти системы уравнений эквивалентны: одна переходит в другую путем умножения на V или V^{-1} соответственно. Лемма 3.4 доказана.

К преобразованиям, рассмотренным в леммах 3.3 и 3.4 возможен и другой подход, который оказывается очень полезным. Назовем (k,n,t)-векторматрицей $t\times k$ матрицу, элементами которой являются векторы из пространства Q^n. Тогда любой системе $k\times n$ матриц $A^1,\dots,A^t$ соответствует (k,n,t)-векторматрица $A=(A_{ij})$ и наоборот. Векторматрицу назовем критической, если соответствующая система матриц является критической. Теперь наша основная проблема получит вид: при каких комплектов параметров (k,n,t) существуют критические векторматрицы. Легко видить, что любому из преобразований системы матриц, рассмотренных в леммах 3.3 (3.4) соответствует элементарное преобразование строк (столбцов) векторматрицы A. Поскольку эти преобразования сохраняют критичность и в силу леммы 3.2 для каждой критической векторматрицы существует допустимая матрица L, то интересно выяснить, как из матрицы L получить допустимую матрицу для векторматрицы, полученной путем преобразований.

Лемма 3.5. Пусть A - векторматрица с допустимой матрицей L.

1. Если векторматрица $A°$ получена из матрицы A путем умножения u-той ($u\neq 1$) строки (j-того ($j\neq 1$) столбца) на скаляр $c\neq 0$, то допустимая матрица $L°$ для векторматрицы $A°$ получается из матрицы L путем умножения u-той строки (j-того столбца) на скаляр c^{-1}.

2. Если векторматрица $A°$ получена из матрицы A путем добавления к j-той строке (j-тому ($j\neq 1$) столбцу) u-той строки (u-того столбца), где $u\neq 1$, $u\neq j$, умноженной(-ого) на скаляр c, то допустимая матрица $L°$ для векторматрицы $A°$ получается из матрицы L путем вычитания из u-той строки (u-того столбца) j-той строки (j-того столбца) умноженной (-ого) на скаляр c.

Доказательство. 1. Обозначим через A_i - i-тую строку матрицы A. Пусть $A_u°=cA_u$, а все остальные строки матрицы $A°$ совпадают с соответствующими строками векторматрицы A. Рассмотрим матрицу $L°$, полученную из матрицы L умножением u-той строки на c^{-1}: $L_u°=c^{-1}L_u$. Покажем, что $L°$ является допустимой для векторматрицы $A°$. Действительно, тогда

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{t} l_{ij}°A_{ij}°=\sum_{j=1}^{k}\Big(\sum_{i\neq u} l_{ij}A_{ij}+cl_{uj}c^{-1}A_{uj}\Big)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{t} l_{ij}A_{ij}=0,$$

поскольку матрица L допустима для векторматрицы A. Аналогичные рассуждения применимы и в случае столбцов.

2. Пусть $A_j° = A_j+cA_u$ и все остальные строки совпадают с соответствующими строками векторматрицы A. Рассмотрим

матрицу L°, полученную из матрицы L путем вычитания из u-той строки j-тую строку умноженное на скаляр c, где $u\neq 1$, $u\neq j$: $L_u^\circ = L_u - cL_j$. Покажем, что L° является допустимой для векторматрицы A°. Действительно, тогда

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{s=1}^{k} l_{is}^\circ A_{is}^\circ =$$

$$\sum_{s=1}^{k}\Big(\sum_{i\neq u,j} l_{is}A_{is}+(l_{us}-cl_{js})A_{us}+l_{js}(A_{js}+cA_{us})\Big)=$$

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{s=1}^{k} l_{is}A_{is}-cl_{js}A_{us}+cl_{js}A_{us} = 0 ,$$

поскольку матрица L допустима для векторматрицы A. Аналогичное доказательство проходит и в случае столбцов.

Ограничения на u,j в утверждениях 1 и 2 связаны с ограничениями на элементарные преобразования матрицы A. Лемма 3.5 доказана.

Следующие две леммы дают первые условия на параметры (k,n,t), при которых существуют критические (k,n,t)-векторматрицы.

<u>Лемма 3.6.</u> При любой критической (k,n,t)-векторматрице имеет место неравенство $t\geq k$.

<u>Доказательство.</u> Предположим от противного, что существует критическая (k,n,u)-векторматрица A, где $u<k$. Тогда существует критическая система матриц $A^1,\dots,A^u$. В силу леммы 3.2 для этой системы существует допустимая $u\times k$ матрица L. Возьмем $(k-1)\times k$ матрицу $M=M_1$, в которой первые u строк совпадают со строками матрицы L, а остальные строки произвольны. Выпишем следующую подсистему из системы линейных уравнений K1 при данной M_1:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} l_{1j}(a_{1j1}x_1+\dots+a_{1jn}x_n) = l_{11} = 1 , \\ \sum_{j=1}^{k} l_{2j}(a_{2j1}x_1+\dots+a_{2jn}x_n) = 0 , \\ \quad \dots\dots \\ \sum_{j=1}^{k} l_{uj}(a_{uj1}x_1+\dots+a_{ujn}x_n) = 0 . \end{cases}$$

Поскольку L допустима, то при суммировании всех этих равенств получим на левой стороне нуль, так как коэффициенты каждого x_i являются нулевыми, на правой же стороне остается единица. Таким образом, условие K1 не выполнено и система матриц $A^1,\dots,A^u$ не является критической. Лемма 3.6 доказана.

<u>Лемма 3.7.</u> Если существует критическая (k,n,t)-векторматрица с допустимой матрицей L, то существует и критическая (k,n,r)-векторматрица, где $r=\mathrm{rank}L$.

<u>Доказательство.</u> Поскольку $\mathrm{rank}L=r$, то какие-то $t-r$ строк матрицы L линейно выразимы через остальные r строк. Так как $L_1\neq 0$, можем считать, что L_1 принадлежит к этим r строкам. В силу лемм 3.3 и 3.5 существует критическая (k,n,t)-векторматрица A' с допустимой матрицей L', последние $t-r$ строк которой нулевые, а первая строка совпадает с первой строкой матрицы L. Рассмотрим теперь (k,n,r)-векторматрицу A'', состоящую из первых r строк матрицы A'. Покажем, что для A'' допустимой является матрица L'', состоящая из первых r строк матрицы L'. Действительно, тогда соответствующая векторматрице A'' система матриц удовлетворяет системе уравнений К2. Также выполняется условие К1,поскольку система линейных уравнений, соответствующая векторматрице A' содержит больше уравнений, чем система линейных уравнений, соответствующая векторматрице A''. Лемма 3.7 доказана.

<u>Следствие 3.8.</u> Если L является допустимой матрицей для некоторой критической (k,n,t)-векторматрицы, то $\mathrm{rank}L=k$.

<u>Доказательство.</u> Поскольку L является $t\times k$ матрицей, то $\mathrm{rank}L\leq k$. Если же $\mathrm{rank}L<k$, то в силу леммы 3.7 существует критическая (k,n,r)-векторматрица, где $r<k$. Это противоречит лемме 3.6. Следствие 3.8 доказано.

В силу лемм 3.6 и 3.7 исследование критических (k,n,t)-векторматриц сводится к случаю $k=t$. В этом случае имеет место следующая

<u>Лемма 3.9.</u> (k,n,k)-векторматрица является критической тогда и только тогда, когда множество ее допустимых матриц непусто и состоит только из регулярных матриц.

<u>Доказательство.</u> <u>Необходимость</u> вытекает из леммы 3.2 и следствия 3.8.

<u>Достаточность</u>. Выполнение условия К2 следует из существования допустимой матрицы. Выполнение условия К1 докажем от противного. Пусть система линейных уравнений из условия К1 противоречива при некоторой матрице M. В силу леммы 3.1 можем брать $M=M_u$, $1<u\leq k$. Тогда система линейных уравнений К1 принимает вид:

$$\begin{cases} a_{s11}x_1+\ldots+a_{s1n}x_n+c_1(a_{su1}x_1+\ldots+a_{sun}x_n)=a_{s11}, \\ a_{si1}x_1+\ldots+a_{sin}x_n+c_i(a_{su1}x_1+\ldots+a_{sun}x_n)=0, \\ a_{st1}x_1+\ldots+a_{stn}x_n=0, \\ s=1,\ldots,k\ ,\quad i=2,\ldots,u-1\ ,\quad t=u+1,\ldots,k\ . \end{cases}$$

Отсюда видно, что векторами строк матрицы этой системы являются $A_{si}+c_iA_{su}$, A_{st}, $s=1,\ldots,k$, $i=1,\ldots,u-1$, $t=u+1,\ldots,k$. Поскольку лишь одно (первое) уравнение не является однородным и система уравнений противоречива, то вектор первой строки выражается линейной комбинацией всех остальных. Другими словами, существует $k\times k$ матрица $G=(g_{ij})$, так что $g_{11}=1$ и

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{u-1}g_{sj}(A_{sj}+c_jA_{su})+\sum_{s=u+1}^{k}g_{sj}A_{sj}\right) = 0\ .$$

Определим теперь матрицу $L=(l_{ij})$, так что

$$l_{ij}=\begin{cases} \sum_{s=1}^{u-1}c_sg_{is}\ , & \text{если} \quad j=u, \\ g_{ij}\ , & \text{если} \quad j\neq u\ . \end{cases}$$

Тогда, очевидно, L является допустимой для вектормaтрицы A, но $\det L=0$, поскольку u-тый столбец матрицы L выражается линейной комбинацией остальных столбцов. Полученное противоречие и завершает доказательство. Лемма 3.9 доказана.

Теперь мы в состоянии привести первые примеры критических (k,n,k)-вектормaтриц. Обозначим $n_k=2+\ldots+k$.

<u>Предложение 3.10.</u> Если $n\geq n_k$, то существует критическая (k,n,k)-вектормaтрица.

<u>Доказательство.</u> Выбираем $A_{ij}\in Q^n$ так, что система $\{A_{ij}\mid i\geq j,\ i\neq 1\}$ линейно независима, $A_{11}+A_{22}+\ldots+A_{kk}=0$ и все остальные векторы, т.е. A_{ij}, $i<j$, нулевые. Тогда, очевидно, допустимой для вектормaтрицы A является единичная матрица. Пусть $L=(l_{ij})$ - произвольная допустимая матрица, тогда

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{i\geq j}l_{ij}A_{ij} = 0\ ,\qquad l_{11}=1\ .$$

Вычитая отсюда равенство $A_{11}+\ldots+A_{kk}=0$ и учитывая линейную независимость векторов $\{A_{ij}\mid i\geq j,\ i\neq 1\}$, получим $l_{ii}=1$, $i=1,\ldots,k$, и $l_{ij}=0$ при $i>j$. Но тогда $\det L=l_{11}l_{22}\ldots l_{kk}=1$. Предложение 3.10 доказано.

Наша дальнейшая цель: показать, что неравенство $n\geq n_k$ является не только достаточным но и необходимым для существования критической (k,n,k)-вектормaтрицы. Для этого покажем, что в случае $n<n_k$ не существует критических (k,n,k)-вектормaтриц. В силу леммы 3.9 это равносильно сле-

дующему: Если $n<n_k$, то для любой (k,n,k)-векторматрицы существует допустимая матрица L, такая что $\det L=0$. Прежде чем доказать эту теорему приведем еще некоторые технические леммы. Назовем $k\times k$ матрицу $C=(c_{ij})$ вспомогательной для (k,n,k)-векторматрицы A, если

$$\sum_{i,j} c_{ij}A_{ij} = 0 \ , \quad \text{причем} \quad c_{11}=0 \ .$$

С помощью вспомогательных матриц можем получить из данной допустимой матрицы другие допустимые матрицы. Точнее, если L – допустимая и C – вспомогательная матрица для некоторой векторматрицы A, то и $L+xC$ является допустимой матрицей при каждом $x\in Q$. Назовем $k\times k$ матрицу специальной, если она имеет вид

$$L^\circ=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & l_{1k} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} .$$

<u>Лемма 3.11.</u> Если существует критическая (k,n,k)-векторматрица, то существует и критическая (k,n,k)-векторматрица A° со специальной допустимой матрицей.

<u>Доказательство.</u> Пусть A – критическая (k,n,k)-векторматрица с допустимой матрицей L. По лемме 3.9 L регулярна. Покажем, что пользуясь элементарными преобразованиями строк (кроме умножения первой строки на скаляр и добавления других строк к первой строке) и столбцов (кроме тех, где участвует первый столбец) эту матрицу можно привести к специальному виду L°. Легко заметить, что указанными элементарными преобразованиями строк матрицу L можно привести к виду

$$L=\begin{Vmatrix} 1 & l_{12} & l_{13} & \dots & l_{1k} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

Если все $l_{1j}=0$, $j=2,\dots,k$, то все доказано. Если-же существует $l_{1j}\neq 0$, то можем предположить, что $j=k$. Действительно, если $j\neq k$, то надо менять j-ую и k-тую строки и столбцы. С помощью элемента $l_{1k}\neq 0$ приведем к нулю все элементы l_{1j}, $j=2,\dots,k-1$. Если $l_{1j}\neq 0$, то вычитаем из j-ого столбца k-ый столбец, умноженной на $l_{1j}l_{1k}^{-1}$. В полученной матрице L' все элементы кроме двух совпадают с элементами матрицы L, только $l_{1j}'=0$, $l_{kj}'=-l_{1j}l_{1k}^{-1}$. Теперь добавим к k-той строке j-ую строку, умноженную на $l_{1j}l_{1k}^{-1}$. В результате получим матрицу L", которая отличается от матрицы L только элементом l_{ij}, теперь $l_{ij}"=0$. Таким образом можем привести к нулю все элементы l_{ij}, $j=2,\ldots,k-1$. Из леммы 3.5 следует, что полученная матрица является допустимой для некоторой критической векторматрицы, полученной из векторматрицы A путем элементарных преобразований. Следовательно, существует критическая (k,n,k)-векторматрица со специальной допустимой матрицей L°. Лемма 3.11 доказана.

При любой квадратной матрице G обозначим через G_{ij} матрицу G без i-той строки и j-ого столбца, а через $[G_{ij}]$ - алгебраическое дополнение элемента g_{ij}.

Лемма 3.12. Пусть поле Q содержит не менее k элементов и A - критическая (k,n,k)-векторматрица со специальной допустимой матрицей L°. Если $r_1A_{1k}+\ldots+r_kA_{kk}=0$, то при любой вспомогательной матрице $C=(c_{ij})$ $r_1c_{k1}+\ldots+r_kc_{kk}=0$.

Доказательство. Сперва отметим, что при любой вспомогательной матрице C матрица $G=L^\circ+xC$ является допустимой и в силу леммы 3.9 всегда $\det G\neq 0$. Теперь заметим, что $r_k=0$, так как в противном случае существовала бы допустимая матрица G, так что $\det G=0$.

Действительно, если $r_k\neq 0$, то в качестве G можно брать сумму матриц $L^\circ-r_k^{-1}F$, где $F=(f_{ij})$ - вспомогательная матрица с $f_{ij}=0$ при $i=1,\ldots,k-1$, а $f_{kj}=r_j$. Это приводит к противоречию с критичностью матрицы A (лемма 3.9).

Пусть C - произвольная вспомогательная матрица для A. Тогда, ввиду соотношения $r_1A_{1k}+\ldots+r_kA_{kk}=0$, вспомогательной для A является и следующая матрица C°, которая отличается от матрицы C только последним столбцом, именно:

$c_{ik}^\circ = c_{ik}+yr_i$, $i=1,\ldots,k$, $y\in Q$.

Обозначим $G=L^\circ+C$ и $G^\circ=L^\circ+C^\circ$, тогда

$$\det G^\circ = \sum_{i=1}^{k}(g_{ik}+yr_i)[G_{ik}] = \det G+y\left(\sum_{i=1}^{k} r_i[G_{ik}]\right).$$

Если $\sum_{i=1}^{k} r_i[G_{ik}]\neq 0$, то можем определить y, так что $\det G^\circ=0$, что приводит к противоречию. Следовательно, $\sum_{i=1}^{k} r_i[G_{ik}]=0$. Заменим теперь в формуле $G^\circ=L^\circ+C^\circ$ матрицу C° на xC°, $x\in Q$. Очевидно, что G° остается допустимой, но $\sum_{i=1}^{k} r_i[G_{ik}]$ становится полиномом $(k-1)$-ой степени относительно x. В силу доказанного выше этот полином определяет нулевой полином на

17

Q. Так как полином $(k-1)$-ой степени может иметь не более $k-1$ корней, а поле Q содержит не менее k элементов, то этот полином является нулевым, т.е. все его коэффициенты равны нулю. Легко проверить, что коэффициентом при первой степени x в полиноме

$$\sum_{i=1}^{k} r_i[G_{ik}] = \begin{vmatrix} 1 & xc_{12} & \dots & xc_{1i} & \dots & xc_{1,k-1} & r_1 \\ xc_{21} & 1+xc_{22} & \dots & xc_{2i} & \dots & xc_{2,k-1} & r_2 \\ & \dots\dots & & & & & \\ xc_{i1} & xc_{i2} & \dots & 1+xc_{ii} & \dots & xc_{i,k-1} & r_i \\ & \dots\dots & & & & & \\ xc_{k1} & xc_{k2} & \dots & xc_{ki} & \dots & xc_{k,k-1} & r_k \end{vmatrix}$$

является $r_1c_{k1}+\dots+r_kc_{kk}$. Лемма 3.12 доказана.

Обозначим через $\{A\}$ множество элементов (векторов) матрицы A, а через $\langle A\rangle$ - векторное пространство, порожденное этим множеством.

Теперь мы в состоянии доказать основной результат о критических векторматрицах.

<u>Предложение 3.13.</u> Пусть A - произвольная (k,n,k)- векторматрица над полем Q, $|Q|\geq k$. Если $\dim\langle A\rangle<n_k$, то векторматрица A не является критической.

<u>Доказательство.</u> Предположим от противного, что существует критическая (k,n,k)-векторматрица A, так что $\dim\langle A\rangle<n_k$.

Проведем индукцию по k. Пусть $k=2$, тогда $n=2$ и $\dim\langle A\rangle<2$. Если $\dim\langle A\rangle=0$, то матрица A является нулевой матрицей. Но это противоречит определению критичности матрицы A $(A_{11}\neq 0)$. Рассмотрим теперь случай $\dim\langle A\rangle=1$. Если $A_{12}\neq 0$, то $A_{11}=qA_{12}$ и существует допустимая матрица $L=(l_{ij})$, где $l_{11}=1$, $l_{12}=-q$, $l_{21}=l_{22}=0$, определитель которой нулевой. Следовательно, $A_{12}=0$. Аналогично получим, что и $A_{21}=0$. Но теперь ясно, что в допустимой матрице всегда можно выбирать элементы l_{12} и l_{21}, так чтобы она не являлась регулярной. Учитывая лемму 3.9, наше утверждение доказано в случае $k=2$.

Предположим, что утверждение доказано в случае $k-1$, докажем, что утверждение справедливо и в случае k $(k\geq 3)$.

Пусть $\dim\langle A\rangle<n_k$. В силу леммы 3.11 можно без ограничения общности считать, что A обладает специальной допустимой матрицей L°. Выбираем максимальную линейно независимую систему среди векторов последнего столбца матрицы A. Обозначим через B^k множество первых индексов всех векторов этой системы. Заметим, что $k\in B^k$. Действительно, в противном случае можем выразить A_{kk} через остальные векторы последнего

столбца, но тогда существует допустимая матрица, последная строка которой нулевая. Рассмотрим систему векторов

$$B^{\circ} = \{A_{ki} \mid i \notin B^k\} \cup \{A_{jk} \mid j \in B^k\} .$$

Покажем, что эта система является линейно независимой. Действительно, пусть

$$\sum_{j \notin B^k} x_j A_{kj} + \sum_{i \in B^k} y_i A_{ik} = 0 .$$

Тогда можем рассмотреть вспомогательную матрицу $C=(c_{ij})$, где $c_{kj}=x_j$, если $j \notin B^k$, и $c_{ik}=y_i$, $i \in B^k$, все остальные $c_{ij}=0$.

Поскольку любой вектор последнего столбца матрицы A можно выразить через базис этого столбца, то для каждого $i \notin B^k$ имеет место равенство $A_{ik}=\sum_{s \in B^k} r_{is} A_{sk}$. Так как $k \notin B^k$, т.е. A_{kk} содержится в любой максимальной линейно независимой системе, то $r_{ik}=0$. Теперь в силу леммы 3.12 для каждого $i \notin B^k$ имеем $x_i=c_{ki}=\sum_{s \in B^k} r_{is} c_{ks}$. Так как все $c_{ks}=0$ при $s \in B^k \setminus \{k\}$ и $r_{ik}=0$, то $x_i=0$, при всех $i \notin B^k$. Следовательно $\sum_{i \in B^k} y_i A_{ik}=0$. Поскольку система A_{ik}, $i \in B^k$, линейно независима, то все $y_i=0$. Таким образом, система векторов B° - линейно независима.

Выбираем из множества $\{A\}$ максимальную линейно независимую систему векторов B, так что $B^{\circ} \subset B$, $A_{11} \notin B$ и B содержит минимально возможное количество векторов из последней строки матрицы A. Обозначим через B' множество всех векторов системы B, принадлежащих последней строке или последнему столбцу матрицы A.

Разложим векторное пространство $\langle A \rangle$ в прямую сумму: $\langle A \rangle = W \dotplus M$, где M - линейная оболочка векторов множества B', а W - линейная оболочка всех остальных базисных векторов. В частности, для каждого A_{ij} имеет место разложение:

$A_{ij}=F_{ij}+M_{ij}$, где $F_{ij} \in W$, $M_{ij} \in M$.

