

Determinación de modelos para el análisis del control y estabilidad de sistemas dinámicos

Carlos Álvarez Picaza¹, María Inés Pisarello¹, Jorge E. Monzón¹

¹ Dpto de Ingeniería. Fac de Ciencias Exactas. Universidad Nacional del Nordeste
Corrientes, Argentina
cpicaza@gmail.com

Abstract. Los modelos aquí presentados analizan las condiciones de control y estabilidad de dos sistemas dinámicos de distinta naturaleza, uno eléctrico y otro biomédico. Los modelos son desarrollados en el espacio de estados, lo que aporta nuevas respuestas al análisis de sistemas.

Keywords: espacio de estados, controlabilidad, estabilidad.

1 Introducción

La Teoría de Control Clásico describe al sistema dinámico a través de la relación matemática entre la entrada y la salida, o sea su función transferencia, considerando en general a este sistema dinámico como una “caja negra”. Esto se muestra en la **Fig 1**, en la cual se observa que a través de la inyección de diferentes tipos de señales a la entrada de la caja negra se obtiene un conjunto de señales a la salida de la misma, lo que nos permite conocer el comportamiento del sistema dinámico y así definir las propiedades de este sistema [1]. Entonces a partir de estos ensayos es posible establecer una relación matemática de la función de transferencia del sistema en cuestión, dado por:

$$g(t) = \frac{y(t)}{u(t)} \quad (1)$$



Fig. 1. Modelo general de caja negra

Normalmente los análisis de datos se realizan desde el punto de vista gráfico en el espacio de los tiempos y en el espacio de las frecuencias, mediante la utilización de la función transferencia correspondiente. Lo que permite la Teoría de Control Moderno es el análisis en otro contexto gráfico conocido como “espacio de estados”, a partir del cual, se puede inferir nueva información [1,2].

Espacio de Estado: Es el espacio n-dimensional cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x_1 , eje x_2 , ... , eje x_n , donde x_1, x_2, \dots, x_n son las variables de estado. Cualquier estado se puede representar como un punto en el espacio de estados.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \text{Ec. de Estado}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad \text{Ec. de Salida}$$

donde A se denomina matriz de estado, B matriz de entrada, C matriz de salida y D matriz de transmisión directa.

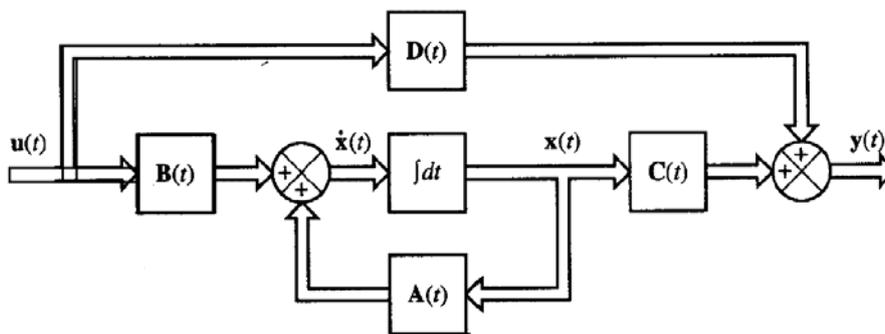


Fig. 2. Diagrama en bloque del sistema de control en el espacio de estados.

El objetivo de este trabajo es determinar el comportamiento de dos sistemas de distinta naturaleza, uno biomédico (sistema cardiovascular) y otro eléctrico-electrónico (turbina eólica) mediante el análisis de sus funciones de transferencia, es decir sus señales de entrada y salida. Para ello diseñamos un modelo de tipo caja negra en el espacio de estados.

2 Métodos

Utilizaremos el modelado en el espacio de estados aplicado a señales de una turbina eólica (energías renovables) y de un electrocardiograma (biomédica).

La señal de entrada para un sistema de control no se conoce con anticipación, pero es de naturaleza aleatoria, y la entrada instantánea no puede expresarse en forma analítica. Solo en algunos casos especiales se conoce con anticipación la señal de entrada y se puede expresar en forma analítica o mediante curvas [3].

En el análisis y diseño de sistemas de control, debemos tener una base de comparación del desempeño de algunos. Esta base se configura especificando las señales de entrada de prueba particulares y comparando las respuestas de varios sistemas a estas señales de entrada.

