岡山大学算数・数学教育学会誌
『パピルス』第1号（1994年）85頁～94頁

小学校教員養成過程の学生の図形領域の公理的構成に対する感覚について

― 学生の定義の理解を通しての考察 ―

高 橋 敏 雄
岡山大学教育学部

小学校算数科においては、どのような事柄をどのように教えるべきなのであろうか。そもそも、中学校以降は数学と呼ぶ科目を、小学校では何ゆえに算数と呼ぶのだろうか。これについては色々な考え方があることと思うが、私は次のように考えている。数学は、いくつかの基本法則を公理とし、公理から論理的な推論（論証）によって色々な定理を導き出して一つの学問体系を構成する、所謂"積み上げ式"の学問である。然しながら、小学生に公理を押し付けることはもちろん、論理的な推論を要求することも不可能であろう。それゆえ小学校では、日常身の回りにある具体的な事柄に注目させ、各々の考えを発表させ、具体的な操作、思考実験、議論をさせて共通の認識にまで高めさせ、納得させ、そしてその結果を定理とするのである。従って、それ等の定理には数学的な公理の裏付けが無く、数学の定理とは言い難いのである。このような方法は、中学校の２年の中頃まで繰り返される。その後、論証の何たるかを教え、それまで納得して作り上げた定理を基に、論理的な推論を行なって、定理を積み上げていくのである。言い換えれば、小学校から中学校２年までの間は、誰でもが自然に真理であると認めることのできる公理系を作っているのである。それ故、小学校では数学ではない算数なのである、と私は思っている。

本稿は、小学校での、上のような意味での算数が、数学的な根拠を持っていることを解説する目的で、学校教育に配慮した平面幾何の構成を行なった講義の結果についての考察である。

１。はじめに。

平面幾何は、平面上の点、直線、半直線、線分、三角形、四角形、円などからなる図形の性質を研究する学問である。ユークリッド幾何では、始めに<u>公理</u>と呼ばれるいくつかの基本法則を定める。そして公理から出発して論理的な推論によって<u>定理</u>と呼ばれるいろいろな法則を導き出していく。定理を導き出していく推論が<u>証明</u>である。このとき、公理や定理や証明を述べるために用いる術語の意味をはっきり定めておかなければならない。術語の意味を、既に意味が分かっている術語を用いて説明するのが<u>定義</u>である。ところが、一つの用語を定義しようとすると、既に定義された用語を用いて定義しなければならない。用語の定義をするために、このようにさかのぼって行くと、最も基本的な用語に到達せざるをえない。これらの基本的な用語は、定義しないで用いる。これらを<u>無定義用語</u>という。

平面幾何では、“点”、“直線”、“平面” “通る”、“間にある”、線分の“長さ”、角の“大きさ”等を無定義用語とする。

一般に、いくつかの基本法則を公理とし、公理から論理的な推論（論証）によっていろいろな定理を導き出して一つの学問体系を構成することを公理的構成という。１９世紀末にヒルベルトによって、最も完成度が高いといわれるユークリッド幾何の公理的構成がなされた。ヒルベルトの公理系では、点、直線、平面は、単なる３種類の異なる物であり、それらは一連の公理系を満たしていさえすれば何でも良いとされている。しかしながら、彼の著書には、至るところに図が描かれており、これ等の図は、述べている事柄の内容を理解する上で不可決のものであるように思われる。このことからヒルベルトは、具体的・直観的な事柄が数学を理解する上で不可欠であると思っていたのではないかと思われる。このことは、小学校や中学校で算数・数学を理解させ、納得させる上で大変重要なこを示唆しているものと思われる。

私は、将来小学校の先生になるなる学生を対象に、小学数学Ｃという講義を開講し、拙著のレクチャーノートを用いて、学校教育に配慮したユークリッド幾何の公理的構成を行なうと共に、実際の教科書ではどのように取り扱われているかを解説している。この時、無定義用語とは、改めてその意味を定義するまでもなく、その意味があらかじめ誰でも直感的に分かっていて、共通の理解がある、あたりまえな用語であると見做すことにしている。その後、期末試験で色々な用語の定義を述べさせた。受験した学生は８１名であった。本稿では、その試験の結果を分析し、今後の講義に際して注意すべきこと等について考察してみたい。