Заметим, что $M_{ij}=A_{ij}$, при $A_{ij} \in B'$, и $F_{ij}=A_{ij}$, когда $A_{ij} \in B \setminus B'$. Рассмотрим $(k-1,n,k-1)$-векторматрицу

$$F= \left\| \begin{matrix} F_{11} & \cdots & F_{1,k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{k-1,1} & \cdots & F_{k-1,k-1} \end{matrix} \right\| .$$

Поскольку $B^\circ \subset B'$, то $\dim M \geq k$. Следовательно,

$$\dim\langle F\rangle = \dim W < n_k - k = n_{k-1}$$

и по индукционному предположению F не является критической.

Покажем, что для F существует допустимая матрица. Действительно, пусть L – допустимая матрица для (k,n,k)-векторматрицы A, так что $l_{11}=1$, $l_{ij}=0$, если $A_{ij} \in B$, и $l_{ij}=r_{ij}$, когда $A_{11}+\sum_B r_{ij}A_{ij}=0$. Очевидно, матрица L_{kk} является допустимой для матрицы F. В силу леммы 3.9 существует нерегулярная допустимая матрица G° для матрицы F.

Обозначим множество коэффициентов векторов из множества B той же буквой B, т.е. пара коэффициентов $(s,t) \in B$ тогда и только тогда, когда $A_{st} \in B$. Также будем понимать $(s,t) \in B'$. Пусть $X=\{(s,t) \mid s,t=1,\dots,k-1\}$, $Y=\{(u,k),(k,v) \mid u,v=1,\dots,k\}$ и

$$M_{st} = \sum_Y r_{st,uv}M_{uv}, \quad \text{где} \quad (s,t) \in X. \qquad (1)$$

Построим с помощью матрицы G° допустимую матрицу G для (k,n,k)-векторматрицы A. Определим $G_{kk}=G^\circ$, $g_{uv}=0$, если $g_{uv} \in Y \setminus B'$ и

$$g_{uv} = -\sum_X r_{st,uv}g_{st}^\circ, \quad (u,v) \in B'. \qquad (2)$$

Надо проверить, что $S = \sum_{i,j=1}^{k} g_{ij}A_{ij}=0$. Действительно, поскольку $g_{st}=0$, когда $(s,t) \in Y \setminus B'$, то

$$S = \sum_X g_{st}A_{st}+\sum_{B'} g_{uv}A_{uv}. \qquad (3)$$

Учитывая, что $A_{uv}=M_{uv}$, когда $(u,v) \in B'$, то в силу условия (2) получим

$$\sum_{B'} g_{uv}A_{uv} = \sum_{B'} g_{uv}M_{uv} = \sum_{B'}\Big(-\sum_X r_{st,uv}g_{st}^\circ\Big)M_{uv}. \qquad (4)$$

Так как $A_{st}=F_{st}+M_{st}$, $G_{kk}=G^\circ$ и G° был допустимой матрицей для векторматрицы F, т.е. $\sum_X g_{st}^\circ F_{st} = 0$, то

$$\sum_X g_{st}A_{st} = \sum_X g_{st}^\circ(F_{st}+M_{st}) = \sum_X g_{st}^\circ M_{st}.$$

Теперь из-за условия (1) имеем

$$\sum_{X} g_{st}A_{st} = \sum_{X} g_{st}^{\circ}(\sum_{B'} r_{st,uv}M_{uv}) \qquad (5)$$

Таким образом, подставляя выражения (5) и (4) во выражение (3), получим, что $S=0$ и матрица G является допустимой для A.

Остается доказать, что матрица G нерегулярна. Для этого покажем, что $g_{k1}=\ldots=g_{k,k-1}=0$. Тогда

$\det G = g_{kk}[G_{kk}] = g_{kk}\det G^{\circ} = 0$,

так как G° нерегулярна.

По конструкции матрицы G имеем $g_{kj}=0$, когда $A_{kj}\notin B'$. Допустим, что существует v, так что $g_{kv}\neq 0$ при $A_{kv}\in B'\setminus\{k\}$. Покажем, что $v\notin B^k$. Действительно, в противном случае из условия (2) получили бы, что найдется хотя бы одна пара $(s,t)\in X$, так что $r_{st,kv}\neq 0$. Но тогда из условия (1) получили бы, что вместо M_{kv} мы могли бы взять в качестве базисного элемента вектор A_{st}. Это противоречит выбору базиса B, а именно условию, что в последней строке матрицы A должно быть минимальное возможное количество базисных векторов. Таким образом, $g_{kv}=0$ при всех $v\in B^k$.

Допустим теперь, что $g_{kv}\neq 0$ при некотором $(k,v)\in B^{\circ}$. Тогда во вспомогательной матрице $C=G-L^{\circ}$ имеем $c_{kv}\neq 0$, а все $c_{kj}=0$ при $j\in B^k$. Если $A_{vk}+\sum_{j\in B^k} r_jA_{jk} = 0$, то в силу леммы 3.12 имеем $c_{kv}+\sum_{j\in B^k} r_jc_{kj} = 0$. Поскольку все $c_{kj}=0$ при $j\in B^k$, то и $c_{kv}=0$. Таким образом, $c_{kj}=0$ при всех $j=1,\ldots,k-1$. Но тогда и в матрице $G=C+L^{\circ}$ имеем

$$g_{k1}=\ldots=g_{k,k-1}=0 .$$

Следовательно, матрица G - нерегулярна и в силу леммы 3.9 (k,n,k)-векторматрица A не является критической. Предложение 3.13 доказано.

Замечание. Случаи $k=2$ и $k=3$ можно доказать без ограничения на поле Q.

Теперь мы в состоянии дать описание k-сбалансированных колец в одном классе локальных колец.

Теорема 3.14. Пусть R - коммутативное локальное кольцо с нулевым квадратом радикала Джеобсона, причем поле $R/J=Q$ содержит не менее, чем k элементов $(k\geq 3)$. Тогда следующие утверждения равносильны:

(а) R является $(k-1)$-сбалансированным;

(б) $\dim_Q J < n_k$.

Доказательство. (а)=>(б). Пусть R - $(k-1)$-сбалансированное кольцо, т.е. каждый R-модуль является $(k-1)$-сбалансированным. Предположим от противного, что $\dim_Q J \geq n_k$. В силу предложения 3.10 тогда существует критическая система матриц $A^1,\ldots,A^k$ над Q. Из предложения 2.2 получим теперь, что имеется R-модуль S, который не является $(k-1)$-сбалансированным. Это противоречие показывает, что $\dim_Q J < n_k$.

(б)=>(а). Предположим от противного, что существует R-модуль S, так что $\tau(S) \geq k$. В силу предложения 2.2 тогда существует критическая система матриц $A^1,\ldots,A^k$ над Q, или, другими словами, существует критическая (k,n,t)-векторматрица. В силу леммы 3.7 имеется критическая (k,n,k)-векторматрица A. Поскольку $\dim\langle A\rangle\leq\dim_Q J<n_k$, то из-за предложения 3.13, вектерматрица A не является критической. Полученное противоречие показывает, что не существует R-модуля S, так что $\tau(S) \geq k$. Следовательно, кольцо R является $(k-1)$-сбалансированным. Теорема 3.14 доказана.

Опираясь на те же результаты легко доказывается

Следствие 3.15. Пусть R - коммутативное локальное кольцо с нулевым квадратом радикала Джекобсона, причем поле $R/J=Q$ содержит не менее, чем $k+1$ элементов $(k\geq 3)$. Кольцо R является строго k-сбалансированным тогда и только тогда, когда имеет место условие: $n_k \leq \dim_Q J < n_{k+1}$.

Литература

1. С а к с А. Об аффинной полноте модулей // Уч. зап. Тарт. ун-та.-1985.-Вып.700.-С.71-79.

2. С а к с А. Д. Об аффинной полноте разложимых модулей // Уч. зап. Тарт. ун-та.-1987.-Вып.764.-С.123-135.
3. W a r n e r S. Linearly compact rings and modules // Math. Ann.-1972.-Vol.197,N.1.-P.29-43.

Поступило
27 VII 1989

k-BALANSSEERITUD RINGID

A. Saks

R e s ü m e e

Käesolevas töös esitatakse k-balansseeritud ringide definitsioon ja kirjeldus ühes lokaalsete ringide klassis:

<u>Teoreem 3.14.</u> Olgu R kommutatiivne lokaalne ring, mille Jacobsoni radikaali ruut on null ja korpus $R/J=Q$ sisaldab vähemalt k elementi ($k>2$). Siis järgmised tingimused on ekvivalentsed:

a) R on $(k-1)$-balansseeritud;

b) $\dim_Q J<n_k=2+...+k$.

Seega k-balansseeritud ringide klass sisaldub rangelt $(k+1)$-balansseeritud ringide klassis.

Samuti tõestatakse, et iga moodul üle Nöetheri ringi, mille radikaali astmete lõige on null, on lokaalselt afiinselt täielik parajasti siis, kui see ring on lineaarselt kompaktne.

k-BALANCED RINGS

A. Saks

S u m m a r y

In this paper we define k-balanced rings as a generalization of balanced rings. A description of these rings is given in one class of local rings:

Theorem 3.14. Let R be a commutative local ring with zero Jacobson radical square and the field $R/J=Q$ has at least k elements ($k>2$). Then the following conditions are equivalent:

a) R is $(k-1)$-balanced;

b) $\dim_Q J<n_k=2+\ldots+k$.

This implies that the class of k-balanced rings is a proper subclass of the class of $(k+1)$-balanced rings.

We also show that every module over a Noetherian ring with zero intersection of radical powers is locally affine complete iff the ring is linearly compact.

Acta et commentationes universitatis Tartuensis, 878, 1990, 137-146.

ДВА НЕСРАВНИМЫХ МНОЖЕСТВА, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Т. Тамме

Лаборатория прикладной математики

В данной работе изучаются тьюринговы степени множеств натуральных чисел, инвариантных относительно группы автоморфизмов вычислительной структуры. Построением двух несравнимых множеств такого типа получаем инвариантное множество, степень неразрешимости которого отличается от степени 0 и всех ее скачков. В статье используются некоторые определения и результаты Ан. А. Мучника. Его помощь и полезные советы во многом содействовали выходу данной публикации.

Определение ([1]). Вычислительной структурой назовем пару $\langle \mathbb{N};F\rangle$, где $\mathbb{N}$ - натуральный ряд и $F(x,y)$ - главная (геделева) универсальная функция (см. [3, 4]).

Пусть $\{\varphi_x\}$ - геделева нумерация вычислимых функций из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, соответствующая универсальной функции $F(x,y)$, т. е.

$$\varphi_x(y) = F(x,y) \quad , \quad x, y \in \mathbb{N},$$

и **A** - множество всех автоморфизмов вычислительной структуры. Ан. Мучником доказано, что все автоморфизмы вычислительной структуры являются вычислимыми и что множество **A** - бесконечное. Рассмотрим инвариантные подмножества множества $\mathbb{N}$ относительно группы **A**.

Определение. Инвариантным множеством назовем множество $B \subseteq \mathbb{N}$, замкнутое относительно множества **A**, т. е.

$$\mathbf{A}(B) \subseteq B,$$

где $\mathbf{A}(B) = \{h(x) \mid h \in \mathbf{A},\ x \in B\}$.

Так как тождественная функция принадлежит множеству **A**, то последнее условие равносильно условию

$$\mathbf{A}(B) = B.$$

Понятно, что множества $\emptyset$ и $\mathbb{N}$ являются инвариантными. Назовем их тривиальными инвариантными множествами. Эти множества являются рекурсивными, так как их характеристические функции вычислимы.

Пусть 0 есть тьюрингова степень (см. [2, 5]) всех рекурсивных множеств, dg B - тьюрингова степень множества B, $a \le b$ - тьюрингова сводимость степени a к степени b и a' - скачок степени a.

Ан. Мучником доказана

Теорема 1 (Ан. Мучник). Пусть $B \subseteq \mathbb{N}$ - любое нетривиальное инвариантное множество. Тогда $\mathrm{dg}\ B \ge 0'$.

Из свойств автоморфизмов вычислительной структуры следует

Предложение 2. Пусть $h \in \mathbf{A}$ и $i = h(j)$ для некоторых чисел $i, j \in \mathbb{N}$. Тогда мощности областей определения и значений функций φ_i и φ_j совпадают.

Пусть $\{\emptyset\}$ - множество всех номеров нигде не определенной функции, {id} - множество всех номеров тождественной функции и Tot - множество всех номеров всюду определенных функций из нашей нумерации $\{\varphi_x\}$. Из предложения 2 следует, что эти множества являются инвариантными. Известно также (см. [2, 5]), что

$$\mathrm{dg}\ \{\emptyset\} = 0',$$
$$\mathrm{dg}\ \mathrm{Tot} = 0''.$$

Предложение 3. $\mathrm{dg}\ \{\mathrm{id}\} = 0''$.

Доказательство. Множество $\{id\}$ принадлежит классу Π_2, так как для любого числа $i \in \mathbb{N}$

$$i \in \{id\} \iff \forall y(\varphi_i(y) = y),$$

а формула $\varphi_i(y) = y$ принадлежит Σ_1. Tot является полным Π_2-множеством. Поэтому достаточно сводить Tot к множеству $\{id\}$. Определим функцию $G : \mathbb{N}^2 \longmapsto \mathbb{N}$ следующим образом:

$$G(x,y) = \begin{cases} y, \text{ если } \varphi_x(y) \text{ определено;} \\ \text{не определено, если } \varphi_x(y) \text{ не определено.} \end{cases}$$

По s-m-n-теореме существует всюду определенная вычислимая функция g такая, что

$$\varphi_{g(x)}(y) = G(x,y) \quad , \quad x,\ y \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любого $i \in \mathbb{N}$

$$i \in Tot \iff g(i) \in \{id\}.$$

Предложение доказано.

Теперь нас интересует вопрос: существуют ли инвариантные множества, степени которых отличаются от степеней 0, 0′ и 0″? В теореме 7 и ее следствиях мы даем на этот вопрос положительный ответ: существуют инвариантные множества, степени которых несравнимы.

Рассмотрим следующее отношение эквивалентности:

$$i \equiv j \iff \exists h(h \in \mathbf{A} \ \& \ i = h(j)).$$

Множество $\mathbb{N}$ распадается этим отношением на непересекающиеся классы эквивалентности. Пусть

$[i] = \{j \mid j \equiv i\}$ - класс эквивалентности, содержащий число $i \in \mathbb{N}$,

$[B] = \bigcup_{i \in B} [i]$ - объединение всех классов эквивалентности, содержащих числа из множества $B \subseteq \mathbb{N}$.

Множество $[B]$ назовем <u>замыканием множества</u> $B \subseteq \mathbb{N}$ относительно класса $\mathbf{A}$. Понятно, что

$$[i] = \{j \mid j \equiv i\} = \mathbf{A}(i).$$

Список $\{\varphi_k\}$ содержит функции с любым заданным числом аргументов $n \in \mathbb{N}$. Поэтому из предложения 2 вытекает

Предложение 4. Существует бесконечное число классов эквивалентности $[i]$.

Предложение 5. Отношение эквивалентности $i \equiv j$ принадлежит классу Σ_3.

Доказательство. По определению имеем

$$i \equiv j \ \leftrightarrow\ \exists h([h \in A] \ \& \ i = h(j)),$$

где $[h \in A] \Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z(F(x,y) = z \leftrightarrow F(h(x),h(y)) = h(z))$. Утверждения $F(x,y) = z$ и $F(h(x),h(y)) = h(z)$ принадлежат классу Σ_1. По тавтологии

$$(A \equiv B) \equiv ((\neg A \vee B) \ \& \ (\neg B \vee A))$$

получаем, что выражение

$$F(x,y) = z \ \leftrightarrow\ F(h(x),h(y)) = h(z)$$

принадлежит Π_2, и поэтому формула $[h \in A]$ тоже принадлежит Π_2. Формула $i = h(j)$ принадлежит Σ_1. Поэтому отношение эквивалентности $i \equiv j$ принадлежит классу Σ_3. Предложение доказано.

Из определений понятий класса эквивалентности $[i]$ и инвариантного множества $B \subseteq \mathbb{N}$ и из свойств отношений эквивалентности следует

Предложение 6. Пусть $B \subseteq \mathbb{N}$ - произвольное множество. Тогда (B - инвариантное множество) $\leftrightarrow$ (B является объединением классов эквивалентности $[i]$).

Это предложение дает нам общий принцип для построения инвариантных множеств. Из предложения 6 также следует, что всякий класс эквивалентности $[i]$ является инвариантным множеством. Поэтому из предложения 4 получим

Следствие 6.1. Существует бесконечное число инвариантных множеств $B \subseteq \mathbb{N}$.

Теперь мы докажем, что существуют два инвариантных множества, степени которых несравнимы относительно тьюринговой сводимости. Несравнимость степеней a и b обозначим через a|b.

В теореме 7 мы докажем более сильный результат: это свойство имеет место для любого отношения эквивалентности из $\mathbb{N}^2$, у которого число классов эквивалентности бесконечное.

Теорема 7. Пусть $E \subseteq \mathbb{N}^2$ - отношение эквивалентности, для которого $dg\ E \leq_T 0^n$ и которое имеет бесконечное число классов эквивалентности. Тогда существуют множества B и C, состоящие из классов эквивалентности этого отношения, такие, что $dg\ B \mid dg\ C$ и $0 \leq dg\ B,\ dg\ C \leq 0^{n+2}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся доказательством существования двух несравнимых (относительно тьюринговой сводимости) множеств (см. [5]) и сделаем в нем некоторые изменения. Основой доказательства является метод диагонализации по всем классам эквивалентности по отношению E.

Пусть $\{I_n\}$ - какое-нибудь перечисление всех алгоритмов с оракулом из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Нам нужно, чтобы для каждого числа $n \in \mathbb{N}$ выполнялись условия

(У1) $B \neq I_n^C$,

(У2) $C \neq I_n^B$,

где мы отождествляем множества B и C с их харектеристическими функциями относительно фиксированной нумерации $\{\varphi_*\}$.

Мы построим множества B и C по шагам. На шаге s (s = 0, 1, ...) мы добиваемся выполненности одного из условий (У1) или (У2). Пусть B^s и C^s обозначают, соответственно, конечные части множеств B и C, определенные до шага s нашей конструкции, и $\overline{B}^s$ и $\overline{C}^s$ - конечные части дополнений множеств B и C, определенные до шага s. Это значит, что на s-ом шаге мы строим четыре конечных множества: B^{s+1}, C^{s+1}, $\overline{B}^{s+1}$ и $\overline{C}^{s+1}$. При этом

$$B^0 = C^0 = \overline{B}^0 = \overline{C}^0 = \varnothing,$$
$$B^s \subseteq B^{s+1}\ ,\ C^s \subseteq C^{s+1}\ ,$$
$$\overline{B}^s \subseteq \overline{B}^{s+1}\ ,\ \overline{C}^s \subseteq \overline{C}^{s+1}\ ,$$
$$B^{s+1} \cap \overline{B}^{s+1} = \varnothing\ ,\ C^{s+1} \cap \overline{C}^{s+1} = \varnothing .$$

Тогда, после совершения всех шагов, мы получим множества

$$B = \bigcup_{s=0}^{\infty} B^s \quad \text{и} \quad C = \bigcup_{s=0}^{\infty} C^s,$$

которые удовлетворяют условиям (У1) и (У2) для всех $n \in \mathbb{N}$. Замыкая эти множества относительно отношения E, получим множества B^* и C^*:

$$B^* = [B]_E ,$$
$$C^* = [C]_E ,$$

где $[B]_E$ обозначает замыкание множества B относительно отношения эквивалентности E. Замыкание множеств B и C относительно E не нарушает условий (У1) и (У2), так как наша конструкция является устойчивой относительно этой операции.

Мы скажем, что <u>используем</u> число x <u>отрицательно</u> в вычислении значения $I^C_n(i)$, если мы используем x как элемент дополнения множества C в вычислении данного значения.

Теперь опишем <u>шаг s</u>. Пусть $s = 2n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим условие (У1) с тем же числом n. Выберем минимальное число $i \in \mathbb{N}$ такое, что $i \notin [B^s]_E$ и $i \notin [\overline{B}^s]_E$. Проверим

<u>Условие (У3).</u> Существуют конечные множества D и $\overline{D}$ такие, что $I^{C^s \cup D}_n(i)$ определено, в процессе вычисления этого значения используются отрицательно лишь числа из множества $\overline{C}^s \cup \overline{D}$ и множества $[C^s \cup D]_E$ и $[\overline{C}^s \cup \overline{D}]_E$ не пересекаются.

Если условие (У3) выполнено, то выберем одну такую пару множеств D и $\overline{D}$ и добавим эти множества соответственно к множествам C и $\overline{C}$:

$$C^{s+1} = C^s \cup D,$$
$$\overline{C}^{s+1} = \overline{C}^s \cup \overline{D}.$$

Если $I^{C^s \cup D}_n(i) = 0$, то добавим число i к множеству B:

$$B^{s+1} = B^s \cup \{i\};$$

иначе добавим число i к множеству $\overline{B}$:

$$\overline{B}^{s+1} = \overline{B}^s \cup \{i\}.$$

Если условие (У3) не выполнено, то на данном шаге никаких действий не производим.

Пусть, теперь, $s = 2n+1$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда рассмотрим условие (У2) и проделаем для него алгоритм условия (У1), поменяв в нем всюду местами буквы B и C.

