Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2012

Graça Maria de Oliveira Tomaz

Polinómios de Appell Multidimensionais e sua Representação Matricial

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2012

Graça Maria de Oliveira Tomaz

Polinómios de Appell Multidimensionais e sua Representação Matricial

Tese apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor Helmuth Robert Malonek, Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Ao meu filho Eduardo.

Ao Álvaro.

o júri

presidente

Prof. Doutor Aníbal Manuel de Oliveira Duarte
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

vogais

Prof. Doutor Helmuth Robert Malonek
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro (Orientador)

Prof. Doutor Semyon Borisovich Yakubovich
Professor Associado com Agregação da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Prof. Doutor José Carlos Soares Petronilho
Professor Associado da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Prof. Doutora Maria Irene Ferrão Carvalho Ribeiro Almeida Falcão
Professora Associada da Escola de Ciências da Universidade do Minho

Prof. Doutora Lidia Aceto
Professora Auxiliar do Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Itália

Prof. Doutora Maria Isabel Jordão Cação
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Em primeiro lugar quero manifestar o meu profundo agradecimento ao Professor Doutor Helmuth Malonek, meu orientador, pelo apoio científico, disponibilidade, permanente motivação e pela amizade que me dedicou. Não posso deixar de expressar a minha admiração não apenas pela sua capacidade científica, mas também pelas suas qualidades humanas.

Agradeço ainda aos elementos do Grupo de Análise Complexa e Hipercomplexa que comigo colaboraram, em particular, à Professora Doutora Irene Falcão e à Professora Doutora Isabel Cação pelas suas sugestões e apoio.

Ao Instituto Politécnico da Guarda, ao Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro e ao Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações (CIDMA), agradeço o apoio institucional concedido durante este trabalho.

Aos meus amigos e colegas, o meu reconhecimento por terem partilhado as dificuldades do percurso.

Ao Eduardo, meu filho, agradeço profundamente por suportar as minhas ausências e, ainda assim, tornar os meus dias mais brilhantes e incentivar-me a levar esta caminhada até ao fim.

Ao Álvaro, meu marido, agradeço por me ter apoiado ao longo deste trajecto substituindo-me, muitas vezes, nas mais diversas tarefas.

Agradeço também à minha mãe por compreender as raras visitas que lhe fiz nestes últimos anos.

palavras-chave

Polinómios de Appell, polinómios hipercomplexos, matriz de criação, matrizes de Pascal, matrizes de blocos, Análise de Clifford.

resumo

Nesta dissertação é apresentada uma abordagem a polinómios de Appell multidimensionais dando-se especial relevância à estrutura da sua função geradora. Esta estrutura, conjugada com uma escolha adequada de ordenação dos monómios que figuram nos polinómios, confere um carácter unificador à abordagem e possibilita uma representação matricial de polinómios de Appell por meio de matrizes particionadas em blocos. Tais matrizes são construídas a partir de uma matriz de estrutura simples, designada matriz de criação, subdiagonal e cujas entradas não nulas são os sucessivos números naturais. A exponencial desta matriz é a conhecida matriz de Pascal, triangular inferior, onde figuram os números binomiais que fazem parte integrante dos coeficientes dos polinómios de Appell.

Finalmente, aplica-se a abordagem apresentada a polinómios de Appell definidos no contexto da Análise de Clifford.

keywords

Appell polynomials, hypercomplex polynomials, creation matrix, Pascal matrices, block matrices, Clifford Analysis.

abstract

In this thesis an approach to multidimensional Appell polynomials is presented with special relevance for the structure of their generating function. This structure, together with an adequate choice of an ordering for the monomials that are present in the polynomials, gives a unifying nature to our approach and allows the representation of Appell polynomials by means of block matrices. Such matrices are constructed from another matrix with simple structure, called creation matrix, which is a sub-diagonal matrices whose nonzero entries are the successive natural numbers. The exponential of this matrix is the well known lower triangular Pascal matrix, lower triangular, where the binomial numbers appear as part of the coefficients of Appell polynomials.

Finally, the presented approach is applied to Appell polynomials defined in the context of Clifford Analysis.

Conteúdo

Introdução

A motivação para o tratamento do tema da presente dissertação surgiu do reconhecimento da importância dos polinómios e dos números de Bernoulli em diferentes áreas da matemática. Os números de Bernoulli são até considerados por Mazur ([96]) uma "força unificadora" em matemática, no sentido de que estão presentes em várias das suas áreas (Teoria dos Números, Topologia Diferencial, etc) estabelecendo um vínculo entre elas.

A nossa pesquisa sobre o assunto revelou a existência de um grande número de publicações recentes contendo diversas abordagens sobre os referidos polinómios, suas generalizações para uma ou várias variáveis reais ou complexas e, ainda, sobre assuntos com eles relacionados, seguindo diversas abordagens (ver por exemplo [15], [16], [26], [85], [97], [114]). Contudo, constatámos a não existência de estudos para o caso de várias variáveis hipercomplexas e, como tal, foi nesse sentido que primeiramente direccionámos a nossa investigação.

Muitas das abordagens que referimos anteriormente têm como ponto de partida a modificação da função geradora exponencial dos polinómios de Bernoulli

$$G(x,t) = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}.$$

Por exemplo, $B_n^{\alpha}(x), B_{n,\alpha}(x), B_{n;h,w}^{\alpha}(x)$ e $B_n^{[m-1]}(x), (m \geq 1)$ são algumas das generalizações daqueles polinómios mencionadas em [15] e [97] e que resultam de escolher como funções geradoras

$$\frac{t^{\alpha}e^{xt}}{(e^t-1)^{\alpha}}, \quad \frac{(iz)^{\alpha}\, e^{(x-1/2)z}}{2^{2\alpha}\Gamma\,(\alpha+1)\, J_{\alpha}\,(iz/2)}, \quad \frac{(ht)^{\alpha}\,(1+wt)^{x/w}}{\left[(1+wt)^{h/w}-1\right]^{\alpha}}, \quad \frac{t^m e^{xt}}{e^t - \sum_{h=0}^{m-1}(t^h/h!)},$$

(onde J_{α} é a função de Bessel de primeira espécie e ordem α), respectivamente. Esta ideia traz grandes vantagens nas generalizações para várias variáveis onde, muitas vezes, é apenas necessário modificar a função exponencial envolvida na função geradora. Em

[15], por exemplo, com base nos polinómios de Gould-Hopper $g_n^{(j)}(x,y), j \geq 2$, cuja função geradora é e^{xt+yt^j}, foram obtidos os polinómios de Bernoulli bidimensionais $B_n^{(j)}(x,y), j \geq 2$ por meio da função geradora $\frac{te^{xt+yt^j}}{e^t-1}$.

Numa primeira fase do trabalho, partindo desta ideia de modificação da função geradora e combinando-a com métodos de representação em série de potências generalizadas, próprios da teoria de funções holomorfas hipercomplexas (monogénicas), isto é, funções holomorfas generalizadas no contexto da Análise de Clifford, chegámos a uma definição de polinómios de Bernoulli de várias variáveis hipercomplexas que até ao momento não existia. Por analogia, de imediato surgiu também a definição de polinómios de Euler hipercomplexos. Estes resultados foram publicados, respectivamente, em:

H. Malonek and G. Tomaz, *Bernoulli polynomials and matrices in the context of Clifford Analysis*, Discrete Appl. Math. 157 (2009), 838-847 ([91]);

H. Malonek and G. Tomaz, *On generalized Euler polynomials in Clifford Analysis*, Int. J. Pure Appl. Math. 44(3) (2008), 447-465 ([90]).

Numa segunda fase, a investigação sobre os referidos polinómios conduziu-nos ao artigo [114], onde os autores apresentam uma representação matricial daqueles polinómios em ligação com a conhecida matriz de Pascal P ([13], [17]) e também com a matriz de Pascal generalizada $P(x)$ ([17], [112]). Esta ligação levou-nos aos trabalhos de L. Aceto e D. Trigiante [2] e [82], onde é abordada a representação matricial de várias classes de polinómios de uma variável, envolvendo uma matriz H, que designaram *matriz de criação*, e com a qual a matriz de Pascal está intrinsecamente relacionada ([17]).

Considerando o interesse da representação matricial de polinómios, pretendemos dar essa contribuição para o caso dos polinómios hipercomplexos entretanto obtidos. Conjecturámos que essa representação estaria relacionada com alguma generalização da matriz P e esta, por sua vez, com uma generalização da matriz de criação.

Embora já existissem propostas de extensão da matriz de Pascal generalizada $P(x)$ para duas variáveis ([113], [115]), estas não se revelaram eficazes para representação do tipo de polinómios que tínhamos definido (com várias variáveis e vários índices). Pareceu-nos adequado o recurso a uma generalização em termos de uma matriz de blocos cuja estrutura, de algum modo, simulasse a estrutura da matriz $P(x)$. Nessa fase, a escolha de uma ordem adequada para os monómios que figuram nos referidos polinómios permitiu concretizar essa ideia. Foi ainda possível verificar que a matriz obtida, a que chamamos matriz bloco de Pascal generalizada $\mathcal{P}(x_1,x_2)$, está também relacionada com uma matriz de blocos $F(x_1,x_2)$, construída a partir de outra, $\mathbb{H}$, cuja estrutura "imita" a de H, conforme publicado em:

I. Cação, H. R. Malonek, and G. Tomaz, *Lecture Notes of Seminario Interdisciplinare* *di Matematica*, vol. IX, ch. Special polynomials and polynomial bases in hypercomplex function theory, pp. 129-151, 2010 ([21]);

G. Tomaz and H. R. Malonek, *Special block matrices and multivariate polynomials*, International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2010 (T. E. Simos, G. Psihoyios, and Ch. Tsitouras, eds.), vol.1281, III, AIP Conference Proceedings, 2010, pp. 1515-1518 ([109]).

Rapidamente nos apercebemos que esta abordagem matricial poderia ser útil não só no caso hipercomplexo, mas também para várias variáveis reais e, por isso, decidimos tratar em primeiro lugar este último caso.

A relação dos polinómios de Bernoulli e Euler com a teoria das funções geradoras exponenciais com uma certa estrutura indicou-nos que os resultados que tínhamos obtido eram aplicáveis a qualquer conjunto de polinómios cuja função geradora fosse do tipo $G(x,t) = f(t)e^{xt}$, isto é, a qualquer conjunto que pertencesse à classe de Appell. Este resultado, bem como uma aplicação ao caso dos polinómios de Laguerre hipercomplexos, foi apresentado em:

H. R. Malonek and G. Tomaz, *Laguerre polynomials in several hypercomplex variables and their matrix representation*, Computational Science and Its Applications- ICCSA 2011 (B. Murgante, O. Gervasi, A. Iglesias, D. Taniar, and B. O. Apduhan, eds.), vol. LNCS 6784, Springer, 2011, pp. 261-270 ([94]).

Além disso, em [22], Carlson deu a indicação de que é possível manipular a função geradora de alguns polinómios que não são de Appell de modo a escrevê-la na forma $f(t)e^{xt}$ e, portanto, também para esses casos os nossos resultados poderiam ser úteis.

Esta ligação entre polinómios de Appell e a teoria das funções geradoras exponenciais do tipo $f(t)e^{xt}$, bem como os trabalhos [2] e [82] tornaram visível a existência de uma relação entre a geração matricial daqueles polinómios por meio da substituição na função f de t por H. O facto de já termos disponível uma versão de blocos desta última matriz permitiu obter uma relação análoga para polinómios de Appell de duas variáveis. Determinámos uma matriz de blocos $\mathbb{M}$ que transforma um vector de potências (primeira coluna da matriz bloco de Pascal generalizada) num vector de polinómios de Appell. Esta *matriz de transformação* tornou possível obter o desenvolvimento de uma função em série de polinómios de Appell a partir da respectiva série de Taylor.

Finalmente, e regressando ao ponto de partida, verificámos que muitos dos resultados obtidos podem facilmente adaptar-se para o caso de polinómios de Appell no contexto da Análise de Clifford, usando técnicas específicas desta área.

Esta dissertação está dividida em seis capítulos e dois apêndices. O objectivo da introdução destes apêndices foi disponibilizar informação de apoio e/ou complementar ao texto fundamental da dissertação.

Apresenta-se a seguir um breve resumo de cada um dos capítulos.

No Capítulo 1 são recordadas noções fundamentais que constituem a base em que assentam as discussões dos capítulos seguintes. Em particular, focam-se conceitos sobre séries de potências formais, funções geradoras, matrizes, ordens monomiais e, finalmente, sobre análise hipercomplexa. Relativamente a este último tema, após um breve enquadramento histórico, são salientadas noções essenciais sobre álgebras de Clifford que estão na base da teoria das funções hipercomplexas.

O Capítulo 2 é essencialmente dedicado à temática dos polinómios de Appell unidimensionais (de uma variável real), com especial relevo para a sua representação matricial. É ainda dado destaque a alguns casos particulares de polinómios de Appell. Para estes casos, e para facilidade de consulta, apresentam-se no Apêndice A listas das suas propriedades.

No Capítulo 3, após referência a alguns trabalhos já realizados para o caso de várias variáveis, é apresentada uma nova abordagem a polinómios de Appell multidimensionais reais. A originalidade desta abordagem consiste no facto de a ordem dos monómios que figuram nos polinómios ser importante para possibilitar a sua representação matricial utilizando matrizes de blocos especiais.

No Apêndice B são apresentados alguns exemplos dos polinómios particulares tratados.

A representação matricial é desenvolvida no Capítulo 4. Neste capítulo, o estudo incidiu sobretudo em polinómios bidimensionais, embora no final seja feita uma generalização para o caso de qualquer número de variáveis.

O Capítulo 5 aborda o caso dos polinómios de Appell no contexto da Análise de Clifford, isto é, também eles multidimensionais. Primeiramente é aplicada a representação matricial desenvolvida no Capítulo 2 a polinómios de Appell construídos a partir duma função geradora que envolve a função exponencial introduzida em [52]. De seguida é feita uma extensão dos resultados obtidos no Capítulo 3 para polinómios de vários indíces e de várias variáveis hipercomplexas (variáveis de Fueter).

O Capítulo 6 contém a conclusão do trabalho.

Capítulo 1

Noções Fundamentais

Neste capítulo preliminar apresentamos os conceitos, definições e terminologia sobre os quais irá assentar este trabalho, não se pretendendo uma exploração exaustiva dos assuntos. Os conceitos aqui referidos prendem-se sobretudo com séries formais, funções geradoras, cálculo matricial, relações de ordem e análise hipercomplexa.

1.1 Séries de potências formais

Contrariamente à teoria analítica de séries de potências, a teoria de séries de potências formais consiste em discutir tais séries como objectos puramente algébricos, sem a preocupação de saber se representam alguma função, ou seja, nesta teoria questões topológicas como a convergência ou continuidade estão ausentes.

Na base do estudo de polinómios de Appell que se pretende nesta dissertação está o conceito de função geradora de sucessões de tais polinómios. A teoria das séries formais fornece as ferramentas necessárias para a manipulação das séries envolvidas nas funções geradoras, mesmo não tendo à partida garantia de convergência. Obviamente que se se obtiverem séries que convirjam para alguma função analítica num certo domínio, as manipulações efectuadas no contexto formal são válidas analiticamente nesse domínio e é possível retirar informações analíticas que de outro modo poderiam ser difíceis de obter. Caso contrário, embora não se possa extrair delas informação analítica, ainda assim se pode obter muita informação útil acerca de tais séries.

Ao longo da dissertação quando trabalharmos com várias variáveis usaremos multi-índices.

Para o multi-índice $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in \mathbb{N}_0^r, \ \ r \in \mathbb{N},$ escrevemos, como habitualmente, $|\sigma| = \sigma_1 + \cdots + \sigma_r$ para o módulo e $\sigma! = \sigma_1! \cdots \sigma_r!$ para o factorial.

O coeficiente binomial será denotado por

$$\binom{\sigma}{\mu} = \frac{\sigma!}{\mu!(\sigma-\mu)!}$$

e o polinomial por

$$\binom{k}{\sigma} = \frac{k!}{\sigma_1!\cdots\sigma_r!} = \frac{k!}{\sigma!}, \quad \text{com} \quad |\sigma| = k.$$

Será também usada a notação

$$\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial \boldsymbol{x}^{\sigma}} = \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x_1^{\sigma_1}\cdots\partial x_r^{\sigma_r}} = \frac{\partial^{\sigma_1}}{\partial x_1^{\sigma_1}}\cdots\frac{\partial^{\sigma_r}}{\partial x_r^{\sigma_r}}.$$

Por conveniência introduziremos alguns multi-índices "constantes"; usaremos $\mathbf{0}$ para designar $(0,\ldots,0)$ e $\mathbf{1}$ para designar $(1,\ldots,1)$. Para qualquer $i \in \{1,\ldots,r\}$ o multi-índice unitário é definido por $\mathbf{1}_i = (\delta_{i1},\ldots,\delta_{ir}) = (0,\ldots,1,\ldots,0)$, sendo δ_{ik} o símbolo de Kronecker.

Os monómios em $x_1,\ldots,x_r$ de grau $|\sigma|$ são elementos da forma

$$\boldsymbol{x}^{\sigma} = x_1^{\sigma_1}\cdots x_r^{\sigma_r},$$

onde $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_r)$ é um $r-$uplo e $\boldsymbol{x}^{\sigma} = 1$ se $\sigma = \mathbf{0}$.

1.1.1 Séries de potências formais de uma variável

Seja $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) um corpo comutativo.

Definição 1.1 *Chama-se série de potências formal de x à expressão da forma*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \tag{1.1}$$

onde a sucessão $a_0, a_1, \cdots$, designada por sucessão dos coeficientes, é constituída por elementos de $\mathbb{K}$. O conjunto destas séries formais denota-se por $\mathbb{K}[[x]]$.

Um polinómio de grau k, $\sum_{n=0}^{k} a_n x^n$, pode ser identificado com a série (1.1) onde $a_n = 0, n > k$.

No conjunto $\mathbb{K}[[x]]$ definem-se as operações adição, multiplicação por um escalar (elemento de $\mathbb{K}$) e multiplicação que estendem as operações com o mesmo nome definidas no conjunto dos polinómios. Assim define-se:

- Soma de duas séries formais por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n;$$

- Produto de um escalar por uma série formal por

$$\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n) x^n;$$

- Produto de duas séries formais (produto de Cauchy) por

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad (c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}).$$

Observação 1.1 *O produto de Cauchy de duas séries pode também apresentar-se do seguinte modo:*

$$\begin{aligned}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q x^q\right) &= \sum_{p,q=0}^{+\infty} a_p b_q x^{p+q} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad (c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q).\end{aligned}$$

Observação 1.2 *O conjunto $\mathbb{K}[[x]]$ munido das operações acima referidas é uma álgebra comutativa sobre o corpo $\mathbb{K}$, cujo elemento unidade é a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ tal que $a_0 = 1$ e $a_n = 0, n > 0$.*

A multiplicação de séries formais permite obter, caso exista, a recíproca de uma série.

Proposição 1.1 ([23], p. 14) *Seja $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathbb{K}[[x]]$. Existe $T(x) \in \mathbb{K}[[x]]$ tal que $S(x)T(x) = 1$ se e só se $a_0 \neq 0$.*

Nas condições da proposição anterior, a $T(x)$ chama-se a recíproca de $S(x)$ e pode escreve-se $T(x) = S^{-1}(x)$. Esta série não pode ser confundida com a sua inversa que, se existir, é uma série $V(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ tal que $S(V(x)) = V(S(x)) = x$. A simbologia $S(V(x))$ representa a operação composição de séries

$$S(V(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (V(x))^n,$$

que está definida sse o termo independente c_0 de $V(x)$ for nulo ou se $S(x)$ for um polinómio ([23]).

No conjunto $\mathbb{K}[[x]]$ definem-se ainda outras operações correspondentes às existentes no cálculo com funções. Por exemplo, a derivada da série formal $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é a série

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

As regras de derivação usuais no cálculo com funções são também válidas no caso de séries formais ([23]).

Dada a série formal $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, a substituição de x por um valor $z \in \mathbb{K}$ não faz sentido em $\mathbb{K}[[x]]$ uma vez que aí a letra x é um símbolo puramente formal. Tal substituíção só se poderá efectuar se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ for convergente. Trata-se, portanto, de um procedimento analítico e não de um procedimento formal. Recordemos então algumas propriedades básicas das séries de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{K}. \tag{1.2}$$

Observação 1.3 *Com a transformação $z = t - t_0$ obtém-se o caso geral das séries de potências*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (t - t_0)^n.$$

Proposição 1.2 ([95], p. 77) *Para cada série (1.2) existe um e um só R, $0 \leq R \leq +\infty$, tal que a série é absolutamente convergente se $|z| < R$ e divergente se $|z| > R$.*

A R chama-se raio de convergência da série e pode ser expresso em termos da sucessão $(a_n)_{n \geq 0}$ dos coeficientes da série por meio da fórmula de Cauchy-Hadamard

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \to +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}},$$

onde $\limsup_{n \to +\infty} a_n = \lim_{p \to +\infty} (\sup_{n \geq p} a_n)$.

Ao conjunto $\{z \in \mathbb{K} : |z| < R\}$ chama-se domínio de convergência da série (se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ designa-se por intervalo de convergência; se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ designa-se por disco de convergência).

Observação 1.4 *O raio de convergência de uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ é igual a 0 (respectivamente $+\infty$) se e só se o conjunto dos $z \in \mathbb{K}$ para os quais a série é convergente for igual a $\{0\}$ (resp. $\mathbb{K}$).*

A soma e o produto de duas séries convergentes com raio de convergência $\geq R$ são também séries convergentes com o mesmo raio de convergência e para $|z| < R$ tem-se que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n,$$
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

A série derivada de uma série convergente, $S(z)$, é também convergente e tem o mesmo raio de convergência R. Além disso, se $R \neq 0$,

$$S'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h},$$

para $|z| < R$.

Aplicando este mesmo argumento a $S'(z)$ conclui-se que $S''(z)$ é convergente em $|z| < R$, sendo a sua soma $S''(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$. Seguindo este raciocínio prova-se que $S(z)$ é indefinidamente derivável em $|z| < R$ e que

$$S^{(n)}(z) = n! a_n + T_n(z),$$

onde $T_n(0) = 0$. Desta forma, conclui-se que os coeficientes de $S(z)$ são

$$a_n = \frac{1}{n!} S^{(n)}(0).$$

Definição 1.2 *Seja f uma função definida num conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{K}$ com valores em $\mathbb{K}$. Diz-se que f é analítica em D se, para cada ponto z_0 desse conjunto existir um número real $R(z_0)$ e uma série $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de raio de convergência $\geq R(z_0)$ tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

em $|z - z_0| < R(z_0)$.

Teorema 1.1 ([95], p. 105) *Suponhamos que a série (1.2) é convergente nos pontos z tais que $|z| < R$, $R \neq 0$, e que $f(z)$ denota a sua soma. Então a função f é analítica em $|z| < R$.*

1.1.2 Séries de potências formais múltiplas

Definição 1.3 *Chama-se série de potências formal de* $\boldsymbol{x}$ *à expressão da forma*

$$S(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} a_\sigma \boldsymbol{x}^\sigma, \tag{1.3}$$

onde os coeficientes a_σ *pertencem ao corpo* $\mathbb{K}$ *e* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^r$. *O conjunto de tais séries formais denota-se por* $\mathbb{K}[[\boldsymbol{x}]]$.

As definições de adição e de multiplicação por um escalar em $\mathbb{K}[[\boldsymbol{x}]]$ são inteiramente análogas às correspondentes em $\mathbb{K}[[x]]$. O produto de dois elementos de $\mathbb{K}[[\boldsymbol{x}]]$ define-se por

$$\left(\sum_{|\alpha|=0}^{+\infty} a_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha\right)\left(\sum_{|\beta|=0}^{+\infty} b_\beta \boldsymbol{x}^\beta\right) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} c_\sigma \boldsymbol{x}^\sigma \quad (c_\sigma = \sum_{\alpha+\beta=\sigma} a_\alpha b_\beta),$$

onde α e β são também multi-índices.

Por exemplo, no caso de duas variáveis temos:

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{\alpha_1+\alpha_2=0}^{+\infty} a_{\alpha_1,\alpha_2} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\right)\left(\sum_{\beta_1+\beta_2=0}^{+\infty} b_{\beta_1,\beta_2} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}\right) = \\
&= \sum_{\sigma_1+\sigma_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{\alpha_1+\beta_1=\sigma_1,\alpha_2+\beta_2=\sigma_2} a_{\alpha_1,\alpha_2} b_{\beta_1,\beta_2}\right) x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \\
&= \sum_{\sigma_1+\sigma_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{\alpha_1=0}^{\sigma_1}\sum_{\alpha_2=0}^{\sigma_2} a_{\alpha_1,\alpha_2} b_{\sigma_1-\alpha_1,\sigma_2-\alpha_2}\right) x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}.
\end{aligned}$$

Observação 1.5 *O conjunto* $\mathbb{K}[[\boldsymbol{x}]]$ *munido das operações acima definidas constitui uma álgebra comutativa sobre o corpo* $\mathbb{K}$.

Tal como no caso das séries de potências formais de uma variável, há por vezes necessidade de saber se uma dada série formal múltipla representa ou não uma função num determinado domínio e, por isso, teremos que conhecer a sua natureza.

A cada série formal (1.3) associemos a série de termos não negativos

$$\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} |a_\sigma| \boldsymbol{s}^\sigma,$$

onde $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_r) \in \mathbb{R}^r$ e $s_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, r$.

Seja Γ o conjunto de pontos $\boldsymbol{s}$ tais que $\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} |a_\sigma| \boldsymbol{s}^\sigma < +\infty$. A série $\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} a_\sigma \boldsymbol{z}^\sigma$ é absolutamente convergente em todos os pontos $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_r) \in \mathbb{K}^r$ tais que $|z_1| \leq s_1, \cdots, |z_r| \leq s_r$ (Γ contém pelo menos a origem) ([23]).

Definição 1.4 ([23], p.121) *Chama-se domínio de convergência da série (1.3) ao conjunto dos pontos* $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_r)$*,* $s_i \geq 0$*,* $i = 1, \ldots, r$*, que pertencem ao interior de* Γ*.*

Proposição 1.3 ([23], p. 122) *Se* $\boldsymbol{s}$ *é um ponto do domínio de convergência, então a série* $S(\boldsymbol{z})$ *é convergente no policilindro* $\{\boldsymbol{z} : |z_i| \leq s_i, \;\; i = 1, 2, \cdots, r\}$*. Se* $(|z_1|, |z_2|, \cdots, |z_r|)$ *não pertence à aderência de* Γ*, então* $S(\boldsymbol{z})$ *é divergente.*

Pode agora falar-se de operações com séries de potências convergentes.

Sejam D_A e D_B os domínios de convergência das séries $A(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} a_\sigma \boldsymbol{x}^\sigma$ e $B(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} b_\sigma \boldsymbol{x}^\sigma$, respectivamente, e D um conjunto aberto contido em $D_A \cap D_B$. Este conjunto está contido nos domínios de convergência das séries $A(\boldsymbol{x}) + B(\boldsymbol{x})$ e $A(\boldsymbol{x})B(\boldsymbol{x})$ e, caso $(|z_1|, |z_2|, \cdots, |z_r|) \in D$, então

$$A(\boldsymbol{z}) + B(\boldsymbol{z}) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} (a_\sigma + b_\sigma) \boldsymbol{z}^\sigma$$

e

$$A(\boldsymbol{z})B(\boldsymbol{z}) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} c_\sigma \boldsymbol{z}^\sigma \quad (c_\sigma = \sum_{\alpha+\beta=\sigma} a_\alpha b_\beta).$$

Definem-se as derivadas parciais da série $S(\boldsymbol{x}) = \sum_\sigma a_\sigma \boldsymbol{x}^\sigma$ da forma seguinte:

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \sum_{\sigma}^{+\infty} \sigma_i a_\sigma \boldsymbol{x}^{\sigma - \mathbf{1}_i}.$$

Proposição 1.4 ([23], p. 122) *A série* $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ *tem o mesmo domínio de convergência da série* S*. Quando* $(|z_1|, \ldots, |z_r|)$ *pertence a esse domínio, então a função* $\frac{\partial S(\boldsymbol{z})}{\partial z_i}$ *é a derivada parcial em ordem a* z_i *da função* $S(\boldsymbol{z})$*.*

Tendo em conta a proposição anterior, por derivação sucessiva deduz-se a seguinte expressão para os coeficientes da série $S(\boldsymbol{z})$:

$$a_\sigma = \frac{1}{\sigma!} \frac{\partial^{|\sigma|} S(0)}{\partial \boldsymbol{z}^\sigma}.$$

Definição 1.5 *Uma função* $f(\boldsymbol{z})$ *definida num conjunto aberto* D *diz-se analítica em* D*, se para cada ponto* $\boldsymbol{z}_0 = (z_{1_0}, z_{2_0}, \cdots, z_{r_0}) \in D$ *existir uma série de potências formal* $S(\boldsymbol{z})$ *cujo domínio de convergência seja não vazio e tal que* $f(\boldsymbol{z}) = S(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_0)$ *para* $|z_i - z_{i_0}|,\ i = 1, \ldots, r$*, suficientemente pequenos.*

Teorema 1.2 ([23], p. 124) *A soma de uma série de potências múltipla é uma função analítica no domínio de convergência da série.*

1.2 Funções geradoras

A teoria das funções geradoras desempenha um papel importante no estudo de sucessões e, em particular, de sucessões de polinómios. Grosso modo, as funções geradoras transformam problemas de sucessões em problemas de funções, podendo-se colocar as ferramentas matemáticas destas ao serviço do estudo daquelas. Assim, muitas das propriedades dos polinómios, que são as entidades em causa nesta dissertação, podem ser extraídas das propriedades conhecidas das respectivas funções geradoras.

