

---

---

## EL DIABLO DE LOS NÚMEROS

Sección a cargo de

**Javier Cilleruelo Mateo**

---

---

### Teselaciones por traslación\*

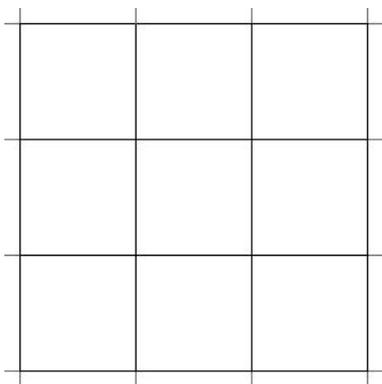
por

**Mihail N. Kolountzakis<sup>†</sup> y Máté Matolcsi<sup>‡</sup>**

#### 1. INTRODUCCIÓN

Teselar consiste en cubrir una parte de espacio dada, con objetos (o teselas) iguales o de un número finito de clases diferentes y sin permitir que éstos se superpongan. Cuando cubrimos el suelo de una habitación utilizando baldosas rectangulares idénticas (en el sentido ordinario de la palabra) situamos las copias de las baldosas de la manera usual, unas junto a otras, sin dejar espacios entre ellas.

Nuestro suelo puede ser tan aburrido como el suelo rectangular de la izquierda o tan interesante como el mosaico realizado con el lagarto de Escher de la derecha:



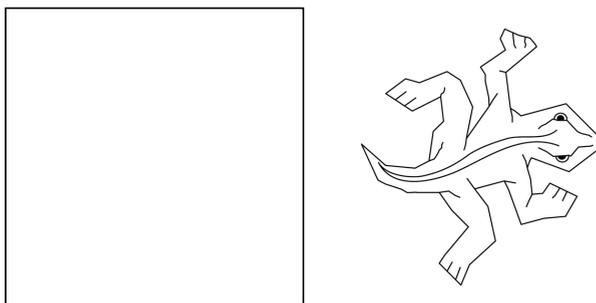
En ambos mosaicos se emplea un único objeto, o tesela, para cubrir el suelo:

---

\*Traducción al español por Ana Zumalacárregui.

<sup>†</sup>MK y MM: Financiados por el proyecto No. 2937 de la *University of Crete* y por la Universidad Autónoma de Madrid.

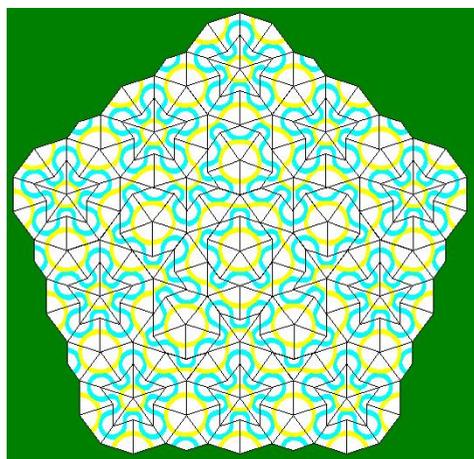
<sup>‡</sup>MM: Financiado por el ERC-AdG 228005, y por OTKA, proyectos No. K77748, K81658.



un cuadrado en la izquierda y una silueta de lagarto en la derecha.

Por encima de la estética y la decoración del mosaico, existe otra diferencia entre estos dos ejemplos que resulta muy significativa desde el punto de vista que adoptaremos. Para cubrir el suelo con las piezas cuadradas basta con trasladarlas en el espacio; no es necesario girarlas. Esto no sucede en el segundo caso: las copias de las teselas con forma de lagarto deben girarse debidamente para que puedan encajar entre sí.

Ciertamente, para la vasta mayoría de ejemplos en la literatura (ver e.g. [GBS]) que exhiben un comportamiento interesante (como la indeducibilidad o aperiodicidad, que discutiremos más adelante), el *grupo de movimientos* permitidos es normalmente el grupo de movimientos rígidos en el espacio, por tanto las rotaciones están permitidas (a veces incluso se permiten las reflexiones). Pero incluso así, con esa libertad de movimientos, uno podría verse en apuros para encontrar ejemplos atractivos de teselaciones aperiódicas, como el de «la cometa y la flecha» de Penrose que se muestra a continuación.



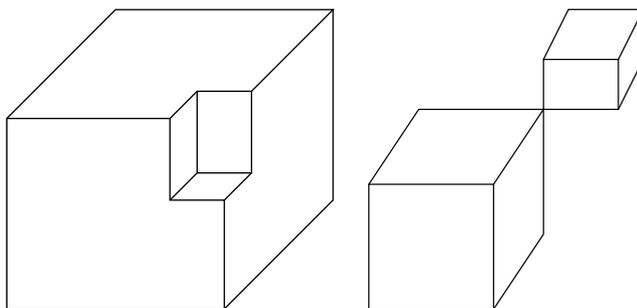
Tenemos, sin embargo, buenas razones para restringirnos a las *teselaciones por traslación*. Aun en este caso, existen muchos problemas abiertos en conexión con la Teoría de Números, el Análisis de Fourier y la Teoría de la Computación, incluso en una dimensión. Como puede que no resulte fácil imaginar teselaciones unidimensionales, conviene señalar que en los casos más interesantes las baldosas habrán de

tener una forma poco «agradable». De hecho, se puede demostrar de manera sencilla, mediante prueba y error, que el conjunto  $E = \{0, 2, 3, 5\}$



puede teselar  $\mathbb{Z}$  mediante traslaciones y que dicha teselación tiene periodo 4. A medida que se consideran conjuntos finitos de enteros de mayor tamaño resulta más y más lento decidir si pueden usarse para teselar  $\mathbb{Z}$ . En general no se conoce ningún método más rápido, para resolver esta pregunta, que el de prueba y error. Esto refleja lo poco que sabemos del fenómeno de las teselaciones.

Veamos otro ejemplo, de índole más geométrica, para convencer al lector de que si quitamos la libertad de rotar y reflejar las teselas no perderemos la diversión. Consideremos el llamado *cubo mellado* (izquierda)



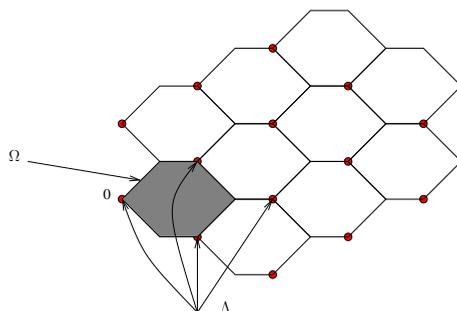
y tratemos de visualizar un modo de llenar el espacio con él (aquí no ayudará rotar o reflejar la tesela). En este caso no estamos asumiendo nada sobre las longitudes del corte rectangular (mella) de la esquina del cubo o rectángulo. Sean cuales sean esas longitudes, el cubo mellado puede, de hecho, teselar el espacio mediante traslaciones [Ko1]. El modo más simple que conocemos para probar esta afirmación es haciendo uso del análisis de Fourier, sin necesidad de hacer uso de ninguna intuición geométrica. Lo mismo sucede con el *cubo extendido* (arriba a la derecha), sólo que éste es algo más difícil de visualizar. Por lo menos el cubo mellado «fuerza» una esquina de una copia de la tesela a llenar la mella en otra copia y esto puede, al menos, darnos un comienzo. Sin embargo no existe ninguna restricción tan obvia para el cubo extendido.

A estas alturas deberíamos fijar las reglas del juego. ¿Qué significa para un subconjunto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  teselar  $\mathbb{R}^d$  cuando se traslada a lo largo de las posiciones de un conjunto discreto  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ ? Diremos que  $\Omega$  tesela  $\mathbb{R}^d$  con  $\Lambda$ , o a lo largo de  $\Lambda$ , si las copias

$$\Omega + \lambda, \quad \lambda \in \Lambda,$$

no están superpuestas y cubren todo el espacio. Aquí, como de costumbre, denotaremos por  $\Omega + \lambda$  al conjunto

$$\{\omega + \lambda : \omega \in \Omega\},$$



el trasladado de  $\Omega$  por el vector  $\lambda$ . Pero, ¿qué significa que dos conjuntos no estén superpuestos? Uno puede, de hecho, pedir que los interiores y no las fronteras de dos conjuntos sean disjuntas. Sin embargo resulta más conveniente pedir que las intersecciones de esos dos conjuntos tengan volumen cero (área en dimensión  $d = 2$  o longitud en dimensión  $d = 1$ ) o, siendo más precisos, medida de Lebesgue nula.