Докажем, что множества B и C, построенные таким путем, удовлетворяют всем требованиям (У1) и (У2). Рассмотрим условие (У1):

$$B \neq I_n^C .$$

Докажем, что это условие выполняется после шага $s = 2n+1$. Пусть соответствующее число $i \notin [B^s]_E \cup [\overline{B}^s]_E$ уже выбрано. Если условие (У3) выполнено, то, по конструкции, имеем

$$I_n^C(i) = I_n^{C^{s+1}}(i) \neq B^{s+1}(i) = B(i).$$

Если условие (У3) не выполнено, то условие (У1) выполняется опять при числе i, так как значение $I_n^C(i)$ не определено. Действительно, предположим противное. Тогда существуют конечные множества $D \subseteq C$ и $\overline{D} \subseteq \mathbb{N} \setminus C$ такие, что значение $I_n^{C^s \cup D}(i)$ определено и в его вычислении используются отрицательно лишь элементы из множества $\overline{C}^s \cup \overline{D}$. Этим мы получили противоречие.

Условие (У2) рассмотрим аналогично.

Устойчивость нашей конструкции относительно операции замыкания следует из выбора числа i и множеств D и $\overline{D}$ - мы постоянно заботимся о том, чтобы замыканием множеств B и C не нарушилось выполненность какого-нибудь из условий (У1) или (У2).

Множества B^* и C^* состоят из классов эквивалентности по отношению E и поэтому они удовлетворяют требованиям теоремы. Несравнимость степеней $dg\ B^*$ и $dg\ C^*$ вытекает из выполненности всех условий (У1) и (У2). Остается доказать, что $0 \leq dg\ B^*, dg\ C^* \leq 0^{n+2}$.

Множества B и C являются рекурсивными относительно нашей конструкции. Докажем, что конструкция вычислима относительно степени 0^{n+2}. Предположим, что мы уже вычислили множества B^s, $\overline{B}^s$, C^s и $\overline{C}^s$ и что $s = 2n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Случай, если $s = 2n+1$, мы рассмотрим аналогично. Для нахождения числа i нам нужно проверить истинность условий

$$i \in [B^s]_E \quad , \quad i \in [\overline{B}^s]_E .$$

Множества B^s и $\overline{B}^s$ конечные. Значит, нахождение числа i эффективно относительно отношения эквивалентности E. Но, по предположению теоремы, $dg\ E \le 0^{n}$. Теперь проверим условие

$$(1)\qquad \exists D \exists \overline{D}(i \in Dom(I_{n}^{C^{e} \cup D,\ \overline{C}^{e} \cup \overline{D}})\ \& \\ \&\ [C^{e} \cup D]_{E} \cap [\overline{C}^{e} \cup \overline{D}]_{E} = \emptyset),$$

где $I_{n}^{C_1, C_2}$ обозначает алгоритм I_{n} при вычислении с которым используется оракул C_1 и отрицательно используются лишь числа из множества C_2. Первый член конъюнкции в скобках принадлежит классу Σ_1, а степень второго члена конъюнкции $\le 0^{n+1}$, так как соответствующая формула выражается в виде

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \neg\exists x(x \in A \ \&\ x \in B).$$

Поэтому степень конъюнкции $\le 0^{n+1}$ и степень всей формулы (1) $\le 0^{n+2}$. Нахождение множеств D и $\overline{D}$, по релятивизованной теореме о селекторе (см. [5], стр. 25), эффективно относительно степени 0^{n+2}.

Значит, степень конструкции множеств B и C $\le 0^{n+2}$. Степень построения их замыканий B^* и C^* также $\le 0^{n+2}$.

Поэтому множества B^* и C^* удовлетворяют всем требованиям теоремы. Теорема доказана.

<u>Следствие 7.1.</u> Существуют инвариантные множества B и C такие, что $dg\ B \mid dg\ C$ и $0' \le dg\ B,\ dg\ C \le 0^{4}$.

<u>Доказательство.</u> Вставляем в теорему 7 вместо произвольного отношения E отношение эквивалентности $i \equiv j$. По предложению 4 это отношение удовлетворяет условиям теоремы, а по предложению 5 оно принадлежит классу Σ_3. В этом случае формула (1) из доказательства теоремы 7 принадлежит классу Σ_4 и степень конструкции множеств B и C $\le 0^{4}$. Поэтому $dg\ B^*,\ dg\ C^* \le 0^{4}$. Степень тривиальных инвариантных множеств равна 0. Из несравнимости степеней $dg\ B^*$ и $dg\ C^*$ и из теоремы 1 следует, что $dg\ B^*,\ dg\ C^* \ge 0'$.

<u>Следствие 7.2.</u> Существует инвариантное множество D такое, что его степень $dg\ D$ отличается от степени 0 и всех ее скачков 0^{n} ($n \in \mathbb{N}$).

<u>Доказательство.</u> Возьмем множества B и C из следствия 7.1. Имеем $0' \le dg\ B \le 0^{4}$, $0' \le dg\ C \le 0^{4}$ и $dg\ B \mid dg\ C$. Поэтому $dg\ B \ne 0'$, $dg\ B \ne 0^{4}$, $dg\ C \ne 0'$ и $dg\ C \ne 0^{4}$. Если $dg\ B = 0''$, то $dg\ C \ne 0''$ и $dg\ C \ne 0'''$, а если $dg\ B = 0'''$, то $dg\ C \ne 0''$ и $dg\ C \ne 0'''$. Значит, одно из множеств

В или С удовлетворяет нашим требованиям.

Литература

1. М у ч н и к Ан. А. Об основных структурах дескриптивной теории алгоритмов// Докл. АН СССР, - 1985, - т. 285, № 2, - С. 280-283.

2. Р о д ж е р с Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. - М., 1972.

3. У с п е н с к и й В. А. Лекции о вычислимых функциях. - М., 1960.

4. У с п е н с к и й В. А., С е м е н о в А. Л. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. - М., 1987.

5. Ш е н ф и л д Д ж. Степени неразрешимости. - М., 1977.

Поступило
21 XI 1989

KAKS MITTEVÕRRELDAVAT HULKA, MIS ON INVARIANTSED ARVUTUSLIKU STRUKTUURI AUTOMORFISMIDE RÜHMA SUHTES

T. Tamme

R e s ü m e e

Vaatleme selliseid naturaalarvulisi hulki, mis on invariantsed arvutusliku struktuuri automorfismide rühma suhtes. Artiklis konstrueeritakse kaks sellist tüüpi hulka, mis pole Turingi taanduvuse mõttes võrreldavad. Järelikult leidub invariantne hulk, mille Turingi aste erineb nii astmest 0 kui ka kõigist tema hüpetest 0^n.

TWO INCOMPARABLE SETS INVARIANT WITH RESPECT TO THE GROUP OF AUTOMORPHISMS OF THE COMPUTATIONAL STRUCTURE

T. Tamme

S u m m a r y

Following An. A. Muchnik we call computational structure a pair $\langle \mathbb{N};F\rangle$, where $\mathbb{N}$ - is the set of all natural numbers and $F(x,y)$ is a main (Gödel) universal function. An. Muchnik has proved that all computational structures are isomorphic.

Let A be the group of all automorphisms of the computational structure. In this paper we consider the degrees for Turing reducibility of invariant subsets of $\mathbb{N}$ with respect to the group A.

We know invariant subsets of $\mathbb{N}$ with degrees 0, 0′ and 0″. It is interesting to learn whether there exist invariant subsets of $\mathbb{N}$ having different from those degrees of unsolvability?

Theorem 7. Let $E \subseteq \mathbb{N}$ be an equivalence relation with infinite number of equivalence classes such that $dg\ E \leq 0^n$. Then there exist two sets $B \subseteq \mathbb{N}$ and $C \subseteq \mathbb{N}$ consisting of equivalence classes of the relation E such that their degrees for Turing reducibility are incomparable and $0 \leq dg\ B,\ dg\ C \leq 0^{n+2}$.

Corollary 7.1. There are two invariant sets $B, C \subseteq \mathbb{N}$ with incomparable degrees for Turing reducibility such that $0' \leq dg\ B,\ dg\ C \leq 0^4$.

Corollary 7.2. There exists an invariant set $D \subseteq \mathbb{N}$ such that its Turing degree is different from degrees 0 and 0^n for all $n \in \mathbb{N}$.

Acta et commentationes universitatis Tartuensis, 878 , 1990, 147-152.

ОБ АППРОКСИМАЦИИ СВОБОДНЫХ АЛГЕБР ЛИ ОТНОСИТЕЛЬНО ВХОЖДЕНИЯ

У.У.Умирбаев
Казахский государственный университет

Из работы А.И.Ширшова [3] о подалгебрах свободных алгебр Ли легко вывести алгоритм, решающий проблему вхождения в конечно порожденные (к.п.) подалгебры свободных алгебр Ли. Г.П.Кукин отметил, что свободные алгебры Ли характеристики $p > 0$ финитно аппроксимируемы относительно вхождения в к.п. подалгебры и сформулировал вопрос ([2], 2.61) о справедливости аналогичного результата для алгебр Ли характеристики 0. Ответ на этот вопрос дает следующая

<u>Теорема</u>. Свободная алгебра Ли над произвольным полем финитно аппроксимируема относительно вхождения в конечно порожденные подалгебры.

Отметим, что для свободных разрешимых ступени $n \geq 3$ алгебр Ли и свободных ассоциативных алгебр аналогичный результат неверен [1].

В §1 настоящей работы рассматриваются свободные ассоциативные алгебры и доказана возможность включения к.п. правого идеала этой алгебры, не содержащего фиксированный элемент, в правый идеал конечной коразмерности с тем же свойством. В §2 завершается доказательство теоремы.

Все алгебры, встречающиеся в дальнейшем, рассматриваются над фиксированным произвольным полем F.

§1. Включение в правый идеал конечной коразмерности

Пусть A свободная ассоциативная алгебра с единицей 1, свободно порожденная элементами $x_1, x_2, \dots, x_n$.

На множестве базисных слов алгебры A введем линейный порядок $\leq$ и частичный порядок $\ll$. Пусть v и w произвольные слова от $x_1, x_2, \dots, x_n$. Считаем, что $v < w$, если $d(v) < d(w)$, где d - функция длины. Для слов равной длины порядок $\leq$ распространим лексикографически, исходя из неравенств: $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Положим $v \ll w$, если найдется слово t такое, что $vt = w$.

Через $\bar{f}$ будем обозначать старший член элемента f алгебры A относительно $\leq$. Далее считаем, что коэффициенты старших членов рассматриваемых элементов равны единице.

Пусть $I = (f_1, f_2, \dots, f_k)_r$ - правый идеал алгебры A, порожденный элементами $f_1, f_2, \dots, f_k$. Можно считать, что элементы $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_k$ удовлетворяют условию:

$$\bar{f}_i, \bar{f}_j \text{ при } i \neq j \text{ несравнимы по } \ll . \tag{1}$$

Действительно, если $\bar{f}_i \ll \bar{f}_j$ $(i \neq j)$, то найдется слово t такое, что $\bar{f}_i t = \bar{f}_j$. Тогда элемент f_j можно заменить элементом $f_j - f_i t$. Так как $\overline{f_j - f_i t} < \bar{f}_j$, то, несколько раз повторяя указанный процесс, мы добъемся выполнения условия (1).

Далее считаем, что для порождающих правого идеала I выполнено условие (1). Тогда справедлива следующая

Лемма 1. Пусть f произвольный элемент алгебры A. Если f принадлежит I, то найдется $\bar{f}_i$ такой, что $\bar{f}_i \ll \bar{f}$.

Лемма доказывается стандартными рассуждениями (см. например [4]).

Лемма 2. Если f не принадлежит правому идеалу I, то найдется к.п. правый идеал J алгебры A конечной коразмерности, такое, что $I \subseteq J$ и $f \notin J$.

Доказательство. Считаем, что порождающие правого идеала I удовлетворяют условию (1).

Далее, можно считать, что элемент f по отношению к идеалу I удовлетворяет условию:

$$\text{для всех } \bar{f}_i \text{ не выполняется } \bar{f}_i \ll \bar{f}, \quad 1 \leq i \leq k. \tag{2}$$

Действительно, если существует f_i такое, что $f_i \ll f$, то найдется слово t, удовлетворяющее равенству $f_i t = f$. Тогда, заменяя элемент f элементом $f-f_i t$, мы уменьшаем старший член f, так как $f-f_i t < f$. Несколько раз повторяя этот процесс, мы добьемся выполнения условия (2).

Пусть $S = \max\{d(f_1),d(f_2),\ldots d(f_k),d(f)\}$. Если f_{k+1}, $f_{k+2},\ldots,f_l$ - множество всех слов длины $s+1$, которые несравнимы с элементами $f_1,f_2,\ldots,f_k$ по $\ll$, то положим

$$J = (f_1,f_2,\ldots,f_k,f_{k+1},f_{k+2},\ldots,f_l)_r.$$

Заметим, что множество порождающих правого идеала J также удовлетворяет условию (1). Действительно, элементы f_i,f_j $(i \neq j)$ при $i,j \leq k$ несравнимы по $\ll$, так как порождающие правого идеала I удовлетворяют условию (1). Если $i \leq k < j$, то f_i,f_j несравнимы по $\ll$ в силу выбора f_j. Наконец, если $k < i,j$, то f_i,f_j слова длины $s+1$. Тогда $f_i \ll f_j$ невозможно при $i \neq j$.

Теперь покажем, что элемент f по отношению к идеалу J удовлетворяет условию (2). Неравенство $f_i \ll f$ невозможно при $i \leq k$, так как f по отношению к идеалу I удовлетворяет условию (2). Если $i > k$, то неравенство $f_i \ll f$ противоречит тому, что $d(f_i) = s+1$, $d(f) \leq s$.

Сопоставляя вышесказанное с леммой 1, получаем, что $f \notin J$.

Заметим, что порождающие правого идеала J были выбраны так, чтобы для любого слова v длины $s+1$ существовало f_i $(1 \leq i \leq l)$ такое, что $f_i \ll v$. Отсюда следует, что алгебра A по модулю J линейно порождается словами длины $\leq s$.

Лемма доказана.

§2. Связь подалгебр с правыми идеалами и аппроксимация

Пусть L произвольная алгебра Ли, H - её подалгебра. Обозначим через J_H правый идеал алгебры $U(L)$, порожденный множеством H, где $U(L)$ - универсальная ассоциативная обертывающая алгебры Ли L. Здесь имеется в виду, что L вложена в $U(L)$. Тогда справедлива следующая

<u>Лемма 3.</u> $L \cap J_H = H$.

<u>Доказательство.</u> Выберем упорядоченный базис $h_1,h_2,\ldots,h_\alpha,\ldots$ подалгебры H и дополним его упорядоченным множеством $g_1,g_2,\ldots,g_\beta,\ldots$ до базиса алгебры L. Полагая

$h_\alpha < g_\beta$ для всех α,β, получим упорядоченный базис L. Тогда, по теореме Пуанкаре-Биркгофа-Витта, слова вида

$$h_{i_1}h_{i_2}\ldots h_{i_k}g_{j_1}g_{j_2}\ldots g_{j_s} \qquad (3)$$

при $i_1\le i_2\le\ldots\le i_k$, $j_1\le j_2\le\ldots\le j_s$ составлют базис алгебры U(L).

Пусть u произвольное слово вида (3). Тогда $u = w\cdot v$, где $w = h_{i_1}h_{i_2}\ldots h_{i_k}$, $v = g_{j_1}g_{j_2}\ldots g_{j_s}$. Так как H подалгебра, то для любого h_i слово $h_i w$ представляется как $\Sigma\, \alpha_i u_i$, где u_i слова вида (3), для которых $s = 0$, $\alpha_i \in F$. Очевидно $u_i v$ является словом вида (3) при $k \ge 1$. Следовательно, всякий элемент правого идеала J_H линейно выражается через слова вида (3) с ограничением $k \ge 1$. Последние, в силу независимости, составляют базис идеала J_H.

Сравнивая базис алгебры L с базисом J_H, получаем равенство $J_H \cap L = H$.

Лемма доказана.

<u>Теорема.</u> Свободная алгебра Ли над произвольным полем финитно аппроксимируема относительно вхождения в конечно порожденные подалгебры.

<u>Доказательство.</u> Утверждение теоремы достаточно доказать для к.п. свободной алгебры Ли L, со свободными порождающими $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Пусть H подалгебра алгебры L, порожденная элементами $f_1,f_2,\ldots,f_k$. Тогда J_H является правым идеалом алгебры U(L), порожденным элементами $f_1,f_2,\ldots,f_k$.

Пусть f - произвольный фиксированный элемент алгебры L, не принадлежащий подалгебре H. Тогда по лемме 3 $f \notin J_H$.

Алгебра U(L) является свободной ассоциативной алгеброй с единицей, свободно порожденной элементами $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Тогда по лемме 2 найдется к.п. правый идеал J алгебры U(L) конечной коразмерности такой, что $J_H \subseteq J$ и $f \notin J$.

Рассмотрим конечномерный правый U(L)-модуль $M = U(L)/J$. M является точным $B = U(L)/Ann(M)$-модулем, где Ann(M) - аннулятор модуля M. Тогда B - конечномерная алгебра. Заметим, что $Ann(M) \subseteq J$. Действительно, если $r \in Ann(M)$, то $U(L)\cdot r \subseteq J$. Алгебра U(L) имеет единицу, следовательно $r \in J$.

Естественный гомоморфизм $\sim : U(L) \to B$ индуцирует гомоморфизм алгебры L на конечномерную алгебру $\tilde{L} \subseteq B$.

Предположим, что $\tilde{f}$ принадлежит подалгебре, порожденной элементами $\tilde{f}_1,\tilde{f}_2,\ldots,\tilde{f}_k$. Тогда $\tilde{f}$ принадлежит правому идеалу

$(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots, \tilde{f}_k)_r \lhd_r B$. Следовательно, для некоторых элементов $u_1, u_2, \ldots, u_k$ из $U(L)$ выполняется равенство $\tilde{f} = \Sigma \tilde{f}_i \tilde{u}_i$, т.е. $f - \Sigma f_i u_i \in \mathrm{Ann}(M)$. Поскольку $\mathrm{Ann}(M) \subseteq J$, то из последнего следует, что $f \in J$. Противоречие. Следовательно, $\tilde{f}$ не принадлежит подалгебре, порожденной элементами $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots, \tilde{f}_k$.

Теорема доказана.

В заключение автор благодарит профессора И.П.Шестакова за внимание к работе.

Литература

1. А г а л а к о в С. А. О финитной отделимости некоторых групп и алгебр // V Сибирская школа по многообразиям алгебраических систем, Барнаул:Тез.докл.-1988.-С.3-4.
2. Днестровская тетрадь.-Новосибирск, 1982.
3. Ш и р ш о в А. И. Подалгебры свободных алгебр Ли // Мат. сб.-1953.-Т.33,№2.-С.441-452.
4. Ш и р ш о в А. И. Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли // Сиб. мат. журн.-1962.-Т.3,№2.-С.292-296.

Поступило
26 IV 1989

VABADE LIE ALGEBRATE APROKSIMEERIMISEST KUULUVUSE SUHTES

U.Umirbajev

R e s ü m e e

Lie algebrate lõplikult moodustatud alamalgebratesse kuulumise probleem taandatakse universaalse hõlmikalgebra lõplikult moodustatud parempoolsetesse ideaalidesse kuulumise probleemile. Tõestatakse vabade Lie algebrate aproksimeeritavus lõplikult moodustatud alamalgebratesse kuuluvuse suhtes, mis annab positiivse vastuse küsimusele 2.61 (vt.[2]).

ON THE APPROXIMATION OF FREE LIE ALGEBRAS WITH RESPECT TO ENTRY

U.Umirbaev

S u m m a r y

The entry problem into finitely generated subalgebras of Lie algebras is reduced to an analogous problem concerning finitely generated right ideals of the universal envelope of the algebra. It is proved that the free Lie algebras are finitely approximated with respect to entry into finitely generated subalgebras (affirmative answer to the question 2.61 in [2]).

Acta et commentationes universitatis Tartuensis, 878 , 1990, 153-162.

ИЗОМОРФИЗМ СПЛЕТЕНИЙ МОНОИДОВ С КАТЕГОРИЯМИ

В. Фляйшер

Кафедра математического анализа

Конструкция сплетения моноидов с малыми категориями введена автором в работе [I]. Роль этой конструкции определяется не только тем, что она обобщает обычное сплетение моноидов, но и тем, что с ее помощью описываются полугруппы эндоморфизмов полигонов (напрмер, проективных), непредставимые в виде сплетения моноидов [2]. В уже упомянутой работе [I] рассматривается вопрос, когда из изоморфизма сплетений моноидов с категориями вытекает изоморфизм исходных категорий. Показано, в частности, что такая определяемость исходных категории имеет место, если множества объектов данных категорий являются допустимыми полигонами [4] над соответствующими моноидами. При этом, как это показано для сплетений моноидов в работе [3], условие допустимости полигонов практически ослабить нельзя. В настоящей статье рассматривается изоморфизм сплетений моноидов с малыми категориями в предположении, что множества объектов рассматриваемых категорий являются слабо допустимыми полигонами. Показано, что в этой ситуации одна из категорий изоморфна сплетению другой категории с подходящей категорией множеств.

Введем необходимые определения. Наиболее общей конструкцией сплетения, рассматриваемой в настоящей статье, является конструкция сплетения малых категорий. Сплетение малых категорий мы определяем в несколько ином виде, чем это сделано в работе [5].

Пусть $\mathcal{B}$ - произвольная малая категория с множеством объектов $Ob\,\mathcal{B}$ и множеством морфизмов $Mor\,\mathcal{B}$. Для произвольных $x, y \in Ob\,\mathcal{B}$ через $Mor\,(x,y)$ будем обозначать множество морфизмов из объекта x в объект y. В дальнейшем, обозначая произведение морфизмов $\alpha\beta$ будем предполагать, что вначале применяется морфизм β.