２。試験問題。

１９９３年９月２８日に行なった試験の問題は次の１０問である。

（１）線分の定義を述べよ。

（２）半平面の定義を述べよ。

（３）三角形の内部の定義を述べよ。

（４）運動（合同変換）の定義を述べよ。

（５）二つの三角形が合同の定義を述べよ。

（６）錯角と同位角の定義を述べよ。

（７）四辺形の定義を述べよ。

（８）平行線の定義を述べよ。

（９）等脚台形の定義を述べよ。

（10）平行四辺形の定義を述べよ。

以下の節で、講義の流れに沿って講義の内容を解説しながら正解を述べ、その後、学生の誤答例を紹介し、何ゆえに斯かる誤答が生じたのかについて、その理由を考察する。

３。問題（１）について。

“点”、“直線”、“平面” “通る”、“間にある”等の用語は、誰でもその意味がはっきり分かっているものとして、これから考える点や直線等は、全て同一の平面上にあるものとし、次の公理を与える。

公理１． 相異なる二点Ａ，Ｂが与えられたとき、ＡとＢを通る直線がただ一つ存在する。これを直線ＡＢという。』

公理２． 直線ＡＢ上に、ＡともＢとも異なる点Ｃを取れば、次の(i)，(ii)，(iii)のいずれか一つだけが成り立つ。

(i)　ＣはＡとＢの間にある。

(ii)　ＡはＣとＢの間にある。

(iii)　ＢはＡとＣの間にある。』

これ等の公理の下に、直線ＡＢの、ＡとＢの間にある部分に、点ＡとＢとを付け加えたものを線分ＡＢといい、記号$\overline{\text{AB}}$で表すことにしている。従って、問題（１）の回答は、次のようになる。

【解答（１）】　直線ＡＢの、ＡとＢの間にある部分に、点ＡとＢとを付け加えた

ものを線分ＡＢという。』

４。問題（２）について。

平面が、一つの直線によって二つの部分に分割されることに関して、次の公理（パッシュの公理と呼ばれている）を採用する。

公理３． 直線ｍが三点Ａ，Ｂ，Ｃのいずれをも通らない時、ｍは、三つの線分ＡＢ，ＢＣ，ＣＡのいずれとも交わらないか、または、そのうちの二つとだけ交わる。』

この公理に基づいて、次のように定義することができる。

定義１． 直線ｍと、ｍの上にない二点Ａ，Ｂを考える。線分ＡＢが直線ｍと交わらないとき、直線ｍに関してＡとＢは同じ側にある、または、ＡとＢは直線ｍの同じ側にあると言う。線分ＡＢがｍと交わるとき、直線ｍに関してＡとＢは反対側にある、または、ＡとＢは直線ｍの反対側にあると言う。』

この定義の下に、次の定理が成り立つ。

定理３．１． 直線ｍと、ｍの上にない三点Ａ，Ｂ，Ｃに対して、

（１）ｍに関して、ＢとＡが同じ側にあり、ＣもＡと同じ側にあれば、ＢとＣは同じ側にある。

（２）ｍに関して、ＢとＡが反対側にあり、ＣもＡと反対側にあれば、ＢとＣは同じ側にある。

（３）ｍに関して、ＢとＡが同じ側にあり、ＣがＡと反対側にあれば、ＢとＣは反対側にある。』

この定理により、直線ｍの上にない二つの点が、ｍに関して同じ側にあるという関係は同値関係であることが解り、直線ｍは平面を、ｍに関して互いに反対側にある二つの部分（同値類）に分けることがわかる。これらの各々の部分を、ｍが定める半平面と言う。従って、問題（２）の解答は、次のようになる。

【解答（２）】 平面は、一つの直線によって互いに反対側にある二つの部分に分けられる。これ等の各々の部分を半平面という。』

５。問題（３）について。

三点Ａ，Ｂ，Ｃが同一直線上にないとき、三つの線分ＡＢ，ＢＣ，ＣＡからなる図形を三角形ＡＢＣといい、△ＡＢＣで表わす。三つの点Ａ，Ｂ，Ｃを△ＡＢＣの頂点、三つの線分ＡＢ，ＢＣ，ＣＡを△ＡＢＣの辺という。このような約束の下に、次のように定義する。