## 2. EL USO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

### 2.1. TESELACIÓN EN UN DOMINIO DE FOURIER

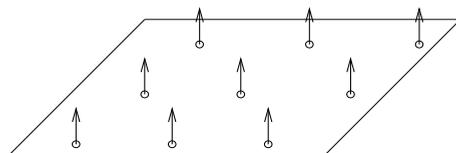
Tras haber aclarado el objeto de nuestro estudio, nos centraremos ahora en explorar la tecnología que conocemos. En este caso nos convendrá definir una teselación a partir de la ecuación

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_{\Omega}(x - \lambda) = 1, \quad (\text{en casi todo punto para } x \in \mathbb{R}^d). \quad (1)$$

¡Ahora tenemos una ecuación!, como exclamaría un físico. Un matemático no debería nunca subestimar el poder de la manipulación formal y de los fenómenos que ésta puede revelar. Así que reescribamos nuestra ecuación (ignorando de momento el conjunto de excepción de medida 0):

$$\chi_{\Omega} * \delta_{\Lambda} = 1. \quad (2)$$

Aquí el operador  $*$  denota la convolución y  $\delta_{\Lambda}$  es la *medida*



$$\delta_{\Lambda} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta_{\lambda},$$

donde  $\delta_{\lambda}$  denota una masa puntual situada en el punto  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ . Recordemos que  $f * \delta_{\lambda}(x) = f(x - \lambda)$ , de modo que la convolución de una función  $f$  con  $\delta_{\lambda}$  sencillamente traslada la función por el vector  $\lambda$ .

El objeto  $\delta_\Lambda$  codifica de manera compacta toda la información contenida en el conjunto de trasladados  $\Lambda$  y facilita así las operaciones algebraicas dentro del conjunto.

Una ecuación como la de (2) invita, sin duda alguna, a ser sometida a la transformada de Fourier, debido a que ésta se comporta muy bien con las convoluciones: la transformada de una convolución es el producto puntual de las transformadas,  $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$ . La definición que utilizaremos de la Transformada de Fourier  $\widehat{f}$  de una función  $f$  es

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx, \quad (\xi \in \mathbb{R}^d, \int_{\mathbb{R}^d} |f| < \infty). \tag{3}$$

Esta definición es suficiente para funciones del tipo  $f = \chi_\Omega$  que son integrables, pero uno necesita definir la transformada de Fourier de una medida mediante dualidad (ver por ejemplo [Ko2] para más detalles). Ignorando dichas sutilezas, si tomamos la transformada de Fourier en ambos lados de la igualdad (2) se obtiene

$$\widehat{\chi_\Omega} \cdot \widehat{\delta_\Lambda} = \delta_0. \tag{4}$$

La medida  $\delta_0$  contiene una única masa puntual en el punto 0. El soporte de ésta, donde la función es «no nula», es precisamente el conjunto  $\{0\}$  y por tanto éste debe ser también el soporte del lado izquierdo en (4). Como se trata de un producto se tiene que, fuera del punto 0, siempre que  $\widehat{\chi_\Omega}$  no se anule  $\widehat{\delta_\Lambda}$  tendrá que ser cero para que la igualdad se cumpla. Esta información queda recogida en la siguiente condición necesaria (y en ocasiones también suficiente) para una teselación:

$$\text{sop } \widehat{\delta_\Lambda} \subseteq \{\widehat{\chi_\Omega} = 0\} \cup \{0\}. \tag{5}$$

Puede encontrarse una prueba formal de (5) en [Ko2]. No discutiremos aquí el caso en el que esta condición es también suficiente, pero debemos señalar que el objeto  $\widehat{\delta_\Lambda}$  no es necesariamente una medida sino una *distribución temperada* [Ru1].

## 2.2. UN PROBLEMA DEL LIBRO ESCOCÉS

Hasta ahora hemos encontrado una buena reformulación del problema, pero, ¿qué ventajas nos puede aportar?

Para seguir con la tradición instaurada en nuestro oficio, generalicemos primero: todo lo dicho hasta ahora se cumple también para (casi) cualquier función arbitraria  $f$  en lugar de  $\chi_\Omega$  (al menos así será para funciones no negativas e integrables). En otras palabras, si uno tiene

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} f(x - \lambda) = \ell = \text{Const.}, \tag{6}$$

para casi todo  $x \in \mathbb{R}^d$ , entonces se sigue que

$$\text{sop } \widehat{\delta_\Lambda} \subseteq \mathcal{Z}(\widehat{f}) \cup \{0\} \quad \text{donde } \mathcal{Z}(\widehat{f}) = \{\widehat{f} = 0\}. \tag{7}$$

De ahora en adelante, cuando se cumpla (6), diremos que  $f$  tesela el espacio con  $\Lambda$  al nivel  $\ell$ .

Apliquemos a continuación nuestra nueva herramienta al Problema No. 181 del famoso *Libro Escocés*<sup>1</sup> [Ma], un problema propuesto por H. Steinhaus que fue resuelto parcialmente por él mismo en 1939.

(in the sense of H. Steinhaus) for every couple  $t_1, t_2 (t_1 \neq t_2)$ ?

**181**  
H. STEINHAUS

FIND A CONTINUOUS function (or perhaps an analytic one)  $f(x)$ , positive and such that one has

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \equiv 1$$

(identically in  $x$  in the interval  $-\infty < x < +\infty$ ); examine whether  $(1/\sqrt{\pi})e^{-x^2}$  is such a function; or else prove the impossibility; or else prove uniqueness.

*Addendum.* The function  $(1/\sqrt{\pi})e^{-x^2}$  does not have the property — this follows from the sign of the second derivative for  $x = 0$  of the expression

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+n)^2}.$$

H. STEINHAUS

En nuestro lenguaje, la cuestión se reduce esencialmente a saber si existe una función  $f$  estrictamente positiva, continua y, a ser posible, analítica que tesele  $\mathbb{R}$  con  $\mathbb{Z}$ .

Quien conozca un poco la transformada de Fourier sabe que  $e^{-x^2}$  tiene la interesante propiedad de que su transformada de Fourier es básicamente ella misma, salvo multiplicación por una constante, y que por tanto no posee ceros. De modo que (7) no podrá cumplirse ya que  $\widehat{\delta_\Lambda}$  no podrá tener soporte fuera del cero y tampoco es una constante. Este argumento no utiliza el hecho de que  $\Lambda = \mathbb{Z}$ , así que  $e^{-x^2}$  no tesela  $\mathbb{R}$  para *ningún* conjunto  $\Lambda$  de trasladados.

También se puede dar una solución analítica al problema de Steinhaus empleando nuestra tecnología. En primer lugar, recordemos que

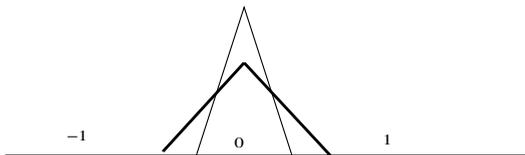
$$\widehat{\delta_{\mathbb{Z}d}} = \delta_{\mathbb{Z}d}. \quad (8)$$

Ésta es la famosa Fórmula de Sumación de Poisson disfrazada [Ru2, Ch. 9],

$$\sum_n f(n) = \sum_n \widehat{f}(n).$$

<sup>1</sup>Colección de problemas que surgió en el famoso Café Escocés de Lwów (entonces en Polonia, ahora Lviv en Ucrania), donde un importante número de matemáticos se reunieron durante años para intercambiar problemas. Estos problemas, y cualquiera de sus soluciones, fueron recopiladas en un cuaderno que fue la base para [Ma].

En este caso, cuando  $\widehat{\delta}_\Lambda$  es una medida, la condición (7) es también suficiente para una teselación [Ko2], de modo que basta con encontrar una función  $f$  cuya transformada de Fourier se anule en  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . La analiticidad de  $f$  está garantizada siempre que  $\widehat{f}$  tenga soporte compacto. Resulta sencillo comprobar que basta con tomar como  $f$  la suma de dos funciones triangulares con bases de longitudes inconmensurables,

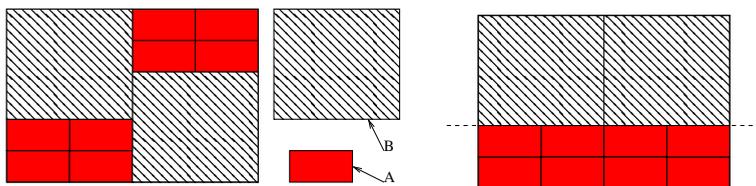


pues la transformada de Fourier de cada uno de esos triángulos es una función no negativa (un núcleo de Fejér) cuyos ceros están situados en múltiplos enteros del recíproco de la longitud de su semibase (la mitad de su base). Dado que los dos núcleos de Fejér no tienen ceros comunes y que ambos son no negativos, su suma será siempre positiva. Como hemos elegido las bases de los triángulos con el propósito de que las funciones tengan soporte en  $(-1, 1)$ , entonces se cumple (7) y tenemos una teselación.