Пусть $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ - малые категории и $G : \mathcal{B} \to \mathcal{E}(Ob\,\mathcal{C})$ некоторый ковариантный функтор из категории $\mathcal{B}$ в категорию подмножеств множества $Ob\,\mathcal{C}$ объектов, категории $\mathcal{C}$. Построим новую категорию $\mathcal{W}$ следующим образом. Множеством $Ob\,\mathcal{W}$ объектов категории $\mathcal{W}$ будем считать множество всех пар вида $(b, G(b))$, где $b \in Ob\,\mathcal{B}$, т.е.

$$Ob\,\mathcal{W} = \{(b, G(b)) \mid b \in Ob\,\mathcal{B}\}.$$

Морфизмами из объекта $(b, G(b))$ в объект $(e, G(e))$ являются пары вида (α, f), где $\alpha \in Mor(b,e)$, а $f : G(b) \to Mor\,C$ такая функция, что

$$f(c) \in Mor\,(c, G(\alpha)c)$$

для любого $c \in G(b)$. При этом произведением морфизмов $(\alpha, f) : (b, G(b)) \to (e, G(e))$ и $(\beta, g) : (e, G(e)) \to (v, G(v))$ является морфизм

$$(\beta, g)(\alpha, f) = (\beta\alpha, g_{G(\alpha)} \circ f),$$

где $g_{G(\alpha)} \circ f : G(b) \to Mor\,C$ такая функция, что

$$(g_{G(\alpha)} \circ f)(c) = g(G(\alpha)c) \cdot f(c)$$

для любого $c \in G(b)$.

Построенная категория $\mathcal{W}$ называется сплетением категорий $\mathcal{B}$ и C при помощи функтора G и обозначается $\mathcal{W} = \mathcal{B}\,wr^G C$.

Конструкция сплетения категорий естественным образом обобщает введеную ранее (см.[I]) конструкцию сплетения моноидов с малыми категориями. Напомним соответствующее определение. Пусть S - произвольный моноид и C - произвольная малая категория, причем $Ob\,C$ является левым S - полигоном. На множестве пар

$$A = \{(s, f) \mid s \in S,\ f : Ob\,C \to Mor\,C,\ \forall x \in Ob\,C\ \ f(x) \in Mor(x, sx)\}$$

определяется умножение следующим образом: для любых $(s, f), (t, g) \in A$,

$$(s, f)(t, g) = (st, f_t g)$$

где $(f_t g)(x) = f(tx)\,g(x)$ для любого $x \in Ob\,C$. Множество A относительно введенной операции умножения является полугруппой, которая называется сплетением моноида S с категорией C и обозначается $S\,wr\,C$.

Если теперь моноид S интерпретировать как однообъектную категорию $\mathcal{B}$ ($Ob\,\mathcal{B} = \{b\}$) а функтор $G : \mathcal{B} \to \mathcal{E}(Ob\,C)$ определить так, что $G(b) = Ob\,C$ и для любых $s \in S$, $c \in Ob\,C$

$$G(s)c = sc,$$

то легко видеть, что $S\,wr\,C \cong \mathcal{B}\,wr^G C$.

Левый S - полигон $\mathfrak{X}$ называется слабо допустимым если выполняются следующие условия:

I) если $sx = x$ для каждого $x \in \mathfrak{X}$, то $s = 1_S$;

2) для каждого $x \in \mathfrak{X}$ существует единственный элемент $s \in S$ (однозначаемый в дальнейшем через ν_x) такой, что $sz = x$ для любого $z \in \mathfrak{X}$.

Если слабо допустимый левый S-полигон $\mathfrak{X}$ содержит более одного элемента и является 2-плотным, т.е. для любых $x, y, z, u \in \mathfrak{X}$ $(x \neq y)$ существует $s \in S$ такой, что $sx = z$, $sy = u$ то $\mathfrak{X}$ называется допустимым S - полигоном.

Пусть $\mathcal{U} = S \,wr\, C$, $\mathcal{V} = T \,wr\, B$ - сплетения моноидов с малыми категориями и пусть $\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$. Если $Ob\, C$ и $Ob\, B$ являются допустимыми полигонами над моноидами S и T, соответственно, то как показано в работе [I], категории C и B изоморфны, т.е. $C \cong B$. В настоящей работе мы докажем следующее утверждение.

Теорема I. Пусть S, T - моноиды, C, B - малые категории и пусть $Ob\, C$ и $Ob\, B$ являются слабо допустимыми полигонами, соответственно, над моноидами S и T. Если $S \,wr\, C \cong T \,wr\, B$, то существует категория множеств $\mathcal{K}$ такая, что, с точностью до симметрии, $C \cong \mathcal{K} \,wr^G\, B$ при подходящем функторе $G : \mathcal{K} \to \mathcal{E}(Ob\, B)$.

Выражение "с точностью до симметрии" в формулировке теоремы I означает, что либо $C \cong \mathcal{K} \,wr^G\, B$, либо $B \cong \mathcal{K} \,wr\, C$.

Доказательство теоремы мы проведем в несколько этапов, но вначале исключим из рассмотрения тривиальный случай, когда $|S| = 1$. Если $|S| = 1$, то $S \,wr\, C \cong C$ и значит $C \cong T \,wr\, B$. Как было отмечено выше, сплетение моноида T с категорией B можно представить в виде сплетения категорий $\mathcal{K} \,wr^G\, B$, т.е. $C \cong \mathcal{K} \,wr^G B$, и в этом случае теорема доказана.

В дальнейшем будем предполагать, что исходные моноиды S и T неодноэлементные, а значит, ввиду слабой допустимости полигонов $Ob\, C$ и $Ob\, B$ категории C и B являются неоднообъектными.

Итак, пусть $\mathcal{U} = S \,wr\, C$ и $\mathcal{V} = T \,wr\, B$ сплетения моноидов с малыми категориями и пусть $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ некоторый изоморфизм. Обозначим $\mathfrak{X} = Ob\, C$, $\mathcal{Y} = Ob\, B$, т.е. $\mathfrak{X}$ есть левый S-полигон а $\mathcal{Y}$ - левый T-полигон. Пусть далее $\mathcal{M} = Mor\, C$, $\mathcal{N} = Mor\, B$. Через $F(\mathfrak{X}, \mathcal{M})$ обозначим множество всех отображений из $\mathfrak{X}$ в $\mathcal{M}$. Для любого $x \in \mathfrak{X}$ через $\mathcal{H}_x$ обозначим множество всех пар $(s, f) \in \mathcal{U}$, в которых $s = \nu_x$ и пусть $\mathcal{H} = \bigcup_{x \in \mathfrak{X}} \mathcal{H}_x$. Непосредственной проверкой доказывается следующая

Лемма I. ([I], лемма I). Множество $\mathcal{H}$ является идеалом в $\mathcal{U}$, представимым в виде объединения попарно-непересекающихся правых идеалов $\mathcal{H}_x$ $(x \in \mathfrak{X})$, порожденных идемпотентами (ν_x, e), где $e \in F(\mathfrak{X}, \mathcal{M})$ такое отображение, что $e(x) = 1_x$ тождественный морфизм.

Аналогично, для любого $y \in Y$ через $\mathcal{H}'_y$ обозначим множество всех пар $(t, g) \in \mathcal{V}$, в которых $t = \nu_y$ и пусть $\mathcal{H}' = \bigcup_{y \in Y} \mathcal{H}_y$. Очевидно, имеются лишь три возможности:

I) $\Phi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}'$,

2) $\Phi(\mathcal{H}) \nsubseteq \mathcal{H}'$,

3) $\Phi^{-1}(\mathcal{H}) \nsubseteq \mathcal{H}'$.

Если реализуется возможность I), то к изоморфизму $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ применимы рассуждения теоремы 2 из работы [I] и, следовательно, в этом случае категории C и B изоморфны. Выбрав категорию множеств $\mathcal{K}$ так, что $Ob\,\mathcal{K} = Ob\,B$ и полагая $G(y) = y$ для любого $y \in Y$, получаем $\mathcal{K}\,wr^G B \cong B$ и значит $C \cong \mathcal{K}\,wr^G B$.

Возможности 2) и 3) симметричны и поэтому в дальнейшем мы рассмотрим лишь второй случай, предполагая $\Phi(\mathcal{H}) \nsubseteq \mathcal{H}'$. А это означает, что найдется элемент $(\nu_x, f) \in \mathcal{H}$ такой, что $\Phi(\nu_x, f) = (\beta, g)$, где $\beta Y = \{\beta y \mid y \in Y\}$ – неодноэлементное множество, т.е. $|\beta Y| \geqslant 2$. Пусть $\Phi(\nu_x, e) = (\gamma, h)$, где $e(x) = 1_x$, тогда $|\gamma Y| \geqslant 2$, поскольку в противном случае $\gamma = \nu_y$ при некотором $y \in Y$ и

$$(\beta, g) = \Phi(\nu_x, f) = \Phi((\nu_x, e)(\nu_x, f)) = (\gamma, h)(\beta, g) =$$
$$= (\nu_y, h)(\beta, g) = (\nu_y, h_\beta g),$$

т.е. $\beta = \nu_y$, что противоречит условию $|\beta Y| \geqslant 2$.

Лемма 2. Пусть $\Phi(\nu_x, e) = (\beta, g)$, $\Phi(\nu_u, \varepsilon) = (\gamma, h)$ для некоторых $x, u \in \mathfrak{X}$ $(x \neq u)$, где $e(x) = 1_x$, $\varepsilon(u) = 1_u$, причем $|\beta Y| \geqslant 2$. Тогда

$$\beta Y \cap \gamma Y = \emptyset.$$

Доказательство. Предположим противное, пусть $z \in \beta Y \cap \gamma Y$. Ввиду идемпотентности элементов (ν_x, e), (ν_u, ε), а значит и элементов (β, g), (γ, h) выполняется $\beta z = \gamma z = z$. Рассмотрим элемент $(\nu_z, q) \in \mathcal{V}$, в котором отображение $q : Ob\,B \to Mor\,B$ такое, что $q(z) = 1_z$ и для любого $y \in Y$ $(y \neq z)$

$$q(y) = h(z)\,\alpha_y,$$

где α_y некоторый морфизм из $\mathcal{M}or\,(y,z)$. Тогда

$$(\nu_z,q)(\beta,g)(\nu_z,q) = (\nu_z,q_\beta g)(\nu_z,q) = (\nu_z,(q_\beta g)_{\nu_z}q)$$

а поскольку для любого $y\in Y$

$$[(q_\beta g)_{\nu_z}q](y) = (q_\beta g)(z)\cdot q(y) = q(\beta z)g(z)q(y) =$$

$$= q(z)g(z)q(y) = g(z)q(y) = (g_{\nu_z}\cdot q)(y),$$

то

$$(\nu_z,q)(\beta,g)(\nu_z,q) = (\nu_z,g_{\nu_z}q) = (\beta,g)(\nu_z,q)\in\Phi(\mathcal{H}_x).$$

Отсюда вытекает, что элемент $(\nu_z,q_\beta g) = (\nu_z,q)(\beta,g)$ будучи, очевидно, элементом из $\Phi(\mathcal{H})$, принадлежит правому идеалу $\Phi(\mathcal{H}_x)$. Таким образом, $(\nu_z,q_\beta g)\in\Phi(\mathcal{H}_x)$.

Пусть теперь $y\in\beta Y$ $(y\neq z)$ и (ν_y,p) — некоторый элемент из $\mathcal{U}$. Тогда

$$\bar a = (\nu_z,q_\beta g)(\nu_y,p) = (\nu_z,(q_\beta g)_{\nu_y}p)\in\Phi(\mathcal{H}_x)$$

$$\bar b = (\gamma,h)(\nu_z,(q_\beta g)_{\nu_y}p) = (\nu_z,h_{\nu_z}(q_\beta g)_{\nu_y}p)$$

а поскольку для любого $b\in Y$

$$[h_{\nu_z}\cdot(q_\beta g)_{\nu_y}p](b) = h(z)(q_\beta g)(y)\cdot p(b) =$$

$$= h(z)q(\beta y)g(y)p(b) = h(z)q(y)g(y)p(b) =$$

$$= h(z)h(z)\alpha_y g(y)p(b) = h(z)\alpha_y g(y)p(b) =$$

$$= q(y)g(y)p(b) = (q_\beta g)(y)p(b) = [(q_\beta g)_{\nu_y}p](b),$$

то $\bar b = (\nu_z,(q_\beta g)_{\nu_y}p) = \bar a\in\Phi(\mathcal{H}_x)$. Однако из $(\gamma,h)\in\Phi(\mathcal{H}_u)$ следует, что $\bar b\in\Phi(\mathcal{H}_u)$, т.е. $\bar b\in\Phi(\mathcal{H}_x)\cap\Phi(\mathcal{H}_u)$, что невозможно, ввиду $\mathcal{H}_x\cap\mathcal{H}_u=\phi$. Полученное противоречие доказывает лемму.

<u>Лемма 3.</u> Пусть $\Phi(\nu_x,e) = (\beta,g)$, $\Phi(\nu_x,f) = (\gamma,h)$, где $e(x) = f(x) = 1_x$. Тогда $\beta Y = \gamma Y$.

<u>Доказательство.</u> Применяя к равенству

$$(\nu_x,e)(\nu_x,f) = (\nu_x,f)$$

изоморфизм Φ, получаем

$$(\beta,g)(\gamma,h) = (\gamma,h),$$

т.е. $\beta\gamma = \gamma$. Отсюда вытекает $\gamma Y = \beta\gamma Y\subset\beta Y$. Аналогично получаем $\beta Y\subset\gamma Y$, т.е. $\beta Y = \gamma Y$.

<u>Лемма 4.</u> Пусть $Ob\,C = \mathfrak{X} = \{x_i \mid i\in\mathfrak{I}\}$ и для каждого $i\in\mathfrak{I}$

$$\Phi(\nu_{x_i},e_i) = (\beta_i,g_i),$$

где $e_i(x_i) = 1_{x_i}$. Тогда $\bigcup_{i\in\mathfrak{I}}\beta_i Y = Y$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. $\bigcup_{i\in J}\beta_i Y = Y$ и пусть $y \in Y \setminus \bigcup_{i\in J}\beta_i Y$. Возьмем произвольный элемент $(\nu_y, h)\in \mathcal{V} = T \operatorname{wr} B$, где $h(y)=1_y$ и пусть $\Phi^{-1}(\nu_y,h) = (\alpha,f)\in\mathcal{U}$. Заметим, что элемент (α,f) является идемпотентном, поскольку таковым является элемент (ν_y,h). Для произвольного $x_i\in\alpha\mathfrak{X}$ имеем

$$(\alpha,f)(\nu_{x_i},e_i) = (\alpha\nu_{x_i}, f_{\nu_{x_i}}e_i) = (\nu_{x_i}, f_{\nu_{x_i}}e_i)\in \mathcal{H}_{x_i}$$

и следовательно

$$\Phi(\alpha,f)\cdot\Phi(\nu_{x_i},e_i)\in\Phi(\mathcal{H}_i) = (\beta_i,g_i)\mathcal{V}$$

т.е.

$$(\nu_y,h)\cdot\Phi(\nu_{x_i},e_i)\in(\beta_i,g_i)\mathcal{V}.$$

Отсюда вытекает $\nu_y\in\beta_i T$ и значит $y\in\beta_i Y$, что противоречит предположению. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $\Phi(\nu_x,e) = (\beta,g)$, где $e(x)=1_x$. Тогда $g(z)=1_z$ для любого $z\in\beta Y$.

Доказательство. Предположим противное, что существует $z\in\beta Y$ такой, что $g(z)\ne 1_z$. Рассмотрим элемент $(\beta,h)\in\mathcal{V}$ такой, что $h(y)=g(y)$ для всех $y\in Y\setminus\beta Y$ и $h(y)=1_y$ для всех $y\in\beta Y$ и пусть $\Phi^{-1}(\beta,h)=(\alpha,f)\in\mathcal{U}$. Ясно, что (β,h), а значит и (α,f) являются идемнотентами. Допустим, что $\alpha\mathfrak{X}\ne x$ и пусть $a\in\alpha\mathfrak{X}$, $a\ne x$. Тогда для элемента $\bar a = (\alpha,f)(\nu_a,\varepsilon) = (\nu_a, f_{\nu_a}\varepsilon)$ выполняется $(\nu_a,\varepsilon)\bar a = (\nu_a,\varepsilon)(\nu_a,f_{\nu_a}\varepsilon) = (\nu_a,f_{\nu_a}\varepsilon)=\bar a$ и, следовательно, $\bar a\in\mathcal{H}_a$. Отсюда вытекает, что $\Phi(\bar a) = (\beta,h)\mathcal{V}\cap\Phi(\mathcal{H}_a)$. Таким образом, если $\Phi(\nu_a,\varepsilon)=(\gamma,q)$, то $\Phi(\mathcal{H}_a)=(\gamma,q)\mathcal{V}$ и значит $(\beta,h)\mathcal{V}\cap(\gamma,q)\mathcal{V}\ne\varnothing$. Следовательно, $\beta Y\cap\gamma Y\ne\varnothing$, что противоречит лемме I. Полученное противоречие означает, что $\alpha\mathfrak{X}=x$, т.е. $\Phi^{-1}(\beta,h) = (\nu_x,f)$. Теперь из равенства $(\nu_x,e)(\nu_x,f)=(\nu_x,f)$ вытекает $(\beta,g)(\beta,h)=(\beta,h)$, т.е. $g_\beta h = h$. Следовательно, для каждого $z\in\beta Y$

$$1_z = h_z = (g_\beta h)(z) = g(\beta z)h(z) = g(z),$$

что противоречит предположению. Лемма доказана.

Докажем теперь теорему I. Итак, пусть $\Phi: S\operatorname{wr}\mathbf{C}\to T\operatorname{wr}B$ изоморфизм, $\mathfrak{X} = \operatorname{Ob}\mathbf{C} = \{x_i \mid i\in J\}$. Для каждого $i\in J$ зафиксируем элемент $(\nu_{x_i},e_i)\in\mathcal{U}$ такой, что $e_i(x_i)=1_{x_i}$ и пусть $\Phi(\nu_{x_i},e_i) = (\beta_i,g_i)\in T\operatorname{wr}B$. Для каждого $i\in J$ обозначим $Y_i=\beta_i Y\subseteq Y$. Из леммы 3 следует, что множества Y_i $(i\in J)$ не зависят от выбора отображений e_i в элементах (ν_{x_i},e_i).

Построим некоторую категорию $\mathcal{K}$ и функтор $G : \mathcal{K} \to \mathcal{E}(Y)$, для которых впоследствии докажем, что $C \cong \mathcal{K}\, wr^G B$. Объектами категории $\mathcal{K}$ являются множества Y_i $(i \in \mathcal{I})$, а морфизмами из $Mor(Y_i, Y_j)$ – такие отображения $\varphi : Y_i \to Y_j$ для которых существуют $t \in T$ с условием

$$\varphi(b) = tb$$

для любого $b \in Y_i$. В качестве функтора $G : \mathcal{K} \to \mathcal{E}(Y)$ возьмем функтор, отождествляющий объекты и морфизмы.

Покажем, что $C \cong \mathcal{K}\, wr^G B$. Построим функтор $\Psi : C \to \mathcal{K}\, wr^G B$ следующим образом. Каждому объекту $x_i \in X = Ob\, C$ поставим в соответствие объект $\Psi(x_i) = (Y_i, Y_i)$ категории $\mathcal{K}\, wr^G B$ по лемме 2 такое соответствие на объектах взаимнооднозначно.

Для произвольного морфизма $\alpha \in Mor(x_i, x_j)$ категории C выберем некоторый элемент $(s, f) \in S\, wr\, C$ такой, что $s x_i = x_j$ и $f(x_i) = \alpha$. Пусть $\Phi(s, f) = (t, g) \in T\, wr\, B$. Покажем, что для любого $b \in Y_i$ выполняется $tb \in Y_j$. Действительно, применяя к равенству

$$(s, f)(v_{x_i}, e_i) = (v_{x_j}, f_{x_i} e_i) \in (v_{x_j}, e_j)U$$

изоморфизм Φ, получим

$$(t, g)(\beta_i, g_i) \in (\beta_j, g_j)V,$$

т.е. $t\beta_i = \beta_j \gamma$ при некотором $\gamma \in T$. Отсюда вытекает, что $tY_i = t\beta_i Y \subseteq \beta_j Y = Y_j$. Рассмотрим теперь отображение $\pi : Y_i \to Y_j$ такое, что $\pi(b) = tb$ для любого $b \in Y_i$. Отображение π можно рассматривать как морфизм из $Mor(Y_i, Y_j)$ в категории $\mathcal{K}$. Пусть теперь (π, F) морфизм в категории $\mathcal{K}\, wr^G B$ из объекта (Y_i, Y_i) в объект (Y_j, Y_j) такой, что для любого $b \in Y_i$

$$F(b) = g(b).$$

Так как $g(b) \in Mor(b, tb) = Mor(b, \pi(b)) = Mor(b, G(\pi)b)$, то

$$F(b) \in Mor(b, G(\pi)b),$$

т.е. морфизм (π, F) категории $\mathcal{K}\, wr^G B$ определен корректно. Морфизму $\alpha \in Mor(x_i, x_j)$ категории C поставим в соответствие Ψ морфизм (π, F) категории $T\, wr\, B$.