Definição 1.6 *Seja* $F(t)$ *uma função cujo desenvolvimento em série de potências formal é*

$$F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

A $F(t)$ *chama-se função geradora ordinária da sucessão de números reais* $(a_n)_{n \geq 0}$.

Definição 1.7 *Seja* $F(t)$ *uma função cujo desenvolvimento em série de potências formal é*

$$F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^n}{n!}.$$

A $F(t)$ *chama-se função geradora exponencial da sucessão de números reais* $(a_n)_{n \geq 0}$.

Observação 1.6 *Se* $F(t)$ *é a função geradora exponencial da sucessão* $(a_n)_{n \geq 0}$*, então é a função geradora ordinária da sucessão* $\left(\frac{a_n}{n!}\right)_{n \geq 0}$ *e vice-versa.*

Das operações definidas no conjunto das séries formais é possível extrair propriedades para as funções geradoras.

Proposição 1.5 *Se* $F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ *é a função geradora exponencial da sucessão* $(a_n)_{n \geq 0}$*, então* $F'(t)$ *é a função geradora exponencial de* $(a_{n+1})_{n \geq 0}$.

Dem. Com efeito,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \frac{t^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{t^{n-1}}{n-1!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} \frac{t^n}{n!}, \end{aligned}$$

o que demonstra a proposição. ∎

Usando o método de indução matemática pode provar-se que:

Proposição 1.6 *Se $F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ é a função geradora exponencial da sucessão $(a_n)_{n\geq 0}$, então $F^{(m)}(t), m \geq 0$ é a função geradora exponencial de $(a_{n+m})_{n\geq 0}$.*

Proposição 1.7 *Se $F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ e $G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{t^n}{n!}$ são as funções geradoras exponenciais das sucessões $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(b_n)_{n\geq 0}$, respectivamente, então $(FG)(t)$ é a função geradora exponencial de $\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\right)_{n\geq 0}$.*

Dem. Com efeito,

$$\begin{aligned} (FG)(t) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{t^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\right) \frac{t^n}{n!}, \end{aligned}$$

o que demonstra a proposição. ∎

Em geral, se considerarmos o produto de k funções geradoras exponenciais, temos:

Proposição 1.8 *Se $F_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^1 \frac{t^n}{n!}, \cdots, F_k(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k \frac{t^n}{n!}$ são as funções geradoras exponenciais das sucessões $(a_n^1)_{n\geq 0}, \cdots, (a_n^k)_{n\geq 0}$, respectivamente, então $(F_1 F_2 \cdots F_k)(t)$ é a função geradora exponencial da sucessão $\left(\sum_{|r|=n} \binom{n}{r} a_{r_1}^1 \cdots a_{r_k}^k\right)_{n\geq 0}$, onde $r = (r_1, \ldots, r_k) \in \mathbb{N}_0^k$ e $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!}$.*

Observação 1.7 *Em consequência da Proposição 1.8, $(F(t))^k, k \in \mathbb{N}_0$ é a função geradora exponencial de $\left(\sum_{|r|=n} \binom{n}{r} a_{r_1} \cdots a_{r_k}\right)_{n\geq 0}$.*

As definições de função geradora ordinária e de função geradora exponencial supra apresentadas podem estender-se a sucessões de outro tipo de "objectos" como, por exemplo, sucessões de polinómios. É precisamente na geração de sucessões de polinómios que o conceito de função geradora é aplicado nesta dissertação.

Definição 1.8 *Seja $G(x,t)$ uma função de duas variáveis cujo desenvolvimento em série de potências formal é*

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) \frac{t^n}{n!}, \tag{1.4}$$

onde $g_n(x)$ é independente de t. A $G(x,t)$ chama-se função geradora exponencial da sucessão $(g_n(x))_{n\geq 0}$.

No caso de $G(x,t)$ ser analítica em $t = 0$, para um certo conjunto de valores de x, então a série (1.4) é convergente em torno de $t = 0$. Contudo, tal convergência não é necessária para gerar os elementos de $(g_n(x))_{n\geq 0}$ e para obter as suas propriedades ([99]).

Observação 1.8 *Analogamente ao que foi referido para a geração de sucessões de números reais, $G(x,t)$ é chamada função geradora ordinária da sucessão $\left(\frac{g_n(x)}{n!}\right)_{n\geq 0}$.*

Em [99], Rainville apresenta uma definição mais geral de função geradora:

Definição 1.9 *Seja $F(x,t)$ uma função de duas variáveis cujo desenvolvimento em série de potências formal é*

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n f_n(x) t^n,$$

onde $(c_n)_{n\geq 0}$ é independente de x e t. A $F(x,t)$ chama-se função geradora da sucessão $(f_n(x))_{n\geq 0}$.

Observação 1.9 *A Definição 1.9 inclui a Definição 1.8, identificando c_n com $\frac{1}{n!}$, $n = 0, 1, \cdots$. Segundo a Definição 1.8 dizemos que $F(x,t)$ gera a sucessão $(n!c_n f_n(x))_{n\geq 0}$.*

Na Definição 1.8 os elementos da sucessão gerada são funções de uma variável. Suponhamos agora que $G(\boldsymbol{x},t)$, onde $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_r)$, é uma função de $r+1$ variáveis.

Definição 1.10 *Seja $G(\boldsymbol{x},t)$ uma função cujo desenvolvimento em série de potências formal de t é*

$$G(\boldsymbol{x},t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(\boldsymbol{x}) \frac{t^n}{n!}. \tag{1.5}$$

A $G(\boldsymbol{x},t)$ chama-se função geradora exponencial da sucessão $(g_n(\boldsymbol{x}))_{n\geq 0}$ ([105]).

Uma extensão natural desta definição é a seguinte:

Definição 1.11 *Seja $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$, com $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_r)$ e $\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,\cdots,t_r)$, uma função definida formalmente por*

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})=\sum_{\sigma=0}^{+\infty} g_\sigma(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!}, \tag{1.6}$$

onde $\sigma\in\mathbb{N}_0^r$. A $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ chama-se função geradora exponencial múltipla de $(g_\sigma(\boldsymbol{x}))_\sigma$ ([105]).

1.3 Elementos de análise matricial

Uma das motivações para o uso da notação matricial tem a ver com o facto de, por exemplo, muitas propriedades de polinómios poderem ser obtidas por manipulação directa de matrizes, geralmente representadas por letras, sem envolver directamente o uso dos elementos das linhas e das colunas.

Nesta secção apresentamos alguns conceitos e notações relacionados com a teoria de matrizes que desempenharão um papel importante nos assuntos que abordaremos nos capítulos seguintes. O formalismo matricial irá permitir, entre outras coisas, a representação matricial de polinómios de várias variáveis, bem como das suas propriedades.

1.3.1 Notações e definições básicas

Como habitualmente, representaremos uma matriz A de dimensão (ou tipo) $m\times n$ por $A=[a_{ij}](i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$, onde a_{ij} denota genericamente o elemento da linha i e coluna j. A a_{ij} chamaremos, simplesmente, elemento ij da matriz A. Se $m=n$ a matriz A é quadrada e diremos que A é de ordem n.

Denotaremos os conjuntos das matrizes de dimensão $m\times n$ e de ordem n, com elementos (entradas) num corpo $\mathbb{K}$, por $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, respectivamente. Quando não for necessário especificar o corpo, representá-los-emos apenas por $\mathcal{M}_{m,n}$ e $\mathcal{M}_n$.

Definição 1.12 *Uma matriz de dimensão $n\times 1$, $v=[v_1\ v_2\cdots v_n]^T$, diz-se um vector coluna de ordem n e v^T diz-se um vector linha de ordem n.*

Os vectores coluna de ordem n

$$\varepsilon_k=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}^T \quad (k=1,2,\ldots,n),$$

cujo k-ésimo elemento é 1 e os restantes são nulos, satisfazem a igualdade $\varepsilon_k^T\varepsilon_l=\delta_{kl},\ k,l=1,2,\ldots,n$. O uso destes vectores permite a obtenção de uma coluna, uma linha ou um elemento de uma matriz $A \in \mathcal{M}_n$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
A\varepsilon_k &= \begin{bmatrix} a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}^T && (k-\text{ésima coluna da matriz} A),\\
\varepsilon_k^T A &= \begin{bmatrix} a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix} && (k-\text{ésima linha da matriz} A),\\
\varepsilon_k^T A\varepsilon_l &= a_{kl} && (\text{elemento } kl \text{ da matriz} A).
\end{aligned}$$

Definição 1.13 *Uma matriz A diz-se real, complexa ou hipercomplexa consoante os seus elementos sejam reais, complexos ou hipercomplexos.*

Representaremos por I_n e O_n as matrizes identidade e nula de ordem n, respectivamente.

Definição 1.14 *Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n$ diz-se nilpotente de ordem k, se existir um número natural k tal que $A^{k-1} \neq O_n$ e $A^k = O_n$.*

Matrizes particionadas em blocos têm-se revelado de grande utilidade como um modo de organizar grandes quantidades de dados numa forma de fácil manipulação e compreensão. A notação em blocos é fundamental em cálculo computacional, simplificando a obtenção de importantes algoritmos ([61]). No presente trabalho, o nosso interesse reside em aproveitar a estrutura em blocos com vista à generalização de alguns resultados existentes em análise real ou complexa para dimensões superiores.

Definição 1.15 *Uma matriz*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mp} \end{bmatrix}$$

particionada em $m \times p$ blocos (submatrizes) de ordem n é dita uma matriz de blocos (ou matriz bloco) de dimensão $mn \times pn$. As linhas e colunas desta matriz são designadas, respectivamente, por linhas de blocos e colunas de blocos ([101]).

A matriz A pode representar-se por $A = [A_{st}](s = 1, 2, \cdots, m; t = 1, 2, \cdots, p)$, onde A_{st} denota genericamente o elemento (bloco) situado na linha de blocos s e coluna de blocos t. Denotando por A_{ij}^{st} o elemento ij do bloco A_{st}, isto é, $A_{ij}^{st} \equiv (A_{st})_{ij}$, A pode representar-se ainda por $A = [A_{ij}^{st}](s = 1, 2, \cdots, m;\ t = 1, 2, \cdots, p;\ i, j = 1, 2, \cdots, n)$.

Se $p = m$, A é uma matriz de blocos quadrada de ordem mn (dimensão $mn \times mn$). Neste caso, como todos os blocos $A_{ss}(s = 1, 2, \cdots, m)$ da diagonal principal de A são matrizes quadradas, diz-se que A é uma matriz de blocos particionada simetricamente ([83]).

Definição 1.16 *Chama-se matriz bloco diagonal*[1] *à matriz A particionada simetricamente, tal que $A_{st} = O_n, s \neq t$, e representa-se por*

$$A = \mathrm{diag}[A_{11}, A_{22}, \cdots, A_{mm}]$$

([101]).

Definição 1.17 *Chama-se matriz bloco identidade de ordem mn, e denota-se por $\mathcal{I}_{mn}$, à matriz de m blocos diagonal*

$$\mathcal{I}_{mn} = \mathrm{diag}[I_n, I_n, \cdots, I_n].$$

Observação 1.10 *Se $m = n$, representaremos a matriz bloco identidade por $\mathcal{I}_n$ e $\mathcal{I}_n \equiv I_{n^2}$. Analogamente, a matriz de blocos nula será representada por $\mathcal{O}_n$ e $\mathcal{O}_n \equiv O_{n^2}$.*

Definição 1.18 *Uma matriz particionada de tal forma que tenha apenas uma coluna de blocos é dita um vector de blocos (ou vector bloco).*

Considerando o vector de blocos

$$E_k = \begin{bmatrix} O_n & \cdots & O_n & I_n & O_n & \cdots & O_n \end{bmatrix}^T \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.7}$$

cujo k-ésimo bloco é I_n e os restantes são O_n, podemos obter uma linha de blocos, uma coluna de blocos ou um bloco de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}$ de modo análogo ao caso ordinário:

$$\begin{aligned} AE_k &= \begin{bmatrix} A_{1k} & A_{2k} & \cdots & A_{nk} \end{bmatrix}^T && (k-\text{ésima coluna de blocos da matriz} A), \\ E_k^T A &= \begin{bmatrix} A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kn} \end{bmatrix} && (k-\text{ésima linha de blocos da matriz} A), \\ E_k^T A E_l &= A_{kl} && (\text{bloco } kl \text{ da matriz} A). \end{aligned}$$

Observação 1.11 *Estes vectores de blocos satisfazem $E_k^T E_l = \delta_{kl} I_n,\ k, l = 1, 2, \ldots, n.$*

Para além do produto usual de matrizes, usaremos pontualmente o produto de Kronecker (ou produto directo).

[1] Gantmacher ([58]) designa tais matrizes por matrizes quase-diagonais.

Definição 1.19 *Dada uma matriz* $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}$ *e uma matriz* $B \in \mathcal{M}_{p,q}$*, o produto de Kronecker de* A *por* B*, denotado por* $A \otimes B$*, é definido pela matriz bloco*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

$$= [a_{ij}B] \in \mathcal{M}_{mp,nq}$$

(cf. [8] e [73]).

Uma vasta lista de propriedades deste produto pode encontrar-se em [8] e [73].

Em várias situações em que estão envolvidas operações com matrizes, é conveniente considerar elementos de $\mathcal{M}_{m,n}$ como vectores coluna, dispondo os seus elementos de uma forma convencional. Nesta dissertação também recorreremos a este procedimento e adoptaremos a convenção habitualmente designada por vectorização.

Definição 1.20 ([73], p. 244) *Chama-se vectorização à aplicação que a cada matriz* $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}$ *associa o vector* $\mathrm{vec}(A) \in \mathcal{M}_{mn,1}$ *definido por*

$$\mathrm{vec}(A) = [a_{11} \cdots a_{m1} \; a_{12} \cdots a_{m2} \cdots a_{1n} \cdots a_{mn}]^T.$$

1.3.2 Funções de matrizes

A teoria das funções de matrizes baseia-se na interpretação de $f(A)$, sendo f uma função complexa de variável complexa e A uma matriz quadrada [2]. Tal teoria tem uma vasta aplicação, nomeadamente, em teoria de controlo e na resolução de equações diferenciais onde, por exemplo, a exponencial de uma matriz tem um papel relevante.

Nesta dissertação, o conceito de função de uma matriz será usado na obtenção de funções geradoras matriciais de polinómios especiais em várias variáveis. Assim, tendo por base as fontes bibliográficas [4], [8], [58], [61], [73] e [83], onde são apresentados vários modos equivalentes de definir e calcular uma função de uma matriz, sintetizaremos alguns conceitos sobre esta temática.

[2] Nesta dissertação não se pretende tratar assuntos de funções de matrizes no âmbito da Análise Funcional, como acontece, por exemplo, em [29] e [81].

Seja $f(z) \in \mathbb{C}$ uma função de variável complexa, analítica no disco $|z| < R, R > 0$, isto é, pode ser representada por uma série de potências

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \quad (c_k \text{ constantes}), \tag{1.8}$$

convergente naquele disco.

A definição de função de uma matriz tem como ponto de partida a análise do modo de extensão da função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a uma aplicação de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ em $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de forma que se mantenham algumas das propriedades fundamentais de $f(z)$. No caso mais simples de $f(z)$ ser um polinómio de grau m, isto é,

$$f(z) = p(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k,$$

e $A \in \mathcal{M}_n$, a referida extensão é, naturalmente,

$$p(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k, \quad A^0 = I_n$$

e designa-se por polinómio de uma matriz.

Observação 1.12 *Como toda a matriz quadrada comuta com ela própria,* $A^p A^q = A^q A^p = A^{p+q}$ *e, portanto, todos os polinómios de uma matriz comutam entre si.*

Se adoptarmos para (1.8) o mesmo procedimento de substituição formal da variável z pela matriz A, obtém-se a expressão simbólica

$$f(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k. \tag{1.9}$$

Resta agora saber em que condições (1.9) é adequada para definir $f(A)$, ou seja, em que condições a série matricial é convergente.

Definição 1.21 *Seja* $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de matrizes de dimensão* $m \times n$ *tais que* $D_k = \left[d_{ij}^{(k)}\right]$ $(i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$. *A série* $\sum_{k=1}^{+\infty} D_k$ *é dita convergente se todas as séries*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_{ij}^{(k)} \tag{1.10}$$

são convergentes. Em caso de convergência a sua soma é a matriz de dimensão $m \times n$ *cujo elemento* ij *é a série (1.10).*

Dos vários critérios de convergência existentes para séries matriciais, referimos um que se baseia no conceito de norma de uma matriz.

Definição 1.22 *Seja $D = [d_{ij}]$ $(i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$, uma matriz de dimensão $m \times n$. A norma $\|.\|$ da matriz D é o número não negativo*

$$\|D\| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |d_{ij}|$$

([4], [83]).

Observação 1.13 *Podem também ser usadas outras normas matriciais (ver, por exemplo, [83]).*

Um critério de convergência para séries matriciais é o seguinte:

Teorema 1.3 ([4], p. 195) *Seja $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de matrizes de dimensão $m \times n$. Se a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \|D_k\|$ é convergente, então a série $\sum_{k=1}^{+\infty} D_k$ também é convergente.*

Consideremos, por exemplo, as funções e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$ e $\sinh z$ cujas séries de Taylor são convergentes em todo o plano complexo. As séries matriciais

i) $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$

ii) $\cos A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k A^{2k}}{(2k)!}$

iii) $\sin A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}$

iv) $\cosh A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^{2k}}{(2k)!}$

v) $\sinh A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}$

são convergentes, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De facto, atendendo às propriedades da norma

$$\left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}, \quad \left\|\frac{(-1)^k A^{2k}}{(2k)!}\right\| \leq \frac{\|A\|^{2k}}{(2k)!}, \quad \left\|\frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}\right\| \leq \frac{\|A\|^{2k+1}}{(2k+1)!},$$
$$\left\|\frac{A^{2k}}{(2k)!}\right\| \leq \frac{\|A\|^{2k}}{(2k)!}, \quad \left\|\frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}\right\| \leq \frac{\|A\|^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

sendo convergentes as séries escalares cujos termos gerais se encontram nos segundos membros das desigualdades. Assim, pelo teorema anterior, as séries matriciais também são convergentes.

Outro dos critérios de convergência utilizados para séries matriciais é o seguinte:

Teorema 1.4 ([83], p. 328) *Sejam f uma função de variável complexa, analítica no disco $|z| < R,\ R > 0$, cujo desenvolvimento em série de potências é (1.8), $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ os valores próprios (distintos) de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e m_k a multiplicidade de λ_k.*

A série matricial (1.9) é convergente sse cada valor próprio $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ satisfaz uma das condições:
i) $|\lambda_k| < R$;
ii) $|\lambda_k| = R$ e a série para $f^{(m_k-1)}(z)$ é convergente em $z = \lambda_k,\ 1 \leq k \leq s$.

Assim, se $\mathrm{Spec}(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, então (1.9) é correcta para definir $f(A)$.

Referimos, por exemplo, a função $(1-z)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k$, convergente no disco $|z| < 1$. Neste caso, se $|\lambda_s| < 1,\ \lambda_s \in \mathrm{Spec}(A)$

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k.$$

A partir de (1.9) pode mostrar-se que algumas propriedades existentes para funções escalares se mantêm válidas para funções de matrizes ainda que por vezes seja necessário impor algumas restrições. Referimos a título de exemplo as seguintes propriedades da exponencial de uma matriz[3] e^A:

- $e^{iA} = \cos A + i \sin A$
- $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$, se $AB = BA$
- $e^{sA} e^{tA} = e^{(s+t)A},\ s, t \in$ escalares
- $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
- Se $A = \mathrm{diag}[k_1, \ldots, k_n]$, então $e^A = \mathrm{diag}[e^{k_1}, \ldots, e^{k_n}]$, com $k_s, s = 1, \ldots, n$ escalares.

Não obstante a representação em série de Taylor permitir introduzir o conceito de função de uma matriz e a obtenção de certas propriedades analíticas, a implementação directa daquela série para o cálculo de $f(A)$ é, por vezes, um método lento. Por exemplo, para o cálculo de e^A tal processo é viável para situações particulares em que as potências de A sejam de fácil determinação, nomeadamente, se A for diagonal ou diagonalizável. Nas referências [4] e [73] podem encontrar-se vários métodos gerais que permitem o cálculo de $f(A)$ de modo mais fácil, como é o caso do método de Putzer para o cálculo de e^A.

[3]Destacamos as propriedades da exponencial duma matriz por esta função ter um papel importante neste trabalho.

Existem ainda métodos específicos para serem usados em situações particulares, por exemplo, no caso dos valores próprios de A serem todos iguais ou todos distintos. Um dos métodos utilizados é baseado na decomposição de Jordan da matriz A que exporemos seguidamente de forma resumida.

Sejam, como anteriormente, $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ os valores próprios (distintos) da matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e m_k a multiplicidade de λ_k.

É conhecido que se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ for uma matriz bloco diagonal

$$A = \operatorname{diag}[A_{11}\ A_{22}\ \cdots\ A_{tt}]$$

e a função $f(z)$ estiver definida no espectro de A, isto é, se $f^{(j)}(\lambda_k)$ $(j = 0, \ldots, m_k - 1,\ k = 1, \ldots, s)$ existem, então

$$f(A) = \operatorname{diag}[f(A_{11})\ f(A_{22})\ \cdots\ f(A_{tt})]$$

([83]). Além disso, qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se pode exprimir através da forma canónica de Jordan

$$T^{-1}AT = J = \operatorname{diag}[J_1, \cdots, J_s], \tag{1.11}$$

onde

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m_k},$$

T não singular e $m_1 + \cdots + m_s = n$.

Combinando estes resultados, o seguinte teorema contém um modo prático de calcular $f(A)$.

Teorema 1.5 ([61], p. 557) *Seja f definida no espectro de A e (1.11) a forma canónica de Jordan de A. Então*

$$\begin{aligned} f(A) &= Tf(J)T^{-1} \\ &= T\operatorname{diag}[f(J_1), f(J_2), \cdots, f(J_s)]T^{-1}, \end{aligned}$$

onde

$$f(J_k) = \begin{bmatrix} f(\lambda_k) & \frac{f'(\lambda_k)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(m_k-1)}(\lambda_k)}{(m_k-1)!} \\ 0 & f(\lambda_k) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{f'(\lambda_k)}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_k) \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.1 *Consideremos a matriz*

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n & 0 \end{bmatrix},$$

designada por matriz de criação de ordem $n+1$ *([2] e [82]). Existe uma matriz*

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & (n-1)! & \cdots & 0 & 0 \\ n! & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tal que $T^{-1}HT = J$

Se $f(z) = e^{xz}$*, então* $f(H) = Tf(J)T^{-1}$*, onde*

$$f(J) = e^{xJ} = \begin{bmatrix} f(0) & f'(0) & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} & \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \\ 0 & f(0) & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(0)}{(n-2)!} & \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(0) & f'(0) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x & \cdots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^n}{n!} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$f(H) = e^{xH} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x^{n-1} & (n-1)x^{n-2} & \cdots & 1 & 0 \\ x^n & nx^{n-1} & \cdots & nx & 1 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz será referida no Capítulo 2 como matriz de Pascal generalizada de ordem $n+1$.

1.4 Sobre relações de ordem e ordens monomiais

Em qualquer área onde sejam utilizados polinómios é frequentemente necessário ordenar os monómios que os constituem. No caso de polinómios de uma variável tal ordenação é óbvia; podem ordenar-se por ordem crescente ou decrescente dos seus graus. No caso de polinómios em várias variáveis a tarefa já não é de imediata execução, podendo escolher-se vários tipos de ordenação de acordo com os objectivos que se pretendam atingir ([3], [31], [46], [59], [60]).

Nesta secção recordaremos alguns conceitos sobre relações de ordem ([62], [74]) e ordens monomiais ([3], [31]).

Seja A um conjunto não vazio.

Definição 1.23 *Diz-se que uma relação binária $\preceq$ definida em A é uma relação de ordem parcial em A se satisfaz as propriedades*

i) *reflexiva:* $\forall a \in A \quad a \preceq a$

ii) *anti-simétrica:* $\forall a, b \in A \quad \alpha \preceq b \wedge b \preceq a \Rightarrow a = b;$

iii) *transitiva:* $\forall a, b, c \in A \quad \alpha \preceq b \wedge b \preceq c \Rightarrow a \preceq c.$

Definição 1.24 *Uma relação de ordem parcial $\preceq$ definida em A com a propriedade adicional*

$$\forall a, b \in A \quad a \preceq b \vee b \preceq a,$$

diz-se uma relação de ordem total em A.

Definição 1.25 *Uma relação binária $\prec$ definida em A que satisfaz as propriedades*

i) *irreflexiva:* $\forall a \in A \quad \sim (a \prec a)$

ii) *transitiva:* $\forall a, b, c \in A \quad a \prec b \wedge b \prec c \Rightarrow a \prec c$

diz-se uma relação de ordem parcial estrita em A.

Definição 1.26 *Uma relação binária* $\prec$ *definida em* A *que seja irreflexiva, transitiva e tricotómica, isto é,*

$$\forall a, b \in A \quad a \prec b \vee a = b \vee b \prec a,$$

diz-se uma relação de ordem total estrita em A.

Exemplo 1.2 *A relação* $<$ *("menor") definida em* $\mathbb{N}_0$ *é uma relação de ordem total estrita.*

Teorema 1.6 ([74], p. 33)

i) *Se* $\preceq$ *é uma relação de ordem total (parcial) definida no conjunto* A*, então a relação aí definida por "*$\alpha \preceq \beta \wedge \alpha \neq \beta$*" é uma relação de ordem total (parcial) estrita em* A.

ii) *Se* $\prec$ *é uma relação de ordem total (parcial) estrita definida no conjunto* A*, então a relação aí definida por "*$\alpha \prec \beta \vee \alpha = \beta$*" é uma relação de ordem total (parcial) em* A.

No que se segue usaremos apenas relações de ordem totais estritas $\prec$, que designaremos simplesmente por relações de ordem totais.

Definição 1.27 *Uma relação de ordem total* $\prec$ *definida em* A *diz-se uma boa-ordem se qualquer subconjunto* B*, não vazio, de* A *tiver elemento mínimo, isto é,*

$$\exists b \in B : \forall a \in B, b \prec a.$$

Consideremos agora o conjunto $\mathbb{N}_0^r$. Neste conjunto podem definir-se várias relações de ordem totais que são simultaneamente boas-ordens. Iremos apenas referir duas delas: a ordem lexicográfica ([3], [31]), por ser talvez a mais conhecida e usada, e a colexicográfica ([62]) por ter um papel relevante neste trabalho.

Definição 1.28 *Sejam* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^r$*. Diz-se que* α *e* β *estão ordenados lexicograficamente, e escreve-se* $\alpha \prec_{lex} \beta$*, se em* $\alpha - \beta \in \mathbb{N}_0^r$*, a primeira coordenada não nula (contada da esquerda para a direita) for negativa, isto é,*

$$\exists 1 \leq m \leq r : \forall i < m \quad \alpha_i = \beta_i \wedge \alpha_m < \beta_m.$$

Exemplo 1.3 *Em* $\mathbb{N}_0^3$, $(0,0,0) \prec_{lex} (1,0,0) \prec_{lex} (2,0,1) \prec_{lex} (2,1,0)$.