### 2.3. LLENAR UNA CAJA CON DOS TIPOS DE LADRILLOS

Daremos otra aplicación divertida de la transformada de Fourier para problemas de teselaciones: una prueba con análisis de Fourier [Ko3] de un resultado de Bower y Michael [BM]. Supongamos que tenemos dos tipos de ladrillos rectangulares a nuestra disposición, del tipo  $A$  de dimensiones  $a_1 \times a_2$  y del tipo  $B$  de dimensiones  $b_1 \times b_2$  (estamos planteando el problema en dos dimensiones, pero todo funciona igual en cualquier dimensión), y nuestra tarea es teselar una caja rectangular, digamos  $Q = (-1/2, 1/2)^2$ , con copias de los ladrillos  $A$  y  $B$ . Los ladrillos pueden trasladarse pero no rotarse.

Demostremos que esto será posible si y sólo si podemos cortar  $Q$ , a lo largo de la dirección  $x$  o a lo largo de la dirección  $y$ , en dos rectángulos para los que exista una teselación que emplee un único tipo de ladrillos en cada una. Una teselación genérica del tipo mostrado abajo a la izquierda implica la existencia de teselaciones separadas como la que se muestra abajo a la derecha.

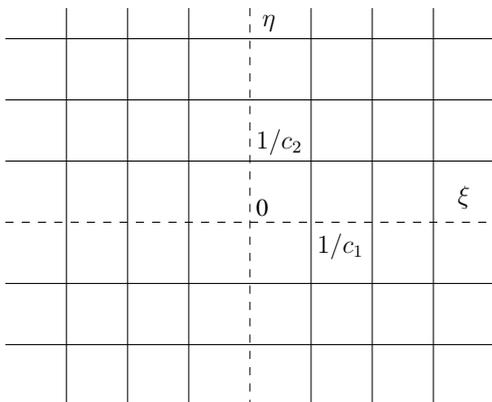


En otras palabras, si en vez de uno tenemos dos tipos de ladrillos a nuestra disposición, el problema de encontrar teselaciones no requiere de más ingenio. Si no puede hacerse de la manera obvia (sin mezclar los dos tipos de ladrillos) entonces no puede hacerse.

Un sencillo cálculo muestra que si  $C = (-\frac{c_1}{2}, \frac{c_1}{2}) \times (-\frac{c_2}{2}, \frac{c_2}{2})$  es una caja de centro  $c_1 \times c_2$  entonces

$$\widehat{\chi}_C(\xi, \eta) = \frac{\text{sen}(\pi c_1 \xi)}{\xi} \cdot \frac{\text{sen}(\pi c_2 \eta)}{\eta},$$

y por tanto  $\widehat{\chi}_C$  se anula en esos puntos, representados abajo como líneas,



donde las coordenadas  $\xi$  o  $\eta$  son múltiplos no nulos de  $1/c_1$  y  $1/c_2$  respectivamente.

Supongamos ahora que encontramos una teselación de  $Q$  que consiste en copias del ladrillo  $A$  trasladadas a lo largo de las posiciones  $T$  y copias del ladrillo  $B$  en las posiciones  $S$ . En otras palabras,

$$\chi_Q(x) = \sum_{t \in T} \chi_A(x - t) + \sum_{s \in S} \chi_B(x - s), \tag{9}$$

que podemos reescribir como

$$\chi_Q = \chi_A * \delta_T + \chi_B * \delta_S,$$

y tomando la transformada de Fourier en ambos lados se tiene

$$\widehat{\chi}_Q(\xi, \eta) = \phi_T(\xi, \eta) \widehat{\chi}_A(\xi, \eta) + \phi_S(\xi, \eta) \widehat{\chi}_B(\xi, \eta), \tag{10}$$

donde  $\phi_T = \widehat{\delta}_T$  y  $\phi_S = \widehat{\delta}_S$  son dos *polinomios trigonométricos*. Como ahora  $Q = (-1/2, 1/2)^2$  tenemos que

$$\mathcal{Z}(\widehat{\chi}_Q) = \{\widehat{\chi}_Q = 0\} = \{(\xi, \eta) : \xi \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ o } \eta \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}. \tag{11}$$

Pero, debido a (10), se tiene que  $\widehat{\chi}_Q$  ha de anularse en los ceros comunes de  $\widehat{\chi}_A$  y  $\widehat{\chi}_B$ , así como en los puntos  $(1/a_1, 1/b_2)$  y  $(1/b_1, 1/a_2)$ , lo cual implica, junto con (11), que

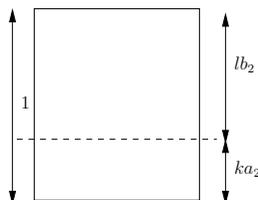
$$(1/a_1 \in \mathbb{Z} \text{ ó } 1/b_2 \in \mathbb{Z}) \text{ y } (1/b_1 \in \mathbb{Z} \text{ ó } 1/a_2 \in \mathbb{Z}). \tag{12}$$

Si (12) se cumple porque  $1/a_1, 1/a_2 \in \mathbb{Z}$ , los ladrillos del tipo  $A$  son suficientes para construir la teselación de  $Q$ . De manera similar, si (12) se satisface con  $1/b_1, 1/b_2 \in \mathbb{Z}$ , el ladrillo  $B$  basta para cubrir  $Q$ .

¿Qué sucede si  $1/a_1, 1/b_1 \in \mathbb{Z}$ ? Dado que hemos asumido en (9) que existe una teselación de  $Q$ , se tiene que existen enteros no negativos  $k, l$  tales que

$$1 = ka_2 + lb_2.$$

Cortemos la caja  $Q$  en la dirección paralela al eje  $x$  a altura  $ka_2$  tal y como se muestra aquí:



Ahora resulta claro que el ladrillo  $A$  puede cubrir la caja inferior (pues  $1/a_1 \in \mathbb{Z}$ ) y el ladrillo  $B$  puede cubrir la caja superior (ya que  $1/b_1 \in \mathbb{Z}$ ). El último caso  $1/a_2, 1/b_2 \in \mathbb{Z}$  se trata de manera similar.

### 3. TESELACIONES DISCRETAS

#### 3.1. TESELACIONES DE LOS ENTEROS Y PERIODICIDAD

A partir de ahora nos centraremos en teselaciones de los enteros. Dado  $A \subseteq \mathbb{Z}$  un conjunto finito y  $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ , diremos que  $A$  tesela  $\mathbb{Z}$  con  $\Lambda$  a nivel  $\ell$  si las copias  $A + \lambda$ , donde  $\lambda \in \Lambda$ , cubren cada entero exactamente  $\ell$  veces. En otras palabras

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_A(x - \lambda) = \ell, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{Z}.$$

Diremos que una teselación es periódica con periodo  $t \in \mathbb{Z}$  si  $\Lambda + t = \Lambda$ . Es un hecho conocido, probado por Newman en [Ne], que todas las teselaciones de enteros a nivel 1 son periódicas. Podemos, además, decir algo sobre la longitud de este periodo.

Supongamos que  $A = \{0 = a_1 < \dots < a_k\}$  es un conjunto finito (podemos trasladar libremente  $A$  sin cambiar por ello la teselación o la periodicidad, de modo que asumiremos que comienza en 0) y  $A + \Lambda = \mathbb{Z}$  es una teselación a nivel 1. Fijado  $x \in \mathbb{Z}$ , denotemos por  $W_x = \{x, x + 1, \dots, x + a_k - 1\}$  a la «ventana» de diámetro  $a_k - 1$  que comienza en  $x$ .

El conjunto  $\Lambda$  va a quedar totalmente determinado por  $\Lambda \cap W_x$ . Veamos primero que determina  $\Lambda$  a la derecha de  $x + a_k - 1$ , y por el mismo argumento se tendrá que determina  $\Lambda$  a la izquierda de  $x$ .

Basta con ser capaces de decidir, a partir de  $\Lambda \cap W_x$ , si  $x + a_k \in \Lambda$  o no. Entonces podremos repetir este proceso para  $x + a_k + 1$  con  $W_{x+1}$  y así sucesivamente. Nótese que, para todo  $\lambda \in \Lambda \cap (-\infty, x)$ , el conjunto  $A + \lambda$  está contenido en  $(-\infty, x + a_k - 1]$ , de modo que ninguna de estas copias puede usarse para cubrir  $x + a_k$ . Es claro que tampoco ninguna copia de la forma  $A + \lambda$  con  $\lambda > x + a_k$  puede emplearse con

tal fin. Podemos concluir que  $x + a_k$  queda cubierto por alguna copia  $A + \lambda$  con  $\lambda \in W_x \cup \{x + a_k\}$ . Examinando el conjunto  $\Lambda \cap W_x$  podemos ver si  $\lambda$  pertenece a  $W_x$  o no. Si está en  $W_x$  entonces  $x + a_k \notin \Lambda$ , ya que esto nos llevaría a que las copias  $A + \lambda$  y  $A + (x + a_k)$  se superponen en  $x + a_k$ . Si no está en  $W_x$  entonces necesariamente  $x + a_k \in \Lambda$ , lo que concluye la prueba de nuestra afirmación.