Muchos criterios de diseño se basan en tales señales o en la respuesta del sistema a los cambios en las condiciones iniciales (sin señales de prueba). El uso de señales de prueba se justifica porque existe una correlación entre las características de respuesta de un sistema para una señal de entrada de prueba común y la capacidad del sistema de manejar las señales de entrada reales.

Señales de prueba típicas. Las señales de prueba que se usan regularmente son funciones escalón, rampa, parábola, impulso, senoidales, etc. Con estas señales de prueba, es posible realizar con facilidad análisis matemáticos y experimentales de sistemas de control, dado que las señales son funciones del tiempo muy simples [3].

2.1 Aerogenerador:

Debido a la complejidad del modelo del generador de inducción, el principio del proceso de auto-excitación se explica con el uso de un circuito RLC debido a que el comportamiento del generador de inducción es similar a un circuito de este tipo [4].

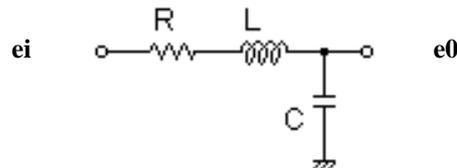


Fig. 3. Modelo para representación en el espacio de estados del generador

Donde R representa la resistencia equivalente rotórica y estática, L los devanados de estator y C, un banco de capacitores reemplazando a la tensión de línea.

Para el modelo objeto de tratamiento la función transferencia es

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{E_0(s)}{E_i(s)} \quad (2)$$

Para definir las variables de estado

$$\ddot{e}_o + \frac{R}{L} \dot{e}_o + \frac{1}{LC} e_o = \frac{1}{LC} e_i \quad (3)$$

$$x_1 = e_o \quad (4)$$

$$x_2 = \dot{e}_o \quad (5)$$

y las variables de entrada y salida mediante

$$u = e_i \quad (6)$$

$$y = e_o = x_1 \quad (7)$$

Matricialmente, queda planteada la siguiente ecuación de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u \quad (8)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

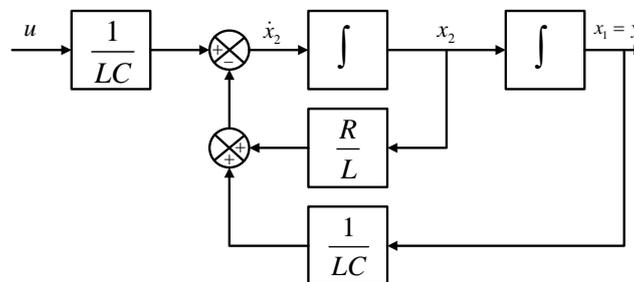


Fig. 4. Diagrama en bloques funcional del aerogenerador representado en el espacio de estados

2.2 Pared Cardíaca:

En este trabajo modelamos la dinámica cardíaca utilizando un modelo de Windkessel de tres elementos. El modelo fue elaborado en el espacio de estados. Este enfoque nos permite obtener resultados acerca de la estabilidad del sistema [5].

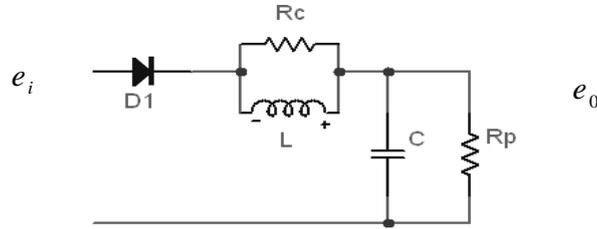


Fig. 6. - Modelo Windkessel de 3 elementos

El modelo consiste en una conexión paralela de una resistencia y un capacitor. La resistencia R_p representa la resistencia total periférica y el capacitor C representa la compliancia de los vasos. Otro elemento resistivo entre la bomba y la cámara de aire, R_c , simula la resistencia del flujo sanguíneo debido a la válvula aórtica o pulmonar. L es un elemento inercial en paralelo con la resistencia característica, R_c . Con estos arreglos, el modelo cuenta con la inercia de todo el sistema arterial a bajas frecuencias y a altas y medias frecuencias permiten que intervenga la resistencia característica [6].