Definição 1.29 *Sejam* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^r$. *Diz-se que* α *e* β *estão ordenados colexicograficamente, e escreve-se* $\alpha \prec_{colex} \beta$, *se em* $\alpha - \beta \in \mathbb{N}_0^r$, *a primeira coordenada não nula (contada da direita para a esquerda) for negativa, isto é,*

$$\exists 1 \leq m \leq r : \forall i > m \quad \alpha_i = \beta_i \wedge \alpha_m < \beta_m.$$

Exemplo 1.4 *Em* $\mathbb{N}_0^3$, $(0,0,0) \prec_{colex} (1,0,0) \prec_{colex} (2,1,0) \prec_{colex} (2,0,1)$.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo.

Um polinómio $p(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ em r variáveis com coeficientes em $\mathbb{K}$ é uma combinação linear finita de monómios em $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

O conjunto $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ de tais polinómios, munido da adição e multiplicação usuais de polinómios, tem a estrutura de anel comutativo.

Observando que a cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{N}_0^r$ corresponde um e um só monómio $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_r^{\alpha_r}$ e vice-versa, é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}_0^r$ e o conjunto

$$\mathrm{Mon}^r = \{\boldsymbol{x}^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}_0^r\} \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_r].$$

Assim, qualquer relação de ordem $\prec$ estabelecida em $\mathbb{N}_0^r$ é também uma relação de ordem em Mon^r, isto é, se $\alpha \prec \beta$, então $\boldsymbol{x}^\alpha \prec \boldsymbol{x}^\beta$. Há, portanto, várias maneiras de ordenar os elementos de Mon^r, mas consoante os propósitos, pode haver razões para preferir uma delas em detrimento das outras. De qualquer modo, qualquer relação de ordem $\prec$ escolhida tem que observar as seguintes condições:
- permitir comparar quaisquer dois elementos de Mon^r de modo a determinar a sua posição relativa num polinómio;
- qualquer subconjunto de Mon^r ter mínimo com respeito a $\prec$;
- permitir a multiplicação de um monómio por um polinómio ordenado segundo $\prec$ sem "destruir" essa mesma ordenação.

A seguinte definição sintetiza estas ideias.

Definição 1.30 *Chama-se ordem monomial em* Mon^r *a uma relação de ordem total* $\prec$ *que satisfaça as condições:*

i) $\prec$ *é uma boa-ordem em* Mon^r*;*

ii) $\forall \boldsymbol{x}^\alpha \in Mon^r \quad \boldsymbol{x}^\alpha \prec \boldsymbol{x}^\beta \Rightarrow \boldsymbol{x}^\sigma \boldsymbol{x}^\alpha \prec \boldsymbol{x}^\sigma \boldsymbol{x}^\beta$.

Usando as relações de ordem em $\mathbb{N}_0^r$ referidas anteriormente, a lexicográfica e a co-lexicográfica, definamos as correspondentes em Mon^r. Em primeiro lugar é necessário escolher uma ordenação para as variáveis. Seja, por exemplo, $x_1 > x_2 > \cdots > x_r$. Significa esta notação que ao monómio $x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r}$ corresponde o multi-índice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Se se escolhesse $x_r > \cdots > x_2 > x_1$, então corresponderia a $x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r}$ o multi-índice $(\alpha_r, \ldots, \alpha_1)$.

Definição 1.31 *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^r$ e $x_1 > x_2 > \cdots > x_r$. Diz-se que $\boldsymbol{x}^\alpha \prec_{lex} \boldsymbol{x}^\beta$ se $\alpha \prec_{lex} \beta$.*

Adoptando esta definição,

$$x_1^2 x_2^6 x_3 \prec_{lex} x_1^3 x_2 x_3^4.$$

Se considerassemos $x_2 > x_1 > x_3$ então

$$x_1^3 x_2 x_3^4 \prec_{lex} x_1^2 x_2^6 x_3.$$

Observação 1.14 *Uma vez que as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_r$ de um monómio podem ser ordenadas de $r!$ modos distintos, então também existe o mesmo número de ordens monomiais lexicográficas correspondentes.*

Definição 1.32 *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^r$ e $x_1 > x_2 > \cdots > x_r$. Diz-se que $\boldsymbol{x}^\alpha \prec_{colex} \boldsymbol{x}^\beta$ se $\alpha \prec_{colex} \beta$.*

No caso de duas variáveis, usando esta definição tem-se

$$1 \prec_{colex} x_1 \prec_{colex} x_1^2 \prec_{colex} \cdots \prec_{colex} x_2 \prec_{colex} x_1 x_2 \prec_{colex} x_1^2 x_2 \prec_{colex} \cdots \prec_{colex} x_2^2 \prec_{colex} \cdots.$$

Existem ainda outras ordens monomiais, nomeadamente, a ordem lexicográfica graduada e a ordem lexicográfica reversa graduada ([3], [31]), úteis em certos contextos, mas sem relevância para o presente trabalho.

1.5 Análise hipercomplexa

Nesta Secção referimos alguns aspectos da Análise Hipercomplexa que necessitaremos nos capítulos seguintes. Informação mais detalhada sobre o assunto pode encontrar-se, por exemplo, em [11], [28], [45], [65] e [89].

A primeira referência à possibilidade de introdução de números que são raízes quadradas de números reais negativos parece ter surgido no mundo árabe (séc. V). Uma perspectiva moderna dessa possibilidade foi apresentada por G. Cardano (1501-1576). No seu livro *Ars Magna*, além de mostrar como resolver equações cúbicas, também introduziu fórmulas para resolver equações de quarto grau usando aquelas *quantidades imaginárias* - as raízes quadradas de números negativos. Para o desenvolvimento deste novo conceito também contribuiram outros matemáticos, nomeadamente, R. Bombelli (1526-1572), R. Descartes (1596-1650), A. Girard (1595-1632) e G. Leibniz (1646-1716). No entanto, poder-se-á dizer que a Análise Complexa teve o seu grande impulso com os trabalhos de L. Euler (1707-1783) sobre funções de variável complexa e, posteriormente, com os de C. Gauss (1777-1855). Aliás, a este último se deve a introdução do termo "número complexo" e também a concepção de correspondência biunívoca entre o conjunto dos números complexos e o dos pontos do plano. A representação geométrica dos números complexos no plano também havia aparecido nos trabalhos de C. Wessel (1745-1818) e J. Argrand (1768-1822), mas na época não foi suficientemente notada para prosseguir o estudo daqueles números. Foi a partir de Gauss e da definição clara de número complexo que se desenvolveu o estudo das funções complexas.

A Análise Complexa tornou-se uma importante área da matemática a partir do séc. XIX, com aplicações em outros ramos do saber, nomeadamente em Física. O próprio Euler, que introduziu e estudou as principais funções complexas e suas condições de diferenciabilidade, aplicou estes estudos em hidrodinâmica e em cartografia. No entanto, pode dizer-se que a implantação definitiva daquela área se deveu fundamentalmente aos trabalhos de A. Cauchy (1789-1857) sobre a construção da teoria de integração complexa, de K. Weierstrass (1815-1897) sobre a teoria de séries de funções complexas e de B. Riemann (1826-1866) que introduziu e desenvolveu a teoria geométrica de funções complexas.

Um tema recorrente da Análise Complexa é o estudo das funções holomorfas e das relações entre as suas diversas representações. Dada a importância deste tema, várias têm sido as tentativas de generalizar a teoria das funções holomorfas a espaços de dimensão superior. Uma delas levou ao desenvolvimento, no final do séc. XIX, da teoria de funções de várias variáveis complexas; outra levou ao aparecimento da designada Análise Hipercomplexa (ou Análise de Clifford) cujos alicerces se encontram nas álgebras de Clifford.

1.5.1 Álgebras de Clifford

W. R. Hamilton (1805-1865) tinha intenção criar um sistema de números que servisse para aplicações em Física. Baseando-se na propriedade dos números complexos que possibilitava operar rotações, tentou estender a álgebra destes números para três dimensões. Foi nesta linha de pensamento que criou os quaterniões[4] e respectiva álgebra consciente de que, apesar da generalização conseguida, o desenvolvimento de uma teoria de funções de variável quaterniónica não poderia ser feito de modo inteiramente semelhante ao das funções de variável complexa.

Simultaneamente, H. Grassmann (1809-1877) apresentava uma nova perspectiva para o cálculo geométrico onde as grandezas físicas eram representadas por objectos geométricos e onde era introduzido um produto geométrico válido para espaços de qualquer dimensão: o produto exterior.

Os trabalhos destes dois matemáticos não foram ignorados por W. K. Clifford (1845-1879) que unificou as duas teorias, combinando numa única estrutura os produtos interno e exterior. O produto assim obtido goza da propriedade associativa, tal como o de Grassmann, tendo ainda a vantagem de ser invertível, como o da álgebra dos quaterniões de Hamilton. A nova álgebra construída, que Clifford designou por *álgebra geométrica* e que actualmente conhecemos por álgebra de Clifford, aliava assim as vantagens dos quaterniões com as da geometria vectorial, tendo todas as condições para se tornar um auxílio precioso noutras áreas, em especial em Física. No entanto, a morte prematura de Clifford e o advento do cálculo vectorial desenvolvido por J. Gibbs (1839-1903) e Heaviside (1850-1925), cujos trabalhos também tiveram origem na análise da álgebra de Grassmann, impediram a exploração das potencialidades da álgebra geométrica. Na verdade, o cálculo vectorial, embora não tão exigente do ponto de vista algébrico como as álgebras de Hamilton, Grassmann ou Clifford, tornou-se um prático instrumento na descrição de fenómenos tridimensionais, sendo rapidamente introduzido em Física. Apesar do seu sucesso, este cálculo apresentava algumas limitações. A principal resultava do facto do produto utilizado (produto vectorial) apenas existir no espaço de três dimensões; no espaço bidimensional não existe uma vez que não há lugar para o terceiro vector ortogonal aos dois vectores operados e no espaço quadridimensional o vector resultante não é único.

O aparecimento da Teoria da Relatividade Restrita (1905) veio salientar a necessidade de utilização de uma nova álgebra, já que tal teoria era formulada num espaço de quatro dimensões. A álgebra tensorial entretanto desenvolvida (para a qual contribuiram Levi-Civita e Einstein, entre outros) foi essencial para o desenvolvimento daquela teoria, contudo era bastante complicada restringindo-se a sua aplicabilidade a um certo conjunto de problemas. Por volta de 1930 reapareceu então o interesse pelas álgebras de

[4]W. R. Hamilton descobriu os quaterniões em 1843 e, sentindo que tal descoberta poderia revolucionar a física matemática, dedicou o resto da vida ao seu estudo. O seu livro *Elements of Quaternions* foi publicado postumamente pelo seu filho, em 1866.

Clifford relacionado com a teoria de spinors na qual as álgebras de Pauli e de Dirac têm um papel fundamental. Foi o físico D. Hestenes (1933-) que começando por desvendar o significado geométrico subjacente às álgebras de Pauli e de Dirac fez resurgir a álgebra geométrica ([70]), pois estava convicto que aí estaria a chave para a criação de uma linguagem unificadora entre a física e a matemática ([71], [72]).

Na mesma época, K. R. Fueter (1880-1950) ([54], [55], [56], [57]) e seus discípulos (de 1930 até final dos anos 40) deram o grande impulso no sentido do aparecimento de uma teoria de funções que generaliza a teoria de funções de uma variável complexa a espaços de dimensão superior, mas com um carácter diferente da generalização conseguida no caso da teoria de funções de várias variáveis complexas. Desta feita, foram desenvolvidos métodos analíticos baseados nas álgebras de Clifford que serviram de suporte ao desenvolvimento daquela teoria, designada por *teoria de funções hipercomplexa*[5]. Ao mesmo tempo e independentemente dos trabalhos de Fueter, também G. C. Moisil (1906-1973) e N. Teodorescu (1908-2000) desenvolveram os fundamentos de uma teoria de funções holomorfas generalizadas no espaço euclideano tridimensional.

Todos estes trabalhos conduziram à construção sistemática de uma teoria de funções baseada nas álgebras de Clifford, no início dos anos 70. É nesta época e neste contexto que se insere a investigação do grupo de R. Delanghe (1940-), da Universidade de Ghent, cujos trabalhos consistem essencialmente no desenvolvimento de uma teoria de funções regulares, que Delanghe designou por *monogénicas* ([44]), alicerçada nas ideias originais de Fueter e usando álgebras de Clifford. A investigação deste grupo muito contribuiu para o desenvolvimento de uma área da matemática que oferece uma generalização natural da análise complexa para dimensões superiores de um ponto de vista diferente do das funções holomorfas de várias variáveis complexas - a Análise de Clifford ou Análise Hipercomplexa ([11], [44]). A partir daí muitas têm sido as contribuições para o desenvolvimento desta área quer nos seus aspectos teóricos, quer nas aplicações. Muitas dessas contribuições tornaram-se referências incontornáveis para o estudo da análise de Clifford ([66], [67], [68], [87], [88]).

Em [63] e [64] estão contidas listas de referências bibliográficas sobre assuntos de Análise de Clifford e, em particular, de análise quaterniónica até 2008 que, não sendo exaustivas ou pelo menos não contendo todas as publicações até aí existentes, torna bem patente o interesse nesta área de investigação. Esse interesse tem-se mantido como prova a existência de grupos de investigação relacionados com a Análise de Clifford em diversos

[5]Note-se que no passado designou-se por sistema hipercomplexo qualquer álgebra de dimensão finita com elemento unidade sobre o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Por exemplo, os números reais, os complexos, os quaterniões, os octoniões, os números de Clifford (elementos duma álgebra de Clifford), entre outros, constituem sistemas hipercomplexos.

países, entre os quais, Alemanha, Austrália, Bélgica, China, Estados Unidos da América, Finlândia, França, Itália, Japão, México, Portugal, Reino Unido e Rússia.

No que se segue abordaremos conceitos de Análise de Clifford, concentrando-nos naqueles que são essenciais para os objectivos desta dissertação.

De entre os diversos modos de introduzir uma álgebra de Clifford, a mais comum consiste em defini-la recorrendo a uma base ortonormada do espaço vectorial que lhe está subjacente (que pode ser euclideano, de Minkowski ou, em geral, pseudo-euclideano) e às respectivas regras de multiplicação (cf.[28]).

Consideremos a base ortonormada standard do espaço vectorial $\mathbb{R}^n$, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, munida da regra de multiplicação

$$e_k e_l + e_l e_k = -2\delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \cdots, n,$$

onde δ_{kl} representa o símbolo de Kronecker. Este produto gera a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ sobre $\mathbb{R}$, de dimensão 2^n, associativa mas não comutativa. Uma base de $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ é formada pelos elementos do conjunto

$$\{e_A : A \subseteq \{1, \cdots, n\}\}, \tag{1.12}$$

onde $e_A = e_{h_1} e_{h_2} \cdots e_{h_r}$, $1 \leq h_1 < \cdots < h_r \leq n$, $e_\emptyset = e_0 = 1$. Assim, qualquer elemento $c \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$ (número de Clifford) pode ser escrito de modo único como combinação linear dos elementos de (1.12):

$$c = \sum_A c_A e_A, \quad c_A \in \mathbb{R}.$$

Consideremos os subespaços vectoriais de $\mathcal{C}\ell_{0,n}$, sobre $\mathbb{R}$,

$$\mathcal{C}\ell_{0,n}^k = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_A : |A| = k\}, \quad k = 0, \ldots, n,$$

de dimensão $\binom{n}{k}$, cujos elementos se designam por *k-vectores.* Estes elementos podem ser vistos como as imagens dos elementos de $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ pela aplicação linear

$$\begin{aligned} k\text{-vec}(.) : \mathcal{C}\ell_{0,n} &\longrightarrow \mathcal{C}\ell_{0,n}^k \\ c &\longmapsto \sum_{|A|=k} c_A e_A. \end{aligned}$$

Assim, todo o número de Clifford $c \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$ se pode escrever na forma

$$c = \sum_{k=0}^{n} k\text{-vec}(c),$$

ou seja,

$$\mathcal{C}\ell_{0,n} = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{C}\ell_{0,n}^{k}.$$

A dimensão de $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ pode agora ser calculada por

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Em particular, os elementos da forma $c = 0\text{-vec}(c), c = 1\text{-vec}(c), c = 2\text{-vec}(c), c = n\text{-vec}(c)$ são chamados *escalares*, *vectores*, *bi-vectores* e *pseudo-escalar*, respectivamente.

Observação 1.15 *Os casos $n = 1$ e $n = 2$ permitem-nos observar que o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ e o corpo não comutativo dos quaterniões, respectivamente, são isomorfos das álgebras de Clifford $\mathcal{C}\ell_{0,1}$ e $\mathcal{C}\ell_{0,2}$. No primeiro caso identificamos a base usual de $\mathbb{C}$, $\{1, i\}$, com $\{1, e_1\}$; no último identificamos a base usual do corpo dos quaterniões, $\{1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, com $\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$.*

A álgebra $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ pode decompor-se em dois subespaços,

$$\mathcal{C}\ell_{0,n}^{+} = \bigoplus_{k \text{ par}} \mathcal{C}\ell_{0,n}^{k} \qquad e \qquad \mathcal{C}\ell_{0,n}^{-} = \bigoplus_{k \text{ ímpar}} \mathcal{C}\ell_{0,n}^{k},$$

sendo $\mathcal{C}\ell_{0,n}^{+}$ uma subálgebra de $\mathcal{C}\ell_{0,n}$, designada por subálgebra par ([65]). Assim, é também possível estabelecer um isomorfismo entre o corpo dos quaterniões e $\mathcal{C}\ell_{0,3}^{+}$, identificando $\{1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, com $\{1, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3\}$.

O conjugado de um elemento $c \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$ é definido por

$$\overline{c} = \sum_{A} c_A \overline{e}_A,$$

onde $\overline{e}_A = \overline{e}_{h_r}\overline{e}_{h_{r-1}} \cdots \overline{e}_{h_1}, \ \overline{e}_i = -e_i, \ i = 1, \ldots, n \ \text{ e } \ \overline{e}_0 = e_0 = 1.$

Consideremos o subespaço vectorial de $\mathcal{C}\ell_{0,n}$,

$$\mathcal{A} := \text{span}_{\mathbb{R}}\{1, e_1, \ldots, e_n\}.$$

Definição 1.33 *Chamamos para-vectores aos elementos $x \in \mathcal{A}$, isto é, aos números de Clifford da forma*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \\ &:= x_0 + \underline{x}. \end{aligned}$$

Os para-vectores são, portanto, a soma de um escalar com um vector, isto é,

$$\mathcal{A} = \mathcal{C}\ell^0_{0,n} \oplus \mathcal{C}\ell^1_{0,n}.$$

O conjugado do para-vector x é obviamente

$$\overline{x} = x_0 - \underline{x}.$$

Esta operação de conjugação goza de várias propriedades, algumas delas análogas à da conjugação em $\mathbb{C}$, por exemplo,

$$\begin{aligned}
&\bar{\bar{x}} = x, \\
&\overline{x + x'} = \bar{x} + \bar{x'}, \\
&\overline{\lambda x} = \lambda \bar{x}, \\
&\overline{xx'} = \bar{x'}\bar{x},
\end{aligned}$$

com $x, x' \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. ([65]).

A norma de x é dada por

$$|x| = \sqrt{x\overline{x}} = \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2 \right)^{1/2},$$

coincidindo com a norma euclideana em $\mathbb{R}^{n+1}$, e todo o para-vector não nulo é invertível, sendo o seu inverso

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}.$$

1.5.2 Funções monogénicas e séries de potências generalizadas

O principal objectivo da teoria de funções hipercomplexas é o estudo de propriedades das funções monogénicas. Estas não são mais do que generalizações das funções holomorfas, consideradas em análise complexa, para funções com valores numa álgebra de Clifford, satisfazendo uma condição de holomorfia generalizada.

Os primeiros passos no sentido desta extensão foram dados por Fueter que, usando o método de Cauchy-Riemann, definiu uma classe de funções quaterniónicas com características análogas às das holomorfas e desenvolveu uma teoria para essas funções, ditas regulares, que inclui, entre outros, correspondentes do teorema de Cauchy, do teorema de Liouville e das séries de Laurent. Com o recente estudo sistemático da Análise de Clifford, cujo desenvolvimento se encontra bem patente e sintetizado em [11], [65] e [89], tem-se procurado munir o espaço vectorial $\mathbb{R}^{n+1}$ de uma estrutura hipercomplexa com vista à obtenção de extensões do conceito de holomorfia a espaços de dimensão superior, bem como proceder à representação de funções com valores em $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ em série de potências.

Neste sentido existem dois modos usados habitualmente para conferir a $\mathbb{R}^{n+1}$ a necessária estrutura (cf. [89]). Um deles consiste em considerar um isomorfismo entre $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathcal{A}$, identificando cada elemento $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ com o para-vector $x \in \mathcal{A}$.

Nesta abordagem da teoria de funções hipercomplexas são consideradas funções

$$\begin{aligned} f : \Omega &\longrightarrow \mathcal{C}\ell_{0,n} \\ x &\longmapsto \sum_A f_A(x) e_A, \end{aligned}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathcal{A}$ é aberto e as funções coordenadas f_A têm valores em $\mathbb{R}$, isto é,

$$f_A : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Outro modo, proposto por H. Malonek em [87], consiste em usar as chamadas variáveis hipercomplexas [6]

$$\begin{aligned} z_k &= -\frac{1}{2}(e_k x + x e_k) \\ &= x_k - x_0 e_k, \quad k = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{1.13}$$

para dotar $\mathbb{R}^{n+1}$ de uma estrutura hipercomplexa baseada no isomorfismo entre este conjunto e

$$\mathcal{H}^n = \{\boldsymbol{z} : \boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n), z_k = x_k - x_0 e_k, x_0, x_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, n\}.$$

Neste caso as funções envolvidas no desenvolvimento da teoria são

$$\begin{aligned} f : \Omega &\longrightarrow \mathcal{C}\ell_{0,n} \\ \boldsymbol{z} &\longmapsto \sum_A f_A(\boldsymbol{z}) e_A, \end{aligned}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathcal{H}^n$ é aberto e as funções coordenadas f_A são também reais com variáveis em Ω.

[6] Estas variáveis são também chamadas variáveis de Fueter ou, segundo Delanghe [44] , representam um tipo de variáveis hipercomplexas totalmente regulares.

Observação 1.16 *As variáveis reais x_0 e x_k, $k = 1, \dots, n$ que figuram em (1.13) estão relacionadas com a variável $z \in \mathcal{A}$ e seu conjugado do seguinte modo:*

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2}(x + \bar{x}) \\ x_k &= \frac{1}{2}(\bar{x}e_k - e_k x) = \frac{1}{2}(e_k \bar{x} - x e_k), \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Considerando $k = 1$ e identificando i com e_1 são reproduzidas as relações conhecidas entre números complexos $z = x + iy$ e seus conjugados $\bar{z} = x - iy$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ y &= \frac{1}{2}(\bar{z}i - iz). \end{aligned}$$

Na base da teoria de funções complexas de n variáveis complexas está a identificação de um vector $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ com o vector $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, isto é, a identificação de $\mathbb{R}^{2n}$ com $\mathbb{C}^n$. Em particular, no caso da teoria de funções complexas de uma variável complexa identifica-se $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$, o que possibilita trabalhar no espaço de dimensão dois usando apenas uma variável complexa. A primeira abordagem (usando para-vectores), devido à identificação de $\mathbb{R}^{n+1}$ com $\mathcal{A}$, reproduz e amplia aquela possibilidade para dimensões superiores, ou seja, torna possível trabalhar em espaços de dimensão $n + 1$ usando apenas uma variável hipercomplexa x. Já a segunda abordagem permite apenas a "economia" de uma unidade em termos da comparação entre a dimensão $(n+1)$ do espaço original e o número n de variáveis hipercomplexas a considerar.

Na teoria de funções de uma variável complexa, a holomorfia de uma função $w : \Upsilon \to \mathbb{C}$, com $\Upsilon \subset \mathbb{C}$ aberto, consiste na verificação local da equação diferencial

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0,$$

onde $z = x + iy$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$ é o operador complexo de Cauchy-Riemann. Uma generalização natural deste operador para dimensões superiores é o chamado *operador de Cauchy-Riemann generalizado*[7],

$$\bar{\partial} := \partial_0 + \partial_{\underline{x}}, \qquad \partial_0 := \frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad \partial_{\underline{x}} := \sum_{i=0}^{n} e_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

[7] D tem sido o símbolo mais utilizado para representar este operador, contudo usamos aqui a notação $\bar{\partial}$, introduzida em [65], por transmitir melhor a ideia de generalização do operador complexo.

O operador conjugado de $\bar{\partial}$,

$$\partial = \partial_0 - \partial_{\underline{x}},$$

corresponde também a uma generalização para dimensões superiores do operador de derivação complexo $\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$.

Este operador $\bar{\partial}$ é fundamental em toda a teoria de funções hipercomplexas uma vez que permite generalizar o conceito de função holomorfa a funções com valores em $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ como se segue:

Definição 1.34 *Considere-se um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e a função $f : \Omega \to \mathcal{C}\ell_{0,n}$ continuamente diferenciável real. Diz-se que f é monogénica à esquerda (direita) em Ω, se satisfaz a equação diferencial*

$$\bar{\partial} f = 0 \quad (f\bar{\partial} = 0).^8$$

Na construção da teoria de funções hipercomplexas a partir da teoria de funções holomorfas de uma variável complexa, há diferenças assinaláveis a considerar. Desde logo, podemos constatar que, por exemplo, a função identidade $f(x) = x, x \in \mathcal{A}$ só é monogénica no caso $\mathcal{A} = \mathbb{C}$. De facto, $\bar{\partial} x = 1 - n$ e, portanto, $\bar{\partial} x = 0$ sse $n = 1$. Além disso, também as potências de $x \in \mathcal{A}$, $f(x) = x^k$, $k = 2, 3, \ldots$, não são monogénicas e como tal não constituem generalizações adequadas das potências holomorfas z^k, $z \in \mathbb{C}$. Neste aspecto, a estrutura proposta em [87] trouxe significativos avanços que contribuiram para a obtenção de equivalentes hipercomplexos das potências holomorfas e, em consequência, a possibilidade de chegar a uma forma explícita apropriada para as séries de potências de funções monogénicas.

Embora as componentes do vector $\boldsymbol{z} \in \mathcal{H}^n$ sejam monogénicas, o mesmo não acontece com os seus produtos $z_i z_k$, $i \neq k$. Por essa razão, em 1990, H. Malonek ([87], [88]) introduziu um produto permutativo que veio resolver esse problema da monogenecidade e permitir o desenvolvimento de um cálculo com séries de potências.

Definição 1.35 ([87], p. 29) *Seja $(V, +, .)$ um anel, não necessariamente comutativo, e $a_k \in V$ $(k = 1, \ldots, n)$. Chama-se produto simétrico "$\times$" a*

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = \frac{1}{n!} \sum_{\pi(i_1,\ldots,i_n)} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n}, \tag{1.14}$$

onde o somatório percorre todas as permutações de $(i_1, \ldots, i_n)$.

[8] Estas equações são por vezes designadas por equações diferenciais de Cauchy-Riemann generalizadas.

Este produto goza das propriedades distributiva em relação à adição e comutativa, no entanto, não goza da propriedade associativa. Além disso, satisfaz as fórmulas recursivas

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = \frac{1}{n}\left[a_1(a_2 \times \cdots \times a_n) + \cdots + a_n(a_1 \times \cdots \times a_{n-1})\right] \tag{1.15}$$

$$= \frac{1}{n}\left[(a_2 \times \cdots \times a_n)a_1 + \cdots + (a_1 \times \cdots \times a_{n-1})a_n\right] \tag{1.16}$$

que em certos cálculos algébricos reduzem os inconvenientes da não associatividade.

Usaremos a convenção introduzida em [88] que estabelece que, se o factor a_j figurar no produto (1.14) σ_j vezes, se escreve abreviadamente

$$\underbrace{a_1 \times \cdots \times a_1}_{\sigma_1 \text{ vezes}} \times \cdots \times \underbrace{a_n \times \cdots \times a_n}_{\sigma_n \text{ vezes}} = {a_1}^{\sigma_1} \times \cdots \times {a_n}^{\sigma_n} \tag{1.17}$$

$$= \boldsymbol{a}^{\sigma}.$$

No caso de se tratar de potências no sentido usual recorremos ao uso de parêntesis na base das potências.

Tendo em conta as repetições dos factores em (1.14) pode escrever-se

$$a_1^{\sigma_1} \times \cdots \times a_n^{\sigma_n} = \frac{\sigma!}{|\sigma|!} \sum_{\pi(i_1,\ldots,i_{|\sigma|})} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{|\sigma|}}, \tag{1.18}$$

onde o somatório percorre todas as permutações distintas de $(i_1, \ldots, i_{|\sigma|})$.