¿Cuántos posibles valores distintos puede tomar el conjunto  $\Lambda \cap W_x$ ? Resulta evidente que puede tomar como mucho  $2^{a_k}$  valores distintos, pues hay dos posibles elecciones (en  $\Lambda$  o fuera de  $\Lambda$ ) para cada  $x \in W_x$ . Esto significa que hay dos  $x, y \in \{0, 1, \dots, 2^{a_k}\}$  diferentes para los cuales  $\Lambda \cap W_x$  es un trasladado de  $\Lambda \cap W_y$ . Se tiene entonces que  $\Lambda + (y - x) = \Lambda$ . Acabamos de probar que cada teselación tiene un periodo que es como mucho  $2^D$  donde  $D$  es el diámetro de la tesela.

Existe un resultado similar para teselaciones de la línea continua por trasladados de una función [KL, LW, Ko2]. Sin embargo los argumentos combinatorios no parecen ser suficientes en este caso, y para la prueba se precisa hacer uso de la tecnología del análisis de Fourier y de algunos resultados profundos del Análisis Armónico.

### 3.2. TESELACIONES DEL GRUPO CÍCLICO

El hecho de que una teselación de los enteros sea periódica nos permite verla como una teselación de una estructura más pequeña, un grupo cíclico. Es más, asumamos que la teselación  $A + \Lambda = \mathbb{Z}$  tiene periodo  $n$ ; es decir,  $\Lambda + n = \Lambda$ . Definamos el conjunto

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda \text{ mód } n \subseteq \{0, 1, \dots, n - 1\}$$

que se tiene al tomar para cada  $\lambda \in \Lambda$  su clase residual mód  $n$ . De la  $n$ -periodicidad de  $\Lambda$  se sigue que  $\Lambda = \tilde{\Lambda} + n\mathbb{Z}$  (que es nuevamente una teselación o una *suma directa*: cada elemento de  $\Lambda$  puede escribirse de manera única como un elemento de  $\tilde{\Lambda}$  más un elemento de  $n\mathbb{Z}$ ). De modo que

$$\mathbb{Z} = A + \Lambda = A + \tilde{\Lambda} + n\mathbb{Z},$$

donde todas las sumas anteriores son sumas directas. Al tomar cocientes obtenemos que el grupo cíclico  $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$  puede escribirse como una suma directa (teselación)

$$\mathbb{Z}_n = A + \tilde{\Lambda}. \tag{13}$$

En este caso es obvio que  $n = |A| \cdot |\tilde{\Lambda}|$ .

Haremos un alto en el camino para hacer dos observaciones sobre periodicidad. La primera es que las teselaciones del grupo cíclico  $\mathbb{Z}_n$  también pueden ser periódicas. De hecho, asumamos que  $\mathbb{Z}_n = A + \tilde{\Lambda}$  y que existe un  $k \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$  tal que  $A$  es periódico con periodo  $k$ ; es decir,  $A + k = A$ . Entonces podemos reducir el conjunto  $A$  módulo  $k$ ,  $\tilde{A} = A \text{ mód } k \subseteq \{0, 1, \dots, k - 1\}$ , y concluir, como hemos hecho antes, que  $\mathbb{Z}_k = \tilde{A} + \tilde{\Lambda}$ . Por tanto las teselaciones de  $\mathbb{Z}_n$  pueden entenderse como teselaciones de un grupo más pequeño  $\mathbb{Z}_k$  (es claro que en este caso  $k$  divide a  $n$ ). Resulta natural preguntarse si existen grupos cíclicos  $\mathbb{Z}_n$  que *sólo* admitan teselaciones periódicas; es decir, que cuando  $\mathbb{Z}_n = A + \tilde{\Lambda}$ , entonces  $A$  o bien  $\tilde{\Lambda}$  *debe* ser periódico. Éstos fueron llamados grupos «buenos» por Hajós [Ha] (esta noción sigue teniendo sentido

si consideramos un contexto más general, el de los grupos abelianos finitos, y no sólo en el de los grupos cíclicos). Resulta que existen grupos que tienen esta propiedad. Sands de hecho logró completar su clasificación en [Sa1, Sa2]: los únicos grupos cíclicos buenos son  $\mathbb{Z}_n$  cuando  $n$  divide a  $pqr$ ,  $p^2qr$ ,  $p^2q^2$  o  $p^mq$ , donde  $p, q, r, s$  son primos distintos. El grupo cíclico de orden más pequeño que no es bueno es  $\mathbb{Z}_{72}$ .

La otra observación se refiere a la conexión existente entre teselaciones de grupos cíclicos y la *composición musical*. Como explicamos anteriormente, las teselaciones periódicas de  $\mathbb{Z}_n$  son, matemáticamente hablando, menos interesantes, ya que pueden verse como teselaciones de algún grupo más pequeño  $\mathbb{Z}_k$ . Resulta que las teselaciones aperiódicas de un grupo cíclico  $\mathbb{Z}_n$  son también más interesantes desde un punto de vista *estético*. Dentro de la comunidad musical, éstas se conocen como *canons de Vuza*. La interacción entre la teoría matemática y la musical ha sido bastante intensa en los últimos años [AAA, Am, An1, Fri1, Vu]. La búsqueda de todas las teselaciones aperiódicas de  $\mathbb{Z}_n$  ha estado motivada por las composiciones de la música contemporánea. Por supuesto, el problema sólo tiene sentido si  $\mathbb{Z}_n$  no es un grupo bueno (de no ser así todas sus teselaciones serían periódicas). Friperntinger [Fri2] logró realizar esta tarea para  $n = 72$  y  $108$ , mientras que los autores [KM1] dieron un algoritmo eficiente para resolver el caso  $n = 144$  (el algoritmo probablemente funcione para otros valores como  $n = 120, 180, 200$  o  $216$ , sin embargo para números mayores la tarea parece poco prometedora).

Volvamos al análisis de las teselaciones de los grupos cíclicos  $\mathbb{Z}_n$ . La condición de Fourier (5) para teselaciones tiene exactamente la misma forma en este caso, y su demostración es mucho más sencilla pues no requiere de las sutilezas del análisis (no se emplean integrales, únicamente sumas finitas). La Transformada de Fourier de una función  $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$  se define como la función  $\hat{f} : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\hat{f}(k) = \sum_{j=0}^{n-1} f(j)\zeta_n^{-kj},$$

donde  $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$  es una raíz  $n$ -ésima primitiva de la unidad.

En el caso finito, los roles de la tesela  $A$  y del conjunto de traslaciones  $\tilde{\Lambda}$  en (13) pueden intercambiarse, pudiendo así adoptar una notación más simétrica

$$\mathbb{Z}_n = A + B,$$

en la cual  $A, B \subseteq \mathbb{Z}_n$  son dos conjuntos que satisfacen  $|A| \cdot |B| = n$  y tales que cada elemento de  $\mathbb{Z}_n$  puede escribirse de manera única como una suma de un elemento de  $A$  y un elemento de  $B$ . La condición de Fourier toma la forma

$$\mathbb{Z}_n = \{0\} \cup \mathcal{Z}(\widehat{\chi}_A) \cup \mathcal{Z}(\widehat{\chi}_B). \tag{14}$$

Tal y como vimos en la sección 3.1 toda teselación de  $\mathbb{Z}$  tiene un periodo que es a lo sumo  $2^D$ , donde  $D$  es el diámetro de la tesela. Veremos en esta sección cómo el sencillo argumento combinatorio de la sección 3.1 puede reemplazarse por un argumento que tiene como punto de partida la condición de Fourier (14), emplea

algunos resultados conocidos en teoría de números (propiedades sobre polinomios ciclotómicos), y aporta resultados mucho mejores. En busca de la mayor claridad, describiremos el resultado probado en [Ko4], y también por I. Ruzsa en un apéndice en [Ti], aunque no sea éste el mejor resultado conocido [Bi].

Supongamos entonces que  $A \subseteq \{0, 1, \dots, D\}$  es un conjunto de enteros de diámetro  $\leq D$  y que  $A$  tesela  $\mathbb{Z}$  con periodo  $M$ . Esto implica que  $A$  (para ser precisos,  $A$  reducido mód  $M$ ) tesela el grupo cíclico  $\mathbb{Z}_M$ ,

$$\mathbb{Z}_M = A + B.$$

Asumamos que  $M$  es el periodo más pequeño. Entonces se tiene que si  $g \in \mathbb{Z}_M$  cumple  $B = B + g$  entonces  $g = 0$ . En caso contrario la teselación original sería periódica con periodo  $g$ .