Generalizando $R_p = R$ y R_c muy pequeña, para el modelo objeto de tratamiento es

$$G(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} = \frac{E_0(s)}{E_i(s)} \quad (10)$$

obteniendo

$$s^2 \cdot E_0(s) + s \cdot E_0(s) \cdot \frac{1}{RC} + E_0(s) \cdot \frac{1}{LC} = E_i(s) \cdot \frac{1}{LC} \quad (11)$$

para definir las variables de estado

$$\ddot{e}_o + \frac{1}{RC} \cdot \dot{e}_o + \frac{1}{LC} \cdot e_o = \frac{1}{LC} \cdot e_i \quad (12)$$

Quedando planteada la siguiente ecuación de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} \cdot u \quad (13)$$

$$y = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Teniendo en cuenta estos conceptos, el objetivo de este trabajo es aplicar las ecuaciones de estado a los distintos sistemas para el modelado correspondiente y posterior análisis de controlabilidad.

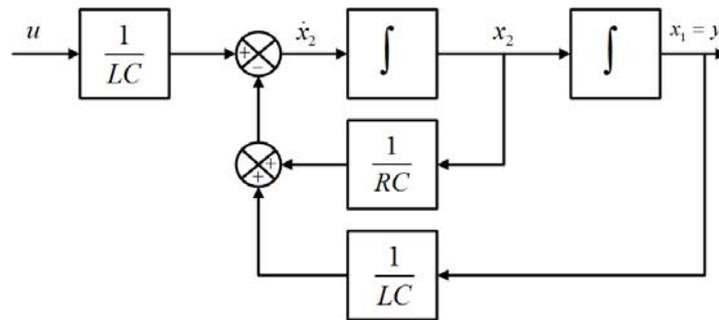


Fig. 7. Diagrama en bloques funcional de la pared cardíaca representada en el espacio de estados

3. Resultados y Discusión

3.1. Aerogenerador

De acuerdo a datos de ensayos en cortocircuito realizado a un generador de 5 KVA y considerando el condensador para estabilizar a la salida, se obtiene

Tabla 1. Características eléctricas del sistema generador

X_L (ohm)	R (ohm)	C (μ F)	Sigma
1,5	0,55	90	1

Donde las curvas corresponden a la variación de x_1 y la variación de x_2 (variables de estado).

3.2 Pared Cardíaca

Tabla 2. Características funcionales del sistema pared cardíaca

Señal	PS (mmHg)	PD (mm Hg)	L (PS-PD)	C (e-4cm/mm HG)
a41770	93,28	57,12	36,16	7,09

Las curvas correspondientes a estos resultados están definidas en las **Fig 8 a 11**.

3.3 Controlabilidad y Estabilidad

La controlabilidad es una de las propiedades cualitativas de los sistemas dinámicos. A grandes rasgos, la controlabilidad estudia la posibilidad de guiar o llevar los estados de un sistema hacia una posición deseada mediante la señal de entrada [6].

Dada una matriz de Controlabilidad genérica

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (15)$$

Si el rango de $\mathcal{C} = n \rightarrow$ Existe una entrada que hace que el sistema pase de cualquier estado inicial al estado final deseado.

Señal Aerogenerador:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 7.4074 \\ 7.4074 & -2.7163 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = -54.8697, \text{ rango} = 2$$

$$\lambda_{\min} = -8.889$$

$$\lambda_{\max} = 6.1728$$

$$\text{cond}(\mathcal{C}) \approx -0.6944$$

$$G'(s) = \frac{0.6944}{s^2 + 0.3667s + 0.6944}$$

La **Fig. 8** muestra el efecto de la condición de control, aplicada al sistema, indicando una disminución del valor de la frecuencia natural del sistema para nuevos valores de entrada (x1c y x2c).

De acuerdo a los polos de la nueva función transferencia, el sistema se hace mas amortiguado, lo que conlleva a una mas rápida estabilidad al nivel 0.