As fórmulas recursivas (1.15)-(1.16) aplicadas às potências $\boldsymbol{a}^{\sigma}$ assumem a forma

$$\boldsymbol{a}^{\sigma} = \frac{1}{|\sigma|}\left[\sigma_1 a_1 (a_1^{\sigma_1 - 1} \times a_2^{\sigma_2} \times \cdots \times a_n^{\sigma_n}) + \cdots + \sigma_n a_n (a_1^{\sigma_1} \times a_2^{\sigma_2} \times \cdots \times a_n^{\sigma_n - 1})\right] \tag{1.19}$$

$$= \frac{1}{|\sigma|}\left[\sigma_1 (a_1^{\sigma_1 - 1} \times a_2^{\sigma_2} \times \cdots \times a_n^{\sigma_n}) a_1 + \cdots + \sigma_n (a_1^{\sigma_1} \times a_2^{\sigma_2} \times \cdots \times a_n^{\sigma_n - 1}) a_n\right], \tag{1.20}$$

(cf. [88]).

Considerando agora as variáveis (1.13), (1.14) juntamente com a convenção (1.17) permitem estabelecer uma fórmula polinomial inteiramente análoga à existente no caso de várias variáveis comutativas, isto é,

$$(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)^k = \sum_{|\sigma|=k} \binom{k}{\sigma} z_1^{\sigma_1} \times \cdots \times z_n^{\sigma_n} \tag{1.21}$$

$$= \sum_{|\sigma|=k} \binom{k}{\sigma} \boldsymbol{z}^{\sigma}, \quad k \in \mathbb{N}$$

onde $\binom{k}{\sigma} = \frac{k!}{\sigma!}$ (cf.[88]).

As funções $f(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}^{\sigma}$ [9] são polinómios homogéneos de grau $|\sigma|$, monogénicos e constituem um sistema linearmente independente em $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ (cf. [11]). Assim, estas funções podem ser consideradas generalizações das potências holomorfas z^k, $z \in \mathbb{C}$ e, portanto, podem servir de base para as séries de potências generalizadas cujo conceito foi introduzido em [88]. Aí são apresentadas as séries

$$P(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{a}) = \sum_{\sigma} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{a})^{\sigma} c_{\sigma}$$

e

$$P(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{z}) = \sum_{\sigma} c_{\sigma} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{a})^{\sigma},$$

$c_\sigma \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$, como séries (múltiplas) de potências hipercomplexas à esquerda e à direita, respectivamente, centradas em $\boldsymbol{a} \in \Omega \subset \mathcal{H}^n$. Se $\boldsymbol{a}$ coincidir com a origem e ordenando as potências por ordem crescente do seu grau de homogeneidade, tais séries escrevem-se na forma

$$P(\boldsymbol{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|\sigma|=k} \boldsymbol{z}^{\sigma} c_{\sigma} \right)$$

e

$$P(\boldsymbol{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|\sigma|=k} c_{\sigma} \boldsymbol{z}^{\sigma} \right),$$

respectivamente.

Observação 1.17 *Como o produto "$\times$" coincide com o produto usual no caso de anéis comutativos, como é o caso de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, a restrição $P(\boldsymbol{z})|_{x_0=0}$ reduz-se à série de potências usual em $\boldsymbol{x}^{\sigma}$.*

Prova-se ainda que se estas séries de potências generalizadas forem convergentes em algum policilindro da forma

$$\mathcal{V}(\mathbf{R}) = \{\boldsymbol{z} \in \mathcal{H}^n : |z_k|^2 = x_0^2 + x_k^2 < R_k^2, \quad k = 1, \ldots, n\}, \tag{1.22}$$

geram, no interior desse domínio de convergência, uma função monogénica $f(\boldsymbol{z})$ que

[9] Estas funções são chamadas potências generalizadas uma vez que coincidem com as potências no caso de várias variáveis complexas, substituindo o produto de complexos pelo produto simétrico.

coincide aí com a sua série de Taylor, ou seja,

$$f(\boldsymbol{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{|\sigma|=k} \boldsymbol{z}^{\sigma} \binom{k}{\sigma} \frac{\partial^{|\sigma|} f(\mathbf{0})}{\partial \boldsymbol{x}^{\sigma}} \right)$$

e

$$f(\boldsymbol{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{|\sigma|=k} \binom{k}{\sigma} \frac{\partial^{|\sigma|} f(\mathbf{0})}{\partial \boldsymbol{x}^{\sigma}} \right) \boldsymbol{z}^{\sigma}$$

(cf. [89]).

Um dos problemas de análise hipercomplexa que se manteve em aberto durante muito tempo foi o da diferenciabilidade hipercomplexa como generalização, para espaços de dimensão superior, do conceito de diferenciabilidade complexa. Foi Sudbery ([107]) que primeiro apresentou o conceito de derivabilidade assente em formas diferenciais mas apenas para funções quaterniónicas. Este conceito foi posteriormente generalizado para funções hipercomplexas com valores em $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ por Gürlebeck e Malonek ([66], Definição 4), o que lhes permitiu caracterizar as funções monogénicas pela existência da suas derivadas hipercomplexas.

Teorema 1.7 ([89], p. 130) *Uma função diferenciável real $f : \Omega \subset \mathcal{H}^n \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{0,n}$ é derivável à esquerda (direita) em Ω se e só se for monogénica à esquerda (direita) em Ω.*

Este teorema conduziu à interpretação de $\frac{1}{2}\partial f$ ($\frac{1}{2}f\partial$) como derivada hipercomplexa à esquerda (direita) da função f ([66]). Além disso, atendendo à monogenecidade à esquerda

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = -e_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \cdots - e_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

e, portanto, a derivada hipercomplexa à esquerda $\frac{1}{2}\partial f = \frac{\partial f}{\partial x_0} = -\partial_{\underline{x}} f$. Analogamente, pela monogenecidade à direita prova-se que $\frac{1}{2} f\partial = \frac{\partial f}{\partial x_0}$.

Observação 1.18 *Esta situação é análoga à do caso das funções complexas holomorfas $w : \Upsilon \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cuja derivada $\frac{dw}{dz}$ coincide com $\frac{\partial w}{\partial x}$. Com efeito, no contexto do cálculo de Wirtinger, as derivadas parciais complexas $\frac{\partial w}{\partial z}$ e $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}$ são formalmente definidas por*

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - i \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

A holomorfia de w, isto é, $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$ implica $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}$ e, consequentemente, $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = -i\frac{\partial w}{\partial y}$.

A derivada parcial das potências generalizadas $\boldsymbol{z}^\sigma$ com respeito a x_k é

$$\frac{\partial \boldsymbol{z}^\sigma}{\partial x_k} = \sigma_k \boldsymbol{z}^{\sigma - \mathbf{1}_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

onde $\mathbf{1}_k$ é o multi-índice com 1 na posição k e zero nas restantes posições, como se pode concluir de (1.18). Assim, dada a monogenecidade de $\boldsymbol{z}^\sigma$, a derivada hipercomplexa à esquerda (direita) é

$$\frac{1}{2}\partial \boldsymbol{z}^\sigma = -\sum_{k=1}^{n} e_k \sigma_k \boldsymbol{z}^{\sigma - \mathbf{1}_k} \qquad (\frac{1}{2}\boldsymbol{z}^\sigma \partial = -\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{z}^{\sigma - \mathbf{1}_k} \sigma_k e_k).$$

Note-se que, neste caso, estas duas derivadas hipercomplexas coincidem. De facto, a partir de (1.19)-(1.20), isto é, de $\sum_{k=1}^{n} \sigma_k z_k \boldsymbol{z}^{\sigma - \mathbf{1}_k} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \boldsymbol{z}^{\sigma - \mathbf{1}_k} z_k$ e substituindo em ambos os membros z_k por $x_k - x_0 e_k$, deduz-se que $\sum_{k=1}^{n} \sigma_k e_k \boldsymbol{z}^{\sigma - \mathbf{1}_k} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{z}^{\sigma - \mathbf{1}_k} \sigma_k e_k$, logo

$$\frac{1}{2}\partial \boldsymbol{z}^\sigma = \frac{1}{2}\boldsymbol{z}^\sigma \partial$$

(cf. [66]).

1.5.3 Extensão de Cauchy-Kowalewskaya

A designada extensão de Cauchy-Kowalewskaya é resultado da persecução de um objectivo subjacente à análise de Clifford e que consiste em generalizar para dimensões superiores resultados existentes na teoria das funções holomorfas. Neste caso o que se pretende generalizar é o teorema de Cauchy-Kowalewskaya que manifesta a dependência do domínio de analiticidade de funções complexas de variável real, do dominío das suas extensões holomorfas no plano complexo ([12]).

Teorema 1.8 (de Cauchy-Kowalewskaya) *Se f^* é uma função holomorfa em $\Upsilon^* \subset \mathbb{C}$ e $\Upsilon = \Upsilon^* \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ então a restrição de f^* a Υ é uma função analítica em Υ. Inversamente, se f é analítica no aberto $\Upsilon \subset \mathbb{R}$, então existe um aberto $\Upsilon^* \subset \mathbb{C}$ tal que $\Upsilon \subset \Upsilon^*$ e uma função holomorfa f^* em Υ^* tal que $f = f^*|_\Upsilon$.*

Brackx et al. ([11], [12]) procuraram um resultado análogo para funções monogénicas em $\mathbb{R}^{n+1}$ versus funções analíticas em $\mathbb{R}^n$.

Consideremos o policilindro (1.22) e o paralelepípedo

$$\mathcal{U}(\mathbf{R}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |x_k| < R_k, \quad k = 1, \ldots, n\},$$

isto é, $\mathcal{U}(\mathbf{R}) = \mathcal{V}(\mathbf{R}) \cap \{\boldsymbol{z} \in \mathcal{H}^n : x_0 = 0\}$.

O seguinte teorema sintetiza para funções $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathcal{H}^n \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{0,n}$ os resultados obtidos nos trabalhos acima referidos.

Teorema 1.9 ([89]) *Se $f(\boldsymbol{x})$ é analítica em $\mathcal{U}(\boldsymbol{R})$ tal que*

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{1}{\sigma!} \frac{\partial^{|\sigma|} f(\mathbf{0})}{\partial \boldsymbol{x}^\sigma} \boldsymbol{x}^\sigma,$$

então existe uma função $f^*(\boldsymbol{z})$ monogénica à esquerda (direita) em $\mathcal{V}(\boldsymbol{R})$, representada de modo único por

$$f_L^*(\boldsymbol{z}) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \boldsymbol{z}^\sigma \frac{1}{\sigma!} \frac{\partial^{|\sigma|} f(\mathbf{0})}{\partial \boldsymbol{x}^\sigma} \qquad \left(f_R^*(\boldsymbol{z}) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{1}{\sigma!} \frac{\partial^{|\sigma|} f(\mathbf{0})}{\partial \boldsymbol{x}^\sigma} \boldsymbol{z}^\sigma \right)$$

e tal que

$$f_L^*(\boldsymbol{z})|_{\mathcal{U}(\boldsymbol{R})} = f_R^*(\boldsymbol{z})|_{\mathcal{U}(\boldsymbol{R})} = f^*(\boldsymbol{z})|_{\mathcal{U}(\boldsymbol{R})} = f(\boldsymbol{x}).$$

A função $f_L^*(\boldsymbol{z})$ ($f_R^*(\boldsymbol{z})$) é designada por *extensão de Cauchy-Kowalewskaya* à esquerda (direita) da função f.

Como consequência do teorema agora enunciado tem-se que se f é uma função inteira em $\mathbb{R}^n$, isto é, analítica em $\mathbb{R}^n$ e a sua série de Taylor na origem converge, como série de potências múltipla, em todo o $\mathbb{R}^n$, então a sua extensão de Cauchy-Kowalewskaya à esquerda (direita) é monogénica à esquerda (direita) em todo o $\mathbb{R}^{n+1}$.

Sejam agora f e g funções monogénicas à esquerda (direita) em $\mathbb{R}^{n+1}$. Então $f|_{\mathbb{R}^n},\ g|_{\mathbb{R}^n}$ e $f|_{\mathbb{R}^n}.g|_{\mathbb{R}^n}$ são funções inteiras em $\mathbb{R}^n$. A extensão de Cauchy-Kowalewskaya à esquerda (direita), $(f|_{\mathbb{R}^n}.g|_{\mathbb{R}^n})_L^* \quad ((f|_{\mathbb{R}^n}.g|_{\mathbb{R}^n})_R^*)$, de $f|_{\mathbb{R}^n}.g|_{\mathbb{R}^n}$, monogénica à esquerda (direita) em $\mathbb{R}^{n+1}$, é chamada *produto de Cauchy-Kowalewskaya* de f e g à esquerda (direita) e representa-se por $f \odot_L g \ \ (f \odot_R g)$ (cf. [12]).

Proposição 1.9 ([12]) *O produto de Cauchy-Kowalewskaya goza das seguintes propriedades:*

i) $(f \odot_L g) \odot_L h = f \odot_L (g \odot_L h)$;

ii) $f \odot_L g = g \odot_L f$ *se* $f|_{\mathbb{R}^n}.g|_{\mathbb{R}^n} = g|_{\mathbb{R}^n}.f|_{\mathbb{R}^n}$;

iii) $1 \odot_L f = f \odot_L 1 = f$.

Observação 1.19 *As propriedades são igualmente válidas para* $\odot_R$.

No caso das variáveis totalmente regulares os produtos de Cauchy-Kowalewskaya à esquerda e à direita coincidem. De facto, a extensão de Cauchy-Kowalewskaya, quer à esquerda quer à direita, de $x_i, \;\; i = 1, \ldots, n$ é z_i e a dos produtos $x_i x_j$ é $z_i \times z_j$, uma vez que $z_i|_{\mathcal{U}(\mathbf{R})} = x_i$ e $z_i \times z_j|_{\mathcal{U}(\mathbf{R})} = \frac{1}{2}(z_i z_j + z_j z_i)|_{\mathcal{U}(\mathbf{R})} = x_i x_j$. Assim,

$$z_i \odot_L z_j = z_i \odot_R z_j = z_i \times z_j.$$

Em caso de coincidência de $\odot_L$ e $\odot_R$ representa-se o produto de Cauchy-Kowalewskaya por $\odot$.

A grande vantagem deste produto é possibilitar a construção de generalizações adequadas de funções elementares de uma variável para funções monogénicas em $\mathbb{R}^{n+1}$ ([11], [12]). Esta possibilidade será usada no Capítulo 4 para definir uma função exponencial generalizada adequada aos objectivos aí propostos.

Capítulo 2

Polinómios de Appell Unidimensionais

2.1 Abordagens a polinómios de Appell unidimensionais

Em 1880, Paul Emile Appell ([5]) investigou polinómios com uma propriedade específica relacionada com a sua derivada aos quais, mais tarde, foi atribuído o seu nome. Desde então o interesse por esses polinómios tem-se manifestado através do aparecimento de diversas abordagens, generalizações e extensões para várias variáveis, motivadas pela sua vasta aplicação, quer no âmbito da matemática pura, quer no da matemática aplicada ([14], [16], [20], [22], [53], [76], [97]).

A propriedade satisfeita por esses polinómios possibilita a obtenção de resultados importantes e, além disso, permite englobar muitos conjuntos de polinómios bem conhecidos associados a nomes como Bernoulli, Euler, Laguerre, Hermite, Legendre e Chebyshev. Este facto justifica a designação que usaremos adiante de *classe de conjuntos de polinómios de Appell* ou, simplesmente, *classe de Appell.*

Comecemos por apresentar uma definição baseada no trabalho de Appell ([5]) e que doravante designaremos por definição clássica de polinómios de Appell.

Definição 2.1 *Para cada* $n = 0, 1, 2, \ldots$, *seja* $p_n(x)$ *um polinómio na variável* x, *real ou complexa. Diz-se que* $p_n(x)$ *é um polinómio de Appell, se as condições*

i) $\frac{d}{dx}p_n(x) = np_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}$

ii) $p_0(x) = a_0$, *sendo* a_0 *uma constante não nula,*

forem cumulativamente satisfeitas.

Da Definição 2.1, por integração relativamente à variável x, obtém-se a representação explícita dos polinómios de Appell:

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= a_0 \\
p_1(x) &= a_1 + a_0 x \\
p_2(x) &= a_2 + 2a_1 x + a_0 x^2 \\
&\vdots \\
p_n(x) &= \binom{n}{0} a_n + \binom{n}{1} a_{n-1} x + \cdots + \binom{n}{n-1} a_1 x^{n-1} + \binom{n}{n} a_0 x^n \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.1}$$

($a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ constantes arbitrárias). O polinómio de grau n, $p_n(x)$, de um conjunto de Appell pode, portanto, escrever-se na forma

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} x^k \tag{2.2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k x^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.3}$$

onde $a_0 \neq 0$ e $a_k = p_k(0)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Tal significa que um conjunto de Appell fica completamente caracterizado pela sucessão de números reais $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$.

Observação 2.1 *Em geral, para qualquer escolha de x_0, os polinómios de Appell podem representar-se explicitamente por*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x_0)(x - x_0)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.4}$$

(cf. [22]).

Tendo por base a noção de função geradora exponencial dos polinómios de um dado conjunto, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.1 *Seja $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ $(a_0 \neq 0)$ uma série de potências formal. Os polinómios $p_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, são de Appell sse a sua função geradora é $G(x,t) = f(t)e^{tx}$.*

Dem. Supondo que $G(x,t)$ é a função geradora de polinómios $p_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, e multiplicando os desenvolvimentos em série de Taylor de $f(t)$ e e^{xt} obtém-se

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x)\frac{t^n}{n!} &= f(t)e^{xt}\\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\frac{t^n}{n!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k x^{n-k}}{k!(n-k)!}\right)t^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k x^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de $\frac{t^n}{n!}$ de ambos os membros conclui-se que os polinómios $p_n(x),\ n \in \mathbb{N}_0$, são de Appell, conforme (2.3).

Partindo de (2.3) e da noção de função geradora, de modo semelhante se prova a implicação recíproca. ■

Este resultado permite outra definição de polinómios de Appell, equivalente à clássica, e que já havia sido sugerida em [5].

Definição 2.2 *Os polinómios $p_n(x),\ n = 0, 1, \ldots,$ de variável real ou complexa, dizem-se polinómios de Appell, se existir uma série de potências formal $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^n}{n!},\ a_0 \neq 0$, tal que*

$$f(t)e^{tx} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{2.5}$$

(também formalmente).

Observação 2.2 *Alguns autores, por exemplo Sheffer ([104]) ou Boas e Buck ([76]), definem polinómios de Appell como sendo aqueles que satisfazem a condição $\frac{d}{dx}p_n(x) = p_{n-1}(x)$ em vez da considerada $\frac{d}{dx}p_n(x) = np_{n-1}(x)$. Esta aparente discrepância provém da analogia com a igualdade $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ em vez de $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$, ou seja, de considerar $p_n(x)$ como análogo de $\frac{x^n}{n!}$ em vez de x^n. Neste caso, em termos da sua função geradora, aqueles polinómios são definidos por*

$$f(t)e^{tx} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x)t^n,$$

que é equivalente a (2.5), a menos da normalização.

Muitos dos conjuntos de polinómios clássicos existentes pertencem à classe de Appell, isto é, são conjuntos de Appell. Escolhendo a função $f(t)$ de modo adequado podemos enumerar alguns desses conjuntos e também algumas das muitas generalizações existentes:

$\boldsymbol{f(t)}$	$\boldsymbol{p_n(x), n \in \mathbb{N}_0}$	**Designação**
1	x^n	potências da variável x
$\frac{1}{1-t}$	$n!e_n(x)$	$e_n(x)$ são polinómios exponenciais truncados ([36])
$\frac{t}{e^t-1}$	$B_n(x)$	polinómios de Bernoulli ([1])
$\frac{t^\alpha}{(e^t-1)^\alpha}$	$B_n^{(\alpha)}(x)$	polinómios de Bernoulli generalizados ([50])
$\frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m t^m}{(e^{\alpha_1 t}-1)(e^{\alpha_2 t}-1)\cdots(e^{\alpha_m t}-1)}$	$B_n^{(m)}(x\|\alpha_1\cdots\alpha_m), m \in \mathbb{N}$	polinómios de Bernoulli de ordem m([49])
$\frac{t^m}{e^t-\sum_{t=0}^{m-1}\frac{t^h}{h!}}$	$B_n^{[m-1]}(x),\ m \in \mathbb{N}$	polinómios de Bernoulli generalizados ([97])
$\frac{2}{e^t+1}$	$E_n(x)$	polinómios de Euler ([1])
$\frac{2^\alpha}{(e^t+1)^\alpha}$	$E_n^{(\alpha)}(x)$	polinómios de Euler generalizados ([50])
$\frac{2^m}{(e^{\alpha_1 t}+1)(e^{\alpha_2 t}+1)\cdots(e^{\alpha_m t}+1)}$	$E_n^{(m)}(x\|\alpha_1\cdots\alpha_m), m \in \mathbb{N}$	polinómios de Euler de ordem m ([49])
$e^{-\frac{t^2}{4}}$	$\hat{\mathrm{H}}_n(x)$	polinómios de Hermite mónicos: $\hat{\mathrm{H}}_n(x) = 2^{-n}H_n(x)$, onde $H_n(x)$ são os polinómios de Hermite clássicos ([47], [76], [105])
$e^{-\frac{t^2}{2}}$	$\mathcal{H}_n(x)$	polinómios de Hermite probabilísticos: $\mathcal{H}_n(x) = (\sqrt{2})^{-n}H_n(\frac{x}{\sqrt{2}})$ ([99])
$e^{\alpha t^{d+1}}$	$g_n^{d+1}(x,\alpha), d \in \mathbb{N}$	polinómios de Hermite-Kampé de Fériet ou de Gould-Hopper que incluem os de Hermite se $d=1$ ([105])
$e^{\alpha_0+\alpha_1 t+\cdots+\alpha_{d+1}t^{d+1}}, \alpha_{d+1} \neq 0$	$g_n^{d+1}(x,\alpha_0,\ldots,\alpha_{d+1})$	polinómios de Gould-Hopper generalizados ([105])
$(1-t)^\alpha, \alpha > -1$	$(-1)^n n! L_n^{(\alpha-n)}(x)$	$L_n^{(m)}(x)$ são polinómios de Laguerre de grau n e índice m ([51])

Polinómios da classe de Appell

Há ainda outros conjuntos de polinómios que *a priori* não se incluem na classe de Appell, mas mediante adequadas mudanças de variável é possível escrever a sua função geradora na forma (2.5), típica de Appell. Alguns desses conjuntos são os constituídos pelos polinómios *modificados* de Legendre e de Chebyshev que veremos na secção seguinte. Assinale-se, no entanto, que existe um grande número de conjuntos de polinómios que não estão naquela classe e que também são objecto de estudo no âmbito da análise aplicada. Muitos deles, bem como os já referidos, incluem-se numa classe especial mais ampla introduzida por Boas e Buck ([76]). Os polinómios dessa classe, que aqueles autores designaram por polinómios de Appell generalizados, são gerados pela relação formal

$$f(t)\psi(xg(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x)t^n,$$

onde

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n, \;\; \psi(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n y^n \text{ e } \;\; g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n t^n \quad (a_0 \psi_n g_1 \neq 0),$$

são séries também formais. Actualmente é chamada classe de polinómios de tipo Boas-Buck e contém, em particular, os polinómios de Brenke ([76]) se $g(t) = t$; os de Sheffer ([99]) se $\psi(y) = e^y$ e os de Appell se $g(t) = t$ e $\psi(y) = e^y$.

Entre os muitos polinómios de Sheffer, para além dos de Appell, estão por exemplo os polinómios de Laguerre gerados por

$$(1-t)^{-1-\alpha} e^{xt(t-1)^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n, \quad \alpha > -1,$$

([76]), os polinómios de Meixner-Pollaczek

$$\left[(1+\delta t)^2 + t^2\right]^{-\frac{\eta}{2}} e^{x \arctan(t(1+\delta t)^{-1})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x,\delta,\eta)}{n!} t^n, \quad \delta, \eta > 0$$

([25]) e os polinómios de Hahn

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} e^{x \arctan t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{n!} t^n$$

([79]).

O estudo dos polinómios de Sheffer, também designados por polinómios de *tipo zero*

([103]), conduziu a uma das linhas de desenvolvimento do Cálculo Umbral.

Embora as raízes do cálculo umbral estejam em trabalhos de Taylor, Newton, Vandermonde, etc, o seu desenvolvimento teve origem na segunda metade do séc. XIX com Blissard, Cayley e Sylvester. Consistia num conjunto de técnicas simbólicas para manipular sucessões e que permitiam obter resultados interessantes, mas não evitava a sua confirmação por métodos mais rigorosos. Esta desconfiança dos matemáticos na aplicação das ditas técnicas levou a que E. T. Bell, entre 1930 e 1950, fizesse uma primeira tentativa, sem sucesso, de conferir ao cálculo umbral uma base mais rigorosa. Este intento veio a ser concretizado, entre 1970 e 1980, por G.-C. Rota e S. Roman que introduziram os fundamentos da teoria do cálculo umbral por meio de funcionais lineares definidas em espaços de polinómios.

Uma vez que o conjunto das séries formais $\mathbb{K}[[x]]$ munido das operações adição e multiplicação formais (ver Subsecção 1.1.1) tem a estrutura de uma álgebra e que é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{K}[[x]]$ e o conjunto $\mathcal{F}^*$ das funcionais lineares definidas sobre o espaço dos polinómios unidimensionais $\mathcal{F}$, então aquela estrutura é "transferida" para $\mathcal{F}^*$. Esta álgebra, designada por álgebra umbral, possibilita que, dadas duas funcionais lineares S e T, se possa formar uma sucessão $(ST^k)_{k\geq 0}$. Se S e T satisfizerem condições adequadas, as equações

$$ST^k(p_n(x)) = n!\delta_{n,k}, \tag{2.6}$$

$n, k \geq 0$, determinam univocamente uma sucessão de polinómios $p_n(x)$ de Sheffer. Reciprocamente, se $p_n(x)$ são polinómios de Sheffer, então existem funcionais S e T que verificam (2.6). Isto significa que a classe dos polinómios de Sheffer pode ser caracterizada por meio de uma álgebra umbral. Por este facto, Roman descreve a teoria desenvolvida por Rota e por ele próprio como "um estudo sistemático da classe das sucessões de Sheffer, empregando técnicas simples de álgebra moderna" e chama-lhe *cálculo umbral clássico moderno* ([100]).

Além das caracterizações já apresentadas de polinómios de Appell (definição clássica e em termos da função geradora exponencial) têm sido desenvolvidas outras que diferem das primeiras nos conceitos matemáticos que as fundamentam. Carlson ([22]), por exemplo, apresenta uma caracterização baseada no conceito de polinómios de tipo binomial e explora-a no sentido de obter uma caracterização de conjuntos de Appell de várias variáveis, como veremos na Secção 3.1.

Definição 2.3 *Uma sucessão de polinómios* $(q_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ *é dita de tipo binomial se os* *seus termos satisfazem a igualdade*

$$q_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q_k(x)q_{n-k}(y).$$

Observação 2.3 *No caso de $q_n(x)=x^n$, a igualdade anterior reduz-se ao teorema binomial, o que justifica a designação adoptada.*

Partindo da representação explícita dos polinómios de Appell (2.4), substituindo x_0 por x e $x-x_0$ por λ, $(\lambda\in\mathbb{C})$, Carlson mostrou que aqueles polinómios são do tipo binomial

$$p_n(x+\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k(x)\lambda^{n-k},\quad n\in\mathbb{N}_0. \tag{2.7}$$

Mais precisamente, mostrou que:

Teorema 2.1 ([22], p.545) *Uma sucessão de polinómios $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ é do tipo binomial sse*

$$\frac{d}{dx}p_n(x)=np_{n-1}(x),\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.8}$$

onde o segundo membro é nulo se $n=0$.

Decorre deste teorema que polinómios de Appell (no sentido clássico[10]) são de tipo binomial, contudo o recíproco não é verificado. Com efeito, há sucessões de polinómios $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ que verificam (2.8), mas em que alguns dos seus termos $p_n(x)$ não têm exactamente grau n. Designaremos esses polinómios por *polinómios de Appell em sentido lato.*

Como exemplo de tais polinómios podemos referir os conhecidos polinómios de Genocchi ([85]). A sua função geradora pode escrever-se na forma (2.5), com $f(t)=\frac{2t}{e^t+1}$, mas o desenvolvimento de $f(t)$ em série de potências formal

$$f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\frac{t^n}{n!}$$

é tal que $a_0=0$.