Ahora utilizaremos la transformada de Fourier sin ni siquiera mencionarla. Para ello usaremos la terminología polinomial. Sean

$$A(x) = \sum_{a \in A} x^a, \quad B(x) = \sum_{b \in B} x^b$$

polinomios definidos por  $A$  y  $B$ . Resulta muy sencillo comprobar que la condición de teselación  $\mathbb{Z}_M = A + B$  equivale a

$$A(x)B(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{M-1} \text{ mód } x^M - 1,$$

o, en otras palabras, que

$$x^M - 1 \text{ divide a } A(x)B(x) - \frac{x^M - 1}{x - 1}, \quad (15)$$

lo cual implica que todas las raíces  $M$ -ésimas de la unidad, salvo 1, son raíces del producto  $A(x)B(x)$ . Esta última afirmación es el equivalente de (14) en el lenguaje algebraico.

Las raíces  $M$ -ésimas de la unidad  $\zeta_M^j = e^{2\pi ij/M}$ ,  $j = 0, 1, \dots, M - 1$ , están agrupadas en *clases ciclotómicas*. Dos raíces  $\zeta_M^j, \zeta_M^k$  pertenecen a la misma clase ciclotómica si y sólo si *el máximo común divisor* de  $(j, M)$  coincide con el de  $(k, M)$ . Si una raíz de la unidad en una cierta clase ciclotómica es raíz de un polinomio con coeficientes enteros o racionales, entonces el resto de sus raíces pertenecen a la misma clase ciclotómica. Si  $d$  es un entero positivo, entonces el polinomio ciclotómico  $d$ -ésimo es el polinomio mónico que tiene como raíces a todas las  $d$ -ésimas raíces primitivas de la unidad,

$$\Phi_d(x) = \prod_{1 \leq j < d, (j, d) = 1} (x - e^{2\pi ij/d}).$$

Es claro que  $\deg \Phi_d(x) = \phi(d)$  (función de Euler) y podemos emplear la estimación [HW, p. 267]

$$C \frac{d}{\log \log d} \leq \phi(d) \leq d, \quad (16)$$

que se cumple para alguna constante  $C$  y todo  $d$  suficientemente grande. Resulta que cada  $\Phi_d$  es un polinomio irreducible con coeficientes enteros y que

$$x^M - 1 = \prod_{d \text{ divide a } M} \Phi_d(x).$$

Esto, junto con (15), implica que si  $d > 1$  es un divisor de  $M$  entonces  $\Phi_d(x)$  divide al producto  $A(x)B(x)$ .

Consideremos ahora  $\Phi_{s_1}(x), \dots, \Phi_{s_k}(x)$ , todos los polinomios ciclotómicos  $\Phi_s(x)$  con  $s > 1$  que dividen a  $A(x)$ , escritos cada uno *una vez* y numerados de modo que  $1 < s_1 < s_2 < \dots < s_k$ . Dado que  $\deg \Phi_s = \phi(s)$  se sigue que

$$\phi(s_1) + \dots + \phi(s_k) \leq \deg A(x) \leq D. \tag{17}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k s_i &\leq C \sum_{i=1}^k \phi(s_i) \log \log s_i \quad (\text{por (16)}) \\ &\leq C \sum_{i=1}^k \phi(s_i) \log \log D \\ &\leq CD \log \log D \quad (\text{por (17)}). \end{aligned}$$

A partir de esta desigualdad, usando que los  $s_i$  son enteros *distintos*, se sigue que

$$k \leq C' \sqrt{D \log \log D}, \tag{18}$$

ya que el peor caso tiene lugar cuando los  $s_j$  son  $k$  enteros consecutivos y en este caso su suma es  $> k^2/2$ .

Para el valor  $t = \prod_{i=1}^k s_i$  ocurre que todos los polinomios ciclotómicos que dividan a  $A(x)$  serán también divisores de  $x^t - 1$ . De aquí se sigue que

$$x^M - 1 \text{ divide a } (x^t - 1)B(x)$$

y esto significa precisamente que  $B$  tiene periodo  $t$ , y por tanto que  $t \geq M$ , pues asumimos que  $M$  era minimal. De (18) y de la cota  $s_i = O(D^2)$  se obtiene la siguiente cota para el último periodo  $M$ :

$$M \leq t \leq \exp \left( C \sqrt{D} \log D \sqrt{\log \log D} \right) \tag{19}$$

para una constante  $C$  apropiada. Ésta es una cota mucho mejor, en términos de dependencia en  $D$ , que la cota  $M \leq 2^D$  que habíamos obtenido con argumentos puramente combinatorios.

## 3.3. PERIODICIDAD EN DOS DIMENSIONES Y COMPUTABILIDAD

En contraste con el caso unidimensional, donde toda teselación con un subconjunto finito de  $\mathbb{Z}$  es periódica, en  $\mathbb{Z}^2$  sí que existen teselaciones no periódicas. Sin embargo, uno ha de ser cuidadoso con la periodicidad en dimensiones mayores que 1. A partir de ahora diremos que un conjunto  $A \subseteq \mathbb{Z}^d$  es periódico siempre que exista un retículo completo de periodos; es decir, si existen  $d$  vectores linealmente independientes  $u_1, \dots, u_d$  que son periodos del conjunto,

$$A + u_1 = A + u_2 = \dots = A + u_d = A.$$

Si esto sucede, toda combinación lineal de los  $u_j$  será también un periodo o, en otras palabras, el conjunto  $A$  tiene un retículo completo de periodos

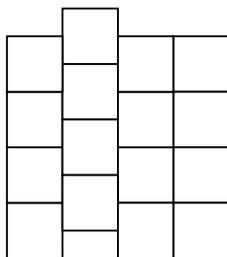
$$\Lambda = \text{span}_{\mathbb{Z}} \{u_1, u_2, \dots, u_d\}.$$

Es decir, en dimensión 2 un conjunto puede tener un periodo en una dirección y sin embargo no tener dos periodos linealmente independientes. A este tipo de conjunto no lo llamaremos periódico. Un ejemplo de lo que acabamos de describir sería el conjunto  $\mathbb{Z} \times \{0\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ . Pero también es sencillo construir un ejemplo de una teselación de  $\mathbb{Z}^2$  con un subconjunto finito no periódico.

Basta tomar  $A$  una tesela cuadrada, por ejemplo el conjunto

$$\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\},$$

y perturbar la teselación usual moviendo una columna una unidad hacia arriba, como en la siguiente figura:



Este cambio destruye el periodo  $(2, 0)$  de la teselación a través del eje  $x$ , pero deja el periodo  $(0, 2)$ , a lo largo del eje  $y$ , intacto.

No es completamente obvio cómo construir una teselación de  $\mathbb{Z}^2$  que no tenga ningún tipo de periodo, aunque sí es posible. A continuación describiremos brevemente cómo hacerlo. La idea clave es comenzar otra vez con la teselación usual a partir del cuadrado y hacer transformaciones sobre ella que destruyan todos los periodos (no sólo los periodos a lo largo de los ejes). La mejor manera de hacerlo es intercambiar simultáneamente una columna vertical y otra horizontal. Esto no puede hacerse con la teselación cuadrada que pusimos como ejemplo antes (un simple experimento basta para convencerse de este hecho). Sin embargo sí puede hacerse si

«intercalamos» cuatro teselaciones del tipo anterior. Definamos nuestra tesela como el conjunto

$$A = \{(0, 0), (2, 0), (0, 2), (2, 2)\}$$

que es precisamente la tesela anterior dilatada por un factor dos. Ahora teselamos  $(2\mathbb{Z})^2$  usando  $A$  en la manera usual, trasladando  $A$  a las posiciones  $(4\mathbb{Z})^2$ . Con esta teselación uno puede obtener una teselación de  $\mathbb{Z}^2$  por medio de teselar los cuatro conjuntos o coclases del subgrupo  $(2\mathbb{Z})^2$  en  $\mathbb{Z}^2$ ,

$$(2\mathbb{Z})^2, (2\mathbb{Z})^2 + (1, 0), (2\mathbb{Z})^2 + (0, 1), (2\mathbb{Z})^2 + (1, 1),$$

exactamente de la misma manera. Aunque una manera más astuta de hacerlo es emplear la teselación usual para las dos primeras coclases, teselar  $(2\mathbb{Z})^2 + (0, 1)$  con una teselación como la de la figura antes mostrada (que destruye los periodos horizontales) y por último teselar  $(2\mathbb{Z})^2 + (1, 1)$  con una teselación similar que destruya los periodos verticales. La teselación resultante no tiene ningún periodo vectorial.