定義４ △ＡＢＣにおいて、点Ｐが、直線ＢＣに関しては頂点Ａと同じ側にあり直線ＣＡに関しては頂点Ｂと同じ側にあり、直線ＡＢに関しては頂点Ｃと同じ側にあるとき、点Ｐは△ＡＢＣの内部にあるという。△ＡＢＣの内部にある点全体を△ＡＢＣの内部という。』

従って、問題（３）の解答は、次のようになる。

【解答（３）】 △ＡＢＣにおいて、点Ｐが、直線ＢＣに関しては頂点Ａと同じ側にあり、直線ＣＡに関しては頂点Ｂと同じ側にあり、直線ＡＢに関しては頂点Ｃと同じ側にあるとき、点Ｐは△ＡＢＣの内部にあるという。△ＡＢＣの内部にある点全体を△ＡＢＣの内部という。』

６。問題（４）について。

運動（合同変換）について述べるためには、まず、線分の長さと角の大きさについて説明しなければならない。先にも述べたように、線分の“長さ”と角の“大きさ”は、その意味が誰でも明確に解っているものとみなす無定義用語である。そのうえで、次のように説明する。

各線分には、長さ、と呼ばれる正の実数

が対応する。線分ＡＢの長さを、線分を表わすのと同じ記号ＡＢで表わす。ＡＢが線分を表わしているのか、線分の長さを表わしているのかは、その前後の文脈によって明らかであって、混同する恐れはない。例えば、等式ＡＢ＝ＣＤは、二つの線分ＡＢとＣＤの長さが等しいことを表わす。ＡＢ＝ＣＤは、ＡＢとＣＤは等しい、と読む。すなわち、二つの線分が等しい、というときは、二つの線分の長さが等しいことを意味する。線分ＡＢの長さを、二点Ａ，Ｂ間の距離ともいう。線分ＡＢと線分ＢＡとは同じ線分であるから、ＡＢ＝ＢＡである。

角の意味は既に解っているものとして、次のように定義する。各角には、大きさ、と呼ばれる正の実数が対応する。∠ＡＯＢの大きさを、角と同じ記号∠ＡＯＢで表わす。∠ＡＯＢが角を表わしているのか、角の大きさを表わしているのかは、その前後の文脈によって明らかであって、混同する恐れはない。例えば等式∠ＡＯＢ＝∠ＣＰＤは、∠ＡＯＢと∠ＣＰＤの大きさが等しいことを表わす。∠ＡＯＢ＝∠ＣＰＤは∠ＡＯＢと∠ＣＰＤは等しい、と読む。すなわち、二つの角が等しい、というときは、二つの角の大きさが等しいことを意味する。∠ＡＯＢと∠ＢＯＡは同じ角であるから∠ＡＯＢ＝∠ＢＯＡである。これ等の了解の下に、問題（４）の解答は次のようになる。

【解答（４）】　平面からそれ自身の上への一対一の点対応（これを変換という）Φが次の３つの条件を満たすとき、変換Φを運動（または合同変換）と言う。

（１）直線の、Φによる像はまた直線である

（２）任意の二点Ａ，Ｂに対して、

　Φ（Ａ）Φ（Ｂ）＝ＡＢ

（３）任意の角∠ＡＯＢに対して、

　∠Φ（Ａ）Φ（Ｏ）Φ（Ｂ）＝∠ＡＯＢ』

７。問題（５）について。

運動の定義の後、すぐに次の定義をする。ただし、半直線の意味は既に解っているものとする。

公理６　２つの三角形△ＡＢＣと△ＤＥＦが与えられたとき、次の条件を満たす運動Φがただ一つ存在する。

（１）点Φ（Ａ）は点Ｄと一致する。

（２）半直線ＡＢの、Φによる像は、Φ（Ａ）を端点とする半直線で、半直線ＤＥと一致する。

（３）直線ＡＢが定める二つの半平面のうち、点Ｃのある側の半平面のΦによる像は、直線ＤＥが定める二つの半平面のうち、点Ｆのある側と一致する。』

二つの運動を続けて行なった変換はまた運動であり、運動の逆変換もまた運動であるから、次のように定義することができる。

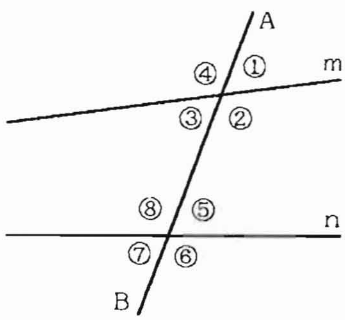
定義６　二つの図形Λ，Σに対して、ΛをΣに移す運動が存在するとき、図形Λと図形Σとは合同であるといい、記号Λ≡Σで表わす。』