Покажем, что морфизм (π, F) не зависит от выбора элемента $(s, f) \in S\, wr\, C$. Пусть (s', f') другой элемент из $S\, wr\, C$ такой, что $s' x_i = x_j$ и $f'(x_i) = \alpha$ и пусть $\Phi(s', f') = (t', g')$. Тогда из равенства

$$(s,f)(v_{x_i},e_i) = (s',f')(v_{x_i},e_i)$$

вытекает равенство

$$(t,g)(\beta_i,g_i) = (t',g')(\beta_i,g_i),$$

т.е. $t\beta_i = t'\beta_i$ и $g_{\beta_i}g_i = g'_{\beta_i}g_i$. Из первого равенства следует, что $tb = t'b$ для любого $b \in Y_i$ и значит отображение $\pi: Y_i \to Y_j$ не зависит от выбора элемента (s,f). Из второго равенства вытекает, что для любого $b \in Y_i$ выполняется $g(b) = g'(b)$, поскольку $g_i(b) = 1_b$ по лемме 5, $\beta_i b = b$, ввиду идемпотентности β_i и значит

$$g(b) = g(\beta_i b)\cdot 1_b = g(\beta_i b)g_i(b) = (g_{\beta_i}g_i)(b) = (g'_{\beta_i}g_i)(b) = g'(b).$$

Таким образом, отображение F, а значит и весь морфизм (π, F) категории $\mathcal{K}\,wr^G\,B$ не зависит от выбора элемента (α, f).

Непосредственной проверкой легко убедиться, что Ψ сохраняет произведение морфизмов, а из леммы 5 вытекает, что для любого тождественного морфизма $e \in \mathcal{M}or\,C$ морфизм $\Psi(e)$ также тождественный. Это значит, что Ψ действительно является функтором из категории C в категорию $\mathcal{K}\,wr^G\,B$.

Остается проверить, что функтор Ψ осуществляет изоморфизм указанных категорий. Пусть (π, F) – произвольный морфизм категории $\mathcal{K}\,wr^G\,B$. По построению, π есть морфизм категории $\mathcal{K}$, т.е. отображение $\pi: Y_i \to Y_j$ при некоторых $i,j \in \mathcal{I}$ такое, что $\pi(b) = tb$ для некоторого $t \in T$ при любом $b \in Y_i$. Рассмотрим элемент $(t,g) \in T\,wr\,B$ такой, что $g(b) = F(b)$ для любого $b \in Y_i$. Пусть $\Phi^{-1}(t,g) = (s,f)$ и пусть $f(x_i) = \alpha$. Легко убедиться, что $\Psi(\alpha) = (\pi, F)$, т.е. отображение Ψ^{-1}, ставящее в соответствие морфизму (π, F) категории $\mathcal{K}\,wr^G\,B$ морфизм α категории C, является обратным к Ψ. Таким образом, $\Psi: C \to \mathcal{K}\,wr^G\,B$ является изоморфизмом. Теорема доказана.

Литература

1. Ф л я й ш е р В. Г. О сплетениях моноидов с категориями // Изв. АН ЭССР. – 1986. – Т. 35, № 3. – С.237–243.

2. F l e i s c h e r V., K n a u e r U. Endomorphism monoids of acts are wreath products of monoids with small categories // Lecture Notes Math. To appear.

3. F l e i s c h e r V. Isomorphism of wreath products, II // Semigroup Forum. – 1988. – V. 37. – P. 215-224.
4. S k o r n j a k o v L. A. On the wreath product of monoids // Universal Algebra and Applications, Banach Center. – 1982. – Publ. 9. – P. 181-185.
5. W e l l s C. A Krohn-Rhodes Theorem for Categories // J. Algebra. – 1980. – V. 64. – P. 37-45.

Поступило
20 X 1989

MONOIDIDE JA KATEGOORIATE PÕIMIKUTE ISOMORFISM

V. Fljašer

R e s ü m e e

Artiklis uuritakse monoidide ja kategooriate põimikute isomorfismi küsimust. Selleks tuuakse sisse kategooriate põimiku konstruktsioon. Näidatakse, et monoidide ja kategooriate põimikute isomorfismist järeldub kategooriate isomorfism teatava hulkade kategooriate põimiku täpsusega.

ISOMORPHISM OF WREATH PRODUCTS OF MONOIDS WITH CATEGORIES

V. Fleischer

S u m m a r y

In the paper isomorphisms of wreath products of monoids with categories are considered. Let S be a monoid and C be a small category with the set $\mathfrak{X} = Ob\, C$ of objects and the set $\mathcal{M} = \mathcal{M}or\, C$ of morphisms and let $\mathfrak{X}$ be an S-act. The set

$$\mathfrak{K} = \{(s, f) \mid s \in S,\ f : \mathfrak{X} \to \mathcal{M},\ f(x) \in \mathcal{M}or(x, sx)\ \ \forall x \in \mathfrak{X}\}$$

under the following multiplication

$$(s, f)(t, g) = (st, f_t g)$$

where $(f_t g)(x) = f(tx)\, g(x)$ for each $x \in \mathfrak{X}$ forms a semigroup, which is called the wreath product of the monoid S with the category C and is denoted by $S \,wr\, C$. Isomorphisms

$S \operatorname{wr} C \cong T \operatorname{wr} B$ of such wreath products are considered in the case when the sets of objects of the categories C and B are weakly admissible acts over monoids S and T respectively. To formulate the main result a construction of the wreath product of small categories is introduce in a slightly different way as by C.Wells [5]. Let B and C are small categories, $G : B \to \mathcal{E}(\mathcal{O}b\, C)$ is a covariant functor from B to the category of subsets of the set $\mathcal{O}b\, C$ Let $\mathcal{W}$ be the category with the set $\mathcal{O}b\, \mathcal{W} = \{(b, G(b)) \mid b \in \mathcal{O}b\, B\}$ and morphisms $(\alpha, f) : (b, G(b)) \to (e, G(e))$, where $\alpha \in \mathcal{M}or\,(b, e)$ and $f : G(b) \to \mathcal{M}or\, C$ such function that

$$f(c) \in \mathcal{M}or\,(c, G(\alpha)\, c)$$

for each $c \in G(b)$. The multiplication of morphisms $(\alpha, f) : (b, G(b)) \to (e, G(e))$, $(\beta, g) : (e, G(e)) \to (v, G(v))$ is the morphism

$$(\beta, g)(\alpha, f) = (\beta\alpha, g_{G(\alpha)} \circ f)$$

where $(g_{G(\alpha)} \circ f)(c) = g(G(\alpha)c) \cdot f(c)$ for each $c \in G(b)$. The category $\mathcal{W}$ is called the wreath product of categories C and B and is denoted by $C \operatorname{wr}^G B$.

If is shown that the isomorphism $S \operatorname{wr} C \cong T \operatorname{wr} B$ implies an isomorphism of categories $C \cong \mathcal{K} \operatorname{wr}^G B$ for suitable category $\mathcal{K}$ of sets and functor

Acta et commentationes universitatis Tartuensis, 878 , 1990, 163-177.

О ДВУСТОРОННИХ СПЛЕТЕНИЯХ КАТЕГОРИЙ

Я.Хион
Лаборатория биофизики

В начале данной работы мы рассматриваем эндоморфизмы свободных $\mathfrak{A}$ - $\mathfrak{B}$ -биполигонов $\mathcal{M}$, где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ - заданные моноиды. Обобщая результаты из [5], мы показываем, что эндоморфизмы такого биполигона образуют моноид $\mathcal{E}(\mathcal{M}) = \mathcal{E}({}_{\mathfrak{A}}\mathcal{M}_{\mathfrak{B}})$, устанавливаем, что элементы из $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ можно задать тройками функций, и даем правило умножения таких троек. Для описания умножения троек в более общем случае мы обобщаем понятие пары групп из [7] и определяем понятие (левой) пары $(\mathcal{C}, \mathfrak{A})$ моноидов. Пусть даны две пары $(\mathcal{C}, \mathfrak{A})$ и $(\mathcal{C}, \mathfrak{B})$ с одним и тем же активным моноидом $\mathcal{C}$. Для любых трех таких моноидов $(\mathfrak{A}, \mathcal{C}, \mathfrak{B})$ определим их двустороннее косое (полупрямое) произведение как множество $\mathfrak{A} \times \mathcal{C} \times \mathfrak{B}$, на котором произведение элементов (троек) задано формулой, аналогичной формуле, получаемой при умножении эндоморфизмов. Двустороннее косое произведение можно использовать для определения двустороннего сплетения моноидов и для описания моноидов эндоморфизмов свободных биполигонов над двумя заданными моноидами.

Затем мы обобщаем понятие двустороннего косого произведения с моноидов на категории. Для этого предположим, что задана категория $\mathcal{C} = (\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{C}_{n}^{a}, \cdot, e_{\mathcal{C}r})$ и еще две системы категорий $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{r};\, r \in \mathcal{R}\}$ и $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{B}_{r};\, r \in \mathcal{R}\}$, так что $\mathcal{C}$ действует на них гомоморфизмами. Операция двустороннего косого произведения сопоставляет любой категории $\mathcal{C}$ и двум соответствующим системам категорий новую категорию. Мы устанавливаем некоторые свойства таких произведений. Затем мы определяем двусторонние сплетения трех категорий $\mathcal{C}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ (требуется еще задание двух правых $\mathcal{C}$ -полигонов) как косые произведения категории $\mathcal{C}$ с подходящими прямыми степенями категорий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Можно показать, что двусторонние сплетения подходящей категории $\mathfrak{C}$ с категориями $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ можно использовать для описания категорий гомоморфизмов сетей свободных $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-биполигонов.

Сперва мы дадим определение биполигона над двумя заданными моноидами. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ суть моноиды соответственно с единицами $e_{\mathfrak{A}}$ и $e_{\mathfrak{B}}$. Множество $\mathcal{M}$ называется $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-биполигоном, если

BP1. $\mathcal{M} \neq \emptyset$;

BP2. любому $a \in \mathfrak{A}$ и всякому $x \in \mathcal{M}$ соответствует элемент $a \triangleright x \in \mathcal{M}$;

BP3. если еще $b \in \mathfrak{A}$, то выполняется $b \triangleright (a \triangleright x) = (b \cdot a) \triangleright x$;

BP4. для любого $x \in \mathcal{M}$ имеет место $e_{\mathfrak{A}} \triangleright x = x$;

BP5. любому $x \in \mathcal{M}$ и произвольному $c \in \mathfrak{B}$ соответствует элемент $x \triangleleft c \in \mathcal{M}$;

BP6. если еще $d \in \mathfrak{B}$ то выполняется $(x \triangleleft c) \triangleleft d = x \triangleleft (c \cdot d)$;

BP7. для всякого $x \in \mathcal{M}$ имеет место $x \triangleleft e_{\mathfrak{B}} = x$;

BP8. для любых $a \in \mathfrak{A}, x \in \mathcal{M}, b \in \mathfrak{B}$ выполняется $(a \triangleright x) \triangleleft b = a \triangleright (x \triangleleft b)$.

Отображение $f: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ называется эндоморфизмом $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-биполигона $\mathcal{M}$, если для любых $a \in \mathfrak{A}, x \in \mathcal{M}, c \in \mathfrak{B}$ выполняется

$$(a \triangleright x) f = a \triangleright (xf), \tag{1}$$

$$(x \triangleleft c) f = (xf) \triangleleft c. \tag{2}$$

Произведение двух эндоморфизмов $f, g: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ определим, как обычно, формулой

$$x(f \cdot g) = (xf) g. \tag{3}$$

При таком определении все эндоморфизмы $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-биполигона $\mathcal{M}$ образуют моноид $\mathcal{E}(\mathcal{M}) = \mathcal{E}({}_{\mathfrak{A}}\mathcal{M}_{\mathfrak{B}})$.

Подмножество $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$ называется системой образующих для $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-биполигона $\mathcal{M}$, если для любого $x \in \mathcal{M}$ существуют элементы $a \in \mathfrak{A}$, $y \in \mathcal{P}$, $c \in \mathfrak{B}$, так что $x = a \triangleright y \triangleleft c$. Подмножество $\mathcal{P}$ называется свободной системой образующих, если такое представление единственно для каждого $x \in \mathcal{M}$. Нетрудно показать, что для любого множества $\mathcal{P}$ и всяких моноидов $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ существует $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-биполигон $\mathcal{M}$, для которого $\mathcal{P}$ является свободной системой образующих.

Если $\mathcal{M}$ есть свободный $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-биполигон со системой образующих $\mathcal{P}$, то несложно показать, что каждому эндоморфизму $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M})$ соответствует единственная тройка функций $f_1: \mathcal{P} \to \mathfrak{A}$, $f_2: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $f_3: \mathcal{P} \to \mathfrak{B}$, так что для любого $x \in \mathcal{P}$ выполняется соотношение

$$xf=(xf_1)\rhd(xf_2)\lhd(xf_3). \tag{4}$$

Легко показать, что верно и обратное: для любой тройки функций $f_1:\mathcal{P}\to\mathcal{A}$, $f_2:\mathcal{P}\to\mathcal{P}$, $f_3:\mathcal{P}\to\mathcal{B}$ отображение, определяемое формулой (4), является эндоморфизмом.

Если мы возьмем другой эндоморфизм g, соответствующую тройку (g_1,g_2,g_3) и вычислим образ элемента $x\in\mathcal{P}$ при произведении $f\cdot g$ эндоморфизмов, получим

$$x(f\cdot g)=[x(f_1\cdot f_2g_1)]\rhd[x(f_2\cdot g_2)]\lhd[x(f_2g_3\cdot f_3)]. \tag{5}$$

Здесь, например, $f_1\cdot f_2g_1$ определяется для любого $x\in\mathcal{P}$ формулой

$$x(f_1\cdot f_2g_1)=(xf_1)\cdot x(f_2g_1).$$

Формула (5) показывает, что целесообразно определить произведение троек функций формулой

$$(f_1,f_2,f_3)\cdot(g_1,g_2,g_3)=(f_1\cdot f_2g_1,\ f_2\cdot g_2,\ f_2g_3\cdot f_3). \tag{6}$$

Формула (5) позволяет доказать изоморфизм между моноидом $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ и моноидом троек.

Мы видим, что тройки отображений образуют полезный моноид, ибо он позволяет описать моноид $\mathcal{E}(\mathcal{M})$. Такие тройки оказываются полезными и в других ситуациях и поэтому мы рассмотрим построение моноида из троек по правилу (6) в более общем случае. Потом мы обобщим это построение с моноидов на малые категории.

Для обобщения конструкции из троек мы заметим сперва, что множество всех отображений множества $\mathcal{P}$ в себя образует моноид относительно операции суперпозиции, который мы обозначим через $\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{P})$ или проще через $\mathcal{C}$. Далее, положив $x\lhd c=xc$ для всех $x\in\mathcal{P}$, $c\in\mathcal{C}$, мы превратим $\mathcal{P}$ в правый $\mathcal{C}$-полигон. Это означает, что $\mathcal{C}$ и $\mathcal{P}$ удовлетворяют условиям BP1, BP5-BP7 для $\mathcal{B}$ и $\mathcal{M}$.

Обозначим множество всех отображений $a:\mathcal{P}\to\mathcal{A}$ через $\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{A})$ и определим аналогично множество $\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{B})$. Обратим множества $\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{A})$ и $\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{B})$ в моноиды, положив

$$x(a_1\cdot a_2)=(xa_1)\cdot(xa_2),$$
$$x(b_1\cdot b_2)=(xb_1)\cdot(xb_2)$$

для всех $x\in\mathcal{P}$, $a_1,a_2\in\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{A})$, $b_1,b_2\in\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{B})$. Более того, множества $\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{A})$ и $\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{B})$ можно рассматривать как левые $\mathcal{C}$-полигоны (условия BP1-BP4 выполняются для $\mathcal{C}$ и $\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{A})$

и для $\mathcal{C}$ и $\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{B})$), если мы положим для любого $x\in\mathcal{P}$ и всяких $c\in\mathcal{C}$, $a\in\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{A})$, $b\in\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{B})$

$$x(c\triangleright a)=(x\triangleleft c)a,$$
$$x(c\triangleright b)=(x\triangleleft c)b. \tag{7}$$

Далее, элементы $c\in\mathcal{C}$ действуют на $\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{A})$ и $\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{B})$ как эндоморфизмы. Действительно, можно проверить, что

$$c\triangleright(a_1\cdot a_2)=(c\triangleright a_1)\cdot(c\triangleright a_2),\ c\triangleright(b_1\cdot b_2)=(c\triangleright b_1)\cdot(c\triangleright b_2)$$

выполняются.

Рассмотрим теперь такую ситуацию в более общем случае. Обобщив понятие групповой пары ([7], стр. 335), мы скажем, что моноиды $\mathcal{C}$ и $\mathcal{A}$ образуют (левую) пару, если

$\mathcal{LPM}1$. любому $c\in\mathcal{C}$ и всякому $a\in\mathcal{A}$ соответствует элемент $c\triangleright a\in\mathcal{A}$;

$\mathcal{LPM}2$. если еще $d\in\mathcal{C}$, то $d\triangleright(c\triangleright a)=(d\cdot c)\triangleright a$;

$\mathcal{LPM}3$. для единицы $e_{\mathcal{C}}\in\mathcal{C}$ и всякого $a\in\mathcal{A}$ выполняется $e_{\mathcal{C}}\triangleright a=a$;

$\mathcal{LPM}4$. для любых $a_1,a_2\in\mathcal{A}$ имеет место $c\triangleright(a_1\cdot a_2)=(c\triangleright a_1)\cdot(c\triangleright a_2)$;

$\mathcal{LPM}5$. $c\triangleright e_{\mathcal{A}}=e_{\mathcal{A}}$ для всякого $c\in\mathcal{C}$.

Мы назовем $\mathcal{C}$ активным и $\mathcal{A}$ пассивным моноидом пары.

Будем говорить, что задана (левая) тройка моноидов $(\mathcal{A},\mathcal{C},\mathcal{B})$ если даны пары моноидов $(\mathcal{C},\mathcal{A})$ и $(\mathcal{C},\mathcal{B})$ с одним и тем же активным моноидом. Мы назовем $\mathcal{C}$ активным членом и $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ пассивными членами тройки.

Мы получим пример пары $(\mathcal{C},\mathcal{A})$ моноидов, если возьмем моноид $\mathcal{G}$, в нем подгруппу $\mathcal{C}$ с единицей $e_{\mathcal{G}}$ и подмоноид $\mathcal{A}$, являющийся $\mathcal{C}$-инвариантным (из $a\in\mathcal{A}$, $c\in\mathcal{C}$ следует $cac^{-1}\in\mathcal{A}$), положим $c\triangleright a=cac^{-1}$. Назовем такую пару внутренней парой, определенной $\mathcal{C}$ и $\mathcal{A}$. Мы получим тройку моноидов $(\mathcal{A},\mathcal{C},\mathcal{B})$, если возьмем моноид $\mathcal{G}$, в нем подгруппу $\mathcal{C}$ и два $\mathcal{C}$-инвариантных подмоноида $\mathcal{A},\mathcal{B}$, и положим $c\triangleright a=cac^{-1}$, $c\triangleright b=cbc^{-1}$ для любых $c\in\mathcal{C}$, $a\in\mathcal{A}$, $b\in\mathcal{B}$ Такую тройку назовем внутренней тройкой.

Если $(\mathcal{A},\mathcal{C},\mathcal{B})$ является тройкой моноидов, мы определим ее двустороннее косое (полупрямое) произведение $\mathcal{A}\rightthreetimes\mathcal{C}\leftthreetimes\mathcal{B}$ как множество $\mathcal{A}\times\mathcal{C}\times\mathcal{B}$, на котором произведение определено формулой

$$(a_1,c_1,b_1)\cdot(a_2,c_2,b_2)=(a_1\cdot(c_1\triangleright a_2),c_1\cdot c_2,(c_1\triangleright b_2)\cdot b_1) \tag{8}$$

она аналогична формуле (6).

<u>Предложение I</u>. Для любой тройки моноидов $(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{B})$ ее двустороннее косое произведение $\mathcal{A}\lambda\mathcal{C}\lambda\mathcal{B}$ является моноидом.

<u>Предложение 2</u>. Косое произведение $\mathcal{A}\lambda\mathcal{C}\lambda\mathcal{B}$ содержит подмоноиды, изоморфные моноидам $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{B}^*$, где $\mathcal{B}^*$ антиизоморфен с $\mathcal{B}$, и порождается ими. Если $\mathcal{C}$ действует на $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ тождественными автоморфизмами, то $\mathcal{A}\lambda\mathcal{C}\lambda\mathcal{B} \simeq \mathcal{A}\times\mathcal{C}\times\mathcal{B}^*$. В частности, если $\mathcal{C}$ есть единичный моноид $\mathcal{E}$, то $\mathcal{A}\lambda\mathcal{E}\lambda\mathcal{B} \simeq \mathcal{A}\times\mathcal{B}^*$. Если $\mathcal{B}=\mathcal{E}$, то $\mathcal{A}\lambda\mathcal{C}\lambda\mathcal{E} \simeq \mathcal{A}\lambda\mathcal{C}$ (обычное одностороннее полупрямое произведение).

Доказательства этих и следующих предложений будут даны в другой работе.

Теперь мы обобщим понятие двустороннего косого произведения с моноидов на категории. Мы начнем с серии определений, касающихся категорий.

Пусть $(\mathcal{R}, \mathcal{Y})$ $(\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{R}^2)$ является рефлексивным и транзитивным графом. Семейство $\mathcal{C} = (\mathcal{R}, \mathcal{Y}, C_r^s, \cdot, e_{C_r})$ называется (малой) категорией над графом $(\mathcal{R}, \mathcal{Y})$, если

CI. любой паре $(r,s)\in\mathcal{Y}$ соответствует непустое множество A_r^s, множества, соответствующие различным парам, не пересекаются;

C2. любым элементам $c\in C_r^s$, $d\in C_s^t$ соответствует элемент $c\cdot d\in C_r^t$;

C3. если еще $f\in C_t^u$, то выполняется $(c\cdot d)\cdot f = c\cdot(d\cdot f)$;

C4. для всякого $s\in\mathcal{R}$ существует элемент $e_{C_s}\in C_s^s$ (s-я единица), так что для любых $c\in C_r^s$, $d\in C_s^t$ выполняется $c\cdot e_{C_s} = c$, $e_{C_s}\cdot d = d$.