Tras establecer que en dos dimensiones existen teselaciones sin ningún periodo, debemos recalcar que se trata de una cuestión completamente distinta el preguntarse sobre la existencia de *teselas* aperiódicas; es decir, teselas que sólo puedan producir teselaciones sin periodos. De hecho la solución a esta cuestión no se conoce si nos restringimos a teselaciones por traslación.

**CONJETURA** (Lagarias y Wang, [LW]). *Si un subconjunto finito  $A \subseteq \mathbb{Z}^2$  puede teselar  $\mathbb{Z}^2$  por traslaciones entonces también lo puede hacer de manera periódica.*

Si se permite más libertad de movimientos que las meras traslaciones, entonces sí que se conocen teselas (o conjuntos de teselas) que sólo lo hacen de forma aperiódica. De modo que, de ser cierta la conjetura anterior, significaría que restringir los movimientos permitidos a traslaciones supone una gran diferencia a este respecto.

Puede probarse, al menos en dimensión 2 [RX], que si un conjunto admite una teselación con un único periodo entonces también admite una teselación periódica en dos direcciones independientes.

La propiedad de periodicidad es de gran importancia en cuanto a computabilidad se refiere. Estamos interesados en saber si existe algún algoritmo para ordenador (una máquina de Turing para los puristas) que, dado un subconjunto finito  $A$  de  $\mathbb{Z}^2$ , decidiese en tiempo finito si existe o no una teselación con  $A$ ; es decir, si existe  $B \subseteq \mathbb{Z}^2$  de tal manera que  $A + B = \mathbb{Z}^2$  sea una teselación.

No le pediremos a nuestro algoritmo que:

- sea rápido (tan sólo que termine en tiempo finito),
- ni que encuentre dicha teselación complementaria  $B$ , si es que ésta existe.

Nótese, en referencia al segundo punto, que no tendría sentido querer conocer  $B$ , pues éste puede ser un objeto infinito y, a priori, no hay razones para pensar que sería posible describirlo de ninguna manera finita.

Sería sencillo dar un algoritmo que respondiese NO siempre que  $A$  no admita una teselación, pero éste no se detendría si  $A$  admitiese una teselación. Para cada  $n = 1, 2, \dots$  decidiría, probando todas las posibilidades, si existe un conjunto  $B$  tal

que  $A + B$  cubra el cuadrado (discreto)  $Q_n = [-n, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2$  sin superposición de tesela alguna. Existe un número finito de conjuntos  $B$  con los que probar, pues no importa si  $B$  se encuentra o no alejado de  $Q_n$ . Si dicho  $B$  existe continuaríamos con el siguiente  $n$ . Si no, entonces  $A$  no podría admitir ninguna teselación y por tanto nos detendríamos. La corrección de este algoritmo (el hecho de que el algoritmo se detendrá para cualquier  $A$  que no tesele el espacio) se sigue de un simple argumento diagonal: si un conjunto finito  $A$  puede cubrir cada  $Q_n$  sin superposiciones entonces también podrá teselar  $\mathbb{Z}^2$ . Invitamos al lector a que piense acerca de por qué es así.

La dificultad reside en buscar un algoritmo que siempre se detenga y diga SÍ cuando  $A$  admita una teselación y NO en caso contrario. En muchas otras situaciones, dentro del contexto de las teselaciones, dicho algoritmo no existe. De hecho [Go] no existe algoritmo alguno que, dada una colección finita de subconjuntos de  $\mathbb{Z}^2$ , decida si éstos pueden o no teselar el plano por traslación. Este hecho continúa siendo cierto incluso si el número de subconjuntos está acotado.

La conexión entre esta cuestión y la de la periodicidad [Ro] reside en que la conjetura anterior sobre teselaciones periódicas implica deducibilidad.

Es más, asumamos que cualquier conjunto que tesele puede hacerlo también periódicamente (nótese que no estamos haciendo suposiciones acerca del tamaño de los periodos o su dependencia en la tesela) y bastaría con decidir si un conjunto  $A$  admite o no teselaciones periódicas.

Supongamos que  $A \subseteq [0, D]^2$ . Para  $n = 1, 2, \dots$  claramente podemos encontrar todos los subconjuntos  $B$  de  $[-n - 2D, n + 2D]^2$  para los que  $A + B$  sea un recubrimiento sin solapamientos de  $Q_n = [-n, n]^2$ . Podemos hacerlo de manera lenta, pero segura, probando con todos los conjuntos posibles. Si no encontrásemos ninguno entonces nuestro conjunto no admitiría teselaciones, diríamos NO y terminaríamos el proceso. Si encontrásemos alguno entonces habríamos de buscar entre todos los posibles conjuntos  $B$  uno que pudiese «extenderse periódicamente». ¿Qué apariencia tendría dicho conjunto?

Si un conjunto infinito  $\tilde{B} \subseteq \mathbb{Z}^2$  es periódico con vectores de periodo  $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}^2$  linealmente independientes, siempre podemos encontrar dos vectores

$$\tilde{u}_1 = (a, 0), \quad \tilde{u}_2 = (0, b), \quad a, b \in \{1, 2, 3, \dots\},$$

que también sean periodos (en otras palabras, todo retículo en  $\mathbb{Z}^2$  contiene un subretículo generado por dos vectores en los ejes  $x$  e  $y$ ). La aplicación

$$(x, y) \mapsto (x \bmod a, y \bmod b)$$

lleva  $\tilde{B}$  a un conjunto

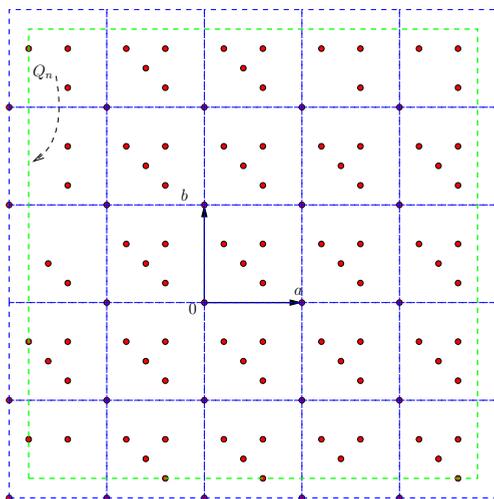
$$B' \subseteq \{0, 1, \dots, a-1\} \times \{0, 1, \dots, b-1\},$$

y la periodicidad de  $\tilde{B}$  se traduce en que

$$\tilde{B} = (a\mathbb{Z}) \times (b\mathbb{Z}) + B'$$

es una suma directa, es decir, todo elemento de  $\tilde{B}$  puede expresarse de manera única como una suma  $(am, bn) + b'$ , donde  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $b' \in B'$ .

Supongamos ahora que nuestro algoritmo se centra en un conjunto  $B$  que es parte finita de un conjunto periódico  $\tilde{B}$ . Esta parte finita de  $\tilde{B}$  se obtiene al quedarnos con aquellos elementos de  $\tilde{B}$  que se emplean en el recubrimiento de  $Q_n$  (limitado por la línea punteada interior). Si  $n$  es suficientemente grande entonces el conjunto  $B$  será algo parecido a esto:



El conjunto  $B$  contendrá entonces bastantes «periodos completos» (el rectángulo  $a \times b$ )  $\tilde{B}$  más unos pocos periodos incompletos cerca del borde de  $Q_n$ . Supongamos ahora que tenemos un bloque  $k \times k$  de periodos completos en el conjunto  $B$  y que  $k$  es suficientemente grande como para que tanto  $ka$  como  $kb$  sean mayores que el diámetro de  $A$ , digamos mayores que  $10D$ . Entonces podemos simplemente extender este bloque periódicamente (con periodos  $(a, 0)$  y  $(0, b)$ ) y obtener así una teselación periódica complementaria de  $A$ . La razón es que (a) de esta manera no hay solapamientos o hubieran aparecido ya en el bloque  $k \times k$ , y (b) tenemos un recubrimiento de todo ya que, claramente, el bloque  $k \times k$  es suficiente para cubrir el cuadrado de lado  $5D$  con el mismo centro.

De modo que nuestro algoritmo, tarde o temprano, descubrirá que  $A$  no admite una teselación (ya que no podrá teselar una región finita), o bien descubrirá que  $A$  da lugar a una teselación para una región grande con una teselación complementaria que se parece a la de la figura anterior y que por tanto podrá extenderse periódicamente a una teselación completa de  $\mathbb{Z}^2$ . Esto quiere decir que nuestro algoritmo siempre parará y obtendremos un SI o un NO correctos. Hay que recordar, sin embargo, que no hemos impuesto ninguna cota para el tiempo de ejecución del algoritmo.

#### 4. TESELACIONES, CONJUNTOS ESPECTRALES Y MATRICES COMPLEJAS DE HADAMARD

En esta última sección introducimos la noción de conjunto espectral y describimos cómo estos conjuntos están relacionados con las teselaciones y las matrices complejas

de Hadamard. Por simplicidad nos restringiremos al estudio de estas cuestiones en grupos finitos, en particular en grupos cíclicos  $\mathbb{Z}_n$  y sus potencias  $\mathbb{Z}_n^d$ .