従って問題（５）の解答は次のようになる。

【解答（５）】　二つの三角形△ＡＢＣと△ＤＥＦに対して、△ＡＢＣを△ＤＥＦに移す運動が存在するとき、△ＡＢＣと△ＤＥＦは合同であるという。』

８。問題（６）について。

次図のように、二つの直線ｍ，ｎが第三の直線ＡＢと相異なる二点で交わっているとする。このとき、②と⑧および③と⑤を、それぞれ一組の錯角といい、①と⑤、②と⑥、③と⑦および④と⑧を、それぞれ一組の同位角という。



9。問題（7）について。

四点A，B，C，Dで、どの三点も同一直線上にないものを考える。四つの線分ＡＢ，ＢＣ，ＣＤ，ＤＡのうち、線分ＡＢと線分ＣＤが交わらず、線分ＢＣと線分ＤＡが交わらないとき、四つの線分ＡＢ，ＢＣ，ＣＤ，ＤＡから成る図形を、四辺形ＡＢＣＤといい、四点A．B．C．Dをその頂点、四つの線分ＡＢ，ＢＣ，ＣＤ，ＤＡをその辺、二つの線分ＡＣ，ＢＤをその対角線という。四辺形において、隣り合っていない辺同士を互いに他の対辺といい、隣り合っていない角同士を互いに他の対角という。』従って、問題（7）の答えとしては、上の文章の前半を書けば良いことになる。

１０。問題（8）について。

定義７　相異なる二直線m，nが交点を持たないとき、この二直線は平行であるといい、記号　m//n　で表す。』

問題（8）の答えとしては、上の定義をそのまま書けば良いのであるが、ユークリッド幾何においては、"平行線の公理"が本質的な役割を果しているので、これについて少し詳しく述べてみることにする。

相異なる二直線が第三の直線と相異なる二点で交わっていて一組の錯角が等しければ、この二直線は平行であることは、比較的容易に証明することができる。しかしながら、この逆の命題を証明する試みは、２０００年にもわたって続けられたが、ついに証明することができず、次の公理を必要とするに到ったのである。

公理７　直線外の任意の点を通り、この直線に平行な直線はただ一つしかない』

この公理があれば、次の定理を証明することができる。

定理Ａ．

（1）平行な二直線の一方に交わる直線は、他方にも交わる。

（2）平行な二直線に第三の直線が交わって出来る錯角は等しい。』

この定理を用いて、次の定理を証明することができる。

定理Ｂ．　三角形の内角の和は二直角に等しい。』

更に、この定理を用いて、次の定理を証明することができる。

定理Ｃ．　相異なる二直線m，nが、第三の直線と、相異なる二点P，Qで交わっているとする。このとき、一組の同傍内角の和が二直角より小さければ、二直線は第三の直線に関して、同傍内角の和が二直角より小さい側で交わる。』

公理７を用いて定理Ａが証明され、定理Ａの主張だけを用いて定理Ｂが証明され、定理Ｂの主張だけを用いて定理Ｃが証明された。更に我々は、定理Ｃの主張だけを用いて公理７を証明することができるのである。従って、公理７、定理Ａ、定理Ｂ、定理Ｃは同値であることが解るのである。この事実を、小学校の先生になろうとしている学生諸君には、ぜひとも理解しておいてほしいものである。

１１。問題（9）、（10）について。

四辺形ＡＢＣＤにおいて、直線ＡＤとＢＣとが平行であるとき、辺ＡＤと辺ＢＣは平行であるという。一組の対辺が平行な

四辺形を台形という。台形において、平行でない一組の対辺が等しいとき、この台形を特に等脚台形という。二組の対辺が平行な四辺形を平行四辺形といい、平行四辺形ＡＢＣＤを記号▱ＡＢＣＤで表わす。