Пусть $\mathcal{C} = (\mathcal{R}, \mathcal{Y}, C_r^s, \cdot, e_{C_r})$ является категорией. Пара $(\mathcal{R}, \mathcal{A}_r)$ называется (левой) $\mathcal{C}$-сетью категорий (левой сетью категорий над $\mathcal{C}$), если

$\mathcal{LNC}$I. любому $r\in\mathcal{R}$ соответствует (малая) категория $\mathcal{A}_r = (\mathcal{I}_r, \mathcal{J}_r, \mathcal{A}_{ri}^{j}, \cdot, e_{\mathcal{A}_{ri}})$ для различных r основные множества категорий $\mathcal{A}_r$ не пересекаются;

$\mathcal{LNC}$2. любому $c\in C_s^r$ и каждому $i\in\mathcal{J}_r$ соответствует элемент $c\triangleright i\in\mathcal{J}_s$;

$\mathcal{LNC}$3. если еще $d\in C_t^s$, то $d\triangleright(c\triangleright i) = (d\cdot c)\triangleright i$;

$\mathcal{LNC}$4. для произвольного $i\in\mathcal{J}_r$ выполняется $e_{C_r}\triangleright i = i$;

$\mathcal{LNC}$5. всяким $c\in C_s^r$, $x\in\mathcal{A}_{ri}^{j}$ соответствует элемент $c\triangleright x\in\mathcal{A}_{s,c\triangleright i}^{c\triangleright j}$

$\mathcal{LNC}$6. если еще $d\in C_t^s$, то $d\triangleright(c\triangleright x) = (d\cdot c)\triangleright x$;

$\mathcal{LNC}$7. для каждого $x\in\mathcal{A}_{ri}^{j}$ выполняется $e_{C_r}\triangleright x = x$;

$\mathcal{LNC}$ 8. если еще $y \in A^{k}_{nj}$, то $c \triangleright (x \cdot y) = (c \triangleright x) \cdot (c \triangleright y)$;

$\mathcal{LNC}$ 9. для произвольного $c \in C^{n}_{s}$ имеет место $c \triangleright e_{A_n i} = e_{A_s\, c \triangleright i}$.

Здесь мы назовем C активной категорией и A_n пассивными категориями сети.

Мы получим пример сети категорий следующим образом. Возьмем категорию $\mathcal{G} = (\mathcal{R}, \mathcal{I}, \mathcal{G}^{s}_{n}, \cdot, e_{\mathcal{G}n})$, граф $(\mathcal{R}, \mathcal{I})$ которой симметричен, т.е. $(n, s) \in \mathcal{I}$ влечет $(s, n) \in \mathcal{I}$. Пусть в $\mathcal{G}$ имеется подгруппоид [2] $C = (\mathcal{R}, \mathcal{I}, C^{s}_{n}, \cdot, e_{Cn})$ над тем же графом, т.е. каждый элемент c из любого C^{s}_{n} обратим в C. Берем тогда в $\mathcal{G}$ подкатегорию $A = (\mathcal{R}, \Delta_{\mathcal{R}}, A^{n}_{n}, \cdot, e_{\mathcal{G}n})$ ($\Delta_{\mathcal{R}}$ - диагональ множества $\mathcal{R}^2$), в которой не пусты только диагональные множества A^{n}_{n} и которая является C-инвариантной ($c \in C^{n}_{s}$, $a \in A^{n}_{n}$ влекут $c \cdot a \cdot c^{-1} \in A^{s}_{s}$). Положим $A_n = (\{n\}, \{(n,n)\}, A^{n}_{n}, \cdot, e_{\mathcal{G}n})$, $c \triangleright n = s$, $c \triangleright a = c \cdot a \cdot c^{-1}$ для всякого $c \in C^{n}_{s}$ и любого $a \in A^{n}_{n}$. Легко видеть, что категории C и A_n удовлетворяют всем аксиомам $\mathcal{LNC}$ I-$\mathcal{LNC}$9. Мы назовем полученную есть внутренней сетью категорий.

Будем говорить, что задана двусторонняя C-сеть категорий, если кроме категории C и C-сети A задана еще C-сеть $\mathcal{B} = (\mathcal{R}, \mathcal{B}_n)$. Мы обозначим такую двустороннюю C-сеть через $(A, C, B) = (A_n, C, B_n)$. Мы получим пример двусторонней сети, если возьмем категории $\mathcal{G}$, C и A как в предыдущем абзаце, берем еще другую C-инвариантную подкатегорию $B = (\mathcal{R}, \Delta_{\mathcal{R}}, B^{n}_{n}, \cdot, e_{\mathcal{G}n})$ и положим $c \triangleright b = c \cdot b \cdot c^{-1}$ для любых $c \in C^{n}_{s}$, $b \in B^{n}_{n}$. Мы назовем семейство категорий (A_n, C, B_n) внутренней двусторонней сетью категорий.

Предположим теперь, что задана произвольная двусторонняя сеть категорий (A_n, C, B_n), где

$$C = (\mathcal{R}, \mathcal{I}, C^{s}_{n}, \cdot, e_{Cn}),\ A_n = (\mathcal{I}_n, \mathcal{J}_n, A^{j}_{ni}, \cdot, e_{A_n i}),\ B_n = (\mathcal{K}_n, \mathcal{L}_n, B^{\ell}_{nk}, \cdot, e_{B_n k}).$$

Рассмотрим тройки (a, c, b), где $c \in C^{s}_{n}$ и a и b суть элементы из A_n и B_n (такие тройки приходится использовать для описания гомоморфизмов сетей биполигонов над категориями). Обозначим совокупность всех троек такого вида через $\mathcal{G}^{s}_{n}$. Зададим равенство троек покомпонентно и определим для троек $(a_1, c_1, b_1) \in \mathcal{G}^{s}_{n}$ и $(a_2, c_2, b_2) \in \mathcal{G}^{t}_{s}$ произведение формулой

$$(a_1, c_1, b_1) \cdot (a_2, c_2, b_2) = (a_1 \cdot (c_1 \triangleright a_2),\ c_1 \cdot c_2,\ (c_1 \triangleright b_2) \cdot b_1), \quad (9)$$

если произведения в первом и третьем члене правой части существуют. Мы видим, что формула (8) использована здесь в более общей ситуации.

Пусть $(a_1, c_1, b_1) \in \mathcal{G}_r^{s}$ есть тройка, где $a_1 \in \mathcal{A}^{j_1}_{r i_1}$, $c_1 \in C_r^s$, $b_1 \in \mathcal{B}_{r k_1}$. Мы назовем такую тройку специальной, если существуют элементы $i_2 \in I_s$, $k_2 \in K_s$ так что $j_1 = c_1 \triangleright i_2$, $k_1 = c_1 \triangleright k_2$.

<u>Лемма 3</u>. Если тройка (a_1, c_1, b_1) является левым сомножителем существующего по формуле (9) произведения, то она специальна. Если произведение двух специальных троек существует, то оно – специальная тройка.

Лемма 3 показывает, что если мы хотим получить из троек (a, c, b) категорию при помощи формулы умножения (9), мы должны взять только специальные тройки. Мы и будем делать так, но будем использовать более детальные обозначения, чтобы обозначение элемента строящейся категории дало информацию о содержащем его основном множестве.

Мы используем следующие обозначения. Обозначим через $\mathcal{M}$ совокупность всех троек (i, r, k), где $r \in \mathcal{R}$, $i \in I_r$, $k \in K_r$. Через $\mathcal{N}$ обозначим совокупность всех пар $((i_1, r_1, k_1), (i_2, r_2, k_2))$, где $(i_1, r_1, k_1), (i_2, r_2, k_2) \in \mathcal{M}$, $(r_1, r_2) \in \mathcal{S}$ и существует такое $c_1 \in C_{r_1}^{r_2}$, что $(i_1, c_1 \triangleright i_2) \in \mathcal{I}_{r_1}$, $(c_1 \triangleright k_2, k_1) \in \mathcal{L}_{r_1}$. Можно показать, что $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ есть рефлексивный и транзитивный граф.

Для каждой пары $((i_1, r_1, k_1), (i_2, r_2, k_2)) \in \mathcal{N}$ обозначим через $\mathcal{G}^{i_2 r_2 k_2}_{i_1 r_1 k_1}$ множество всех девяток

$$(i_1, r_1, k_1, a_1, c_1, b_1, i_2, r_2, k_2),$$

где $c_1 \in C_{r_1}^{r_2}$, $a_1 \in \mathcal{A}^{c_1 \triangleright i_2}_{r_1 i_1}$, $b_1 \in \mathcal{B}^{k_1}_{r_1, c_1 \triangleright k_2}$. Равенство девяток мы определим покомпонентно. Произведение двух девяток зададим формулой

$$(i_1, r_1, k_1, a_1, c_1, b_1, i_2, r_2, k_2) \cdot (i_2, r_2, k_2, a_2, c_2, b_2, i_3, r_3, k_3) =$$

$$= (i_1, r_1, k_1, a_1 \cdot (c_1 \triangleright a_2), c_1 \cdot c_2, (c_1 \triangleright b_2) \cdot b_1, i_3, r_3, k_3). \tag{IO}$$

Поэтому для существования произведения три последних члена первого сомножителя должны совпасть с тремы первыми членами второго сомножителя. Еще мы обозначим

$$e_{\mathcal{G}_{irk}} = (i, r, k, e_{\mathcal{A}_{ri}}, e_{C_r}, e_{\mathcal{B}_{rk}}, i, r, k). \tag{II}$$

<u>Предложение 4</u>. Пусть $(\mathcal{A}_r, C, \mathcal{B}_r)$ является двусторонней сетью категорий. Тогда семейство $\mathcal{G} = (\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{G}^{i_2 r_2 k_2}_{i_1 r_1 k_1}, \cdot, e_{\mathcal{G}_{irk}})$ есть категория. Мы назовем ее двусторонним косым произведением $\{\mathcal{A}_r\} \land C \land \{\mathcal{B}_r\}$ двусторонней сети $(\mathcal{A}_r, C, \mathcal{B}_r)$ и обозначим

ее через

<u>Предложение 5</u>. Косое произведение $\{\mathcal{A}_n\}\lambda\, C \curlywedge \{\mathcal{B}_n\}$ является обобщением прямого произведения категорий $\mathcal{A}\times C\times\mathcal{B}^*$, где категория $\mathcal{B}^*$ двойственна к $\mathcal{B}$.

Это утверждение получится, если в двусторонней сети $(\mathcal{A}_n, C, \mathcal{B}_n)$ все категории $\mathcal{A}_n$ совпадают с одной и той же категорией $\mathcal{A}$, все категории $\mathcal{B}_n$ совпадают с одной и той же категорией $\mathcal{B}$, а C действует на всех $\mathcal{A}$ и всех $\mathcal{B}$ тождественно.

<u>Предложение 6</u>. Косое произведение $\mathcal{G}=\{\mathcal{A}_n\}\lambda\, C \curlywedge \{\mathcal{B}_n\}$ содержит каждую категорию $\mathcal{A}_n$ и любую категорию $\mathcal{B}_n$. Если множества объектов категорий $\mathcal{A}_n$ совпадают ($\mathcal{J}_n=\mathcal{J}$ для любого $n\in\mathcal{R}$), и аналогично $\mathcal{K}_n=\mathcal{K}$ для любого $n\in\mathcal{R}$, и существуют элементы $i\in\mathcal{J}$ и $k\in\mathcal{K}$, инвариантные относительно действия любого $c\in C_s^n$, то $\mathcal{G}$ содержит также C в качестве подкатегории.

Пусть кроме категории $C=(\mathcal{R},\mathcal{S},C_n^s,\cdot,e_{Cn})$ задана категория $\mathcal{M}=(\mathcal{P},\mathcal{V},\mathcal{M}_p^q,\cdot,e_{\mathcal{M}p})$. Гомоморфизмом $h: C\to\mathcal{M}$ называется семейство отображений $h=(h_0:\mathcal{R}\to\mathcal{P},\ h_n^s: C_n^s\to\mathcal{M}_{nh_0}^{sh_0}, (n,s)\in\mathcal{S})$, для которого выполнены условия

$$\text{если } (n,s)\in\mathcal{S}, \quad \text{то } (nh_0, sh_0)\in\mathcal{V}, \tag{12}$$

$$(c\cdot d)h_n^t=(ch_n^s)\cdot(dh_s^t), \tag{13}$$

$$e_{Cn}h_n^n=e_{\mathcal{M},nh_0} \tag{14}$$

для любых $n\in\mathcal{R}$, $(n,s)\in\mathcal{S}$, $c\in C_n^s$, $d\in C_s^t$. h называется изоморфизмом категорий, если все отображения $h_0:\mathcal{R}\to\mathcal{P}$ и $h_n^s: C_n^s\to\mathcal{M}_{nh_0}^{sh_0}$ являются биекциями и h_0 отображает $\mathcal{S}$ на $\mathcal{V}$.

Допустим, что заданы категория C и C-сеть категорий $\mathcal{A}=(\mathcal{R},\mathcal{A}_n)$ и категория $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}$-сеть категорий $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{D}_p)$, где $\mathcal{D}_p=(\mathcal{N}_p,\mathcal{F}_p,\mathcal{D}_{p\mu}^{\sigma},\cdot,e_{\mathcal{D}_p\mu})$. Гомоморфизм сетей $(h,f_n):(C,\mathcal{A}_n)\to(\mathcal{M},\mathcal{D}_p)$ есть семейство гомоморфизмов категорий $h: C\to\mathcal{M}$ и $f_n:\mathcal{A}_n\to\mathcal{D}_{nh_0}$, где $f_n=(f_{n0}:\mathcal{J}_n\to\mathcal{N}_{nh_0},\ f_{ni}^j:\mathcal{A}_{ni}^j\to\mathcal{D}_{nh_0,if_{n0}}^{jf_{n0}},$ $(i,j)\in\mathcal{J}_n)$, удовлетворяющее условиям

$$(c\triangleright i)f_{s0}=(ch_s^n)\triangleright(if_{n0}), \tag{15}$$

$$(c\triangleright a)f_{s,c\triangleright i}^{c\triangleright j}=(ch_s^n)\triangleright(af_{ni}^j) \tag{16}$$

для любых $i\in\mathcal{J}_n$, $(i,j)\in\mathcal{J}_n$, $a\in\mathcal{A}_{ni}^j$, $(s,n)\in\mathcal{S}$, $c\in C_s^n$. Гомоморфизм (h,f_n) называется изоморфизмом сетей, если h и все f_n являются изоморфизмами категорий.

Предположим теперь, что заданы категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{M}$, $\mathcal{C}$-сети $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}=(\mathcal{R},\mathcal{B}_r)$ и $\mathcal{M}$-сети $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}=(\mathcal{P},\mathcal{E}_p)$. Тогда мы имеем двусторонние сети категорий $(\mathcal{A}_r,\mathcal{C},\mathcal{B}_r)$ и $(\mathcal{D}_p,\mathcal{M},\mathcal{E}_p)$. Мы скажем, что задан гомоморфизм двусторонних сетей (f_r,h,g_r): $(\mathcal{A}_r,\mathcal{C},\mathcal{B}_r)\to(\mathcal{D}_p,\mathcal{M},\mathcal{E}_p)$, если $(h,f_r):(\mathcal{C},\mathcal{A}_r)\to(\mathcal{M},\mathcal{D}_p)$ и $(h,g_r):(\mathcal{C},\mathcal{B}_r)\to(\mathcal{M},\mathcal{E}_p)$ суть гомоморфизмы сетей категорий.

<u>Предложение 7.</u> Каждому гомоморфизму $(f_r,h,g_r):(\mathcal{A}_r,\mathcal{C},\mathcal{B}_r)\to$ $\to(\mathcal{D}_p,\mathcal{M},\mathcal{E}_p)$ двусторонних сетей категорий соответствует гомоморфизм $d:\{\mathcal{A}_r\}\lambda\,\mathcal{C}\,\measuredangle\{\mathcal{B}_r\}\to\{\mathcal{D}_p\}\lambda\,\mathcal{M}\,\measuredangle\{\mathcal{E}_p\}$ их двусторонних косых произведений.

<u>Предложение 8</u>. Пусть дана двусторонняя сеть категорий $(\mathcal{A}_r,\mathcal{C},\mathcal{B}_r)$, где категория $\mathcal{C}$ есть группоид и все категории $\mathcal{A}_r$ и $\mathcal{B}_r$ $(r\in\mathcal{R})$ являются однообъектными (моноидами). Обозначим $\mathcal{G}=\{\mathcal{A}_r\}\lambda\,\mathcal{C}\,\measuredangle\{\mathcal{B}_r\}$. Тогда сеть $(\mathcal{A}_r,\mathcal{C},\mathcal{B}_r)$ изоморфна подходящей внутренней сети категории $\mathcal{G}$.

<u>Предложение 9</u>. Пусть $\mathcal{G}=(\mathcal{R},\mathcal{G},\mathcal{G}_r^s,\cdot,e_{\mathcal{G}r})$ является категорией, $\mathcal{C}=(\mathcal{R},\mathcal{G},\mathcal{C}_r^s,\cdot,e_{\mathcal{G}r})$ есть подгруппоид в ней и $\mathcal{A}=(\mathcal{R},\Delta_{\mathcal{R}},\mathcal{A}_r^r,\cdot,e_{\mathcal{G}r})$ и $\mathcal{B}=(\mathcal{R},\Delta_{\mathcal{R}},\mathcal{B}_r^r,\cdot,e_{\mathcal{G}r})$ суть $\mathcal{C}$-инвариантные подкатегории в $\mathcal{G}$. Предположим, что $\mathcal{H}=(\mathcal{P},\mathcal{Q},\mathcal{H}_p^q,\cdot,e_{\mathcal{H}p})$ является также категорией, $\mathcal{M}=(\mathcal{P},\mathcal{Q},\mathcal{M}_p^q,\cdot,e_{\mathcal{H}p})$ ее подгруппоидом и $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\Delta_{\mathcal{P}},\mathcal{D}_p^p,\cdot,e_{\mathcal{H}p})$ и $\mathcal{E}=(\mathcal{P},\Delta_{\mathcal{P}},\mathcal{E}_p^p,\cdot,e_{\mathcal{H}p})$ $\mathcal{M}$-инвариантными подкатегориями в $\mathcal{H}$. Пусть $d:\mathcal{G}\to\mathcal{H}$ является гомоморфизмом категорий, для которого $d=(d_0,d_r^s,(r,s)\in\mathcal{G})$, $\mathcal{C}_r^s d_r^s\subseteq\mathcal{M}_{rd_0}^{sd_0}$, $\mathcal{A}_r^r d_r^r\subseteq\mathcal{D}_{rd_0}^{rd_0}$, $\mathcal{B}_r^r d_r^r\subseteq$ $\subseteq\mathcal{E}_{rd_0}^{rd_0}$. Положим $h_0=d_0$, $h_r^s=d_r^s|\mathcal{C}_r^s$ (ограничение d_r^s на $\mathcal{C}_r^s$), $h=(h_0,h_r^s,(r,s)\in\mathcal{G})$, $f_r=d_r^r|\mathcal{A}_r^r$, $g_r=d_r^r|\mathcal{B}_r^r$.
Тогда (f_r,h,g_r) является гомоморфизмом внутренней двусторонней сети, определенной в $\mathcal{G}$ подкатегориями $\mathcal{A},\mathcal{C},\mathcal{B}$, во внутреннюю сеть, определенную в $\mathcal{H}$ подкатегориями $\mathcal{D},\mathcal{M},\mathcal{E}$.

Теперь мы используем двусторонние косые произведения для определения и исследования двусторонних сплетений категорий. Здесь приходится тоже начать с ряда определений.

Пусть $\mathcal{K}=(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}_i^j,\cdot,e_{\mathcal{K}i})$ есть категория и $\mathcal{P}$ непустое множество. Если даны функции $u,v:\mathcal{P}\to\mathcal{I}$, будем говорить, что они образуют допустимую пару, если для любого $x\in\mathcal{P}$ выполняется $(xu,xv)\in\mathcal{J}$. Мы обозначим множество всех функций $u:\mathcal{P}\to\mathcal{I}$ через $\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{I})$ и совокупность всех допустимых пар функций через $\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{J})$. Ясно, что $\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{J})\subseteq\mathcal{F}^2(\mathcal{P},\mathcal{I})$ и что $(\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{I}),\mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{J}))$ есть рефлексивный и транзитивный граф.

Обозначим теперь $\bigcup\limits_{(i,j)\in\mathcal{J}} \mathfrak{A}_i^j = \tilde{\mathfrak{A}}$ и предположим, что задана функция $a : \mathcal{P} \to \tilde{\mathfrak{A}}$. Мы скажем, что функции $u, v : \mathcal{P} \to \mathcal{I}$ и a образуют допустимую тройку (над $\mathcal{P}$ и $\mathfrak{A}$), если (u,v) есть допустимая пара и для любого $x \in \mathcal{P}$ выполняется $xa \in \mathfrak{A}_{xu}^{xv}$. Легко видеть, что для любой допустимой пары (u,v) существуют функции $a : \mathcal{P} \to \tilde{\mathfrak{A}}$ (вообще говоря, таких функций много), так что (u,a,v) является допустимой тройкой. Для любой допустимой пары (u,v) обозначим через $\mathfrak{F}_u^v(\mathfrak{A},\mathcal{P})$ совокупность всех допустимых троек (u,a,v) с данной парой (u,v).