Señal Pared Cardíaca:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0.0039 \\ 0.0039 & -0.0005 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = -1.5214 * 10^5, \text{ rango} = 2$$

$$\lambda_{\min} = -0.0042$$

$$\lambda_{\max} = 0.0036$$

$$\text{cond}(\mathcal{C}) \approx -0.8571$$

$$G'(s) = \frac{0.8571}{s^2 + 0.1370s + 0.8571}$$

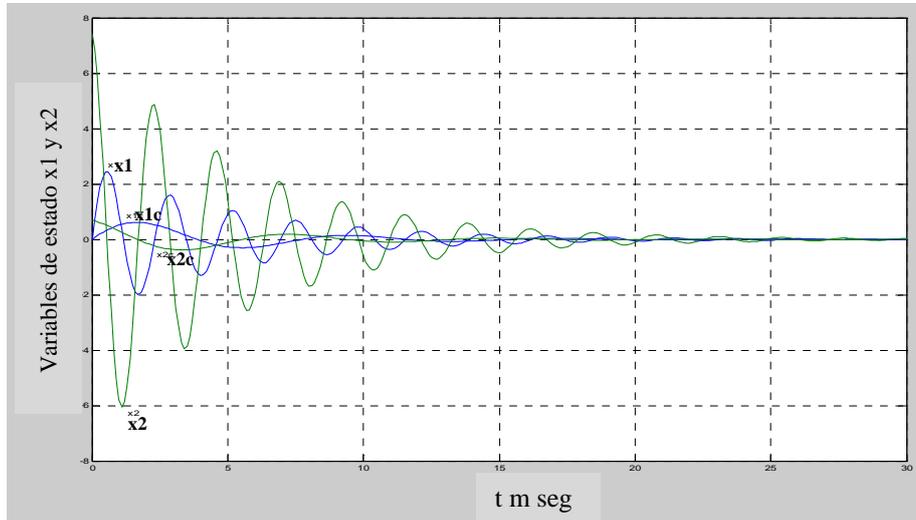


Fig. 8 –Respuesta natural del sistema generador incluyendo la condición de control