以上で、講義の流れに沿った、試験問題の解答がどうあるべきかについては理解してもらえたものと思う。

次の節からは、学生の誤解答と、それ等に対する考察を行なってみたい。

１２。問題（１）に対する学生の誤答例と考察。

この試験に対する受験生は、先にも述べたように、８１名であった。そして、この問題（１）に対する誤答者は３０名であった。以下に、その典型的な誤答例を述べる。

（例１）『異なる二点Ａ，Ｂがあるときに、ＡとＢを結ぶ直線を線分ＡＢという。』

これと本質的に同じ解答をした学生は６名であった。小学校２年では、直線と線分の区別はしないで、『まっすぐな線を直線といいます』と定義しているので、このような解答が表われるのはやむを得ないのかもしれないが、私の大学での講義ではその区別を明確にし、更に、レクチャーノートでも、その点を注意し、きちんと線分の定義したのであるが、かかる解答が多数あったことは甚だ残念である。

（例２）『直線ｍのある部分に点Ａ，Ｂをとり、その点Ａから点Ｂを結ぶ線を線分ＡＢという。』

これと本質的に同じ解答をした学生は６名であった。線という概念は、小学生にとっては当り前な概念であろうが、私の講義では、精々直線が無定義用語で出てくるだけで、『線』という概念は出てこないのである。言い換えれば、学生は、大学での講義の内容は、これを無視し、彼等の知識の中には、小学校で習ったことだけが絶対的な真理として存在しているのではなかろうか。彼等にとって、大学教育は全く必要無いのかも知れない。

（例３）『直線ＡＢ上に異なる２点、点Ａ、点Ｂをとるとき、ＡとＢの間の部分を線分ＡＢという。』

これと本質的に同じ解答をした学生は８名であった。これは、“以上”とか“以下”とかのような用語と同様に、普段良く使う“間にある”という言葉を、数学の用語として用いるときに生ずる危険性を意味しているのではなかろうか。

（例４）『直線ＡＢ上に二点ＡとＢを付け加えたとき、線分ＡＢという。』

これと類似の解答をした学生は５名であった。これは、例１のような解答をした学生と同じように、直線と線分の区別がはっきりしていない学生ではなかろうかと思われる。

１３。問題（２）に対する学生の誤答例と考察。

この問題に対する学生の解答のパターンは少なく、正解が３９名、『１つの直線によって２つの部分に分けられた平面の各々を半平面という』、とした学生が２９名、解答を書いていない学生が７名、その他の誤答を書いた学生が６名であった。同じ側とか反対側とかいう概念は、小学校にも中学校にも出てこないようであるが、それは、その意味が分かり切っている平面と直線の関係から明らかであるからであろう。しかし、『３本の直線でかこまれた形を三角形といいます』、『４本の直線でかこまれた形を四角形といいます』と言っているように、間接的ながら、側の概念は使われているのである。更にまた、側の議論を疎かにすると、全ての三角形は二等辺三角形であることが証明できたりするので、注意が必要である。従って、側の概念をはっきり用

いて半平面の定義をしてほしかったのである。

１４。問題（３）に対する学生の誤答例と考察。

問題（２）において、側の概念に触れた学生は３８名だけだったのに、問題（３）においては、６０名近くの学生が側の概念を正確に用いて解答しているのである。そのうち、２７名の学生は、問題（２）では誤答を述べ、問題（３）では正解を述べているのである。なお、問題（２）では正解を述べ、問題（３）では誤答を述べている学生は４名、問題（２）、問題（３）共に間違えていた学生は１５名であった。典型的な誤答例は『三角形ＡＢＣで、線分ＡＢ，ＢＣ，ＣＡで囲まれた部分を三角形ＡＢＣの内部という』と言うものだった。