Мы определим для любых двух допустимых троек $(u,a_1,v) \in \mathfrak{F}_u^v(\mathfrak{A},\mathcal{P})$ и $(v,a_2,w) \in \mathfrak{F}_v^w(\mathfrak{A},\mathcal{P})$ их произведение формулой

$$(u,a_1,v)\cdot(v,a_2,w) = (u, a_1 \cdot a_2, w), \tag{17}$$

где отображение $a_1 \cdot a_2 : \mathcal{P} \to \tilde{\mathfrak{A}}$ задано для любого $x \in \mathcal{P}$ правилом

$$x(a_1 \cdot a_2) = (xa_1)\cdot(xa_2). \tag{18}$$

Так как допустимость троек влечет $xa_1 \in \mathfrak{A}_{xu}^{xv}$, $xa_2 \in \mathfrak{A}_{xv}^{xw}$, то произведение $(xa_1)\cdot(xa_2)$ существует для любого $x \in \mathcal{P}$ и принадлежит к $\mathfrak{A}_{xu}^{xw}$. Поэтому тройка $(u, a_1 \cdot a_2, w)$ также допустима. Обозначим, наконец, для любого отображения $v : \mathcal{P} \to \mathcal{I}$ через e_v отображение $e_v : \mathcal{P} \to \tilde{\mathfrak{A}}$, заданное для любого $x \in \mathcal{P}$ формулой

$$xe_v = e_{xv} \in \mathfrak{A}_{xv}^{xv}.$$

Легко видеть, что тройка (v, e_v, v) допустима, и мы обозначим ее через $e_{\mathfrak{F}(\mathcal{P},\mathfrak{A})v}$.

<u>Предложение 10</u>. Для любой категории $\mathfrak{A} = (\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathfrak{A}_i^j, \cdot, e_{\mathfrak{A}i})$ и всякого непустого множества $\mathcal{P}$ семейство $\mathfrak{F}(\mathcal{P},\mathfrak{A}) = (\mathfrak{F}(\mathcal{P},\mathcal{I}), \mathfrak{F}(\mathcal{P},\mathcal{J}), \mathfrak{F}_u^v(\mathcal{P},\mathfrak{A}), \cdot, e_{\mathfrak{F}(\mathcal{P},\mathfrak{A})v})$ является категорией (прямой степенью категории $\mathfrak{A}$ по множеству $\mathcal{P}$).

Пусть $\mathcal{C} = (\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{C}_r^s, \cdot, e_{\mathcal{C}r})$ также является категорией. Пара $\mathcal{P} = (\mathcal{R}, \mathcal{P}_r)$ называется правым $\mathcal{C}$-полигоном, если

1. любому $r \in \mathcal{R}$ соответствует непустое множество $\mathcal{P}_r$, для различных r множества $\mathcal{P}_r$ не пересекаются;
2. любым $x \in \mathcal{P}_r$, $c \in \mathcal{C}_r^s$ соответствует элемент $x \triangleleft c \in \mathcal{P}_s$;
3. если еще $d \in \mathcal{C}_s^t$, то выполняется $(x \triangleleft c) \triangleleft d = x \triangleleft (c \cdot d)$;
4. для любого $x \in \mathcal{P}_r$ имеет место $x \triangleleft e_{\mathcal{C}r} = x$.

Заметим, что (левые) $\mathcal{C}$-полигоны изучались в [3] и [4].

Предположим теперь, что наряду с категорией $\mathcal{C}$ и правым $\mathcal{C}$-полигоном $\mathcal{P}$ задана категория $\mathfrak{A}$. Образуем на основе предложения 10 для любого $r \in \mathcal{R}$ категорию $\mathfrak{F}(\mathcal{P}_r, \mathfrak{A})$.

$=(\mathcal{F}(\mathcal{P}_{n}, I), \mathcal{F}(\mathcal{P}_n, J), \mathcal{F}_u^v(\mathcal{P}_n, \mathcal{A}), e_{\mathcal{F}(\mathcal{P}_n, \mathcal{A})v})$. Обозначим $\mathcal{F}(\mathcal{P}_n, \mathcal{A}) = \mathcal{A}_n$, $\mathcal{F}(\mathcal{P}_n, I) = I_n$, $\mathcal{F}(\mathcal{P}_n, J) = J_n$, $\mathcal{F}_u^v(\mathcal{P}_n, \mathcal{A}) = \mathcal{A}_{nu}^v$, $e_{\mathcal{F}(\mathcal{P}_n, \mathcal{A})v} = e_{\mathcal{A}_n v}$.

<u>Предложение II</u>. Пусть даны категории $\mathcal{A}, C$ и правый C-полигон $\mathcal{P} = (\mathcal{R}, \mathcal{P}_n)$. Рассмотрим семейство категорий $(\mathcal{R}, \mathcal{A}_n) = (\mathcal{R}, \mathcal{F}(\mathcal{P}_n, \mathcal{A}))$. Сопоставим каждому элементу $c \in C_s^n$ и любой допустимой тройке $(u, a, v) \in \mathcal{A}_{nu}^v$ (над $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{A}$) тройку

$$c \triangleright (u, a, v) = (c \triangleright u, c \triangleright a, c \triangleright v) \in \mathcal{A}_{s, c \triangleright u}^{c \triangleright v} \tag{19}$$

(над $\mathcal{P}_s$ и $\mathcal{A}$), где функции $c \triangleright u, c \triangleright a, c \triangleright v$ определены для каждого $x \in \mathcal{P}_s$ формулой

$$x(c \triangleright u) = (x \triangleleft c)u, \; x(c \triangleright a) = (x \triangleleft c)a, \; x(c \triangleright v) = (x \triangleleft c)v. \tag{20}$$

Эти определения превращают $(\mathcal{R}, \mathcal{A}_n)$ в C-сеть категорий.

<u>Следствие I2</u>. Пусть заданы категории $\mathcal{A}, C, \mathcal{B} = (\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{B}_k^\ell, e_{\mathcal{B}k})$ и правые C-полигоны $\mathcal{P} = (\mathcal{R}, \mathcal{P}_n)$ и $\mathcal{Q} = (\mathcal{R}, \mathcal{Q}_n)$. Рассмотрим семейства категорий $(\mathcal{R}, \mathcal{F}(\mathcal{P}_n, \mathcal{A})) = (\mathcal{R}, \mathcal{A}_n)$ и $(\mathcal{R}, \mathcal{F}(\mathcal{Q}_n, \mathcal{B})) = (\mathcal{R}, \mathcal{B}_n)$. Тогда $(\mathcal{A}_n, C, \mathcal{B}_n)$ является двусторонней C-сетью категорий.

Предположим снова, что даны категории $\mathcal{A}, C, \mathcal{B}$ и правые C-полигоны $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$. Так как по следствию I2 $(\mathcal{A}_n, C, \mathcal{B}_n)$ является C-сетью категорий, то по предложению 4 существует двустороннее косое произведение $\mathcal{G} = \{\mathcal{A}_n\} \rtimes C \ltimes \{\mathcal{B}_n\} = \{\mathcal{F}(\mathcal{P}_n, \mathcal{A})\} \rtimes C \ltimes \{\mathcal{F}(\mathcal{Q}_n, \mathcal{B})\}$. Мы назовем его двусторонним сплетением категорий $\mathcal{A}, C, \mathcal{B}$ относительно правых C-полигонов $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ и обозначим его через $\mathcal{G} = Wr_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}(\mathcal{A}, C, \mathcal{B})$.

Обозначим, как и выше, через $\mathcal{A}_{ni}^j$ множество всех допустимых троек (i, a, j), где $i, j \in \mathcal{F}(\mathcal{P}_n, I)$, $a \in \mathcal{F}(\mathcal{P}_n, \mathcal{A})$ и $xa \in \mathcal{A}_{xi}^{xj}$ для любого $x \in \mathcal{P}_n$. Аналогично $\mathcal{B}_{nk}^\ell$ означает совокупность допустимых троек (k, b, ℓ), где $k, \ell \in \mathcal{F}(\mathcal{Q}_n, \mathcal{K})$, $b \in \mathcal{F}(\mathcal{Q}_n, \mathcal{B})$ и $xb \in \mathcal{B}_{xk}^{x\ell}$ для любого $x \in \mathcal{Q}_n$. Напомним также, что по определению категорий $\mathcal{G}$ и $\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n$ объекты категории $\mathcal{G}$ определены тройками (i, r, k), где $i \in \mathcal{F}(\mathcal{P}_n, I)$, $r \in \mathcal{R}$, $k \in \mathcal{F}(\mathcal{Q}_n, \mathcal{K})$. Обозначим, как и раньше для косых произведений, через $\mathcal{G}_{i_1 r_1 k_1}^{i_2 r_2 k_2}$ совокупность всех элементов из $\mathcal{G}$ с начальным объектом (i_1, r_1, k_1) и конечным объектом (i_2, r_2, k_2). Множество $\mathcal{G}_{i_1 r_1 k_1}^{i_2 r_2 k_2}$ состоит из всех девяток

$$(i_1, r_1, k_1, a_1, c_1, b_1, i_2, r_2, k_2),$$

где $c_1 \in C_{r_1}^{r_2}$, $a_1 \in \mathcal{A}_{r_1 i_1}^{c_1 \triangleright i_2}$, $b_1 \in \mathcal{B}_{r_1, c_1 \triangleright k_2}^{k_1}$.

Предположим теперь, что категория $\mathcal{B}$ является одноэлементным моноидом (множество $\mathcal{K}$ его объектов, конечно, тоже одноэлементно). Тогда ясно, что для любого правого C-полигона $\mathcal{Q} = (\mathcal{R}, \mathcal{Q}_n)$ все множества $\mathcal{F}(\mathcal{Q}_n, \mathcal{K})$ и $\mathcal{F}(\mathcal{Q}_n, \mathcal{B})$ также содержат по одному элементу (например, k_1 и b_1). Тогда мы можем опустить элементы k_1, k_2 и b_1 из обозначений соответствующих девяток (элементов категории $\mathcal{G}$). В таком случае мы можем обозначать элементы из $\mathcal{G}$ шестерками вместо девяток и получить правило умножения

$$(i_1, r_1, a_1, c_1, i_2, r_2)\cdot(i_2, r_2, a_2, c_2, i_3, r_3) = \\ = (i_1, r_1, a_1\cdot(c_1 \triangleright a_2), c_1\cdot c_2, i_3, r_3).$$

Поэтому в этом случае $\mathcal{G}$ зависит только от двух категорий $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ и одного правого $\mathcal{C}$-полигона $\mathcal{P}$. Тогда мы назовем $\mathcal{G}$ (обычным, односторонним) сплетением двух категорий $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ относительно $\mathcal{P}$ и обозначим $\mathcal{G} = Wr_{\mathcal{P}}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ (ср. [6], [8]). Если еще $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ являются моноидами (тогда правый $\mathcal{C}$-полигон $\mathcal{P}$ состоит из одного множества $\mathcal{P}$), мы получим из этого определения понятие сплетения двух моноидов (в [5] приведен двойственный вариант этого определения).

Рассмотрим теперь связь понятия сплетения категорий с гомоморфизмами категорий и полигонов.

Пусть $\mathcal{C} = (\mathcal{R}, \mathcal{I}, C^{s}_{r}, \cdot, e_{cr})$ есть категория и $\mathcal{V} = (\mathcal{R}, \mathcal{V}_r)$ и $\mathcal{P} = (\mathcal{R}, \mathcal{P}_r)$ суть правые $\mathcal{C}$-полигоны. Гомоморфизмом $f: \mathcal{V} \to \mathcal{P}$ называется набор отображений $f = \{f_r : \mathcal{V}_r \to \mathcal{P}_r, r \in \mathcal{R}\}$, удовлетворяющий для любого $c \in C^{s}_{r}$ и каждого $x \in \mathcal{V}_r$ условию

$$(x \triangleleft c) f_s = (x f_r) \triangleleft c. \tag{21}$$

<u>Предложение 13</u>. Предположим, что кроме категорий $\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{B}$ и правых $\mathcal{C}$-полигонов $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ заданы еще категории $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ со множествами объектов $\mathcal{N}, \mathcal{U}$ и правые $\mathcal{C}$-полигоны $\mathcal{V}, \mathcal{W}$. Пусть заданы также гомоморфизмы категорий $f: \mathcal{A} \to \mathcal{D}$, $g: \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ и гомоморфизмы правых $\mathcal{C}$-полигонов $\ell: \mathcal{V} \to \mathcal{P}$, $s: \mathcal{W} \to \mathcal{Q}$. Тогда существует гомоморфизм $d: Wr_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{B}) \to Wr_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathcal{D}, \mathcal{C}, \mathcal{E})$.

Для доказательства мы образуем для любых $r \in \mathcal{R}$ категории $\mathcal{A}_r = \mathcal{F}(\mathcal{P}_r, \mathcal{A})$, $\mathcal{B}_r = \mathcal{F}(\mathcal{Q}_r, \mathcal{B})$, $\mathcal{D}_r = \mathcal{F}(\mathcal{V}_r, \mathcal{D})$, $\mathcal{E}_r = \mathcal{F}(\mathcal{W}_r, \mathcal{E})$. Используя гомоморфизмы f, g, ℓ и s, мы строим для каждого $r \in \mathcal{R}$ гомоморфизмы $h_r: \mathcal{A}_r \to \mathcal{D}_r$ и $m_r: \mathcal{B}_r \to \mathcal{E}_r$, так что (h_r, e_c, m_r) оказывается гомоморфизмом двусторонней сети $(\mathcal{A}_r, \mathcal{C}, \mathcal{B}_r)$ в двустороннюю сеть $(\mathcal{D}_r, \mathcal{C}, \mathcal{E}_r)$, где e_c есть тождественный автоморфизм категории $\mathcal{C}$. Существование гомоморфизма $d: Wr_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{B}) \to Wr_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathcal{D}, \mathcal{C}, \mathcal{E})$ получается тогда из предложения 7.

Литература

1. C l i f f o r d A.H., P r e s t o n G. B. The algebraic theory of semigroups. Vol. II.-Amer. Math. Soc. 1967.
2. H a s s e M., M i o h l e r L. Theorie der Kategorien.- Berlin: VEB Deutsch. Verl. d. Wissensch.,1966.
3. H i o n J. On nets of free polygons over a category and their categories of homomorphisms// Beitr. Algebra und Geom.-1987.- Bd. 24.-S.51-74.
4. H i o n J. Polygons over categories and groupoids//Algebra-Tagung, Halle, 1986.-Tagungsband.-S. 65-101.
5. S k o r n j a k o v L. A. Regularity of wreath product of monoids// Semigroup Forum.-1979.-Vol.18.-P.83-86.
6. W e l l s C. A Krohn-Rhodes theorem for categories//J. Algebra.-1980.-Vol. 64, № 1.- P.37-45.
7. П л о т к и н Б. И. Группы автоморфизмов алгебраических систем.- М.:Наука, 1966.
8. Х и о н Я. В. О сплетении категорий//Третий Всесоюз. симп. по теории полугрупп: Тез. сообщ.- Свердловск, 1988.- С.99.

Поступило
15 III 1989

KATEGOORIATE KAHEPOOLSETEST PÕIMIKUTEST

J.Hion

R e s ü m e e

Töö algul on vaadeldud vabu $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ -bipolügoone, kus $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on monoidid, ja nende bipolügoonide endomorfismimonoide. On näidatud, et vastavaid endomorfisme saab ette anda funktsioonide kolmikute abil, ja tuletatud kolmikute korrutamise reegel. Edasi on kolmikute korrutamist uuritud üldisemal juhul, eeldades, et on antud monoidide kolmik $(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{B})$, kus $\mathcal{C}$ tegutseb monoididel $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ endomorfismide abil. Sellise kolmiku jaoks defineeritakse kahepoolse kaldkorrutise mõiste ja näidatakse, et niisuguste kaldkorrutiste abil saab kirjeldada vabade bipolügoonide endomorfismimonoide. On näidatud, et kahepoolse kaldkorrutise konstruktsiooni saab üldistada monoididelt kategooriatele. Selleks tuleb eeldada, et on antud kaks kategooriate võrku $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$, millel kategooria $\mathcal{C}$ tegutseb homomorfismide abil. Lõppeks defineeritakse ja uuritakse kategooriate $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ja $\mathcal{C}$

põimikuid, kus vastavad võrgud koosnevad kategooriate ja sobivatest otseastmetest.

ON TWO-SIDED WREATH PRODUCTS OF CATEGORIES

J.Hion

S u m m a r y

In the beginning of the paper free $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-bipolygons are considered where $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are monoids, and the endomorphism monoids of such bipolygons are studied. We show that such endomorphisms can be given by triples of functions and we give the rule for multiplication of such triples. Further the multiplication of triples is studied in a more general case supposing that a triple $(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{B})$ of monoids is given where $\mathcal{C}$ acts on $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ by endomorphisms. For such triples we define the two-sided skew product and show that using such skew products it is possible to describe the endomorphism monoids of free bipolygons. Then we show that it is possible to generalize the two-sided skew products from monoids to categories. For that we must suppose that there is given a category $\mathcal{C}$ acting on two nets of categories $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ by homomorphisms. At last we define and study the wreath products of categories $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}, \mathcal{B}$ where the corresponding nets consist of suitable direct powers of the categories $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$.

Acta et commentationes universitatis Tartuensis, 878 , 1990, 177-186.

О ДВУХ КЛАССАХ ПРАВОАЛЬТЕРНАТИВНЫХ КОЛЕЦ

В.П.Чуваков
Новосибирский государственный университет

В работе рассматриваются правоальтернативные Φ-операторные кольца, удовлетворяющие одному из тождеств

$$[[x,y],y]=0, \quad (y,y,x)=\lambda[[x,y],y].$$

Рассматриваемые классы колец тесно связаны с классом правоальтернативных почти альтернативных колец. Из работы автора [9] легко получить, что правоальтернативное кольцо R над полем является почти альтернативным тогда и только тогда, когда R либо альтернативно, либо кольцо типа (-I,I), либо R - правоальтернативное кольцо, удовлетворяющее одному из тождеств $[[x,y],y]=0$, $(y,y,x)=\lambda[[x,y],y]$.

Автором [9] доказано, что полупервичное правоальтернативное кольцо, удовлетворяющее тождеству $[[x,y],y]=0$ является кольцом типа (-I,I). Позднее аналогичный результат был получен Е.Клейнфелдом [I2].

В I978 г. И.Генцель [II] доказал, что в правоальтернативной алгебре, удовлетворяющей тождеству $(y,y,x)=$ $=\lambda[[x,y],y]$, множество всех альтернаторов является тривиальным идеалом.

В §I работы доказано, что в правоальтернативном кольце, удовлетворяющем тождеству $[[x,y],y]=0$ идеал S, порожденный Φ - модулем $[[R,R],R]$ тривиален и S является строго (-I,I) R/S - бимодулем.

В §2 доказано, что квадрат разрешимой правоальтернативной Φ - алгебры, удовлетворяющей тождеству $(y,y,x)=$ $=\lambda[[x,y],y]$ нильпотентен.

В классах альтернативных, (-I,I), йордановых колец, правоальтернативных колец, удовлетворяющих тождеству $[[x,y],y]=$ $=0$ аналогичные результаты получены в [3,4,8].

§1. Правоальтернативные кольца с тождеством $[[x,y],y]=0$.

Пусть Φ - ассоциативно - коммутативное кольцо, содержащее $1/6$, R - правоальтернативное Φ - операторное кольцо, удовлетворяющее тождеству

$$[[x,y],y]=0. \qquad (1)$$

Обозначим через Z - коммутативный центр кольца R,

$$H=\{h\in R : (Z,R,h)=(Z,R,R)h=0\}.$$

Тогда R удовлетворяет следующим тождествам и соотношениям [8,9] :

$$[[x,y],z]+[[x,z],y]=0, \qquad (2)$$

$$[x^2,z]-x\circ[x,z]=2(x,x,z), \qquad (3)$$

$$[[x,y],[z,t]]=[[x,[z,t]],y]=0, \qquad (4)$$

$$(y,y,[z,t])=0, \qquad (5)$$

$$(Z,R,R)\subseteq Z, \qquad (6)$$

$$(Z,R,[R,R])=(R,[R,R],Z)=0, \qquad (7)$$

H - идеал в R, причем $[[R,R],R]\subseteq H$. (8)

Обозначим через $[x,y,z]$ коммутатор $[x,[y,z]]$

Докажем тождество

$$[x,y,z][v,t,u]=0. \qquad (9)$$

Из тождеств (3), (5) получаем $[x^2,y,z]-x\circ[x,y,z]=0$.

Линеаризуем тождество по x

$$[x,y,z]\circ v=[x\circ v,y,z]-[v,y,z]\circ x. \qquad (10)$$

Отсюда в силу (4)

$$[x,y,z]\circ[v,t,u]=[x\circ[v,t,u],y,z]-[[v,t,u],y,z]\circ x=$$
$$=[x\circ[v,t,u],y,z]=-[[x,t,u]\circ v,y,z]=-[x,t,u]\circ[v,y,z].$$

Таким образом $[x,y,z]\circ[v,t,u]$ - кососимметрическая функция по любым двум аргументам. Следовательно,

$$2[x,y,z]\circ[v,t,u]=0.$$

Так как $1/2\in\Phi$, то $[x,y,z]\circ[v,t,u]=0$ и тождество (9) следует из (4).

<u>Теорема 1</u>. Пусть R - правоальтернативное Φ - операторное кольцо ($1/6\in\Phi$), удовлетворяющее тождеству $[[x,y],y]=0$, S - идеал R, порожденный Φ - модулем $[R,R,R]$, $\bar{R}=R/S$. Тогда

1) $S^2=0$,

2) S является строго (-1,1) $\bar{R}$ бимодулем.