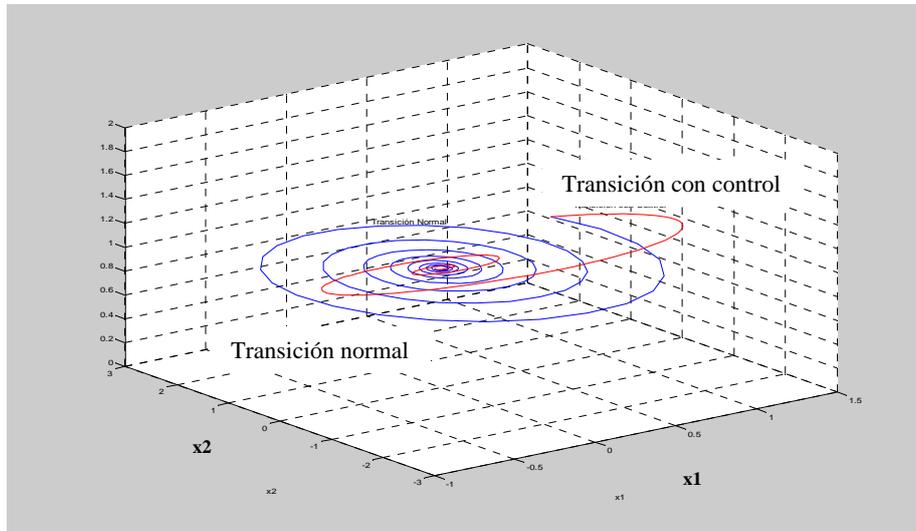


Fig. 9. – Espacio de estados - Sistema Aerogenerador. 3D

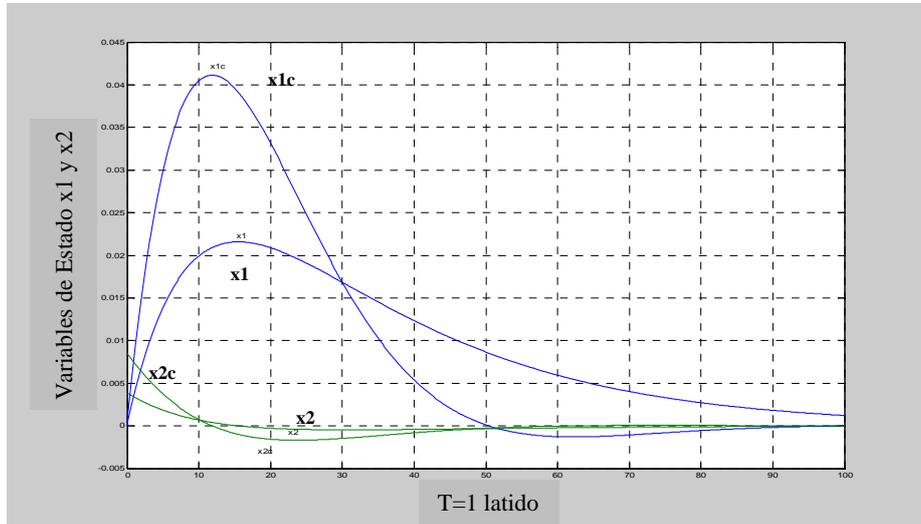


Fig. 10. Respuesta natural del sistema generador incluyendo la condición de control

La incorporación de la condición de control, produce en el sistema de estudio un aumento de la frecuencia natural del mismo, haciendo que el sistema alcance su equilibrio en un tiempo menor (hay que tener en cuenta que la frecuencia natural del sistema se encuentra acotada a 1 latido/seg.).

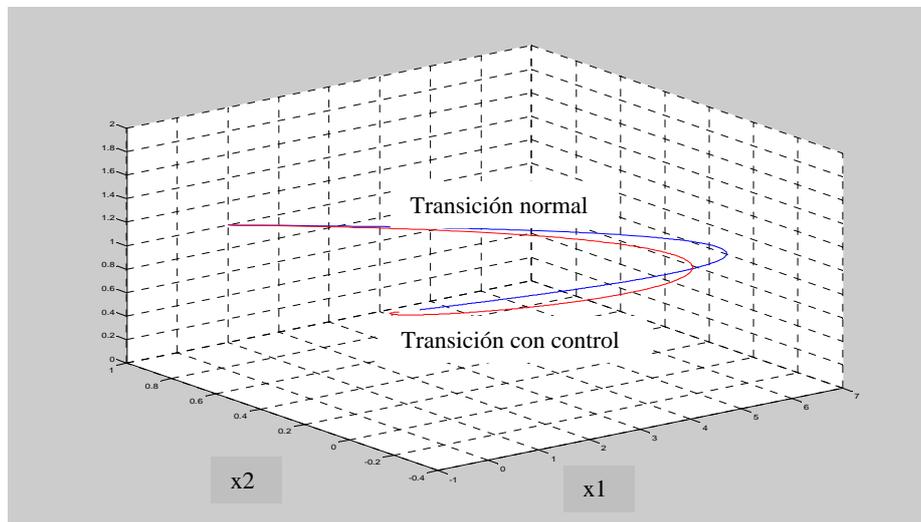


Fig. 11. Espacio de estados - sistema pared cardíaca 3D

4. Conclusiones

El hecho de que al utilizar la condición de control, ambos sistemas acortan notablemente la trayectoria desde un estado genérico $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ hacia el punto estable $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, es decir, al utilizar estas herramientas de control el sistema gana estabilidad haciendo a “cualquier sistema” mas controlable y asegurando su convergencia a su estado de equilibrio.

Referencias

1. Ogata K.: Ingeniería de control Moderna. 4ta Edición Ed Pearson. ISBN: 84-205-3678-4.
2. Kuo B.: Sistemas de Control Automático. 7ma Edición Ed. Prentice Hall Hispanoamericana S.A. ISBN: 968-880-723-0.
3. Rautenberg C., D'Attellis C.: Control lineal Avanzado y Control Óptimo. 1era Edición Ed. Argentina-AADECA. ISBN: 987-20960-5253.
4. Henández Sanchez A.M.: Análisis, Modelado y Simulación de la Operación de Sistemas de Generación Eoleoeléctrica Basados en Generadores de Inducción de Tipo Jaula de Ardilla. Centro Nacional de Investigación y desarrollo Tecnológico. Méjico. 2008.
5. Monzón J.E., Álvarez Picaza C., Pisarello M.I.: A multiple-input multiple-output system for modeling the cardiac dynamycs. In: Proceedings of the 33th Annual International Conference of the IEEE-EMBS. 2011
6. Álvarez Picaza C., Pisarello M.I., Monzón J.E.: Modelado del Sistema Cardíaco en el Espacio de Estados aplicando Criterios de Controlabilidad. In: 1er Congreso de Bioingeniería Costa Rica 2009. San José de Costa Rica. 2009