問題（２）と問題（３）に対する正解数の多寡は、レクチャーノートに、はっきり定義と書いてあったかなかったかの違いに依るものであろうか。

１５。問題（４）に対する学生の誤答例と考察。

平面からそれ自身への点対応で、任意の二点間の距離を変えないものを<u>等長変換</u>という。三角形は、三角形の三辺合同定理を用いることにより、等長変換によってそれと合同な三角形に移されることが解り、このことから、等長変換は、角の大きさを変えないことが解り、従って実は、等長変換は、【解答（４）】で述べた合同変換（運動）であることが示されることを、講義の終りの方で述べた。（このことについての詳しい説明は、例えば、那須俊夫先生の「変換幾何入門」（共立出版）を参照されたい。）このため、採点は甘くした。その結果、誤答は２３名、その内１０名が白紙で、６名が何となく解っているような、解っていないような、フラフラした答案だった。７名は、ほとんど何も解っていない、いい加減な答案だった。従って、特に紹介に値するような誤答例はなかった。

１６。問題（５）に対する学生の誤答例と考察。

この問題は、定義６の、一般の図形に対する合同の定義を、三角形の場合に翻訳してもらうものである。結果は思いも寄らず６４名の誤解答があった。最も多かった誤解答は、

（例１）『三角形の合同定理』を書いたもので、３０名であった。

（例２）『二つの三角形△ＡＢＣ、△ＤＥＦにおいて、ＡＢ＝ＤＥ，ＢＣ＝ＥＦ，ＣＡ＝ＦＤ，∠Ａ＝∠Ｄ，∠Ｂ＝∠Ｅ，∠Ｃ＝∠Ｆが成り立っていれば、△ＡＢＣと△ＤＥＦは合同であるという。』

このように解答した学生は１５名であった。確かに、非ユークリッド幾何学を含めて、三角形の合同の定義をこのようにすることがある。従って、一般論としては、これでも正解であるが、運動の概念を用いて合同の概念を定義している講義の中での試験であることから、（例１）も（例２）も、これ等は誤解答とせざるを得ないのである。ところで、小学校５年の教科書では、『きちんと重ね合わすことのできる２つの図形は合同であるといいます。』、『一方をうら返しにして２つの図形がきちんと重なるときも、合同であるといいます。』と、運動を用いて合同を定義しているのである。そのうえで、『合同な図形では、対応する辺の長さは等しく、対応する角の大きさも等しくなっています。』と、例２の解答で述べていることを、合同な図形の性質として述べているのである。更にそのうえ、中学校でも同様に、運動を用いて合同を定義し、合同な図形の性質を述べているのであ

る。

その他、一般の図形に対する合同の定義を書いたものが６名、三角形や一般の図形に対して、合同の定義を述べてはいるが、変換Φに対しての説明が全く無かったものが６名、意味不明の解答が４名、三角形の合同定理の逆を書いたものが３名であった。特筆すべきことは、９０点をとった学生が１９名いたが、そのうち、問題５だけを間違えた学生が１２名も居たことであった。そのうち、例２の学生が４名、例１の学生が３名、一般の図形に対する合同の定義を書いた学生が３名であった。

１７。問題（６）に対する学生の誤答例と考察。

錯角や同位角については中学校２年で学習し、この講義での定義と全く同じであることから、この問題については、ほぼ全員が正解だと思っていたのだが、３４名もの誤解答があった。最も多かった誤解答は、
（例１）『平行な二直線に第３の直線が交わって出来る角のうち、・・・・。』というもので、２１名もあった。

錯角を間違えたものが５名、白紙だったものも５名、その他３名だった。錯角や同位角の概念は、平行線に関連して表われるために、このような結果が出たものと思われる。

１８。問題（７）に対する学生の誤答例と考察。

この問題の第一のポイントは、４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄのどの３点も同一直線上にはないということであり、第二のポイントは、線分ＡＢとＣＤが交わらず、線分ＢＣとＤＡが交わらないことである。第一のポイントに全く触れなかった学生は１９名であった。そのほかの誤解答はバラエティに富んでいたが、それらの合計は１１名であった。図を描けば、誰もが直ちに納得するような単純な図形であっても、それを数学の言葉で正確に表現しようとすると、つい、見落としが出てしまうということであろうか。

１９。問題（８）に対する学生の誤答例と考察。

講義における平行線の定義と、小学校の教科書における平行線の定義とは異なっているにもかかわらず、誤答者はわずかに６名であった。
（例１）『異なる２直線が決して交わらず、等しい間隔を保っていれば平行線という』とした学生が２名。これは、前半は良いのであるが、後半はユークリッド幾何の平行線の性質を述べたものであり、平行線の定義ではないのである。