O tratamento de conjuntos de polinómios especiais (onde se incluem os polinómios de Appell) em termos operacionais, isto é, envolvendo operadores diferenciais, tem sido

[10] Alguns autores, por exemplo Scaravelli ([102]), na definição de polinómios de Appell, exigem apenas que $p_n(x)$ tenha grau $\leq n, \forall n\in\mathbb{N}_0$.

alvo de grande interesse nos últimos anos, como mostra o considerável número de artigos publicados nesse âmbito (ver, por exemplo, [14], [33], [35], [36], [37], [38], [39], [40], [41], [43], [69], [78], [80]). Tal interesse resulta da facilidade de estudo de propriedades desses polinómios e também das funções especiais envolvidas nas funções geradoras de muitos deles. Essa abordagem operacional resulta da combinação das técnicas operacionais com o chamado princípio da *monomialidade*, desenvolvido por Dattoli ([34]) e que tem por base o conceito de *poweroid* introduzido em [106].

Definição 2.4 *Uma sucessão de polinómios $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ diz-se quase-monomial se for possível definir dois operadores $\widehat{\mathrm{M}}$ e $\widehat{\mathrm{P}}$, independentes de n, tais que:*

$$\widehat{\mathrm{M}}(p_n(x)) = p_{n+1}(x)$$

e

$$\widehat{\mathrm{P}}(p_n(x)) = np_{n-1}(x).$$

Se $\widehat{\mathrm{P}}$ tiver uma realização como operador diferencial (*lowering operator*) e $\widehat{\mathrm{M}}$ for um operador a ele associado no sentido apresentado na definição anterior (*raising operator*), então $p_n(x)$ satisfaz a equação diferencial

$$\widehat{\mathrm{M}}\,\widehat{\mathrm{P}}(p_n(x)) = np_n(x).$$

Se adicionalmente $p_0(x) \equiv 1$, então $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ pode ser obtida explicitamente por meio de

$$p_n(x) = \widehat{\mathrm{M}}^n(1),$$

([39]).

Assim, a função geradora de $p_n(x)$ pode ser escrita na forma

$$e^{t\,\widehat{\mathrm{M}}}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t\,\widehat{\mathrm{M}})^n}{n!}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{\mathrm{M}}^n(1)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{2.9}$$

Deste modo, diferentes e adequadas escolhas para os operadores $\widehat{\mathrm{M}}$ e $\widehat{\mathrm{P}}$ permitem obter diferentes conjuntos de polinómios ([38], [39], [42]).

Recentemente, Dattoli e Zhukovsky ([43]) desenvolveram também uma caracterização operacional para os polinómios de Appell reformulando a sua função geradora (2.5) de um ponto de vista diferente de (2.9). A observação da igualdade

$$\widehat{\mathrm{D}}_x(e^{xt}) = te^{xt}, \quad \widehat{\mathrm{D}}_x = \frac{d}{dx},$$

sugere para (2.5) a seguinte versão operacional:

$$f(\widehat{\mathrm{D}}_x)e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{2.10}$$

Supondo que a função f é analítica em $t = 0$ e usando o procedimento habitual de desenvolvimento de e^{xt} em série de Taylor e de comparação dos coeficientes de t^n de ambos os membros de (2.10), os polinómios de Appell podem ser caracterizados do ponto de vista operacional por

$$p_n(x) = f(\widehat{\mathrm{D}}_x)x^n. \tag{2.11}$$

Com esta formulação é possível deduzir as principais propriedades dos polinómios de Appell, nomeadamente a sua propriedade característica

$$\widehat{\mathrm{D}}_x(p_n(x)) = np_{n-1}(x). \tag{2.12}$$

Além disso, aqueles autores mostraram a existência de um operador

$$\widehat{\mathrm{M}} = f(\widehat{\mathrm{D}}_x)xf(\widehat{\mathrm{D}}_x)^{-1}$$

tal que

$$\widehat{\mathrm{M}}(p_n(x)) = p_{n+1}(x), \tag{2.13}$$

onde $f(\widehat{\mathrm{D}}_x)^{-1}$ é o operador inverso de $f(\widehat{\mathrm{D}}_x)$. Munidos destes dois operadores, $\widehat{\mathrm{D}}_x$ e $\widehat{\mathrm{M}}$, e de acordo com a Definição 2.4, conclui-se que os polinómios de Appell são quase-monomiais. Muitas das propriedades destes polinómios podem então ser deduzidas utilizando técnicas operacionais com os operadores encontrados.

2.2 Conjuntos particulares da classe de Appell

De entre os conjuntos de polinómios contidos na classe de Appell referidos anteriormente, retomamos nesta secção os conjuntos de Bernoulli, Euler, Laguerre, Hermite e também conjuntos de polinómios *modificados* de Legendre e de Chebyshev, por desempenharem um papel importante no decorrer deste trabalho.

Primeiramente trataremos os conjuntos de polinómios de Bernoulli e Euler por, em nosso entender, representarem um protótipo daquilo que é um conjunto de Appell. Em simultâneo com estes polinómios estudaremos os de Genocchi que, embora sendo de Appell em sentido lato, são do tipo binomial e, portanto, têm um tratamento semelhante.

Seguidamente, trataremos os conjuntos de polinómios de Laguerre e Hermite e, por fim, os de Legendre e de Chebyshev. Estes possuem propriedades gerais, além da ortogonalidade, que os tornam úteis em Física Matemática, em Teoria da Aproximação e, de um modo geral, em engenharia.

Para cada um dos casos apresentaremos a sua definição por recurso às respectivas funções geradoras, isto é, como coeficientes de desenvolvimentos em séries de potências formais. Em Apêndice, para facilidade de consulta, referiremos as suas propriedades mais relevantes, podendo as suas demonstrações encontrar-se nas referências [1], [49], [50], [51] [84], [99] e [108].

Recordemos que alguns dos polinómios citados pertencem à classe dos polinómios de Jacobi $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ que é ortogonal com respeito à função-peso $\varrho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta,\ \ \alpha,\beta > -1$. Estes polinómios podem ser obtidos pela fórmula de Rodrigues

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right] \qquad (2.14)$$

e satisfazem a equação diferencial linear de segunda ordem

$$(1-x^2)u'' + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]u' + n(n+\alpha+\beta+1)u = 0 \qquad (2.15)$$

([108]).

A classe dos polinómios de Jacobi contém, para $\alpha=\beta=\gamma$, a dos polinómios ultra-esféricos ou de Gegenbauer

$$P_n^{(\gamma)}(x) = c_n^{(\gamma)}(1-x^2)^{-\gamma}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n+\gamma},\ \ \gamma > -1 \qquad (2.16)$$

que, por sua vez, contém os polinómios de Legendre, para $\gamma = 0$, os de Chebyshev de primeira espécie, para $\gamma = -\frac{1}{2}$, e os de Chebyshev de segunda espécie, para $\gamma = \frac{1}{2}$ ([99]) [11].

No que se segue, sempre que nada seja dito, consideramos $n \in \mathbb{N}_0$.

2.2.1 Polinómios de Bernoulli, Euler e Genocchi

Os polinómios de Bernoulli, de Euler e de Genocchi aplicam-se em áreas como a Teoria dos Números, Teoria Combinatória, processamento de sinal, etc.

Embora sejam conhecidas diversas generalizações destes polinómios (ver, por exemplo, [49], [85]), não é nosso objectivo neste trabalho explorar essas situações.

[11] Contém também os polinómios básicos de Taylor, $x^n,\ n=0,1,\ldots$ (não ortogonais), para $\gamma \to +\infty$.

Definição 2.5 *Os polinómios de Bernoulli $B_n(x)$, de Euler $E_n(x)$ e de Genocchi $G_n(x)$, são definidos formalmente por*

$$\frac{t}{e^t - 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}, \tag{2.17}$$

$$\frac{2}{e^t + 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!} \tag{2.18}$$

e

$$\frac{2t}{e^t + 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} G_n(x) \frac{t^n}{n!}, \tag{2.19}$$

respectivamente.

Definição 2.6 *Os números $B_n = B_n(0)$, $E_n = 2^n E_n(\frac{1}{2})$ e $G_n = G_n(0)$ são chamados números de Bernoulli, de Euler e de Genocchi, respectivamente.*

Como está explícito nesta definição, os números referidos estão intimamente relacionados com os polinómios do mesmo nome, sendo

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{t^n}{n!}, \tag{2.20}$$

$$\frac{2e^t}{e^{2t} + 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n \frac{t^n}{n!} \tag{2.21}$$

e

$$\frac{2t}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} G_n \frac{t^n}{n!}, \tag{2.22}$$

as respectivas funções geradoras.

Dos números acabados de definir, os de Bernoulli são provavelmente os mais utilizados e, por isso, nos iremos deter um pouco mais na sua análise.

Embora tais números figurem em trabalhos anteriores a Jacob Bernoulli, são hoje designados pelo seu nome pelo facto de terem surgido no seu manuscrito *Ars Conjectandi*, publicado postumamente em 1713, relacionados com problemas de contagem inseridos na teoria de probabilidades.

A importância dos números de Bernoulli é salientada por Mazur ([96]) que a eles se refere como uma "força unificadora" em matemática, no sentido de estarem envolvidos em várias áreas daquela ciência (Mazur refere seis áreas) e, portanto, serem um elo de ligação dessas mesmas áreas. Tais números resultaram das tentativas de Bernoulli para determinar os coeficientes das potências de n nas somas

$$S_k(n) := 1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k$$

das potências de grau $k,\ k \in \mathbb{N}$ dos n primeiros números inteiros não negativos.

O cálculo de $S_1(n), S_2(n), S_3(n), \cdots$ pode basear-se no teorema binomial. De facto,

$$(m+1)^{k+1} - m^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1} m + \binom{k+1}{2} m^2 + \cdots + \binom{k+1}{k} m^k$$

donde, fazendo $m = 0, 1, \cdots, n-1$ e somando membro a membro as expressões assim obtidas, resulta

$$n^{k+1} = n + \binom{k+1}{1} S_1(n) + \binom{k+1}{2} S_2(n) + \cdots + \binom{k+1}{k} S_k(n).$$

Assim, conhecidas as fórmulas para $S_1(n), \cdots, S_{k-1}(n)$ facilmente se obtém a de $S_k(n)$. As somas $S_k(n)$, tal como Bernoulli concluiu, são polinómios em n de grau $k+1$, cujo termo de maior grau é $\frac{1}{k+1}\, n^{k+1}$.

Como $\frac{1}{k+1}\, n^{k+1} = \int_0^n x^k dx$, então

$$\begin{aligned}
S_1(n) &= \frac{n(n-1)}{2} = \int_0^n x dx \boldsymbol{-} \boldsymbol{\frac{1}{2}} n \\
S_2(n) &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \int_0^n x^2 dx - \frac{1}{2} n^2 \boldsymbol{+} \boldsymbol{\frac{1}{6}} n \\
S_3(n) &= \frac{n^2(n-1)^2}{4} = \int_0^n x^3 dx - \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2 \boldsymbol{+ 0} n \\
&\vdots \\
S_k(n) &= \int_0^n x^k dx + \cdots \boldsymbol{+ B_k} n
\end{aligned}$$

([96]). Os números de Bernoulli aparecem nestas igualdades como coeficientes de n, fazendo a ligação entre um integral e uma soma (discreta) de potências. É nesta ideia que se baseia a fórmula de Euler-Maclaurin ([77]) que através dos números de Bernoulli relaciona somas de funções em domínios discretos com integrais dessas mesmas funções, ou seja, os números de Bernoulli podem ser encarados como uma ferramenta de passagem do caso discreto para o contínuo.

O problema do cálculo das somas $S_k(n)$ foi resolvido por Bernoulli do seguinte modo:

Teorema 2.2 *As somas $S_k(n)$ satisfazem a igualdade*

$$(k+1)S_k(n) = \sum_{m=0}^{k} \binom{k+1}{m} B_m n^{k+1-m},$$

com $k = 1, 2, \cdots$.

Dem. Se em $e^{mt} = \sum_{k=0}^{+\infty} m^k \frac{t^k}{k!}$ substituirmos m por $0, 1, \cdots, n-1$ e somarmos membro a membro as igualdades obtidas, temos

$$1 + e^t + \cdots + e^{(n-1)t} = \sum_{k=0}^{+\infty} S_k(n) \frac{t^k}{k!}.$$

Atendendo a que o primeiro membro é

$$\frac{e^{nt}-1}{e^t-1} = \frac{e^{nt}-1}{t}\frac{t}{e^t-1},$$

então

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} n^k \frac{t^{k-1}}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} B_k \frac{t^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} S_k(n)\frac{t^k}{k!},$$

ou seja,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{k} \frac{k! B_m n^{k+1-m}}{m!(k+1-m)!}\right)\frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} S_k(n)\frac{t^k}{k!}.$$

Logo, comparando os coeficientes de $\frac{t^k}{k!}$ e multiplicando ambos os membros por $(k+1)$ obtém-se o resultado enunciado. ■

A partir da Definição 2.5 e da Definição 2.6 podem extrair-se muitas das propriedades dos polinómios e números envolvidos. Como já foi dito anteriormente, no Apêndice A encontram-se algumas das mais relevantes.

Além das propriedades mencionadas no Apêndice A, há ainda a destacar que os números de índice ímpar, de Bernoulli, $B_{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$, de Euler, $E_{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0$, e de Genocchi, $G_{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$, são nulos. De facto, da função geradora (2.20), dos números de Bernoulli, e porque $B_0 = 1$ e $B_1 = -\frac{1}{2}$, tem-se

$$\frac{t}{e^t-1} + \frac{t}{2} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} B_n \frac{t^n}{n!}. \tag{2.23}$$

Como $\frac{t}{e^t-1} + \frac{t}{2} \equiv \frac{t}{2}\frac{e^t+1}{e^t-1}$ é uma função par, então os coeficientes das potências ímpares em

(2.23) são nulos, isto é, $B_{2n+1} = 0$, $n \in \mathbb{N}$, e podemos escrever

$$\frac{t}{e^t - 1} = B_0 + B_1 t + \sum_{n=1}^{+\infty} B_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

Analogamente, como $\frac{2e^t}{e^{2t}+1} \equiv \frac{1}{\cosh t}$ é uma função par, também $E_{2n+1} = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$.

No caso dos números de Genocchi, como $G_0 = 0$, $G_1 = 1$ e o primeiro membro de

$$\frac{2t}{e^t + 1} - t = \sum_{n=2}^{+\infty} G_n \frac{t^n}{n!}$$

é uma função par, também se conclui que $G_{2n+1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}$.

Os três tipos de polinómios estão relacionados entre si como sugerem as funções geradoras respectivas. Algumas dessas relações estão patentes na proposição seguinte.

Proposição 2.2 *Os polinómios de Bernoulli, de Euler e de Genocchi estão relacionados por meio das seguintes igualdades:*

$$\begin{aligned} E_{n-1}(x) &= \frac{2^n}{n}\left[B_n\left(\frac{x+1}{2}\right) - B_n\left(\frac{x}{2}\right)\right] \\ &= \frac{2}{n}\left[B_n(x) - 2^n B_n(\frac{x}{2})\right], \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$2^n B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} E_k(2x) \tag{2.25}$$

$$(n+1)E_n(x) = G_{n+1}(x). \tag{2.26}$$

Dem. Pela definição de polinómios de Bernoulli

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty}\left[B_n\left(\frac{x+1}{2}\right) - B_n\left(\frac{x}{2}\right)\right]\frac{t^n}{n!} &= \frac{te^{\frac{x}{2}t}(e^{\frac{t}{2}} - 1)}{e^t - 1} \\ &= \frac{2te^{\frac{x}{2}t}}{2(e^{\frac{t}{2}} + 1)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_n(x)}{2^{n+1}} \frac{t^{n+1}}{n!}, \end{aligned}$$

donde

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left[B_n\left(\frac{x+1}{2}\right) - B_n\left(\frac{x}{2}\right)\right]\frac{t^n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E_{n-1}(x)}{2^n} \frac{t^n}{(n-1)!}$$

e, portanto,

$$E_{n-1}(x) = \frac{2^n}{n}\left[B_n\left(\frac{x+1}{2}\right) - B_n\left(\frac{x}{2}\right)\right], \; n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado,

$$B_n\left(\frac{x+1}{2}\right) + B_n\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{B_n(x)}{2^{n-1}}$$

e, como acabámos de provar,

$$B_n\left(\frac{x+1}{2}\right) - B_n\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{nE_{n-1}(x)}{2^n}.$$

Subtraindo membro a membro as duas igualdades também se conclui que

$$E_{n-1}(x) = \frac{2}{n}\left[B_n(x) - 2^n B_n\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

A propriedade (2.25) deduz-se notando que

$$\frac{t}{e^t-1}\,\frac{2e^{2xt}}{e^t+1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} E_n(2x)\frac{t^n}{n!}\right)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(x)2^n\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}E_k(2x)\right)\frac{t^n}{n!}.$$

A propriedade (2.26) resulta de escrever a função geradora (2.19) na forma

$$\frac{2}{e^t+1}e^{xt} = \sum_{n=1}^{+\infty} G_n(x)\frac{t^{n-1}}{n!},$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} G_{n+1}(x)\frac{t^n}{(n+1)!}.$$

■

Observação 2.4 *Atendendo a (A.9)*[12], *a propriedade (2.26) pode escrever-se na forma* $\frac{d}{dx}E_{n+1}(x) = G_{n+1}(x)$.

Proposição 2.3

$$G_{2n} = 2nE_{2n-1}(0) = 2(1-2^{2n})B_{2n}, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

[12] A numeração utilizada para as propriedades que constam no Apêndice A é (A.1), (A.2), $\cdots$.

Dem. De (2.26) conclui-se que $G_{2n} = 2nE_{2n-1}(0)$, $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, de (2.24) obtém-se

$$E_{n-1}(0) = \frac{2}{n}(1 - 2^n)B_n,$$

donde

$$2nE_{2n-1}(0) = 2(1 - 2^{2n})B_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

■

2.2.2 Polinómios de Laguerre

Os polinómios de Laguerre surgem em diversas aplicações, sobretudo em Física Matemática e, em particular, em problemas que envolvem a resolução da equação de Helmholtz em coordenadas parabólicas, em teoria de propagação de ondas eletromagnéticas em linhas de transmissão e na teoria do átomo de hidrogénio.

Definição 2.7 *Os polinómios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ são definidos formalmente por*

$$(1 - t)^{-\alpha-1} e^{\frac{-xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n, \tag{2.27}$$

com $\alpha > -1$.

Observação 2.5 *Alguns autores designam estes polinómios por polinómios de Laguerre generalizados para os distinguir do caso especial $L_n(x) \equiv L_n^{(0)}(x)$ introduzido por Edmond Laguerre. Também é possível encontrar a designação de polinómios de Sonine uma vez que este matemático introduziu, em 1880, um tipo de polinómios que apenas diferem dos de Laguerre numa constante de normalização ([24], [110]).*

Os polinómios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}$ são ortogonais no intervalo $[0, +\infty[$ com respeito à função-peso $\varrho(x) = e^{-x}x^{\alpha}$, $\alpha > -1$, o que é expresso através de

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) dx = 0, \quad n \neq m$$

([84]).

Tais polinómios podem também ser obtidos pela fórmula de Rodrigues

$$L_n^{(\alpha)}(x) = e^x \frac{x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n+\alpha}), \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Rainville ([99]) apresenta ainda a definição destes polinómios em termos da função hipergeométrica confluente ${}_1F_1(a;b;z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!}$ do seguinte modo:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(1+\alpha)_n}{n!} {}_1F_1(-n; 1+\alpha; x), \tag{2.28}$$

onde $(\lambda)_n = \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)}$ denota o símbolo de Pochhammer , ou seja, $(\lambda)_0 := 1, (\lambda)_n := \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1), \quad n > 0$.

Várias fórmulas equivalentes a (2.28) para exprimir os polinómios de Laguerre têm sido obtidas (ver, por exemplo, [51], [110], [99]):

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \frac{(-x)^k}{k!(n-k)!}, \tag{2.29}$$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (1+\alpha)_n x^k}{k!(n-k)!(1+\alpha)_k}, \tag{2.30}$$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{x^k}{k!}. \tag{2.31}$$

Algumas propriedades dos polinómios de Laguerre e suas derivadas são apresentadas na Secção A.4 do Apêndice A, podendo as suas demonstrações encontrar-se em [84].

De (A.27) e (A.28) pode concluir-se que $u = L_n^{(\alpha)}(x)$ é solução da equação diferencial de segunda ordem

$$xu'' + (\alpha + 1 - x)u' + nu = 0.$$

Os polinómios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ determinados pela função geradora (2.27) são os mais comuns, contudo, como se pode constatar a partir da propriedade (A.26), $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ não é um conjunto de Appell, principal objecto de estudo neste trabalho. Por essa razão, consideremos os polinómios $Q_n(x) = (-1)^n n! L_n^{(\alpha-n)}(x)$, onde $L_n^{(\alpha-n)}(x)$ são os polinómios de Laguerre introduzidos por Erdélyi ([51]), com parâmetro dependente de n e cuja função geradora é

$$(1+t)^\alpha e^{-xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n^{(\alpha-n)}(x) t^n, \tag{2.32}$$

$\alpha > -1$.

Proposição 2.4 *O conjunto $\{Q_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é um conjunto de Appell.*

Dem. A partir de (2.32) obtém-se a função geradora dos polinómios $Q_n(x)$:

$$(1-t)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{2.33}$$

que satisfaz (2.5), com $f(t) = (1-t)^\alpha$, logo $\{Q_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é um conjunto de Appell. ■

A propriedade correspondente a (A.29) para estes polinómios obtém-se de (2.33) e é

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha)_k Q_{n-k}(x). \tag{2.34}$$

De (2.34) obtém-se os polinómios $L_n^{(\alpha-n)}(x)$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
&Q_0(x) = 1 \quad \Rightarrow L_0^{(\alpha)}(x) = 1\\
&Q_1(x) = x - \alpha \quad \Rightarrow L_1^{(\alpha-1)}(x) = -x + \alpha\\
&Q_2(x) = x^2 - 2\alpha x + \alpha(\alpha-1) \quad \Rightarrow L_2^{(\alpha-2)}(x) = \frac{x^2}{2} - \alpha x + \frac{\alpha}{2}(\alpha-1)\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

Estes polinómios podem ainda relacionar-se com os polinómios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$. Na verdade, considerando a relação de recorrência (A.25), isto é,

$$L_n^{(\alpha-1)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

obtém-se sucessivamente:

$$\begin{aligned}
L_1^{(\alpha-1)}(x) &= L_1^{(\alpha)}(x) - L_0^{(\alpha)}(x)\\
L_2^{(\alpha-2)}(x) &= L_2^{(\alpha-1)}(x) - L_1^{(\alpha-1)}(x)\\
&= (L_2^{(\alpha)}(x) - L_1^{(\alpha)}(x)) - (L_1^{(\alpha)}(x) - L_0^{(\alpha)}(x))\\
&= L_2^{(\alpha)}(x) - 2L_1^{(\alpha)}(x) + L_0^{(\alpha)}\\
L_3^{(\alpha-3)}(x) &= L_3^{(\alpha)}(x) - 3L_2^{(\alpha)}(x) + 3L_1^{(\alpha)}(x) - L_0^{(\alpha)}(x)\\
&\vdots\\
L_n^{(\alpha-n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} L_{n-k}^{(\alpha)}(x).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

2.2.3 Polinómios de Hermite

Os polinómios de Hermite são um tipo de polinómios que se encontra em diversas aplicações, nomeadamente em Probabilidades e Estatística e em Física Matemática. Nesta última área encontram-se relacionados com a resolução da equação de Laplace e com a equação de Helmholtz em coordenadas parabólicas.

Definição 2.8 *Os polinómios de Hermite $H_n(x)$ são definidos formalmente por*

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \tag{2.36}$$

Estes polinómios são ortogonais em $]-\infty, +\infty[$, com respeito à função-peso $\varrho(x) = e^{-x^2}$, isto é,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0, \quad n \neq m$$

([84]) e podem também ser obtidos pela fórmula de Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

Além desta fórmula, também se pode deduzir de (2.36) a seguinte expressão explícita para $H_n(x)$:

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k n! (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}, \tag{2.37}$$

onde $[\lambda]$ representa o maior número inteiro que não excede λ.

Outras expressões equivalentes às já referidas para definir polinómios de Hermite podem encontrar-se em [99].

Algumas das propriedades conhecidas para os polinómios de Hermite e suas derivadas são apresentadas na Secção A.5 do Apêndice A.

Derivando em ordem a x ambos os membros de (A.30) e conjugando com (A.31) conclui-se que $u = H_n(x)$ é solução da equação diferencial linear de segunda ordem

$$u'' - 2xu' + 2nu = 0.$$

Nas diversas fontes bibliográficas, e de acordo com as aplicações pretendidas, aparecem outros polinómios também designados por polinómios de Hermite e que estão relacionados com os anteriores (clássicos) por simples mudanças de variável. Por exemplo os gerados por:

- $$e^{xt-\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}_n(x) \frac{t^n}{n!}, \tag{2.38}$$

  tais que

  $$\mathcal{H}_n(x) = (\sqrt{2})^{-n} H_n(\frac{x}{\sqrt{2}}) \tag{2.39}$$

  ([99])[13];

- $$e^{xt-\frac{t^2}{4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{H}_n(x) \frac{t^n}{n!}, \tag{2.40}$$

  tais que

  $$\widehat{H}_n(x) = 2^{-n} H_n(x) \tag{2.41}$$

  ([76]).

Como se pode concluir da propriedade (A.31), $\{H_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ não é um conjunto de Appell. No entanto, os conjuntos $\{\mathcal{H}_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ e $\{\widehat{H}_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ gerados por (2.38) e (2.40), respectivamente, são conjuntos de Appell. Tais polinómios satisfazem (2.5), sendo $f(t)$ a função $e^{-\frac{t^2}{2}}$ e $e^{-\frac{t^2}{4}}$, respectivamente.

Tendo em conta (2.39) e (2.41), as fórmulas explícitas para estes polinómios decorrem imediatamente de (2.37):

- $$\mathcal{H}_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k n! x^{n-2k}}{2^k k!(n-2k)!}, \tag{2.42}$$

- $$\widehat{H}_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k n! x^{n-2k}}{4^k k!(n-2k)!}. \tag{2.43}$$

Usando as mesmas relações (2.39) e (2.41) pode exprimir-se a potência x^n em termos destes polinómios:

[13] Na bibliografia, a notação que é utilizada com mais frequência para estes polinómios, também designados por polinómios de Hermite probabilísticos, é $He_n(x)$. Nesta dissertação optamos por representá-los por $\mathcal{H}_n(x)$ para evitar conflito com outras notações.

- $$x^n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{n!(\sqrt{2})^{n-2k}\mathcal{H}_{n-2k}(\sqrt{2}x)}{2^n k!(n-2k)!},$$

- $$x^n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{n!2^{n-2k}\widehat{H}_{n-2k}(x)}{2^n k!(n-2k)!}.$$

Consideremos as funções $\mathcal{G}(x,t) = e^{xt-\frac{t^2}{2}}$ e $\widehat{G}(x,t) = e^{xt-\frac{t^2}{4}}$ que satisfazem as equações diferenciais

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} - (x-t)\mathcal{G} = 0 \tag{2.44}$$

e

$$\frac{\partial \widehat{G}}{\partial t} - (x - \frac{t}{2})\widehat{G} = 0, \tag{2.45}$$

respectivamente.

Substituindo (2.38) em (2.44) e (2.40) em (2.45) obtêm-se as equações a três termos

$$\mathcal{H}_{n+1}(x) - x\mathcal{H}_n(x) + n\mathcal{H}_{n-1}(x) = 0 \tag{2.46}$$

e

$$\widehat{H}_{n+1}(x) - x\widehat{H}_n(x) + \frac{n}{2}\widehat{H}_{n-1}(x) = 0, \tag{2.47}$$

$n \in \mathbb{N}$, que permitem o cálculo dos polinómios de Hermite $\mathcal{H}(x)$ e $\widehat{H}(x)$ por recorrência, iniciando com $\mathcal{H}_0(x) = 1, \mathcal{H}_1(x) = x$ e $\widehat{H}_0(x) = 1, \widehat{H}_1(x) = x$.

De (2.46) e (2.47) e atendendo a que se trata de polinómios de Appell, prova-se que $\mathcal{H}(x)$ e $\widehat{H}(x)$ são soluções das equações diferenciais lineares de segunda ordem

$$u'' - xu' + nu = 0$$

e

$$u'' - 2xu' + 2nu = 0,$$

respectivamente.

2.2.4 Polinómios de Legendre

Como os restantes polinómios ortogonais, os polinómios de Legendre têm vasta aplicação em Física e engenharia, estando sobretudo relacionados com a resolução da equação de Laplace em coordenadas esféricas. Como é sabido as soluções de tal equação envolvem harmónicas esféricas que, por sua vez, envolvem funções associadas de Legendre das quais os polinómios de Legendre são casos particulares.