<u>Доказательство.</u> Из тождеств (5),(7),(8) получаем следующие соотношения:

$$([R,R,R],R,[R,R,R])=(R,[R,R,R],[R,R,R])=0,$$

$$([R,R,R],R,R)[R,R,R]=0.$$

Отсюда в силу (9) $(R[R,R,R])[R,R,R] \subseteq$
$\subseteq (R,[R,R,R],[R,R,R]) + R([R,R,R][R,R,R]) = 0.$
Таким образом
$$(R[R,R,R])[R,R,R] = 0. \qquad \text{(II)}$$
Из тождеств (4), (2) получаем, что
$$S = [R,R,R] + [R,R,R]L_R + \ldots + [R,R,R]\overbrace{L_R \ldots L_R}^{\kappa} + \ldots =$$
$$= [R,R,R] + [R,R,R]R + \ldots + (\ldots([R,R,R]\underbrace{R)\ldots)R}_{\kappa} + \ldots \qquad (12)$$
где L_R - оператор левого умножения на элементы кольца R.
Индукцией по числу κ докажем, что справедливо соотношение
$$[R,R,R]\underbrace{L_R \ldots L_R}_{\kappa} \cdot [R,R,R] = 0.$$
Основанием для индукции служат тождества (9), (II).
Предположим, что для любого $p < \kappa$
$$[R,R,R]\underbrace{L_R \ldots L_R}_{p} \cdot [R,R,R] = 0.$$
Так как $[R,R,R] \subseteq H^{P}$ и $2(x,y,z) = (z,y,x)$ для любого $z \in Z$, то в силу (8), (4), предположения индукции
$[R,R,R]\underbrace{L_R \cdots L_R}_{\kappa} \cdot [R,R,R] \subseteq (R,[R,R,R]\underbrace{L_R \cdots L_R}_{\kappa-1},[R,R,R]) \subseteq$
$\subseteq (R,H,[R,R,R]) \subseteq ([R,R,R],R,H) = 0.$

Таким образом $([R,R,R])_R \cdot [R,R,R] = 0.$
В правоальтернативном почти альтернативном кольце двусторонний аннулятор любого двустороннего идеала является двусторонним идеалом, поэтому $S^2 = 0$. Утверждение I) доказано.

Так как S - идеал в R, то для доказательства утверждения 2) теоремы достаточно доказать, что $S \oplus \bar{R}$ является строго (-I,I) кольцом.

Из тождества (2), утверждения I) следует, что
$$[\bar{R},\bar{R},\bar{R}] = [\bar{R},S,S] = [S,\bar{R},S] = 0.$$
Докажем теперь, что $[S,\bar{R},\bar{R}] = 0.$
Из тождеств (3),(4),(I0),(9) получаем:
$$[[R,R,R],[R,R]] = 0,$$
$$2[[R,R,R]R,[R,R]] = [[R,R,R]\circ R,[R,R]] \subseteq$$
$$\subseteq R\circ[[R,R,R],[R,R]] + [R,R,R]\circ[R,R,R] = 0,$$
$$2[(\ldots([R,R,R]\underbrace{R)\ldots)R}_{\kappa},[R,R]] \subseteq [(\ldots([R,R,R]\underbrace{R)\ldots R)}_{\kappa-1}\circ R,[R,R]]$$
$$\subseteq R\circ[(\ldots([R,R,R]\underbrace{R)\ldots)R}_{\kappa-1},[R,R]] + (\ldots([R,R,R]\underbrace{R)\ldots)R}_{\kappa-1}\circ[R,R,R] = 0$$
Так как $1/2 \in \Phi$, то индукцией по числу κ легко доказать, что
$$[(\ldots([R,R,R]\underbrace{R)\ldots)R}_{\kappa},[R,R]] = 0.$$
Теперь из включения (I2) следует, что $[S,R,R] = 0.$

Теорема доказана.

Следствие I. [9]. Полупервичное правоальтернативное Φ - операторное кольцо ($1/6 \in \Phi$), удовлетворяющее тождеству $[[x,y],y]=0$, является строго (-I,I) кольцом, т.е. удовлетворяет тождеству $[[x,y],z]=0$.

Напомним, что правоальтернативное кольцо называется почти альтернативным, если оно удовлетворяет тождеству $(x,y,z)+\beta_1(y,x,z)+\beta_2(z,x,y)+\beta_3[[x,y],z]+\beta_4[[x,z],y]=0$

Из результата И.Генцеля [II] , теоремы I, работы автора [9] получаем следующие утверждения, показывающие степень близости класса правоальтернативных почти альтернативных колец к классам альтернативных и (-I,I) колец.

Следствие 2. Произвольное правоальтернативное почти альтернативное кольцо над полем либо альтернативно, либо кольцо типа (-I,I), либо является расширением тривиального кольца с помощью альтернативного или (-I,I) кольца.

Следствие 3. [9] . Произвольное полупервичное правоальтернативное почти альтернативное кольцо над полем либо альтернативно, либо кольцо типа (-I,I).

Следующий пример показывает, что существуют правоальтернативные разрешимые, но ненильпотентные кольца, удовлетворяющие тождеству $[[x,y],y]=0$, но не являющиеся кольцами типа (-I,I). Пример конечномерного правоальтернативного кольца, удовлетворяющего тождеству $[[x,y],y]=0$, но не являющегося кольцом типа (-I,I), построил Е. Клейнфельд [I2] .

Пример. Пусть $X=\{x_i\}$ - счетное множество переменных. Обозначим через $\mathcal{U}$ - множество правильных слов вида $u=x_{i_1}\dots x_{i_k}$, $i_1<i_2<\dots<i_k$. Тогда $d(u)=k$ - длина слова u, $\overline{ux_i}$ - правильное слово от переменных $x_{i_1},\dots,x_{i_k},x_i$.

Определим на Ф-модуле $\mathcal{U}$ структуру кольца, задав умножение следующим образом:

I) $ux_i=(-1)^{\sigma(i_1,\dots,i_k,i)}\overline{ux_i}$, где $\sigma(i_1,\dots,i_k,i)$ - число инверсий в подстановке $(i_1,\dots,i_k,i)$,

2) $x_i\cdot u=-2ux_i$, если $d(u)\geq 2$,

3) $u\cdot(x_ix_j)=-9/2\,ux_i\cdot x_j$, если $d(u)>2$,

4) $u\cdot v=0$ в остальных случаях.

Покажем, что $\mathcal{U}$ удовлетворяет тождеству $[[x,y],y]=0$
Из правил умножения получаем:

$$(x_i,x_j,x_k)=(-1)^{\sigma(i,j,k)}3\,\overline{x_ix_jx_k},$$
$$[[x_i,x_j],x_k]=(-1)^{\sigma(i,j,k)}6\,\overline{x_ix_jx_k},$$
$$(u,x_i,x_j)=ux_i\cdot x_j-u\cdot x_ix_j=11/2\,ux_i\cdot x_j,$$
$$(x_i,u,x_j)=x_iu\cdot x_j-x_i\cdot ux_j=-4\,ux_i\cdot x_j,$$

$(x_i, x_j, u) = (x_i x_j)u - x_i(x_j u) = 4u x_i \cdot x_j,$

$[[u, x_i], x_j] = u x_i \cdot x_j - x_i u \cdot x_j - x_j \cdot u x_i + x_j \cdot x_i u = 9u x_i \cdot x_j,$

$[[x_j, x_i], u] = [x_j, x_i]u - u[x_j, x_i] = -u \cdot x_j x_i + u \cdot x_i x_j = -9u x_i \cdot x_j$

Следовательно,
$(x_i, x_j, x_k) + (x_i, x_k, x_j) = 0$, $[[x_i, x_j], x_k] + [[x_i, x_k], x_j] = 0$,
$(u, x_j, x_i) + (u, x_i, x_j) = 0$, $(x_i, u, x_j) + (x_i, x_j, u) = 0$,
$[[u, x_i], x_j] + [[u, x_j], x_i] = 0$, $[[x_j, u], x_i] + [[x_j, x_i], u] = 0$.
С другой стороны, $[[x_i, x_j], x_k] = (-1)^{\sigma(i,j,k)} 6\, \overline{x_i x_j x_k}$.

Таким образом, $\mathcal{U}$ - правоальтернативное кольцо, удовлетворяющее тождеству $[[x,y],y] = 0$, не являющееся (-I,I) кольцом.

Заметим также, что $\mathcal{U}$ - разрешимое индекса 3, но ненильпотентное кольцо.

§2. Разрешимые правоальтернативные алгебры, удовлетворяющие тождеству $(y, y, x) = \lambda [[x,y],y]$.

В работах [2,6,8] доказано, что в классах альтернативных, (-I,I) колец, правоальтернативных колец, удовлетворяющих одному из тождеств $[[x,y],y] = 0$, $(y,y,x) = \lambda[[x,y],y]$ ниль-алгебры ограниченного индекса при естественных ограничениях на характеристику разрешимы.

Разрешимые альтернативные, (-I,I) алгебры, правоальтернативные алгебры, удовлетворяющие тождеству $[[x,y],y] = 0$ изучались в работах [4,8].

С.В.Пчелинцевым [4] доказано, что квадрат разрешимой альтернативной алгебры нильпотентен.

Докажем, что аналогичный результат справедлив и в классе правоальтернативных Φ - алгебр, удовлетворяющих тождеству

$$(y, y, x) = \lambda [[x,y],y], \quad 1/1+2\lambda \in \Phi.$$

Предварительно докажем следующий результат, имеющий также самостоятельное значение.

Лемма I. В классе правоальтернативных Φ- операторных колец, удовлетворяющих тождеству $(y, y, x) = \lambda[[x,y],y]$, $1/1+2\lambda \in \Phi$, правонильпотентность и нильпотентность эквивалентны.

Доказательство. Пусть A - разрешимая индекса 2 правоальтернативная алгебра, удовлетворяющая тождеству $(y, y, x) = \lambda[[x,y],y]$, $1/1+2\lambda \in \Phi$. Рассмотрим Φ-алгебру $R(A^2)$ порожденную операторами правого и левого умножения A^2 на элементы из A.

Если u, v - операторные слова из $R(A^2)$, то будем писать, что $u \equiv v$, если $A^2(u-v)=0$.

Пусть $b \in A^2$, $y, z, t, x \in A$. Из тождеств

$$(y, xz, x) = (y, z, x)x, \qquad (I2)$$

$$(xy, z, t) - x(y, z, t) - (x, z, t)y + (x, y, [z, t]) = 0, \qquad (I3)$$

справедливых во всяком правоальтернативном кольце, в силу разрешимости получаем, что

$$(y, bz, t) = (y, z, b)t, \quad x(y, z, b) + (x, z, b)y + (x, y, [b, z]) = 0.$$

Отсюда

$$L_y R_z R_t \equiv R_z R_t L_y, \qquad (I4)$$

$$L_z L_x R_y \equiv -R_z L_y L_x. \qquad (I5)$$

Аналогично из тождества

$$0 = (ac, b, d) + (b, ac, d) - a(c, b, d) - a(b, c, d) - (a, b, d)c -$$
$$-(b, a, d)c - \lambda([b, d], a, c) + 2\lambda([a, d], c, b) - 2\lambda(a, c, [b, d]) -$$
$$-2\lambda(a, b, [c, d]) + \lambda(b, a, [c, d]) - \lambda(b, c, [a, d]) - 2\lambda[b, (a, c, d)] -$$
$$-\lambda[b, (d, a, c)] + \lambda[a, b][c, d] + \lambda[a, d][c, b],$$

справедливого [II] в классе правоальтернативных колец, удовлетворяющих тождеству $(y, y, x) = \lambda[[x, y], y]$, получаем

$$a[c \cdot bd] - a[cb \cdot d] - a[bc \cdot d] - [ab \cdot d]c + [a \cdot bd]c -$$
$$-[ba \cdot d]c - \lambda([b, d]a)c + 2\lambda a(c[b, d]) = 0.$$

Отсюда в силу (I4), (I5)

$$(1+2\lambda) L_c R_d L_a \equiv (1+4\lambda) R_d L_c L_a + R_d L_a R_c +$$
$$+\lambda R_a R_c L_d + (1-\lambda) R_d R_a R_c. \qquad (I6)$$

Из соотношений (I6), (I4), (I5) легко получить, что правоальтернативная разрешимая индекса 2 правонильпотентная индекса n алгебра A, удовлетворяющая тождеству $(y, y, x) = \lambda[[x, y], y]$, $1/1+2\lambda \in \Phi$, левонильпотентна индекса $n+2$. Однако, правонильпотентная и левонильпотентная алгебра нильпотентна [7].

Теперь доказательство леммы можно легко получить воспользовавшись приемом, используемым Г.В.Дорофеевым [2] при доказательстве существования локально-нильпотентного радикала: свести общий случай к случаю разрешимых индекса 2 алгебр.

Лемма доказана.

<u>Теорема 2</u>. Пусть A - разрешимая правоальтернативная Φ- алгебра $(1/6 \in \Phi)$, удовлетворяющая тождеству $(y, y, x) = \lambda[[x, y], y]$, $1/1+2\lambda \in \Phi$. Тогда A^2 нильпотентна.

<u>Доказательство</u>. Пусть $M = \{(a, a, b) : a, b \in A\}$ - множество всех альтернаторов алгебры A.

И.Генцелем [II] доказано, что M -идеал в A такой, что

$$M^2=0,\quad M\subseteq[A,A],\quad [M,[A,A]]=0. \qquad (17)$$

Отсюда и из правоальтернативности получаем, что для любых $m\in M,\ a,b,c,d\in A$ справедливы соотношения:

$$mR_{[a,b]}=mL_{[a,b]},\quad mR_{ab}R_{cd}=-mR_{cd}R_{ab}+mR_{(ab)\circ(cd)}. \qquad (18)$$

Из [II] следует, что A удовлетворяет тождествам

$$(y,z,x)+(z,y,x)=\lambda[[x,y],z]+\lambda[[x,z],y],\quad [[x,y],[z,t]]=0.$$

Отсюда в силу (18) получаем, что

$$0=\lambda[[cd,m],[a,b]]+\lambda[[cd,[a,b]],m]=(m,[a,b],cd)+$$
$$+([a,b],m,cd)=mR_{[a,b]}R_{cd}-mR_{[a,b](cd)}+mL_{[a,b]}R_{cd}-$$
$$-mR_{cd}L_{[a,b]}=3mR_{[a,b]}R_{cd}-mR_{[a,b](cd)}-mR_{[a,b]\circ(cd)}.$$

Таким образом

$$3mR_{[a,b]}R_{cd}=mR_{[a,b](cd)}+mR_{[a,b]\circ(cd)}. \qquad (19)$$

Из тождества (13), правоальтернативности при $x=m$, $y\in A^2,\ w,z\in A$ получаем

$$0=mR_yR_wR_z-mR_yR_{wz}-mR_{(y,w,z)}-mR_wR_zR_y+$$
$$+mR_{wz}R_y+mR_yR_{[w,z]}-mR_{y[w,z]}=-2mR_yR_{wz}-$$
$$-mR_wR_{z\circ y}+mR_{w\circ y}R_z+mR_{(wz)\circ y}-mR_{(y,w,z)}+$$
$$+mR_yR_{[w,z]}-mR_{y[w,z]}.$$

Следовательно, в силу (19)

$$2mR_yR_{wz}=mR_{w\circ y}R_z-mR_wR_{z\circ y}+mR_d,$$

где $d\in A^4$.

Отсюда при $u,v\in A$ получаем

$$4mR_yR_{wz}R_{uv}\in MR_{A^4}. \qquad (20)$$

Пусть $\bar{A}=A/M$. Тогда $\bar{A}$ – альтернативна и из леммы 8 [2, стр. 160] следует, что

$$\bar{A}^4\subseteq I^2=\{\textstyle\sum\alpha_ia_i^2 : a_i\in\bar{A}\}\subseteq(\bar{A}^{(+)})^2.$$

Из работы [3] следует, что существует число N такое, что

$$\underbrace{R_{(A^{(+)})^2}\cdots R_{(A^{(+)})^2}}_{N}=0.$$

Так как $ab=\frac{1}{2}[a,b]+\frac{1}{2}(a\circ b)$, $1/6\in\Phi$, то из (19), (20) и того, что $\bar{A}^4\subseteq(\bar{A}^{(+)})^2$, $M^2=0$, получаем

$$M\underbrace{R_{A^2}\cdots R_{A^2}}_{3N}\subseteq M\underbrace{R_{(A^{(+)})^2}\cdots R_{(A^{(+)})^2}}_{N}=0.$$

Из теоремы 2 [4, стр. 86] следует, что $\bar{A}^2$ – нильпотентный идеал альтернативной алгебры $\bar{A}$. Следовательно, существует число k такое, что $(A^2)^k\subseteq M$.

В силу предыдущего $A^2\underbrace{R_{A^2}\cdots R_{A^2}}_{3N+k}\subset M\underbrace{R_{A^2}\cdots R_{A^2}}_{3N}=0.$

Таким образом, A^2 правонильпотентна индекса $3N+k$, и из леммы I следует, что A^2 нильпотентна.

Теорема доказана.

Автор выражает признательность И.П.Шестакову за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения полученных результатов.

Литература

I. Д ж е к о б с о н Н. Строение колец. - М. ИЛ, I96I.
2. Ж е в л а к о в К.А., С л и н ь к о А.М., Ш е с т а к о в И.П., Ш и р ш о в А.И. Кольца, близкие к ассоциативным. - М.: Наука, I978.
3. З е л ь м а н о в Е.И., С к о с ы р с к и й В.Г. Специальные йордановы ниль-алгебры ограниченного индекса // Алгебра и логика. - I983. - Т. 22, №6. - С. 626-635.
4. П ч е л и н ц е в С.В. Разрешимость и нильпотентность альтернативных алгебр и алгебр типа (-I,I) // Тр. ин-та мат. СОАН СССР. - Новосибирск, I984. - Т. 4: Группы и другие алгебраические системы с условиями конечности. - С. 8I-I0I.
5. П ч е л и н ц е в С.В. Первичные алгебры и абсолютные делители нуля // Изв. АН СССР. - I986. - Т. 50, №I. - С. 79-I00.
6. Р о о м е л ь д и Р.Э. Разрешимость (-I,I) ниль-колец// Алгебра и логика. - I973. - Т. I2, №4. - С. 478-489.
7. С л и н ь к о А.М. Об эквивалентности некоторых нильпотентностей в правоальтернативных кольцах // Алгебра и логика. - I970. - Т. 9, №3. - С. 324-348.
8. Ч у в а к о в В.П. Правоальтернативные почти альтернативные ниль-алгебры // Новосибирск, I986. - I7с. - (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; №7).
9. Ч у в а к о в В.П. Первичные правоальтернативные почти альтернативные кольца // Алгебра и логика. - I986. - Т. 25, №5. - С. 600-6I0.
10. H e n t z e l I.R. Nil semi-simple (-I,I) rings // J. Algebra. - 1972. - V. 22, No 3. - P. 442-450.
11. H e n t z e l I.R. Alternators of a right alternative algebra // Trans. Amer. Math. Soc. - 1978. - V. 242. - P. 141-156.
12. K l e i n f e l d E. A generalization of strongly (-I,I) rings // J. Algebra. - 1988. - V. 119, No 2. - P. 218-225.

Поступило
26 IУ 1989

KAHEST PAREMALTERNATIIVSETE RINGIDE KLASSIST

V.P.Tšuvakov

R e s ü m e e

Töös uuritakse kaht paremalternatiivsete Φ-operaatorringide ($1/6 \in \Phi$) klassi, mis rahuldavad vastavalt samasusi

$$[[x,y],y] = 0, \qquad (1)$$

$$(y,y,x) = \lambda [[x,y],y], \quad 1/(1+2\lambda) \in \Phi. \qquad (2)$$

Autor [9] ja hiljem Kleinfeld [12] näitasid, et kui samasust (1) rahuldavas paremalternatiivses ringis R puuduvad triviaalsed ideaalid, siis see ring osutub (-1,1) ringiks. Antud töös on saadud tugevam tulemus: sellises ringis on Φ-mooduli $[[R,R],R]$ poolt tekitatud ideaal S triviaalne (Teoreem 1).

Samasusega (2) paremalternatiivsete ringide jaoks tõestatakse kõigepealt paremnilpotentsuse ja nilpotentsuse ekvivalentsus. See võimaldab näidata, et sellise lahenduva ringi A ruut A^2 on nilpotentne (Teoreem 2). Vastava tulemuse alternatiivsete ringide jaoks sai Ptšelintsev [4].

ON TWO CLASSES OF RIGHT ALTERNATIVE RINGS

V.P.Chuvakov

S u m m a r y

In the present paper two classes of right alternative Φ-rings ($1/6 \in \Phi$), safisfying correspondingly the identities

$$[[x,y],y] = 0, \qquad (1)$$

$$(y,y,x) = \lambda [[x,y],y], \quad 1/(1+2\lambda) \in \Phi, \qquad (2)$$

are considered.

The author [9] and then Kleinfeld [12] showed that a semiprime right alternative ring, satisfying (1), is a (-1,1) ring. In this paper a more stronger result is given: in such rings R the ideal S , generated by the Φ -module $[[R,R],R]$, is trivial.

In the right alternative rings with the identity (2) first the equivalency of right and left nilpotency is proved. It makes it possible to show that in such a solvable ring A the second power A^2 is nilpotent (Theorem 2).

The analogous result for the alternative rings is obtained by Pchelincev [4] .

СОДЕРЖАНИЕ - CONTENTS

RESÜMEED

SUMMARIES - РЕЗЮМЕ

Ученые записки Тартуского университета.
Выпуск 878.
МОНОИДЫ, КОЛЬЦА И АЛГЕБРЫ.
Труды по математике и механике.
На русском и английском языках.
Резюме на английском и русском языках.
Корректоры М.Тамм и А.Флайшер.
Тартуский университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Ответственный редактор Р.Роомельди.
Подписано к печати II.01.1990.
МВ 00409.
Формат 60x90/16.
Бумага писчая.
Машинопись. Ротапринт.
Учетно-издательских листов 11.35. Печатных листов 12,0.
Тираж 400.
Заказ № 919.
Цена 2 руб. 30 коп.
Типография ТУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул. Тийги, 78.
2 - 2