そのほか、小学校で習った平行線の感じから抜け切れずにいた学生が２名、全くの勘違いと白紙がそれぞれ１名あった。

２０。問題（９）に対する学生の誤答例と考察。

台形の概念は、小学校４年に導入されるが、等脚台形という用語は、私が調べた小学校・中学校関係の本には見当たらなかった。数学教育の世界から等脚台形という用語は消滅してしまったのであろうか。御存じの方のご教示を頂ければ幸いである。
（例１）『台形のうち、一組の対辺が等しいものを等脚台形という。』
これと類似の解答をした学生は１５名であった。台形なるものの形が目に焼き付いているために、自然にこのような解答になってしまったものと思われる。これいがいの誤解答は６名だけであった。

２１。問題（１０）に対する学生の誤答例と考察。

平行線の定義の場合とは逆に、平行四辺

形の定義は、小学校４年の教科書では『向かい合った２組の辺が平行な四角形を、平行四辺形といいます。』と、私の講義のものと実質的に全く同じであったにも拘らず、誤解答は２８名もあった。

（例１）『四辺形ＡＢＣＤで、ＡＢ＝ＣＤ，ＡＢ//ＣＤ，ＢＣ＝ＡＤ，ＢＣ//ＡＤを満たしているものを平行四辺形という』といった解答が最も多く１７名であった。確かに、実際、運動の定義のように、本質的で無い性質をも定義の中にいれて、以後の議論をし易くすることがあるから、これを定義に採用しても悪いことは無いが、小学校４年で行なう定義よりも多くの性質を、大学で行なう定義の中にいれる必要は無いものと思われる。

（例２）これは、上の例１についても同じことであるが、定義と同値な命題を、改めて定義として採用することができる。然しながら、講義の後での試験では、講義で与えた定義を定義として述べてもらいたい。

平行四辺形の定義と同値な命題を解答とした学生は、例１の１７名の他に６名あった。

２２。おわりに。

小学校で取り扱う教材は、定義も公理も定理も、誰もがごく自然に、当り前のこととして認めることができるような事柄であるため、意識的にこれらを区別することはほとんど無いと思われるが、教師は、これらを明確に区別しておかなければ、無意識のうちに循環論法に陥ってしまう危険があるため、十分な注意が必要である。

図で描いて説明すれば、誰でもが簡単に納得するような単純な図形、例えば、線分、半平面、三角形の内部、四辺形等を、数学の用語を用いて正確に表現しようとすると、いかに困難であるかが、この試験の結果に表れている。

図形領域の題材は、よく研究授業に取り上げられ、色々と議論の的になる。これは、図形領域の指導方法に定説がないことも一因ではあろうが、平面幾何の公理的な構成を無視し、数学用語の意味を明確にとらえていないことも原因の一つになっているのではないかと恐れている。それ故、教職に就こうとする学生は、図形領域に関しては、平面幾何の公理的構成を積極的に意識し、数学用語の正確な意味を、明確に把握しておく必要があるものと思われる。