Aunque hayamos visto en las secciones anteriores que muchos problemas fundamentales sobre teselaciones por traslación siguen abiertos, el lector estará de acuerdo con nosotros en que la noción de teselación es muy intuitiva y está al alcance de todos. Por el contrario, la definición de conjunto espectral resulta mucho más abstracta. Para hacerla más cercana no utilizaremos la definición estándar, sino que primero introduciremos las matrices complejas de Hadamard y a través de ellas, los conjuntos espectrales.

¿Qué son las matrices de Hadamard? En la bibliografía clásica, se definen como matrices cuadradas con entradas  $\pm 1$  tales que sus filas (y por tanto también sus columnas) son ortogonales entre sí. Las matrices complejas de Hadamard son la generalización natural de este concepto. Una matriz  $H$  de dimensión  $k \times k$  es una matriz compleja de Hadamard si sus entradas son números complejos de módulo 1, y sus filas (y por tanto sus columnas) son ortogonales dos a dos. Recordemos aquí que la ortogonalidad en este caso se entiende con respecto al producto escalar *complejo*:  $(z_1, \dots, z_k) \cdot (u_1, \dots, u_k) = \sum_{j=1}^k \bar{z}_j u_j$ .

Es bien sabido que una matriz de Hadamard  $k \times k$  real sólo puede existir si  $k$  es divisible por 4. Por el contrario, no existen restricciones en la dimensión para matrices complejas de Hadamard. De hecho la *matriz de Fourier*  $F_k$  definida como

$$F_k := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \zeta_k & \zeta_k^2 & \cdot & \cdot & \zeta_k^{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_k^{jm} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \zeta_k^{k-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_k \end{bmatrix},$$

donde  $\zeta_k = e^{2\pi i/k}$ , es una matriz compleja de Hadamard de orden  $k$ .

Cada elemento  $h_{j,m}$  de una matriz compleja  $k \times k$  de Hadamard  $H$  es de la forma  $e^{2i\pi\rho_{j,m}}$  donde  $\rho_{j,m} \in [0, 1)$ . Llamaremos a la matriz  $k \times k$  real  $R$  formada por los ángulos  $\rho_{j,m}$ , el *logaritmo* (por entradas) de  $H$ . Denotaremos a esta matriz como  $R = \frac{1}{2i\pi} \text{LOG}(H)$  o  $H = \text{EXP}(2i\pi R)$  (nótese que ambas operaciones se realizan término a término). Si una matriz real  $R$  cumple que  $\text{EXP}(2i\pi R)$  es una matriz compleja de Hadamard entonces diremos que  $R$  es una matriz *log-Hadamard*.

Las matrices complejas de Hadamard juegan un papel importante en la teoría cuántica de la información, en particular en la construcción de esquemas de teleportación y código denso [Wer]. Un catálogo online de todas las familias conocidas de matrices complejas de Hadamard puede encontrarse en [BTZ].

Centrémonos ahora en la definición de conjuntos espectrales. Identificamos elementos de  $\mathbb{Z}_n^d$  con vectores columna donde cada coordenada está en el rango

$$\{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Por tanto, todo subconjunto  $S \subset \mathbb{Z}_n^d$  con  $r$  elementos puede identificarse con una matriz  $d \times r$  cuyas columnas serán los elementos de  $S$  (el orden de los elementos

no importa). Por abuso de notación denotaremos a dicha matriz por  $S$ . También identificaremos  $\widehat{\mathbb{Z}}_n^d$  con vectores fila cuyas coordenadas están en  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ . Utilizaremos la notación  $\widehat{\mathbb{Z}}_n^d = \mathbb{Z}_n^{d\top}$  (donde  $\top$  denota transposición). Dos conjuntos  $S \subset \mathbb{Z}_n^d$  y  $Q \subset \mathbb{Z}_n^{d\top}$ , ambos con  $r$  elementos, se llaman *par espectral* si la matriz  $\frac{1}{n}QS$  es una matriz  $r \times r$  log-Hadamard. En este caso se dice que  $Q$  es el *espectro* de  $S$ , y  $S$  es el *conjunto espectral*. Observamos que  $S^\top Q^\top = (QS)^\top$  (donde  $S^\top$  y  $Q^\top$  denotan las matrices traspuestas) es automáticamente una matriz log-Hadamard y por tanto  $S$  es un espectro de  $Q$ , lo que justifica la simetría del término «par espectral».

Por ejemplo, el grupo  $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$  es un conjunto espectral y su espectro es precisamente su grupo dual  $\mathbb{Z}_n^\top$ , de modo que el logaritmo de la matriz de Fourier es  $\frac{1}{2i\pi} \text{LOG}(F_n) = \frac{1}{n} \mathbb{Z}_n^\top \mathbb{Z}_n$ . Un ejemplo menos trivial es el conjunto  $S = \{0, 1, 2\}$  en  $\mathbb{Z}_6$ . El logaritmo  $Q = \{0, 2, 4\}^\top$  es un espectro de  $S$  y  $\frac{1}{6}QS = \frac{1}{2i\pi} \text{LOG}(F_3)$ , el logaritmo de la matriz  $3 \times 3$  de Fourier.

Ya vimos que la teselación  $\mathbb{Z}_n = A + B$  viene caracterizada por  $|A| \cdot |B| = n$  y por la condición de Fourier  $\mathbb{Z}_n = \{0\} \cup \mathcal{Z}(\widehat{\chi}_A) \cup \mathcal{Z}(\widehat{\chi}_B)$  en la ecuación (14). De hecho se puede ver que los conjuntos espectrales también admiten una caracterización a partir del análisis de Fourier: utilizando la definición anterior se tiene que  $S \subset \mathbb{Z}_n^d$  con  $|S| = r$  es espectral si y sólo si existe  $Q \subset \mathbb{Z}_n^{d\top}$  tal que  $|Q| = r$  y

$$q_j - q_k \in \mathcal{Z}(\widehat{\chi}_S) \tag{20}$$

para cada  $q_j \neq q_k \in Q$ . En otras palabras: la  $j$ -ésima y  $k$ -ésima fila de la matriz  $\text{EXP}(\frac{2i\pi}{n}QS)$  han de ser ortogonales.

¿Qué relación existe entre teselaciones y conjuntos espectrales? Nótese que las condiciones de ortogonalidad de la matriz implican que  $U = \frac{1}{\sqrt{r}} \text{EXP}(\frac{2i\pi}{n}QS)$  ha de ser una matriz unitaria. Así se deduce el siguiente resultado (para una prueba formal, ver [KM2]):

$$\sum_{q \in Q} |\widehat{\chi}_S|^2(x - q) = |S|^2 = r^2 \tag{21}$$

para todo  $x \in \mathbb{Z}_n^{d\top}$ . En otras palabras: la función  $|\widehat{\chi}_S|^2$  tesela  $\widehat{\mathbb{Z}}_n^d$  a nivel  $|S|^2$  cuando es trasladada por  $Q$ . De otra manera, el conjunto  $Q$  tesela el grupo  $\widehat{\mathbb{Z}}_n^d$  con las *traslaciones con pesos* definidas por la función no negativa

$$\frac{1}{|S|^2} |\widehat{\chi}_S|^2.$$

La siguiente pregunta surge de manera natural: ¿tesela  $Q$  el conjunto  $\widehat{\mathbb{Z}}_n^d$  en el sentido ordinario?; es decir, ¿existe algún conjunto  $P \subset \widehat{\mathbb{Z}}_n^d$  tal que  $Q + P = \widehat{\mathbb{Z}}_n^d$ ? Una famosa conjetura de Fuglede [Fu] se ocupa precisamente de este escenario: establece que un conjunto  $S$  es espectral si y sólo si tesela el grupo (la conjetura fue enunciada originalmente en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^d$  pero tiene sentido en cualquier grupo abeliano).

Se habían demostrado bastantes resultados parciales de la conjetura de Fuglede para casos especiales (ver por ejemplo [IKT1, IKT2, Ko5, La]) antes de que T. Tao

[Tao] encontrase un ejemplo de un conjunto espectral en  $\mathbb{R}^5$  que no tesela el espacio. El ejemplo de Tao se basaba en consideraciones sobre el grupo finito  $\mathbb{Z}_3^5$ . También implica la existencia de tales conjuntos en cualquier dimensión  $d \geq 5$ . Posteriormente los autores han encontrado contraejemplos en dimensiones menores (4 y 3, respectivamente) [Ma, KM3]. Todos estos ejemplos se basan en consideraciones sobre grupos finitos  $\mathbb{Z}_n^d$  y, por último, en la existencia de ciertas matrices complejas de Hadamard.