Definição 2.9 *Os polinómios de Legendre $P_n(x)$ são definidos formalmente por*

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n. \tag{2.48}$$

Estes polinómios são ortogonais em $[-1,1]$ com respeito à função-peso $\rho(x)=1$, isto é,

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0, \quad m \neq n.$$

A fórmula de Rodrigues (2.14), com $\alpha=\beta=0$, permite obter aqueles polinómios:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

A função geradora (2.48) pode exprimir-se de várias formas ([99]), nomeadamente através de funções especiais, em função do interesse em aplicações e na dedução de propriedades características daqueles polinómios. Por exemplo, em termos das funções hipergeométricas generalizadas ${}_1F_0(a;-;z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(a)_n z^n}{n!}$ ou ${}_0F_1(-;b;z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{(b)_n n!}$ escreve-se

$${}_1F_0\left(\frac{1}{2};-;\frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}\right)(1-xt)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

ou

$${}_0F_1\left(-;1;\frac{1}{4}t^2(x^2-1)\right)e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{2.49}$$

Considerando a função de Bessel $J_n(z)$, de primeira espécie e ordem n,

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{(\frac{z}{2})^n}{\Gamma(1+n)}\,{}_0F_1\left(-;1+n;-\frac{z^2}{4}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+n}}{2^{2k+n}k!\Gamma(1+n+k)}, \end{aligned} \tag{2.50}$$

(2.49) é equivalente a

$$J_0(t\sqrt{1-x^2})e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{2.51}$$

Daqui se deduz a fórmula explícita para aqueles polinómios:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{n!(x^2-1)^k x^{n-2k}}{2^{2k}(k!)^2(n-2k)!} \qquad (2.52)$$
$$= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!x^{n-2k}}{2^n(k!)(n-k)!(n-2k)!}.$$

Algumas propriedades dos polinómios de Legendre são recordadas na Secção A.6 do Apêndice A.

Derivando ambos os membros de (A.35) em ordem a x e usando (A.36) prova-se que os polinómios $P_n(x)$ satisfazem a equação diferencial linear de segunda ordem

$$(1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u = 0,$$

tal como se obteria de (2.15) com $\alpha = \beta = 0$.

Em [22], Carlson salientou que muitos dos polinómios clássicos que não são de Appell, podem ser sujeitos a mudanças de variáveis convenientes de modo a que passem a constituir conjuntos daquela classe. Este é precisamente o caso dos polinómios de Legendre, que não sendo de Appell, permitem que a partir deles se forme um conjunto daquela classe.

Proposição 2.5 *O conjunto de polinómios* $\{\widetilde{P}_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0} \equiv \{(z^2+1)^{n/2}P_n\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *é um conjunto de Appell.*

Dem. Fazendo em (2.51) as mudanças de variáveis $x = \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}$ e $t = \tau\sqrt{z^2+1}$ obtém-se

$$J_0(\tau)e^{z\tau} = \sum_{n=0}^{\infty}(z^2+1)^{n/2}P_n\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)\frac{\tau^n}{n!}. \qquad (2.53)$$

Assim, de acordo com (2.5), $\{\widetilde{P}_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é um conjunto de Appell. ∎

De (2.53) facilmente se extrai uma fórmula explícita para $\widetilde{P}_n(z)$:

$$\widetilde{P}_n(z) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{n!(-1)^k z^{n-2k}}{2^{2k}(k!)^2(n-2k)!}. \qquad (2.54)$$

A derivada de $\widetilde{P}_n(z)$ em ordem a z é

$$\frac{d}{dz}\widetilde{P}_n(z) = nz(z^2+1)^{\frac{n}{2}-1}P_n\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right) + (z^2+1)^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}}\frac{d}{dz}P_n\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right). \tag{2.55}$$

Usando a propriedade (A.35), com $x^2-1=-\frac{1}{z^2+1}$, tem-se

$$\frac{d}{dz}P_n\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right) = n(z^2+1)P_{n-1}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right) - nz(z^2+1)^{\frac{1}{2}}P_n\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)$$

e substituindo em (2.55) conclui-se que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\widetilde{P}_n(z) &= n(z^2+1)^{\frac{n-1}{2}}P_{n-1}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)\\ &= n\widetilde{P}_{n-1}(z),\end{aligned}$$

o que, uma vez mais, confirma que $\{\widetilde{P}_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é um conjunto de Appell.

Fazendo na propriedade (A.34) a mudança de variável $x=\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}$ e multiplicando ambos os membros por $(z^2+1)^{\frac{n+1}{2}}$, obtém-se a relação a três termos

$$(n+1)\widetilde{P}_{n+1}(z) - (2n+1)z\widetilde{P}_n(z) + n(z^2+1)\widetilde{P}_{n-1}(z) = 0, \quad n=1,2,\ldots$$

que juntamente com $\widetilde{P}_0(z)=1$ e $\widetilde{P}_1(z)=z$ permite obter os polinómios do conjunto $\widetilde{P}_n(z)$.

A igualdade (A.37), deduzida por Rainville, é explicada por Carlson ([22]) como sendo uma consequência do facto de $\widetilde{P}_n(z)=(z^2+1)^{n/2}P_n\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)$ serem polinómios de Appell e, por isso, serem do tipo binomial, isto é,

$$\widetilde{P}_n(z+\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\widetilde{P}_k(z)\lambda^{n-k}. \tag{2.56}$$

Com efeito, efectuando a mudança de variável $z=\cot\beta$, obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{z}{\sqrt{z^2+1}} &= \frac{\cot\beta}{(\cot^2\beta+1)^{\frac{1}{2}}} = \cos\beta,\\ (z^2+1)^{\frac{n}{2}} &= (\cot^2\beta+1)^{\frac{n}{2}} = (\sin\beta)^{-n},\end{aligned}$$

donde

$$\widetilde{P}_n(z) \equiv \widetilde{P}_n(\cot\beta) = (\sin\beta)^{-n}P_n(\cos\beta). \tag{2.57}$$

Considerando $\lambda = \cot\alpha - \cot\beta$,

$$\widetilde{P}_n(z+\lambda) \equiv \widetilde{P}_n(\cot\alpha) = (\sin\alpha)^{-n} P_n(\cos\alpha) \tag{2.58}$$

e

$$\begin{aligned}\lambda^{n-k} &= \left(\frac{\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\right)^{n-k} \\ &= \left(\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}\right)^{n-k}.\end{aligned} \tag{2.59}$$

Substituindo (2.57), (2.58) e (2.59) na fórmula (2.56) obtém-se

$$(\sin\alpha)^{-n} P_n(\cos\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sin\beta)^{-k} P_k(\cos\beta) \left(\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}\right)^{n-k},$$

ou seja,

$$P_n(\cos\alpha) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}\right)^{n-k} P_k(\cos\beta).$$

2.2.5 Polinómios de Chebyshev

As aplicações mais conhecidas dos polinómios de Chebyshev enquadram-se em Análise Numérica, mais especificamente, em aproximação polinomial, integração numérica e métodos espectrais para resolução de equações diferenciais em derivadas parciais. Os de primeira espécie são talvez os mais usados em teoria da aproximação, onde os seus zeros têm um papel importante como nodos de interpolação, contudo os de segunda espécie encontram-se, por exemplo, no desenvolvimento das harmónicas esféricas em quatro dimensões. Estas são usadas na teoria do momento angular (Mecânica Quântica) para a resolução da equação de Laplace em quatro dimensões.

Definição 2.10 *Os polinómios de Chebyshev de primeira espécie $T_n(x)$ são definidos formalmente por*

$$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n, \tag{2.60}$$

e os de segunda espécie $U_n(x)$ por

$$\frac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) t^n, \tag{2.61}$$

Estes polinómios são ortogonais no intervalo $[-1,1]$; os primeiros com respeito à função-peso $\varrho(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ e os segundos com respeito a $\varrho(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, isto é,

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}T_n(x)T_m(x)=0,\quad m\neq n$$

e

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}U_n(x)U_m(x)=0,\quad m\neq n.$$

De (2.16), com $\gamma=-\frac{1}{2}$ e $\gamma=\frac{1}{2}$, obtêm-se as fórmulas

$$T_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^n\left(\frac{1}{2}\right)_n}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

e

$$U_n(x)=\frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)_{n+1}}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Muitas vezes os polinómios de Chebyshev de primeira espécie são definidos por meio das relações

$$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta=\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$$

ou

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),$$

e os de segunda espécie por

$$U_n(\cos\theta)=\csc\theta\sin(n+1)\theta=\frac{e^{i(n+1)\theta}-e^{-i(n+1)\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}.$$

As funções geradoras (2.60) e (2.61) podem ser representadas na forma

$$\cosh(t\sqrt{x^2-1})e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)\frac{t^n}{n!},\tag{2.62}$$

e

$$\frac{\sinh(t\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}}e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x)\frac{t^{n+1}}{(n+1)!},\tag{2.63}$$

respectivamente.

Existem várias representações explícitas para $T_n(x)$ e $U_n(x)$, por exemplo ([51], [99]):

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} x^{n-2k}(x^2-1)^k, \\
T_n(x) &= \frac{1}{2}\left[(x-\sqrt{x^2-1})^n + (x+\sqrt{x^2-1})^n\right], \\
U_n(x) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n+1}{2k+1} x^{n-2k}(x^2-1)^k, \\
U_n(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}\right].
\end{aligned}$$

Relações de recorrência que envolvem os polinómios de Chebyshev e suas derivadas são recordadas na Secção A.7 do Apêndice A.

De (2.15), fazendo $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, obtém-se a equação diferencial

$$(1-x^2)u'' - xu' + n^2u = 0$$

da qual $u = T_n(x)$ é solução. Analogamente, fazendo $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, tem-se

$$(1-x^2)u'' - 3xu' + n(n+2)u = 0$$

sendo $u = U_n(x)$ sua solução.

Os polinómios de Chebyshev não constituem um conjunto de Appell mas, à semelhança do que fizemos para os de Legendre, é possível a partir deles gerar polinómios de Appell.

Proposição 2.6 *O conjunto* $\{\widetilde{T}_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0} \equiv \{(z^2+1)^{n/2} T_n\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *é um conjunto de Appell.*

Dem. Fazendo em (2.62) as mesmas mudanças de variáveis usadas no caso dos polinómios de Legendre (Proposição 2.5) obtém-se

$$\cosh(i\tau)e^{z\tau} = \sum_{n=0}^{\infty}(z^2+1)^{n/2}\, T_n\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)\frac{\tau^n}{n!}.$$

Considerando a igualdade trigonométrica

$$\cosh(i\tau) = \frac{e^{i\tau}+e^{-i\tau}}{2} = \cos\tau,$$

aquela função geradora pode escrever-se na forma

$$\cos\tau e^{z\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{T}_n(z)\frac{\tau^n}{n!}, \tag{2.64}$$

com $\widetilde{T}_n(z) \equiv (z^2+1)^{n/2} T_n\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)$, o que permite concluir que $\{\widetilde{T}_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é um conjunto de Appell. ∎

Proposição 2.7 *O conjunto* $\{\widetilde{U}_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0} \equiv \{\frac{1}{n+1}(z^2+1)^{n/2} U_n\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *é um conjunto de Appell.*

Dem. Usando em (2.63) as mesmas mudanças de variáveis usadas na demonstração anterior obtém-se

$$\frac{\sinh(i\tau)}{i} e^{z\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^2+1)^{n/2} U_n\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right) \frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Atendendo à igualdade trigonométrica

$$\frac{\sinh(i\tau)}{i} = \frac{e^{i\tau} - e^{-i\tau}}{2i} = \sin\tau,$$

pode escrever-se a função geradora na forma

$$\operatorname{sinc}\tau e^{z\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{U}_n(z)\frac{\tau^n}{n!}, \tag{2.65}$$

com $\widetilde{U}_n(z) \equiv \frac{1}{n+1}(z^2+1)^{n/2} U_n\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)$, o que permite concluir que $\{\widetilde{U}_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é um conjunto de Appell. ∎

De (2.64) e (2.65) deduzem-se as fórmulas explícitas

$$\widetilde{T}_n(z) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!(-1)^k z^{n-2k}}{(2k)!(n-2k)!}$$

e

$$\widetilde{U}_n(z) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!(-1)^k z^{n-2k}}{(2k+1)!(n-2k)!}.$$

Como consequências da Proposição 2.6 e da Proposição 2.7 tem-se

$$\frac{d}{dz}\widetilde{T}_n(z) = n\widetilde{T}_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \ldots$$

e

$$\frac{d}{dz}\widetilde{U}_n(z) = n\widetilde{U}_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

respectivamente.

Aplicando a mudança de variável $x = \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}$ a (A.38) e (A.39) e multiplicando cada uma das igualdades obtidas por $(z^2+1)^{\frac{n+1}{2}}$, deduzem-se as relações a três termos

$$\widetilde{T}_{n+1}(z) - 2z\widetilde{T}_n(z) + (z^2+1)\widetilde{T}_{n-1}(z) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

e

$$(n+2)\widetilde{U}_{n+1}(z) - 2(n+1)z\widetilde{U}_n(z) + n(z^2+1)\widetilde{U}_{n-1}(z) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

As relações entre $\widetilde{T}_n(z)$ e $\widetilde{U}_n(z)$,

$$\widetilde{T}_n(z) = (n+1)\widetilde{U}_n(z) - nz\widetilde{U}_{n-1}(z), \;\; n \in \mathbb{N},$$

$$n\widetilde{U}_{n-1}(z) = z\widetilde{T}_n(z) - \widetilde{T}_{n+1}(z), \;\; n \in \mathbb{N},$$

podem deduzir-se de (A.42) e (A.43) utilizando a mesma mudança de variável referida anteriormente.

2.3 Representação matricial de polinómios de Appell unidimensionais

A presença dos coeficientes binomiais nos polinómios de Appell (ver (2.1)) induz a possibilidade da representação matricial de tais polinómios estar relacionada com as matrizes de Pascal. Devido à estreita ligação destas matrizes com a matriz de criação H ([2], [17]) [14], pretendemos nesta secção realçar o envolvimento desta matriz no desenvolvimento de um formalismo matricial unificador para representar polinómios de Appell.

No que se segue, consideraremos matrizes de dimensão finita, no entanto, o estudo é extensível a matrizes de dimensão infinita. Além disso, começaremos a numeração das linhas e das colunas das matrizes por zero. Quer dizer, os elementos da primeira linha duma matriz A de ordem $m+1$ são representados por a_{00}, a_{01}, $\cdots$, a_{0m}. Analogamente, denotaremos por $\varepsilon_n := [0 \cdots 0\ 1\ 0 \cdots 0]^T$, $n = 0, 1, \cdots$, o vector coluna de ordem $m+1$ com 1 na n-ésima posição e convencionamos que se $n > m$, $\varepsilon_n = 0$ (vector nulo de ordem

[14] H já foi referida no Exemplo 1.1.

$m+1$).

Definição 2.11 *Chama-se matriz de criação ou matriz de derivação de ordem* $m+1$ *à matriz* $H = [H_{ij}]$ *tal que*

$$H_{ij} = \begin{cases} i & , i = j+1 \\ 0 & , i \neq j+1, \end{cases}$$

$(i, j = 0, 1, \ldots, m)$.

Observação 2.6 *A designação de matriz de criação aplica-se sobretudo em Física, como referem Aceto e Trigiante ([2]), e refere-se à criação de* quanta. *Por outro lado, sendo* $\xi(x) = [1 \ x \ x^2 \cdots x^m]^T$ *um vector coluna e notando que* $H\xi(x) = \frac{d}{dx}\xi(x)$, *fica também justificada a designação de matriz de derivação.*

A designação que adoptaremos neste trabalho é a primeira, não pelos mesmos motivos dos físicos, mas pelo facto de essa matriz permitir a "criação" de polinómios de um conjunto de Appell, como veremos adiante.

A potência de ordem $k \in \mathbb{N}_0$ de H é a matriz $H^k = [(H^k)_{ij}]$ tal que

$$(H^k)_{ij} = \begin{cases} \frac{i!}{j!} & , i = j+k \\ 0 & , i \neq j+k, \end{cases}$$

$(i, j = 0, 1, \ldots, m)$, donde se conclui que $H^k = 0$ se $k > m$, isto é, H é nilpotente de ordem $m+1$ ([17]).

No artigo [17] a matriz H aparece relacionada com matrizes de Pascal. Aí é feito o estudo das propriedades destas últimas matrizes, motivado pelo seu aparecimento em problemas de probabilidades. É neste contexto que surge a ligação com a matriz H e, com base nas propriedades da exponencial duma matriz, os autores demonstram que

$$e^{xH} = P(x), \tag{2.66}$$

onde $P(x) = [(P(x))_{ij}]$ tal que

$$(P(x))_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j} x^{i-j} & , i \geq j \\ 0 & , i < j, \end{cases} \tag{2.67}$$

$(i, j = 0, 1, \ldots, m)$, é a matriz de Pascal generalizada de ordem $m+1$.

Desta matriz obtém-se a matriz de Pascal (clássica) $P(x) \mid_{x=1} = P = e^H$, a matriz identidade $P(x) \mid_{x=0} = P(0) = I$ e a matriz de criação $\frac{d}{dx}P(x) \mid_{x=0} = HP(0) = H$.

As matrizes de Pascal, suas propriedades e relações com outras matrizes conhecidas, nomeadamente de Stirling e de Vandermonde ([2], [6], [7], [27], [111], [114]), têm sido profusamente estudadas, não apenas nos artigos já citados mas também, por exemplo, em [13], [48], [112], [113] e [115].

Seguindo [2], [13], [17] e [82] mencionamos algumas propriedades das matrizes P e H úteis no seguimento deste trabalho:

(1) A inversa de $P(x)$, $P^{-1}(x) = [(P^{-1}(x))_{ij}]$, é tal que $(P^{-1}(x))_{ij} = (P(-x))_{ij},\ \ i,j = 0,1,\cdots,m$. Consequentemente, a inversa de P, $P^{-1} = [(P^{-1})_{ij}]$, é obtida de (2.67), fazendo $x = -1$;

(2) A factorização de Cholesky da matriz de Pascal simétrica $S = [S_{ij}]$, onde $S_{ij} = \binom{i+j}{j}$, $i,j = 0,1,\ldots,m$ [15] é dada por $S = PP^T$;

(3) $H\varepsilon_n = (n+1)\varepsilon_{n+1},\ n = 0,1,\ldots;$

(4) $H^k\varepsilon_n = (n+k)^{(k)}\varepsilon_{n+k}$, onde $n^{(0)} := 1, (n+k)^{(k)} := (n+k)(n+k-1)\cdots(n+2)(n+1)$, $k = 1,2,\ldots;$

Não obstante a abundante literatura sobre as matrizes de Pascal, a ligação com a matriz H foi reforçada com os trabalhos de Aceto e Trigiante [2] e [82], pela sua importância na representação matricial de polinómios clássicos, no estabelecimento de identidades combinatórias e na resolução de equações em diferenças. É precisamente o papel da matriz H na representação matricial de polinómios, em particular polinómios de um conjunto de Appell, que pretendemos realçar. Veremos como através dela é possível determinar uma matriz que transforma um vector de potências ordinárias num vector de polinómios de Appell.

Seja $\{p_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ um conjunto de Appell, $p(x) = [p_0(x)\ p_1(x)\cdots p_m(x)]^T$ e $\xi(x) = [1\ x\cdots x^m]^T$ vectores coluna. Com esta notação as igualdades (2.1) podem representar-se na forma condensada $p(x) = M\xi(x)$, onde M é a matriz triangular inferior

$$M = \begin{bmatrix} a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & 2a_1 & a_0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{m}{0}a_m & \binom{m}{1}a_{m-1} & \cdots & \binom{m}{m-1}a_1 & \binom{m}{m}a_0 \end{bmatrix},$$

[15] Em [30] esta matriz é designada por matriz de Fermat.

isto é, $M = [M_{ij}]$ tal que

$$M_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j} a_{i-j} & , \ i \geq j \\ 0 & , \ i < j, \end{cases} \tag{2.68}$$

$(i, j = 0, 1, \ldots, m)$.

Consideremos a matriz H de ordem $m+1$ e façamos $t = H$ e $x = 0$ na função geradora (2.5) dos polinómios de Appell

$$f(H) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(0) \frac{H^n}{n!},$$

substituição esta válida em qualquer disco que contenha a origem. Dado que $p_n(0) = a_n$ (ver (2.1)) e H é nilpotente de ordem $m + 1$, então

$$f(H) = \sum_{n=0}^{m} a_n \frac{H^n}{n!}. \tag{2.69}$$

Proposição 2.8 *Seja H a matriz de criação de ordem $m+1$ e $G(x,t) = f(t)e^{xt}$ a função geradora dos polinómios do conjunto de Appell $\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. Então $f(H) = M$.*

Dem. Usando (2.69) concluímos que os elementos da matriz $f(H)$ são

$$\begin{aligned} (f(H))_{ij} &= \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n}{n!} \varepsilon_i^T H^n \varepsilon_j \\ &= \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n}{n!} (j+n)^{(n)} \varepsilon_i^T \varepsilon_{j+n} \\ &= \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n}{n!} (j+n)^{(n)} \delta_{i,j+n}, \end{aligned}$$

onde $\delta_{i,j}$ é o símbolo de Kronecker.

Se $i < j$, então $(f(H))_{ij} = 0$; se $i = j + n$, isto é, $i \geq j$, então

$$\begin{aligned} (f(H))_{ij} &= a_{i-j} \frac{i^{(i-j)}}{(i-j)!} \\ &= a_{i-j} \frac{i!}{(i-j)!j!} \\ &= \binom{i}{j} a_{i-j}, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. ∎

Do que acabámos de expor, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.3 *Sejam H a matriz de criação de ordem $m+1$, $\{p_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ um conjunto de Appell, $p(x) = [p_0(x)\ p_1(x) \cdots p_m(x)]^T$ e $\xi(x) = [1\ x \cdots x^m]^T$ vectores coluna. Então $f(H)$ é a matriz de transformação de $\xi(x)$ em $p(x)$, isto é,*

$$p(x) = f(H)\xi(x). \tag{2.70}$$

Este resultado é válido não apenas no caso de $\{p_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ser um conjunto de Appell, mas de um modo geral para sucessões de polinómios cujos termos sejam do tipo binomial, isto é, que satisfaçam a propriedade $\frac{\partial}{\partial x}p_n(x) = np_{n-1}(x),\quad n = 0, 1, \cdots$, onde o segundo membro é nulo se $n = 0$.

Corolário 2.3.1 *Sejam $b(x)$, $e(x)$ e $g(x)$ os vectores coluna cujas entradas são os $m+1$ primeiros polinómios de Bernoulli, Euler e Genocchi*[16]*, respectivamente. Então,*

$$\begin{aligned} b(x) &= B\xi(x), \quad B = \left(\sum_{n=0}^{m} \frac{H^n}{(n+1)!}\right)^{-1}, & (2.71)\\ e(x) &= E\xi(x), \quad E = 2(P+I)^{-1}, & (2.72)\\ g(x) &= G\xi(x), \quad G = 2H(P+I)^{-1}. & (2.73) \end{aligned}$$

Dem. Considerando a função geradora dos polinómios de Bernoulli (2.17), onde

$$f(t) = \frac{t}{e^t - 1} = \left(\frac{e^t-1}{t}\right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)!}\right)^{-1},$$

$$B \equiv f(H) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^n}{(n+1)!}\right)^{-1}$$

e, pelo Teorema 2.3, conclui-se (2.71).

Analogamente, das funções geradoras (2.18) e (2.19) obtêm-se, respectivamente,

$$E \equiv f(H) = \frac{2}{e^H + I} = 2(P+I)^{-1}$$

e

$$G \equiv f(H) = \frac{2H}{e^H + I} = 2H(P+I)^{-1}$$

[16]Entende-se que os $m+1$ primeiros polinómios do conjunto $\{p_0(x), p_1(x), \ldots, p_m(x), \ldots\}$ são $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_m(x)$.

e, também pelo Teorema 2.3 se concluem (2.72) e (2.73). ∎

Observação 2.7 *No caso dos polinómios de Bernoulli a substituição directa de t por H na função $f(t) = \frac{t}{e^t-1}$ não é viável, uma vez que $e^H - I = P - I$ é uma matriz singular.*

Observação 2.8 *A matriz B que transforma um vector de potências ordinárias num vector de polinómios de Bernoulli coincide com as matrizes L^{-1} e Q_{m+1}^{-1} obtidas em [2] e [26], respectivamente.*

Consideremos as matrizes de ordem $m+1$,

$$\begin{aligned}
D_{+k} &:= \mathrm{diag}[k,\, 1+k,\, 2+k,\, \cdots,\, m+k], \quad k \in \mathbb{N}_0,\\
D &:= D_{+0},\\
D! &:= \mathrm{diag}[0!,\, 1!,\, 2!,\, \cdots,\, m!],\\
D[\alpha] &:= \mathrm{diag}[1,\, \alpha,\, \alpha^2,\, \cdots,\, \alpha^m], \quad \alpha \neq 0 \text{ escalar.}
\end{aligned}$$

Algumas das propriedades apresentadas nas Secções A.1, A.2 e A.3 do Apêndice A podem agora representar-se na forma matricial do seguinte modo (ver [2], [26] e [82])[17]:

Proposição 2.9 *Sejam $b(x)$ e b, $e(x)$ e ϵ, $g(x)$ e g os vectores coluna cujas entradas são os $m+1$ primeiros polinómios e números de Bernoulli, Euler e Genocchi, respectivamente. Então,*

1.

$$\frac{d}{dx}b(x) = Hb(x), \tag{2.74}$$

$$\frac{d}{dx}e(x) = He(x), \tag{2.75}$$

$$\frac{d}{dx}g(x) = Hg(x). \tag{2.76}$$

[17] Uma vez que estamos a considerar vectores e matrizes de dimensão $m+1$, a representação matricial obtida diz respeito apenas aos primeiros $m+1$ polinómios, contudo a extensão para dimensão infinita é imediata.

2.

$$b(x) = P(x)b, \tag{2.77}$$
$$\begin{aligned} e(x) &= P(x)D[2]^{-1}P(-1)\epsilon \\ &= P(x)e(0), \end{aligned}$$
$$g(x) = P(x)g.$$

3.

$$b(x+1) - b(x) = H\xi(x), \tag{2.78}$$
$$e(x+1) + e(x) = 2\xi(x), \tag{2.79}$$
$$g(x+1) + g(x) = 2H\xi(x). \tag{2.80}$$

4.

$$b(x+1) = Pb(x), \tag{2.81}$$
$$e(x+1) = Pe(x),$$
$$g(x+1) = Pg(x).$$

5.

$$b(1-x) = D[-1]b(x), \tag{2.82}$$
$$e(1-x) = D[-1]e(x),$$
$$g(1-x) = -D[-1]g(x).$$

O Corolário 2.3.1 permite reescrever as relações (2.74), (2.75) e (2.76) na forma

$$\frac{d}{dx}b(x) = HB\xi(x),$$
$$\frac{d}{dx}e(x) = HE\xi(x),$$
$$\frac{d}{dx}g(x) = HG\xi(x)$$

e (2.78), (2.79) e (2.80) na forma

$$\begin{aligned} b(x+1) &= (B+H)\xi(x), \\ e(x+1) &= (2I-E)\xi(x), \\ g(x+1) &= (2H-G)\xi(x). \end{aligned}$$

Fazendo $x=0$ em (2.82) obtém-se

$$b(1) = D[-1]b,$$

que representa matricialmente a propriedade (A.7),

$$B_n(1) = (-1)^n B_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Uma vez que $B = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} H^k$ (cf. [2]),a igualdade

$$D[2]b(x) = Be(2x) \tag{2.83}$$

traduz a relação (2.25), entre os polinómios de Bernoulli e de Euler .

De (2.72), (2.73) e (2.83) podem relacionar-se os polinómios de Genocchi com os de Euler e Bernoulli do seguinte modo:

$$g(x) = He(x)$$

e

$$g(x) = HB^{-1}D[2]b\left(\frac{x}{2}\right) = (P-I)D[2]b\left(\frac{x}{2}\right).$$

A relação dos polinómios de Bernoulli com a matriz generalizada de Pascal $P(x)$ foi também estudada em [114] seguindo uma outra abordagem.

Definição 2.12 ([114], p. 1623) *A matriz de ordem $m+1$, $\mathfrak{B}(x) = [(\mathfrak{B}(x))_{ij}]$, tal que*

$$(\mathfrak{B}(x))_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j} B_{i-j}(x) & , \ i \geq j \\ 0 & , \ i < j. \end{cases}$$

$(i,j = 0,1,\cdots,m)$, é chamada matriz polinomial de Bernoulli e $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(0)$ é a matriz de Bernoulli.