試験の結果の一覧表を次頁に掲載して本稿を終えることにする。

参考文献

［１］新しい算数、１年～６年、東京書籍。
［２］小学校指導書算数編、文部省。
［３］小学校算数科（図形領域）の基礎、
　　—その理論的背景—、講義録。

表1　　小学数学C　試験結果　1993年9月28日

（○は正解答、■は誤解答を表す）

番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	点数
01	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	100
02	○	○	○	○	■	○	○	○	○	○	90
03	○	○	○	○	■	○	○	○	○	○	90
04	○	○	○	○	■	○	○	○	○	○	90
05	○	○	○	○	■	○	○	○	○	○	90
06	○	○	○	○	■	○	○	○	○	○	90
07	○	○	○	○	■	○	○	○	○	○	90
08	○	○	○	○	■	○	○	○	○	○	90
09	○	○	○	○	■	○	○	○	○	○	90
10	○	○	○	○	■	○	○	○	○	○	90
11	○	○	○	○	■	○	○	○	○	○	90
12	○	○	○	○	■	○	○	○	○	○	90
13	○	○	○	○	■	○	○	○	○	○	90
14	■	○	○	○	○	○	○	○	○	○	90
15	○	■	○	○	○	○	○	○	○	○	90
16	○	■	○	○	○	○	○	○	○	○	90
17	○	○	○	○	○	■	○	○	○	○	90
18	○	○	○	○	○	■	○	○	○	○	90
19	○	○	○	○	○	■	○	○	○	○	90
20	○	○	○	○	○	○	○	○	○	■	90
21	○	■	○	○	■	○	○	○	○	○	80
22	○	■	○	○	■	○	○	○	○	○	80
23	○	■	○	○	■	○	○	○	○	○	80
24	○	○	■	○	■	○	○	○	○	○	80
25	○	○	○	○	■	○	○	○	○	■	80
26	○	■	○	○	■	○	○	○	■	○	70
27	○	■	○	○	■	○	○	○	■	○	70
28	○	■	○	○	■	○	■	○	○	○	70
29	○	○	○	○	■	○	○	○	■	■	70
30	○	○	■	○	■	○	○	○	○	■	70
31	○	■	○	○	■	○	○	○	○	■	70
32	○	■	○	○	■	○	○	○	○	■	70
33	○	○	○	○	■	■	○	■	○	○	70
34	○	○	○	■	■	■	○	○	○	○	70
35	■	○	○	○	■	■	○	○	○	○	70
36	■	○	○	○	■	■	○	○	○	○	70
37	○	○	○	○	■	■	○	○	○	■	70
38	○	○	○	○	■	■	○	○	○	■	70
39	○	■	■	■	○	○	○	○	○	○	70
40	■	■	○	○	○	○	■	○	○	○	70
41	■	■	○	○	○	○	○	○	■	○	70
42	■	■	○	○	○	○	■	○	○	○	70
43	○	■	■	○	■	○	■	○	○	○	60
44	■	○	○	■	■	○	○	○	○	■	60
45	○	■	○	○	■	○	■	○	○	■	60
46	○	○	○	■	■	■	○	○	■	○	60
47	○	○	○	■	■	■	■	○	○	○	60
48	■	○	○	○	■	■	■	○	○	○	60
49	○	■	○	○	■	■	○	○	■	○	60
50	○	○	○	■	■	■	○	○	○	■	60
51	○	○	○	■	■	■	○	○	○	■	60
52	■	■	○	○	○	○	■	○	○	■	60
53	■	■	■	○	■	○	■	○	○	○	50
54	■	○	○	■	■	○	○	○	■	■	50
55	■	■	○	○	■	○	■	○	○	■	50
56	■	■	○	○	■	○	○	○	■	■	50
57	■	■	○	○	■	○	○	○	■	■	50
58	■	■	○	■	■	○	○	○	○	■	50
59	■	○	○	■	■	■	■	○	○	○	50
60	■	■	○	○	■	■	○	○	■	○	50
61	○	■	■	○	■	■	○	○	○	■	50
62	■	○	■	■	○	○	■	○	■	○	50
63	○	■	■	■	○	■	■	○	○	○	50
64	■	■	○	■	○	■	■	○	○	○	50
65	○	■	○	○	○	■	■	■	○	■	50
66	■	○	○	■	■	○	■	○	■	■	40
67	■	■	■	○	■	○	■	○	○	■	40
68	■	○	■	○	■	■	■	■	○	○	40
69	○	■	■	■	■	■	○	○	■	○	40
70	○	■	○	○	■	■	■	○	■	■	40
71	■	■	○	○	■	■	■	○	○	■	40
72	○	■	■	■	■	■	■	■	○	○	30
73	■	■	■	■	■	■	■	○	○	○	30
74	■	■	■	■	■	■	■	○	○	○	30
75	○	■	■	○	■	■	■	○	■	■	30
76	■	■	○	○	■	■	■	○	■	■	30
77	○	■	○	■	■	■	■	■	■	■	20
78	■	■	■	■	■	○	■	■	■	○	20
79	■	■	■	■	■	■	■	○	■	○	20
80	■	■	■	■	■	■	■	○	■	○	20
81	■	■	■	■	■	■	■	○	■	■	10

（平成6年3月31日受理）