La otra dirección de la conjetura de Fuglede no pudo ser establecida con los argumentos dados por Tao. Pero finalmente se pudo construir una tesela no espectral en  $\mathbb{R}^5$  [KM2]. Ésta hace uso de un delicado argumento de dualidad y se basa, como en los otros casos, en consideraciones sobre grupos finitos. Posteriormente se han encontrado contraejemplos en dimensiones 4 y 3, ver [FR, FMM]. La conjetura permanece abierta en ambas direcciones para dimensiones 1 y 2.

Como observación final hemos de mencionar otra conexión interesante entre teselaciones y matrices complejas de Hadamard. Tal y como hemos discutido anteriormente, la conjetura de Fuglede no es cierta en general, pero sí lo es en muchos casos particulares. Hemos visto que los conjuntos espectrales están directamente relacionados con las matrices complejas de Hadamard y que estas últimas son muy útiles en otra rama de las matemáticas: la teoría cuántica de la información. ¿Podríamos utilizar la conexión entre teselaciones y conjuntos espectrales (que existe en muchos casos concretos) para construir nuevas familias de matrices complejas de Hadamard? Resulta que la respuesta es afirmativa. Se sabe [MRS] que las teselaciones «triviales» dan lugar a familias de matrices complejas de Hadamard bien conocidas (también llamadas familias de Dita). Sin embargo, una teselación no estándar de Szabó [Sz] se utilizó en [MRS] para producir nuevas familias de matrices complejas de Hadamard en dimensiones 8, 12 y 16 (antes desconocidas).

## REFERENCIAS

- [AAA] C. AGON, E. AMIOT Y M. ANDREATTA, Tiling problems in music composition: Theory and Implementation, *International Computer Music Conference* (2002).
- [Am] E. AMIOT, Why rhythmic Canons are interesting, *Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory, EpOs* (2004), 194–213.
- [An1] M. ANDREATTA, On Group-Theoretical Methods Applied to Music: Some Compositional and Implementational Aspects, *Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory, EpOs* (2004).
- [Bi] A. BIRÓ, Divisibility of integer polynomials and tilings of the integers, *Acta Arithmetica* **118** (2005), 117–127.
- [BM] R.J. BOWER Y T.S. MICHAEL, When can you tile a box with translates of two given rectangular bricks, *Electr. J. Combin.* **11** (2004), no. 7, 1–9.
- [BTZ] W. BRUZDA, W. TADEJ Y K. ZYCZKOWSKI, When can you tile a box with translates of two given rectangular bricks, *Página web de las matrices complejas de Hadamard*: <http://chaos.if.uj.edu.pl/~karol/hadamard/>.

- [FMM] B. FARKAS, M. MATOLCSI Y P. MÓRA, On Fuglede's conjecture and the existence of universal spectra, *J. Fourier Anal. Appl.* **12** (2006), 483–494.
- [FR] B. FARKAS Y SZ. RÉVÉSZ, Tiles with no spectra in dimension 4, *Math. Scand.* **98** (2006), no. 1, 44–45.
- [Fri1] H. FRIPERTINGER, Tiling Problems in Music Theory, *Perspectives in mathematical and computational music theory* (2004).
- [Fri2] H. FRIPERTINGER, Classification of rhythmical canons, <http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/frib/canons/canon.html>.
- [Fu] B. FUGLEDE, Commuting self-adjoint partial differential operators and a group theoretic problem, *J. Funct. Anal.* **16** (1974), 101–121.
- [Go] S.W. GOLOMB, Tiling with sets of polyominoes, *Journal of Combinatorial Theory* **9** (1970), no. 1, 60–71.
- [GBS] B. GRÜNBAUM Y G.C. SHEPHARD, *Tilings and patterns*, W. H. Freeman & Co, New York, 1987.
- [Ha] G. HAJÓS, Sur la factorization des groupes abéliens, *Casopis Pest. Mat. Fys.* **74** (1950), 157–162.
- [HW] G.H. HARDY Y E.M. WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979.
- [IKT1] A. IOSEVICH, M. KATZ Y T. TAO, Convex bodies with a point of curvature do not admit exponential bases, *Amer. J. Math.* **123** (2001), 115–120.
- [IKT2] A. IOSEVICH, M. KATZ Y T. TAO, The Fuglede spectral conjecture holds for convex bodies in the plane, *Math. Res. Letters* **10** (2003), 559–570.
- [Ko1] M. KOLOUNTZAKIS, Lattice tilings by cubes: whole, notched and extended, *Electron. J. Combin.* **5** (1998), no. 14, 1–11.
- [Ko2] M. KOLOUNTZAKIS, The study of translational tiling with Fourier Analysis, *Fourier Analysis and Convexity* (editor, L. Brandolini), Birkhäuser (2004), 131–187.
- [Ko3] M. KOLOUNTZAKIS, Filling a box with translates of two bricks, *Electronic Journal of Combinatorics* **11** (2004), no. 16, 1–4.
- [Ko4] M. KOLOUNTZAKIS, Translational tilings of the integers with long periods, *Electronic Journal of Combinatorics* **10** (2003), no. 22.
- [Ko5] M. KOLOUNTZAKIS, Non-symmetric convex domains have no basis of exponentials, *Ill. J. Math.* **44** (2000), 542–550.
- [KL] M. KOLOUNTZAKIS Y J.C. LAGARIAS, Structure of tilings of the line by a function, *Duke Mathematical Journal* **82** (1996), no. 3, 653–678.
- [KM1] M. KOLOUNTZAKIS Y M. MATOLCSI, Algorithms for translational tiling, *Journal of Mathematics and Music* **3** (2009), no. 2, 85–97.
- [KM2] M. KOLOUNTZAKIS Y M. MATOLCSI, Tiles with no spectra, *Forum Math.* **18** (2006), 519–528.
- [KM3] M. KOLOUNTZAKIS Y M. MATOLCSI, Complex Hadamard matrices and the spectral set conjecture, *Collect. Math.*, Volumen extra (2006), 281–291.

- [La] I. LABA, Fuglede's conjecture for a union of two intervals, *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (2001), 2965–2972.
- [LW] J.C. LAGARIAS Y Y. WANG, Tiling the line with translates of one tile, *Inventiones Mathematicae* **124** (1996), no. 1, 341–365.
- [Ma] M. MATOLCSI, Fuglede's conjecture fails in dimension 4, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), no. 10, 3021–3026.
- [MRS] M. MATOLCSI, J. RÉFFY Y F. SZÖLLÖSI, Constructions of Complex Hadamard matrices via tiling Abelian groups, *Open Systems & Information Dynamics* **14** (2007), 247–263.
- [Ma] R.D. MAULDIN, *The Scottish Book*, Birkhäuser, 1981.
- [Ne] D.J. NEWMAN, Tessellation of integers, *Journal of Number Theory* **9** (1977), no. 1, 107–111.
- [RX] H. RAO Y Y.M. XUE, Tiling  $\mathbb{Z}^2$  with translations of one set, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* **8** (2006), 129–140.
- [Ro] R.M. ROBINSON, Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane, *Inventiones mathematicae* **12** (1971), no. 3, 177–209.
- [Ru1] W. RUDIN, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [Ru2] W. RUDIN, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, Boston, 1987.
- [Sa1] A.D. SANDS, On the factorisation of finite abelian groups. I, *Acta Mathematica Hungarica* **8** (1957), 65–86.
- [Sa2] A.D. SANDS, On the factorisation of finite abelian groups. II, *Acta Mathematica Hungarica* **13** (1962), 153–169.
- [Sz] S. SZABÓ, A type of factorization of finite abelian groups, *Discrete Math.* **54** (1985), 121–124.
- [Tao] T. TAO, Fuglede's conjecture is false in 5 and higher dimensions, *Math. Res. Lett.* **11** (2004), no. 2-3, 251–258.
- [Ti] R. TIJDEMAN, Periodicity and almost-periodicity, *More sets, graphs and numbers*, Bolyai Soc. Math. Stud. **15** (2006), 381–405.
- [Vu] D.T. VUZA, Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons (Part Four), *Perspectives of New Music* **31** (1993), no. 1, 270–305.
- [Wer] R.F. WERNER, All teleportation and dense coding schemes, *J. Phys. A* **34** (2001), 7081–7094.

M.N. KOLOUNTZAKIS, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF CRETE, IRAKLIO, GRECIA  
 Correo electrónico: kolount@gmail.com

M. MATOLCSI, ALFRÉD RÉNYI INSTITUTE OF MATHEMATICS, HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES,  
 BUDAPEST, HUNGRÍA  
 Correo electrónico: matomate@renyi.hu

TRADUCIDO POR A. ZUMALACÁRREGUI, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID, ESPAÑA  
 Correo electrónico: ana.zumalacarregui@uam.es