Observação 2.9 *De modo análogo se poderiam definir matrizes de Euler e de Genocchi.*

Zhang e Wang ([114]) demonstraram que

$$\mathfrak{B}(x+y) = P(x)\mathfrak{B}(y) = P(y)\mathfrak{B}(x)$$

e, em particular, que

$$\mathfrak{B}(x) = P(x)\mathfrak{B} = \mathfrak{B}P(x), \tag{2.84}$$

$$\mathfrak{B}(x+1) = P\mathfrak{B}(x). \tag{2.85}$$

Observação 2.10 *Como $b(x)$ é a primeira coluna de $\mathfrak{B}(x)$, a propriedade (2.81) extrai-se de (2.85), assim como (2.77) se extrai de (2.84).*

De (2.85) e (2.84) vem que

$$\mathfrak{B}(x+1) - \mathfrak{B}(x) = (P-I)\mathfrak{B}P(x).$$

Por outro lado, Arponen ([6]) provou ainda que a matriz de Bernoulli é a única que satisfaz

$$(P-I)\mathfrak{B} = H$$

e que comuta com $P-I$ e H. Então $(P-I)\mathfrak{B}P(x) = HP(x)$ e, portanto,

$$\mathfrak{B}(x+1) - \mathfrak{B}(x) = HP(x). \tag{2.86}$$

Observação 2.11 *A propriedade (2.78) pode extrair-se de (2.86), atendendo a que $\xi(x)$ é a primeira coluna de $P(x)$.*

Corolário 2.3.2 *Seja $q(x)$ o vector coluna cujas entradas são os $m+1$ primeiros polinómios do conjunto $\{Q_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0} \equiv \{(-1)^n n! L_n^{(\alpha-n)}(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\alpha > -1$, de polinómios de Laguerre. Então,*

$$q(x) = Q\xi(x), \quad Q = (I-H)^\alpha.$$

Dem. Considerando a função geradora (2.33), onde $f(t) = (1-t)^\alpha$, e o Teorema 2.3 conclui-se que $q(x) = (I-H)^\alpha \xi(x)$. ■

Atendendo a que $Q_n(x) = (-1)^n n! L_n^{(\alpha-n)}(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$ e considerando o vector $\mathcal{L}(x) = [L_0^{(\alpha)}(x)\ L_1^{(\alpha-1)}(x)\ \cdots\ L_m^{(\alpha-m)}(x)\ ]^T$, então

$$q(x) = D[-1]D!\mathcal{L}(x),$$

donde

$$\mathcal{L}(x) = D!^{-1}D[-1](I-H)^{\alpha}\xi(x),$$

ficando assim conhecida a matriz de transformação entre $\xi(x)$ e $\mathcal{L}(x)$.

As relações (2.35) podem escrever-se na forma matricial

$$\mathcal{L}(x) = P(-1)\mathcal{L}^{(\alpha)}(x),$$

onde $\mathcal{L}^{(\alpha)}(x) = [L_0^{(\alpha)}(x)\ L_1^{(\alpha)}(x)\ \cdots\ L_m^{(\alpha)}(x)\ ]^T$. Portanto,

$$\mathcal{L}^{(\alpha)}(x) = PD!^{-1}D[-1](I-H)^{\alpha}\xi(x),$$

donde se obtém o vector dos polinómios de Laguerre (simples), $L_n^{(0)}(x)$, para $\alpha = 0$:

$$\mathcal{L}^{(0)}(x) = PD!^{-1}D[-1]\xi(x).$$

Corolário 2.3.3 *Seja $h(x)$ o vector coluna cujas entradas são os $m+1$ primeiros polinómios do conjunto $\{\mathcal{H}_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de polinómios de Hermite probabilísticos. Então,*

$$h(x) = \mathcal{H}\xi(x), \quad \mathcal{H} = e^{-\frac{H^2}{2}}.$$

Dem. Considerando a função geradora (2.38), onde $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, obtém-se $h(x) = e^{-\frac{H^2}{2}}\xi(x)$ como consequência imediata do Teorema 2.3. ■

A partir do desenvolvimento em série de potências da função $e^{-\frac{t^2}{2}}$, a matriz que transforma $\xi(x)$ em $h(x)$ pode escrever-se

$$\mathcal{H} = \sum_{n=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^n H^{2n}}{2^n n!}.$$

Observação 2.12 *De modo análogo se obteria a matriz de transformação de $\xi(x)$ em $\widehat{h}(x)$, onde este último é o vector coluna dos $m+1$ primeiros polinómios do conjunto $\{\widehat{H}_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.*

A relação (2.39), entre os polinómios $H_n(x)$ e $\mathcal{H}_n(x)$ permite a representação matricial dos $m+1$ polinómios de Hermite (clássicos) $H_n(x)$, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} H(x) &= D[\sqrt{2}]h(\sqrt{2}x) \\ &= D[\sqrt{2}]\mathcal{H}\xi(\sqrt{2}x) \end{aligned}$$

$$= D[\sqrt{2}]\mathcal{H}D[\sqrt{2}]\xi(x),$$

onde $H(x) = [H_0(x)\ H_1(x)\ \cdots\ H_m(x)]^T$.

Corolário 2.3.4 *Seja $\widetilde{l}(z)$ o vector coluna cujas entradas são os $m+1$ primeiros polinómios do conjunto $\{\widetilde{P}_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0} \equiv \left\{(z^2+1)^{\frac{n}{2}} P_n\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ e $J_0(\tau)$ a função de Bessel de primeira espécie e ordem zero. Então*

$$\widetilde{l}(z) = J_0(H)\xi(z). \tag{2.87}$$

Dem. Considerando a função geradora (2.53), onde

$$f(\tau) \equiv J_0(\tau) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \tau^{2n}}{2^{2n}(n!)^2},$$

obtém-se

$$f(H) \equiv J_0(H) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^n H^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

e (2.87) é consequência do Teorema 2.3. ■

Proposição 2.10 *Seja $\widetilde{p}(x) = [P_0(x)\ P_1(x)\cdots\ P_m(x)]^T$ o vector coluna cujas entradas são os $m+1$ primeiros polinómios (clássicos) de Legendre. Então*

$$\widetilde{p}(x) = D[\sqrt{1-x^2}]J_0(H)D^{-1}[\sqrt{1-x^2}]\xi(x).$$

Dem. Escrevendo $\widetilde{P}_n(z) = (z^2+1)^{\frac{n}{2}} P_n\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)$, $n = 0, 1, \cdots, m$ na forma matricial tem-se

$$\widetilde{l}(z) = D[\sqrt{z^2+1}]\widetilde{p}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right).$$

Usando a mudança de variável $z = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{p}(x) &= D[\sqrt{1-x^2}]\,\widetilde{l}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\
&= D[\sqrt{1-x^2}]\,J_0(H)\,\xi\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\
&= D[\sqrt{1-x^2}]\,J_0(H)\,D^{-1}[\sqrt{1-x^2}]\xi(x).
\end{aligned}$$

■

Corolário 2.3.5 *Sejam $\widetilde{t}(z)$ e $\widetilde{u}(z)$ os vectores coluna cujas entradas são os $m+1$ primeiros polinómios dos conjuntos de Appell $\{\widetilde{T}_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0} \equiv \left\{(z^2+1)^{n/2}T_n\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ e $\{\widetilde{U}_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0} \equiv \left\{\frac{1}{n+1}(z^2+1)^{n/2}U_n\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, onde $T_n(.)$ e $U_n(.)$ denotam os polinómios de Chebyshev de primeira e segunda espécies, respectivamente. Então*

$$\widetilde{t}(z) = \cos H\xi(z)$$

e

$$\widetilde{u}(z) = \operatorname{sinc} H\xi(z).$$

Dem. Considerando as funções geradoras (2.64) e (2.65) onde $f(t)$ é, respectivamente, $\cos t$ e $\operatorname{sinc} t$, os resultados obtêm-se de imediato pelo Teorema 2.3. ■

Atendendo ao desenvolvimento de $\cos t$ e de $\operatorname{sinc} t$ em série de potências, as matrizes $\cos H$ e de $\operatorname{sinc} H$ podem exprimir-se do seguinte modo:

$$\cos H = \sum_{n=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^n H^{2n}}{(2n)!}$$

e

$$\operatorname{sinc} H = \sum_{n=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^n H^{2n}}{(2n+1)!}.$$

De modo inteiramente análogo ao caso dos polinómios de Legendre, os polinómios (clássicos) de Chebyshev de primeira e de segunda espécies podem obter-se pelas relações matriciais

$$t(x) = D[\sqrt{1-x^2}]\cos HD^{-1}[\sqrt{1-x^2}]\xi(x)$$

e

$$u(x) = D_{+1}D[\sqrt{1-x^2}]\operatorname{sinc} HD^{-1}[\sqrt{1-x^2}]\xi(x),$$

onde $t(x) = [T_0(x)\ T_1(x)\ \ldots\ T_m(x)]^T$ e $u(x) = [U_0(x)\ U_1(x)\ \ldots\ U_m(x)]^T$.

Capítulo 3

Uma Nova Abordagem a Polinómios de Appell Multidimensionais

3.1 Polinómios de Appell multidimensionais

Polinómios de Appell multidimensionais têm sido estudados por vários autores, seguindo diversas abordagens. As diferentes generalizações que têm sido obtidas a partir dos polinómios de Appell unidimensionais resultam por vezes das aplicações que se pretendem para tais polinómios. Nesta secção faremos um breve resumo de algumas dessas generalizações.

Sejam $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}_0^r$ um multi-índice e $\boldsymbol{x}^N = x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}$ um monómio em $\boldsymbol{x}$. Ao longo do texto, as letras gregas representam multiíndices, excepto no caso dos polinómios de Laguerre multidimensionais onde, por uma questão de uniformidade com o caso unidimensional, α representa um parâmetro real, como a seu tempo será especificado.

Um polinómio em $\boldsymbol{x}$ de grau menor ou igual que $|N|$, com coeficientes num corpo $\mathbb{K}$, é uma combinação linear finita de monómios $\boldsymbol{x}^\sigma$ e pode ser representado por

$$p(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\sigma|=0}^{|N|} c_\sigma \boldsymbol{x}^\sigma, \ \ \sigma \in \mathbb{N}_0^r.$$

Se para $|\sigma| = |N|$ pelo menos um dos coeficientes c_σ for não nulo, $p(\boldsymbol{x})$ é de grau $|N|$.

A notação $p_N(\boldsymbol{x})$ refere-se a um polinómio em $\boldsymbol{x}$, de r variáveis e r índices, de grau menor ou igual a n_i relativamente à variável x_i, $i = 1, \ldots, r$, podendo escrever-se na forma

$$p_N(\boldsymbol{x}) = \sum_{\sigma_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{\sigma_r=0}^{n_r} c_{n_1-\sigma_1,\ldots,n_r-\sigma_r} x_1^{\sigma_1} \cdots x_r^{\sigma_r} \tag{3.1}$$
$$= \sum_{\sigma=0}^{N} c_{N-\sigma} \boldsymbol{x}^{\sigma}.$$

Denotaremos o conjunto dos polinómios $p_N(\boldsymbol{x}),\ N \in \mathbb{N}_0^r$, por $\{p_N(\boldsymbol{x})\}$.

Uma definição natural de polinómios de Appell em $\mathbb{R}^r$ é a seguinte ([98]):

Definição 3.1 *Um conjunto de polinómios $\{p_N(\boldsymbol{x})\}$ diz-se um conjunto de Appell em $\mathbb{R}^r$ se satisfizer as condições:*

i) $\frac{\partial}{\partial x_i} p_N(\boldsymbol{x}) = n_i p_{N-\mathbf{1}_i}(\boldsymbol{x}),\ i = 1, 2, \cdots, r$

ii) $p_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{x}) = c_{\mathbf{0}}, \quad c_{\mathbf{0}} \neq 0.$

Observação 3.1 *Geralmente estes polinómios são normalizados fazendo $p_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{x}) = 1$.*

Como exemplo básico de polinómios de Appell multidimensionais podemos referir os monómios elementares elementares $p_N(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^N$.

Tendo em vista a investigação da ortogonalidade de alguns polinómios da classe de Appell multidimensionais, Pommeret adoptou uma generalização da Definição 3.1 que já havia sido introduzida por Appell no seu artigo [5].

Definição 3.2 *Seja $\{p_N(\boldsymbol{x})\}$ um conjunto de polinómios em $\mathbb{R}^r$. Diz-se que $\{p_N(\boldsymbol{x})\}$ é um conjunto de Appell em $\mathbb{R}^r$ se existir uma matriz invertível de ordem r, $A = [a_{ij}]$, tal que*

i)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} p_N(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} n_j p_{N-\mathbf{1}_j}(\boldsymbol{x}), \quad i = 1, 2, \ldots, r \tag{3.2}$$

ii)

$$p_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{x}) = 1. \tag{3.3}$$

Observação 3.2 *Se $A = I_r$ então as definições 3.1 e 3.2 são equivalentes.*

Na sequência desta definição, o mesmo autor formulou uma outra caracterização de polinómios de Appell multidimensionais em termos da sua função geradora:

Proposição 3.1 ([98], p. 287) *Seja $\{p_N(\boldsymbol{x})\}$ um conjunto de polinómios em $\mathbb{R}^r$. Os polinómios $p_N(\boldsymbol{x})$ definidos por (3.2)-(3.3) são de Appell se e só se existir uma vizinhança $\mathcal{V}$ da origem, tal que para todo o elemento $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) \in \mathbb{R}^r \times \mathcal{V}$,*

$$f(\boldsymbol{t}) \exp(\langle A\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}\rangle) = \sum_{N \in \mathbb{N}_0^r} p_N(\boldsymbol{x}) \frac{\boldsymbol{t}^N}{N!},$$

onde A é uma matriz invertível de ordem r, f é analítica em $\mathcal{V}$ e $f(\mathbf{0}) = 1$.

Uma outra abordagem a polinómios de Appell em várias variáveis, devida a Carlson ([22]) e já referida na Secção 2.1 para o caso unidimensional, distingue-se da anterior fundamentalmente por se basear no conceito de polinómios de tipo binomial. Além disso, nesta abordagem considera-se o grau total dos polinómios em vez de considerar o grau relativo a cada variável.

Carlson provou que $\{p_{|N|}(\boldsymbol{x})\}$ é de tipo binomial, ou seja, verifica a igualdade

$$p_{|N|}(x_1 + \lambda, x_2 + \lambda, \cdots, x_r + \lambda) = \sum_{k=0}^{|N|} \binom{|N|}{k} p_k(x_1, x_2, \cdots, x_r) \lambda^{|N|-k},$$

$\lambda, x_1, x_2, \cdots, x_r \in \mathbb{C}$, sse

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial x_i} p_{|N|}(\boldsymbol{x}) = |N| p_{|N|-1}(\boldsymbol{x}), \tag{3.4}$$

onde o segundo membro é nulo se $|N| = 0$.

Sendo (3.4) uma generalização da condição **i)** da Definição 2.1, os polinómios de grau $|N|$ de várias variáveis são de tipo binomial se e só se são polinómios de Appell multidimensionais.

Em [16] Bretti e Ricci usam os polinómios de Hermite-Kampé de Fériet definidos pela função geradora

$$e^{x_1 t + x_2 t^j} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^j(x_1, x_2) \frac{t^n}{n!}$$

ou explicitamente por

$$g_n^j(x_1, x_2) = n! \sum_{s=0}^{[\frac{n}{j}]} \frac{x_1^{n-js} x_2^s}{(n-js)! s!}, \quad j \geq 2 \text{ inteiro},$$

para introduzir e estudar generalizações de polinómios de Appell para duas variáveis, com especial destaque para os polinómios de Bernoulli. Definem esses polinómios de Appell bidimensionais $p_n^j(x_1, x_2), n \in \mathbb{N}_0$, pela função geradora

$$f(t)e^{x_1t+x_2t^j} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^j(x_1, x_2)\frac{t^n}{n!},$$

obtêm fórmulas explícitas de tais polinómios em termos dos de Hermite-Kampé de Fériet e a partir delas deduzem equações diferenciais das quais aqueles polinómios são solução. O método aplicado, como os próprios autores referem, pode estender-se para mais de duas variáveis considerando extensões correspondentes dos polinómios de Hermite-Kampé de Fériet, isto é,

$$e^{x_1t+x_2t^2+\cdots+x_rt^r} = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x_1, x_2, \cdots, x_r)\frac{t^n}{n!}.$$

Observação 3.3 *Quer o caso dos polinómios abordados por Carlson, quer os abordados por Bretti e Ricci são polinómios de várias variáveis mas com um único índice, isto é, salientam o grau total do polinómio, mas não o grau relativo a cada variável.*

O princípio da monomialidade, já referido anteriormente no caso de polinómios de uma variável, foi generalizado para o caso de várias variáveis e vários índices e aplicado a alguns tipos particulares de polinómios tais como de Hermite, de Laguerre e de Hermite-Laguerre ([9], [78], [79], [80]).

Definição 3.3 *Seja $\{p_N(\boldsymbol{x})\}$ um conjunto de polinómios de r variáveis e r índices, de grau n_i relativamente à variável x_i, $i = 1, 2, \ldots, r$. O conjunto $\{p_N(\boldsymbol{x})\}$ diz-se quase-monomial se existirem $2r$ operadores $\widehat{\mathrm{M}}_{x_i}, \widehat{\mathrm{P}}_{x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, r$ independentes de N, tais que*

$$\widehat{\mathrm{M}}_{x_i}\, p_N(\boldsymbol{x}) = p_{N+\mathbf{1}_i}(\boldsymbol{x}),$$

$$\widehat{\mathrm{P}}_{x_i}\, p_N(\boldsymbol{x}) = n_i p_{N-\mathbf{1}_i}(\boldsymbol{x}).$$

Analogamente ao caso de uma variável, se os operadores $\widehat{\mathrm{P}}_{x_i}$ tiverem realização diferencial e $\widehat{\mathrm{M}}_{x_i}$ forem operadores a eles associados no sentido referido acima, então $p_N(\boldsymbol{x})$ satisfaz as seguintes r equações diferenciais:

$$\widehat{\mathrm{M}}_{x_i}\, \widehat{\mathrm{P}}_{x_i}\, p_N(\boldsymbol{x}) = n_i p_N(\boldsymbol{x}), \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Considerando adicionalmente a condição $p_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{x}) \equiv 1$, então $p_N(\boldsymbol{x})$ pode representar-se explicitamente por

$$p_N(\boldsymbol{x}) = \widehat{\mathrm{M}}_{x_1}^{n_1} \cdots \widehat{\mathrm{M}}_{x_r}^{n_r}(1),$$

e a sua função geradora por

$$\begin{aligned} e^{t\,\widehat{\mathrm{M}}_{\boldsymbol{x}}}(1) = e^{t_1\,\widehat{\mathrm{M}}_{x_1}+\cdots+t_r\,\widehat{\mathrm{M}}_{x_r}}(1) &= \sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_r=0}^{\infty}\frac{(t_1\,\widehat{\mathrm{M}}_{x_1})^{n_1}\cdots(t_r\,\widehat{\mathrm{M}}_{x_r})^{n_r}}{n_1!\cdots n_r!} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} p_N(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{t}^N}{N!}. \end{aligned}$$

Os polinómios de Appell multidimensionais têm também vindo a ser tratados no âmbito da Análise de Clifford, onde a derivada hipercomplexa e a construção duma função exponencial envolvida na função geradora daqueles polinómios têm um papel relevante ([10], [53], [92]). A partir daí o estudo tem evoluído no sentido de aplicação das técnicas operacionais desenvolvidas por Dattoli e seu grupo e na ligação de alguns conjuntos de polinómios de Appell com Funções Especiais ([18]).

No Capítulo 5, dedicado a polinómios de Appell no contexto da Análise de Clifford, retomaremos este assunto de modo mais detalhado.

3.2 Novos polinómios de Appell multidimensionais

A primeira dificuldade que surge no estudo de polinómios em várias variáveis é a escolha adequada da ordenação dos seus monómios. Na verdade, no caso unidimensional essa questão não é relevante porquanto a ordenação dos monómios é feita por ordem crescente ou decrescente dos seus graus. No caso multidimensional são várias as possibilidades, optando-se pela que melhor se adapte ao estudo que se pretenda levar a cabo. Por exemplo, Jackson ([75]), no seu estudo sobre propriedades formais de polinómios ortogonais em duas variáveis, ordena os monómios pelo seu grau total e aqueles que têm o mesmo grau são ordenados por ordem lexicográfica. Esta escolha é justificada pelo facto de possibilitar a construção de polinómios ortogonais de grau superior sem que as suas relações de ortogonalidade afectem as relações dos polinómios dos graus inferiores ([59]). Geronimo e Woerdeman ([60], [59]) e Delgado et al. ([46]), em trabalhos sobre polinómios ortogonais em duas variáveis, preferiram usar as ordens lexicográfica e lexicográfica reversa. Estas ordens permitiram-lhes que as matrizes associadas aos polinómios assim ordenados fossem matrizes estruturadas; no primeiro caso, matrizes bloco de Toeplitz cujos blocos são matrizes de Toeplitz e no segundo, matrizes bloco de Hankel cujos blocos são também matrizes de Hankel.

Sendo o nosso objectivo o estudo de polinómios de Appell multidimensionais a questão da escolha da ordem monomial também teve um papel central.

O nosso estudo incidirá sobre polinómios de r variáveis e r índices, com especial destaque para o caso $r = 2$.

Propomo-nos agora estudar polinómios de Appell multidimensionais, com multiíndices, à luz da Definição 3.1 e proceder à sua representação matricial. Nesse sentido, e atendendo à estreita relação dos polinómios de Appell unidimensionais com as matrizes de Pascal e, em última análise com a matriz de criação, era de esperar que também os polinómios multidimensionais estivessem relacionados com matrizes cujas estruturas fossem "semelhantes" às daquelas. Tal estrutura foi conseguida pela escolha de uma ordem monomial adequada, a ordem colexicográfica, como se tornará patente no tratamento matricial dos polinómios multidimensionais (Capítulo 4).

Seguindo a Definição 3.1, os polinómios de Appell de duas variáveis e dois índices, podem escrever-se:

$$\begin{aligned}
p_{0,0}(\boldsymbol{x}) &= c_{0,0} \\
p_{1,0}(\boldsymbol{x}) &= c_{1,0} + c_{0,0}x_1 \\
p_{2,0}(\boldsymbol{x}) &= c_{2,0} + 2c_{1,0}x_1 + c_{0,0}x_1^2 \\
p_{0,1}(\boldsymbol{x}) &= c_{0,1} + c_{0,0}x_2 \\
p_{1,1}(\boldsymbol{x}) &= c_{1,1} + c_{0,1}x_1 + c_{1,0}x_2 + c_{0,0}x_1x_2 \\
p_{2,1}(\boldsymbol{x}) &= c_{2,1} + 2c_{1,1}x_1 + c_{0,1}x_1^2 + c_{2,0}x_2 + 2c_{1,0}x_1x_2 + c_{0,0}x_1^2x_2 \\
p_{0,2}(\boldsymbol{x}) &= c_{0,2} + 2c_{0,1}x_2 + c_{0,0}x_2^2 \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.5}$$

ou, na forma compacta,

$$p_{n_1,n_2}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\sigma_1=0}^{n_1} \sum_{\sigma_2=0}^{n_2} \binom{n_1}{\sigma_1}\binom{n_2}{\sigma_2} c_{n_1-\sigma_1,n_2-\sigma_2} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}. \tag{3.6}$$

Em geral, para r variáveis escreve-se

$$p_N(\boldsymbol{x}) = \sum_{\sigma=0}^{N} \binom{N}{\sigma} c_{N-\sigma}\boldsymbol{x}^{\sigma}. \tag{3.7}$$

Observação 3.4 *Os polinómios (3.5) estão dispostos segundo a ordenação colexicográfica dos seus índices, para além da ordenação colexicográfica dos monómios de cada poli-*

nómio. Por exemplo, a ordenação dos monómios que constituem $p_{2,1}(\boldsymbol{x})$ decorre do facto dos pares ordenados (σ_1, σ_2) (σ_1 é o grau de x_1 e σ_2 é o grau de x_2) serem tais que

$$(0,0) \prec_{colex} (1,0) \prec_{colex} (2,0) \prec_{colex} (0,1) \prec_{colex} (1,1) \prec_{colex} (2,1).$$

Analogamente ao caso dos polinómios de Appell unidimensionais, podemos estabelecer outra caracterização dos polinómios de Appell em várias variáveis e vários índices recorrendo à noção de função geradora. Para isso consideremos a seguinte definição:

Definição 3.4 *Sejam $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_r) \in \mathbb{R}^r$ e $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^r$. Consideremos as funções $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ tais que $w(u) = e^u$ e $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \rangle$, onde $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \rangle$ denota o produto interno usual definido no espaço vectorial r-dimensional $\mathbb{R}^r$. À função composta $w \circ f : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ chamamos função exponencial e denotamo-la por* $\operatorname{Exp}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$.

A função exponencial $\operatorname{Exp}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ é, portanto, definida pela série convergente

$$\begin{aligned} \operatorname{Exp}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) := e^{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \rangle} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (x_1 t_1 + \cdots + x_r t_r)^k \\ &= \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \boldsymbol{x}^\sigma \frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Proposição 3.2 *Sejam $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^r$, $f(\boldsymbol{t}) = \sum_{|\alpha|=0}^{+\infty} c_\alpha \frac{\boldsymbol{t}^\alpha}{\alpha!}$, com $c_{\boldsymbol{0}} \neq 0$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{N}_0^r$, uma série de potências formal múltipla. Os polinómios $p_N(\boldsymbol{x})$, $N \in \mathbb{N}_0^r$ são de Appell sse a sua função geradora for da forma $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = f(\boldsymbol{t}) \operatorname{Exp}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$.*

Dem. Suponhamos que $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ é a função geradora de $p_N(\boldsymbol{x}), N \in N_0^r$. Multiplicando as séries $f(\boldsymbol{t}) = \sum_{|\alpha|=0}^{+\infty} c_\alpha \frac{\boldsymbol{t}^\alpha}{\alpha!}$ e $\operatorname{Exp}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \boldsymbol{x}^\sigma \frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!}$ obtém-se

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{t}) \operatorname{Exp}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) &= \sum_{|N|=0}^{+\infty} \left(\sum_{\alpha+\sigma=N} \frac{c_\alpha \boldsymbol{x}^\sigma}{\alpha! \sigma!} \right) \boldsymbol{t}^N \\ &= \sum_{|N|=0}^{+\infty} \left(\sum_{\sigma=0}^{N} \frac{N! c_{N-\sigma} \boldsymbol{x}^\sigma}{(N-\sigma)! \sigma!} \right) \frac{\boldsymbol{t}^N}{N!} \\ &= \sum_{|N|=0}^{+\infty} \left(\sum_{\sigma=0}^{N} \binom{N}{\sigma} c_{N-\sigma} \boldsymbol{x}^\sigma \right) \frac{\boldsymbol{t}^N}{N!} \\ &= \sum_{|N|=0}^{+\infty} p_N(\boldsymbol{x}) \frac{\boldsymbol{t}^N}{N!}, \end{aligned}$$

sendo os coeficientes de $\frac{\boldsymbol{t}^N}{N!}$ polinómios de Appell $p_N(\boldsymbol{x})$, conforme (3.7).

Partindo de (3.7) e da noção de função geradora, de modo análogo se prova a implicação recíproca. ■

Assim, também podemos definir polinómios de Appell multidimensionais do seguinte modo:

Definição 3.5 *Um conjunto de polinómios multidimensionais* $\{p_N(\boldsymbol{x})\}$ *diz-se um conjunto de Appell se existir uma série de potências formal múltipla* $f(\boldsymbol{t}) = \sum_{|\alpha|=0}^{+\infty} c_\alpha \frac{\boldsymbol{t}^\alpha}{\alpha!}$, $c_{\boldsymbol{0}} \neq 0$ *tal que*

$$f(\boldsymbol{t})\,\mathrm{Exp}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \sum_{|N|=0}^{+\infty} p_N(\boldsymbol{x}) \frac{\boldsymbol{t}^N}{N!} \tag{3.9}$$

(também formalmente).

3.2.1 Generalização de conjuntos particulares

A caracterização de polinómios de Appell multidimensionais através da sua função geradora exponencial tem, tal como no caso unidimensional, um carácter unificador. Basta a escolha adequada da função $f(\boldsymbol{t})$ para que se obtenham conjuntos particulares de polinómios de Appell multidimensionais que correspondem a generalizações dos existentes para uma variável.

Sem prejuízo da existência de outros possíveis conjuntos, centrar-nos-emos nas generalizações dos conjuntos particulares de Appell referidos na Secção 2.2.

Polinómios de Bernoulli, Euler e Genocchi multidimensionais

Definição 3.6 *Sejam* $\boldsymbol{t},\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^r$ *e* $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r) \in \mathbb{N}_0^r$. *Os polinómios de Bernoulli* $B_\sigma(\boldsymbol{x})$, *de Euler* $E_\sigma(\boldsymbol{x})$ *e de Genocchi* $G_\sigma(\boldsymbol{x})$ *multidimensionais são definidos como coeficientes das séries de potências formais múltiplas*

$$\mathrm{Exp}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t_1+\cdots+t_r)^k}{(k+1)!}\right)\left(\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} B_\sigma(\boldsymbol{x}) \frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!}\right), \tag{3.10}$$

$$2\,\mathrm{Exp}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \left(1+\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t_1+\cdots+t_r)^k}{k!}\right)\left(\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} E_\sigma(\boldsymbol{x}) \frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!}\right) \tag{3.11}$$

e

$$2(t_1 + \cdots + t_r)\,\mathrm{Exp}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \left(1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t_1 + \cdots + t_r)^k}{k!}\right) \left(\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} G_\sigma(\boldsymbol{x}) \frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!}\right), \qquad (3.12)$$

respectivamente.

Pela fórmula polinomial

$$\begin{aligned}(t_1 + \cdots + t_r)^k &= \sum_{|\gamma|=k} \binom{k}{\gamma} t_1^{\gamma_1} \cdots t_r^{\gamma_r} \\ &= \sum_{|\gamma|=k} \binom{k}{\gamma} \boldsymbol{t}^\gamma,\end{aligned}$$

onde $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r) \in \mathbb{N}_0^r$, e por (3.8), (3.10) é equivalente a

$$\sum_{|\beta|=0}^{+\infty} \boldsymbol{x}^\beta \frac{\boldsymbol{t}^\beta}{\beta!} = \left(\sum_{|\gamma|=0}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{t}^\gamma}{(|\gamma|+1)\gamma!}\right) \left(\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} B_\sigma(\boldsymbol{x}) \frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!}\right),$$

ou

$$\sum_{|\beta|=0}^{+\infty} \boldsymbol{x}^\beta \frac{\boldsymbol{t}^\beta}{\beta!} = \sum_{|\beta|=0}^{+\infty} \left(\sum_{\gamma+\sigma=\beta} \frac{B_\sigma(\boldsymbol{x})}{(|\gamma|+1)\gamma!\sigma!}\right) \boldsymbol{t}^\beta. \qquad (3.13)$$

Esta última expressão generaliza para várias variáveis a igualdade

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(xt)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{k+n=j} \frac{B_n(x)}{(k+1)!n!}\right) t^j,$$

$j, k, n \in \mathbb{N}_0$, equivalente a (2.17).

A comparação de ambos os membros de (3.13) permite obter a seguinte relação entre os polinómios de Bernoulli multidimensionais e as potências de $\boldsymbol{x}$:

$$\sum_{\gamma+\sigma=\beta} \frac{B_\sigma(\boldsymbol{x})}{(|\gamma|+1)\gamma!\sigma!} = \frac{1}{\beta!} \boldsymbol{x}^\beta. \qquad (3.14)$$

De (3.11) e (3.12), de modo inteiramente análogo, se obtêm relações similares para os polinómios de Euler e de Genocchi multidimensionais:

$$\frac{E_\beta(\boldsymbol{x})}{\beta!} + \sum_{\gamma+\sigma=\beta} \frac{E_\sigma(\boldsymbol{x})}{\gamma!\sigma!} = \frac{2}{\beta!} \boldsymbol{x}^\beta \qquad (3.15)$$

e

$$\frac{G_\beta(\boldsymbol{x})}{\beta!} + \sum_{\gamma+\sigma=\beta} \frac{G_\sigma(\boldsymbol{x})}{\gamma!\sigma!} = 2\sum_{k=1}^{r} \frac{\boldsymbol{x}^{\beta-\mathbf{1}_k}}{(\beta-\mathbf{1}_k)!}, \tag{3.16}$$

convencionando-se que $x_k^{\beta_k-1}=0$ e $(\beta_k-1)!=1$ se $\beta_k-1<0,\ k=1,\ldots,r$.

Observação 3.5 *As relações (3.14), (3.15) e (3.16) podem escrever-se na forma*

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma_1=0}^{\beta_1}\cdots\sum_{\sigma_r=0}^{\beta_r} \frac{B_\sigma(\boldsymbol{x})}{(|\beta-\sigma|+1)(\beta-\sigma)!\sigma!} = \frac{1}{\beta!}\boldsymbol{x}^\beta,\\
&\frac{E_\beta(\boldsymbol{x})}{\beta!} + \sum_{\sigma_1=0}^{\beta_1}\cdots\sum_{\sigma_r=0}^{\beta_r} \frac{E_\sigma(\boldsymbol{x})}{(\beta-\sigma)!\sigma!} = \frac{2}{\beta!}\boldsymbol{x}^\beta,\\
&\frac{G_\beta(\boldsymbol{x})}{\beta!} + \sum_{\sigma_1=0}^{\beta_1}\cdots\sum_{\sigma_r=0}^{\beta_r} \frac{G_\sigma(\boldsymbol{x})}{(\beta-\sigma)!\sigma!} = 2\sum_{k=1}^{r} \frac{\boldsymbol{x}^{\beta-\mathbf{1}_k}}{(\beta-\mathbf{1}_k)!},
\end{aligned}$$

respectivamente.

Observação 3.6 *Os conjuntos de polinómios de Bernoulli, de Euler e de Genocchi multidimensionais agora definidos contêm r cópias dos respectivos polinómios clássicos (unidimensionais) de cada grau superior a zero. Tais cópias obtêm-se quando apenas um dos índices $\sigma_k,\ \ k=1,\ldots,r$, é diferente de zero. Além disso, nesses conjuntos o polinómio tal que $|\sigma|=0$ coincide com o respectivo polinómio clássico de grau zero.*

Para uma melhor visualização, são apresentados exemplos de polinómios de Bernoulli, Euler e Genocchi multidimensionais nas secções B.1, B.2 e B.3 do APÊNDICE B.

De modo semelhante ao caso unidimensional, denotemos por

$$\begin{aligned}
B_\sigma &= B_{\sigma_1,\ldots,\sigma_r} := B_{\sigma_1,\ldots,\sigma_r}(0,\ldots,0),\\
E_\sigma &= E_{\sigma_1,\ldots,\sigma_r} := 2^{|\sigma|}E_{\sigma_1,\ldots,\sigma_r}(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

e

$$G_\sigma = G_{\sigma_1,\ldots,\sigma_r} := G_{\sigma_1,\ldots,\sigma_r}(0,\ldots,0),$$

o valor dos polinómios de Bernoulli, de Euler e de Genocchi multidimensionais nos pontos indicados. Fazendo $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ em (3.10) e (3.12) e $\boldsymbol{x}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} := (\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2})$ em (3.11), obtêm-se de imediato as funções geradoras dos números B_σ, G_σ e E_σ:

$$\frac{t_1+\cdots+t_r}{\operatorname{Exp}(\mathbf{1},\boldsymbol{t})-1}=\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}B_\sigma\frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!} \tag{3.17}$$

$$\frac{2(t_1+\cdots+t_r)}{\operatorname{Exp}(\mathbf{1},\boldsymbol{t})+1}=\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}G_\sigma\frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!} \tag{3.18}$$

$$\frac{2\operatorname{Exp}(\mathbf{1},\boldsymbol{t})}{\operatorname{Exp}(\mathbf{1},2\boldsymbol{t})+1}=\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}E_\sigma\frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!}. \tag{3.19}$$

Facilmente se verifica que daqueles números, os que têm o multi-índice com norma $|\sigma|=n, n\in\mathbb{N}_0$ coincidem, respectivamente, com os números de Bernoulli B_n, de Genocchi G_n e de Euler E_n. Assim,

$$B_\sigma=0,\quad G_\sigma=0,\quad E_\sigma=0,\quad \text{se } |\sigma|=2k+1,\quad k=1,2,\ldots$$

e

$\lvert\sigma\rvert$	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16	$\cdots$
B_σ	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3617}{510}$	$\cdots$
G_σ	0	1	-1	1	-3	17	-155	2073	-38227	929569	$\cdots$
E_σ	1	0	-1	5	-61	1385	-50521	2702765	-199360981	19391512145	$\cdots$

.

Os polinómios multidimensionais acabados de definir exibem muitas propriedades e relações análogas às dos correspondentes polinómios unidimensionais apresentados no Capítulo 2. Desde logo, a validade da proposição seguinte decorre do facto de estarmos perante polinómios de Appell multidimensionais.

Proposição 3.3 *Os polinómios $B_\sigma(\boldsymbol{x}), E_\sigma(\boldsymbol{x}), G_\sigma(\boldsymbol{x}), \sigma\in\mathbb{N}_0^r$, satisfazem as igualdades*

$$\frac{\partial}{\partial x_k}B_\sigma(\boldsymbol{x})=\sigma_k B_{\sigma-\mathbf{1}_k} \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}E_\sigma(\boldsymbol{x})=\sigma_k E_{\sigma-\mathbf{1}_k} \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}G_\sigma(\boldsymbol{x})=\sigma_k G_{\sigma-\mathbf{1}_k}, \tag{3.22}$$

para $k=1,\ldots,r$, $\sigma_k\geq 0$ e onde os segundos membros são zero quando $\sigma_k=0$.

Além disso, os referidos polinómios podem ser obtidos a partir dos conhecidos números B_σ, E_σ e G_σ, respectivamente.

Proposição 3.4

$$B_\sigma(\boldsymbol{x}) = \sum_{\beta_1=0}^{\sigma_1} \cdots \sum_{\beta_r=0}^{\sigma_r} \binom{\sigma}{\beta} B_\beta \boldsymbol{x}^{\sigma-\beta} \tag{3.23}$$

$$E_\sigma(\boldsymbol{x}) = \sum_{\beta_1=0}^{\sigma_1} \cdots \sum_{\beta_r=0}^{\sigma_r} \binom{\sigma}{\beta} \frac{E_\beta}{2^{|\beta|}} (\boldsymbol{x} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})^{\sigma-\beta} \tag{3.24}$$

$$G_\sigma(\boldsymbol{x}) = \sum_{\beta_1=0}^{\sigma_1} \cdots \sum_{\beta_r=0}^{\sigma_r} \binom{\sigma}{\beta} G_\beta \boldsymbol{x}^{\sigma-\beta}. \tag{3.25}$$

Dem. Usando as definições de polinómios de Bernoulli multidimensionais e de números de Bernoulli, pode escrever-se

$$\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \left(\sum_{\beta+\gamma=\sigma} \frac{B_\beta \boldsymbol{x}^\gamma}{\beta!\gamma!} \right) \boldsymbol{t}^\sigma = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{B_\sigma(\boldsymbol{x})}{\sigma!} \boldsymbol{t}^\sigma.$$

Igualando os coeficientes de $\boldsymbol{t}^\sigma$ de ambos os membros,

$$\begin{aligned} B_\sigma(\boldsymbol{x}) &= \sum_{\beta_1=0}^{\sigma_1} \cdots \sum_{\beta_r=0}^{\sigma_r} \frac{\sigma! B_\beta \boldsymbol{x}^{\sigma-\beta}}{\beta!(\sigma-\beta)!} \\ &= \sum_{\beta_1=0}^{\sigma_1} \cdots \sum_{\beta_r=0}^{\sigma_r} \binom{\sigma}{\beta} B_\beta \boldsymbol{x}^{\sigma-\beta}. \end{aligned}$$

A definição de polinómios de Euler multidimensionais permite escrever

$$\frac{2\,\mathrm{Exp}(\boldsymbol{x}, 2\boldsymbol{t})}{\mathrm{Exp}(\mathbf{1}, 2\boldsymbol{t}) + 1} = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{2^{|\sigma|} E_\sigma(\boldsymbol{x})}{\sigma!} \boldsymbol{t}^\sigma,$$

equivalente a

$$\frac{2\,\mathrm{Exp}(\boldsymbol{x} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, 2\boldsymbol{t})}{\mathrm{Exp}(\mathbf{1}, -\boldsymbol{t})\,[\mathrm{Exp}(\mathbf{1}, 2\boldsymbol{t}) + 1]} = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{2^{|\sigma|} E_\sigma(\boldsymbol{x})}{\sigma!} \boldsymbol{t}^\sigma.$$

Por (3.19), a igualdade anterior pode escrever-se na forma

$$\left(\sum_{|\beta|=0}^{+\infty} \frac{E_\beta}{\beta!} \boldsymbol{t}^\beta \right) \left(\sum_{|\gamma|=0}^{+\infty} \frac{2^{|\gamma|}}{\gamma!} \left(\boldsymbol{x} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \right)^\gamma \boldsymbol{t}^\gamma \right) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{2^{|\sigma|} E_\sigma(\boldsymbol{x})}{\sigma!} \boldsymbol{t}^\sigma. \tag{3.26}$$

Efectuando a multiplicação das séries múltiplas do primeiro membro e igualando os coeficientes das potências de $\boldsymbol{t}$ obtém-se o resultado (3.24) enunciado.

De modo análogo, pelas funções geradoras dos polinómios e dos números de Genocchi, se demonstra (3.25). ■

Consideremos os operadores $\triangle := T - Id$ e $\nabla := T + Id$, onde Id é o operador identidade e T é o operador *shift* que actua simultaneamente sobre todas as variáveis, isto é,

$$Tf(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{1}) := f(x_1 + 1, \ldots, x_r + 1).$$

Proposição 3.5

$$\triangle B_\sigma(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \boldsymbol{x}^{\sigma - \boldsymbol{1}_k}, \tag{3.27}$$

$$\nabla E_\sigma(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}^\sigma, \tag{3.28}$$

$$\nabla G_\sigma(\boldsymbol{x}) = 2\sum_{k=1}^{r} \sigma_k \boldsymbol{x}^{\sigma - \boldsymbol{1}_k}. \tag{3.29}$$

Dem. Notando que

$$\begin{aligned}
\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{1}{\sigma!} \triangle B_\sigma(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{t}^\sigma &= \frac{(t_1 + \cdots + t_r)\left[\operatorname{Exp}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{1}, \boldsymbol{t}) - \operatorname{Exp}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})\right]}{\operatorname{Exp}(\boldsymbol{1}, \boldsymbol{t}) - 1} \\
&= (t_1 + \cdots + t_r) \operatorname{Exp}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{x}^\sigma}{\sigma!} \boldsymbol{t}^{\sigma + \boldsymbol{1}_k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{x}^{\sigma - \boldsymbol{1}_k}}{(\sigma - \boldsymbol{1}_k)!} \boldsymbol{t}^\sigma \right),
\end{aligned}$$

onde $x_k^{\sigma_k - 1} = 0$ e $(\sigma_k - 1)! = 1$ se $\sigma_k - 1 < 0$, e comparando os coeficientes de $\boldsymbol{t}^\sigma$ em

$$\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{1}{\sigma!} \triangle B_\sigma(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{t}^\sigma = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{r} \frac{\boldsymbol{x}^{\sigma - \boldsymbol{1}_k}}{(\sigma - \boldsymbol{1}_k)!} \right) \boldsymbol{t}^\sigma$$

obtém-se

$$\triangle B_\sigma(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \boldsymbol{x}^{\sigma - \boldsymbol{1}_k}.$$

A igualdade (3.28) deduz-se de

$$\begin{aligned}\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}\frac{1}{\sigma!}\nabla E_\sigma(\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}^\sigma &= \frac{2\,[\mathrm{Exp}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1},\boldsymbol{t})+\mathrm{Exp}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})]}{\mathrm{Exp}(\boldsymbol{1},\boldsymbol{t})+1}\\ &= 2\,\mathrm{Exp}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\\ &= 2\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{x}^\sigma}{\sigma!}\boldsymbol{t}^\sigma.\end{aligned}$$

De modo análogo também se prova (3.29). ∎

Proposição 3.6 *Seja* $\boldsymbol{h}=(h_1,\ldots,h_r)\in\mathbb{R}^r$. *Então*

$$B_\sigma(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = \sum_{\beta_1=0}^{\sigma_1}\cdots\sum_{\beta_r=0}^{\sigma_r}\binom{\sigma}{\beta}B_\beta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}^{\sigma-\beta} \tag{3.30}$$

$$E_\sigma(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = \sum_{\beta_1=0}^{\sigma_1}\cdots\sum_{\beta_r=0}^{\sigma_r}\binom{\sigma}{\beta}E_\beta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}^{\sigma-\beta} \tag{3.31}$$

$$G_\sigma(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = \sum_{\beta_1=0}^{\sigma_1}\cdots\sum_{\beta_r=0}^{\sigma_r}\binom{\sigma}{\beta}G_\beta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}^{\sigma-\beta}. \tag{3.32}$$

Dem. De acordo com a definição de polinómios de Bernoulli multidimensionais e (3.8),

$$\frac{(t_1+\cdots+t_r)\,\mathrm{Exp}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}{\mathrm{Exp}(\boldsymbol{1},\boldsymbol{t})-1}\,\mathrm{Exp}(\boldsymbol{h},\boldsymbol{t}) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}\frac{1}{\sigma!}B_\sigma(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})\boldsymbol{t}^\sigma.$$

Multiplicando as séries formais múltiplas correspondentes aos dois factores do primeiro membro e posteriormente igualando os coeficientes de $\boldsymbol{t}^\sigma$, obtém-se (3.30).

As demonstrações de (3.31) e (3.32) são análogas, tomando como ponto de partida as definições de polinómios de Euler e de Genocchi, respectivamente. ∎

Em particular, para $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{1}$ tem-se

$$B_\sigma(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1}) = \sum_{\beta_1=0}^{\sigma_1}\cdots\sum_{\beta_r=0}^{\sigma_r}\binom{\sigma}{\beta}B_\beta(\boldsymbol{x}) \tag{3.33}$$

$$E_\sigma(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1}) = \sum_{\beta_1=0}^{\sigma_1}\cdots\sum_{\beta_r=0}^{\sigma_r}\binom{\sigma}{\beta}E_\beta(\boldsymbol{x}) \tag{3.34}$$

$$G_\sigma(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1}) = \sum_{\beta_1=0}^{\sigma_1}\cdots\sum_{\beta_r=0}^{\sigma_r}\binom{\sigma}{\beta}G_\beta(\boldsymbol{x}). \tag{3.35}$$

Proposição 3.7

$$B_\sigma(\mathbf{1}-\boldsymbol{x}) = (-1)^{|\sigma|} B_\sigma(\boldsymbol{x}) \tag{3.36}$$

$$E_\sigma(\mathbf{1}-\boldsymbol{x}) = (-1)^{|\sigma|} E_\sigma(\boldsymbol{x}) \tag{3.37}$$

$$G_\sigma(\mathbf{1}-\boldsymbol{x}) = (-1)^{|\sigma|+1} G_\sigma(\boldsymbol{x}). \tag{3.38}$$

Dem. A definição de polinómios de Bernoulli multidimensionais permite escrever

$$\frac{(t_1+\cdots+t_r)\operatorname{Exp}(\mathbf{1}-\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}{\operatorname{Exp}(\mathbf{1},\boldsymbol{t})-1} = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{1}{\sigma!} B_\sigma(\mathbf{1}-\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}^\sigma,$$

ou seja,

$$\frac{-(t_1+\cdots+t_r)\operatorname{Exp}(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{t})}{\operatorname{Exp}(\mathbf{1},-\boldsymbol{t})-1} = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{1}{\sigma!} B_\sigma(\mathbf{1}-\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}^\sigma.$$

Esta igualdade é equivalente a

$$\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{|\sigma|}}{\sigma!} B_\sigma(\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}^\sigma = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{1}{\sigma!} B_\sigma(\mathbf{1}-\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}^\sigma$$

donde se conclui (3.36), igualando os coeficientes de $\boldsymbol{t}^\sigma$.

As igualdades (3.37) e (3.38) demonstram-se de modo inteiramente análogo, bastando usar a função geradora adequada dos polinómios de Euler e Genocchi, respectivamente.

■

Desta Proposição, fazendo $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ em (3.36) e (3.38) tem-se, analogamente ao que ocorre no caso unidimensional, que

$$B_\sigma(\mathbf{1}) = (-1)^{|\sigma|} B_\sigma(\mathbf{0}) = (-1)^{|\sigma|} B_\sigma$$

e

$$G_\sigma(\mathbf{1}) = (-1)^{|\sigma|+1} G_\sigma(\mathbf{0}) = (-1)^{|\sigma|+1} G_\sigma.$$

Também, fazendo $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} := \left(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)$ em (3.37) se obtém

$$E_\sigma\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) = (-1)^{|\sigma|} E_\sigma\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right),$$

e, portanto, mais uma vez se conclui que se $|\sigma|$ é ímpar os números de Euler correspondentes são nulos.

Relações entre os polinómios multidimensionais de Bernoulli, Euler e Genocchi podem ser sintetizadas na seguinte proposição.

Proposição 3.8

i)

$$\sum_{k=1}^{r} \sigma_k E_{\sigma-\mathbf{1}_k}(\boldsymbol{x}) = 2^{|\sigma|}\left[B_\sigma\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})\right) - B_\sigma\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}\right)\right]. \tag{3.39}$$

ii)

$$\sum_{k=1}^{r} \sigma_k E_{\sigma-\mathbf{1}_k}(\boldsymbol{x}) = G_\sigma(\boldsymbol{x}). \tag{3.40}$$

Dem. Pela função geradora dos polinómios multidimensionais de Bernoulli,

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{1}{\sigma!}\left[B_\sigma\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})\right) - B_\sigma\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}\right)\right]\boldsymbol{t}^\sigma = \\
&= \frac{(t_1+\cdots+t_r)\left[\operatorname{Exp}\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1}),\boldsymbol{t}\right) - \operatorname{Exp}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\right)\right]}{\operatorname{Exp}(\mathbf{1},\boldsymbol{t})-1} \\
&= \frac{(t_1+\cdots+t_r)\operatorname{Exp}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\right)\left[\operatorname{Exp}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\boldsymbol{t}\right)-1\right]}{\operatorname{Exp}(\mathbf{1},\boldsymbol{t})-1} \\
&= \frac{2\operatorname{Exp}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\right)}{\operatorname{Exp}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\boldsymbol{t}\right)+1}\,\frac{t_1+\cdots+t_r}{2},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{1}{\sigma!}\left[B_\sigma\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})\right) - B_\sigma\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}\right)\right]\boldsymbol{t}^\sigma = \\
&= \left(\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{|\sigma|}\sigma!}E_\sigma(\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}^\sigma\right)\frac{t_1+\cdots+t_r}{2} \\
&= \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{|\sigma|+1}\sigma!}E_\sigma(\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}^{\sigma+\mathbf{1}_1} + \cdots + \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{|\sigma|+1}\sigma!}E_\sigma(\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}^{\sigma+\mathbf{1}_r} \\
&= \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{|\sigma|}\sigma!}\left[\sigma_1 E_{\sigma-\mathbf{1}_1}(\boldsymbol{x}) + \cdots + \sigma_r E_{\sigma-\mathbf{1}_r}(\boldsymbol{x})\right]\boldsymbol{t}^\sigma,
\end{aligned}$$

onde $E_{\sigma-\mathbf{1}_k}(\boldsymbol{x}) = 0$ e $(\sigma_k-1)! = 1$ se $\sigma_k - 1 < 0, k = 1,\ldots,r$. Portanto, comparando os coeficientes de $\boldsymbol{t}^\sigma$, obtém-se (3.39).

Analogamente, pela função geradora dos polinómios de Genocchi multidimensionais

$$\begin{aligned}
\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} G_\sigma(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!} &= (t_1+\cdots+t_r)\frac{2\,\mathrm{Exp}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}{\mathrm{Exp}(\mathbf{1},\boldsymbol{t})+1}\\
&= (t_1+\cdots+t_r)\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}\frac{1}{\sigma!}E_\sigma(\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}^\sigma\\
&= \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}\frac{1}{\sigma!}E_\sigma(\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}^{\sigma+\mathbf{1}_1}+\cdots+\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}\frac{1}{\sigma!}E_\sigma(\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}_1^{\sigma+\mathbf{1}_r}\\
&= \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}\frac{1}{(\sigma-\mathbf{1}_1)!}E_{\sigma-\mathbf{1}_1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}^\sigma+\cdots+\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}\frac{1}{(\sigma-\mathbf{1}_r)!}E_{\sigma-\mathbf{1}_r}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}^\sigma.
\end{aligned}$$

Assim, conclui-se que

$$\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}\frac{1}{\sigma!}\left[\sum_{k=0}^{r}\sigma_k E_{\sigma-\mathbf{1}_k}(\boldsymbol{x})\right]\boldsymbol{t}^\sigma = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}\frac{1}{\sigma!}G_\sigma(\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}^\sigma$$

e, portanto,

$$\sum_{k=0}^{r}\sigma_k E_{\sigma-\mathbf{1}_k}(\boldsymbol{x}) = G_\sigma(\boldsymbol{x}).$$

∎

Polinómios de Laguerre multidimensionais

Pretendemos aqui generalizar para várias variáveis o conjunto de polinómios de Laguerre $\{Q_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0} = \{(-1)^n n! L_n^{(\alpha-n)}(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\alpha > -1$ contido na classe de Appell.

Definição 3.7 *Sejam $\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^r$, $\sigma\in\mathbb{N}_0^r$ e $\mathfrak{a}=(\alpha,\alpha,\ldots,\alpha)$, $\alpha>-1$. Os polinómios de Laguerre multidimensionais $Q_\sigma(\boldsymbol{x}) = (-1)^{|\sigma|}\sigma! L_\sigma^{(\mathfrak{a}-\sigma)}(\boldsymbol{x})$, são definidos como coeficientes da série de potências formal múltipla*

$$\mathrm{Exp}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = (1-(t_1+\cdots+t_r))^{-\alpha}\left(\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}Q_\sigma(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!}\right). \tag{3.41}$$

Desta definição obtém-se

$$\sum_{|\beta|=0}^{+\infty}\boldsymbol{x}^\beta\frac{\boldsymbol{t}^\beta}{\beta!} = \sum_{|\beta|=0}^{+\infty}\left(\sum_{\gamma+\sigma=\beta}\frac{(\alpha)_{|\gamma|}Q_\sigma(\boldsymbol{x})}{\gamma!\sigma!}\right)\boldsymbol{t}^\beta,$$

ou seja, a relação entre os polinómios $L_\sigma^{(\mathfrak{a}-\sigma)}(\boldsymbol{x})$ e as potências $\boldsymbol{x}$ é dada por

$$\sum_{\gamma+\sigma=\beta} \frac{(\alpha)_{|\gamma|}(-1)^{|\sigma|}L_\sigma^{(\mathfrak{a}-\sigma)}(\boldsymbol{x})}{\gamma!} = \frac{1}{\beta!}\boldsymbol{x}^\beta. \tag{3.42}$$

Observação 3.7 *Tal como no caso dos polinómios de Bernoulli, Euler e Genocchi, (3.42) pode escrever-se na forma*

$$\sum_{\sigma_1=0}^{\beta_1} \cdots \sum_{\sigma_r=0}^{\beta_r} \binom{\beta}{\sigma} (\alpha)_{|\beta-\sigma|} Q_\sigma(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\beta.$$

A partir de (3.42) podem determinar-se polinómios de Laguerre multidimensionais $Q_\sigma(\boldsymbol{x})$ dos quais se apresentam alguns representantes na Secção B.4 do APÊNDICE B.

Observação 3.8 *O conjunto dos polinómios de Laguerre multidimensionais $Q_\sigma(\boldsymbol{x})$ contém r cópias dos polinómios unidimensionais $Q_n(x)$, $n>0$.*

Escrevendo (3.41) na forma

$$(1-(t_1+\cdots+t_r))^\alpha \operatorname{Exp}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} Q_\sigma(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!}$$

obtém-se a seguinte expressão explícita para os polinómios de Laguerre $Q_\sigma(\boldsymbol{x})$:

$$Q_\sigma(\boldsymbol{x}) = \sum_{\beta_1=0}^{\sigma_1} \cdots \sum_{\beta_r=0}^{\sigma_r} \binom{\sigma}{\beta} (-1)^{|\beta|} \alpha^{(|\beta|)} \boldsymbol{x}^{\sigma-\beta}, \tag{3.43}$$

onde $\alpha^{(n)}$ denota o factorial descendente, ou seja, $\alpha^{(n)} := \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$, $\alpha^{(0)} = 1$ ([94]).

Como $Q_\sigma(x)$ são de Appell, com $f(\boldsymbol{t}) = (1-(t_1+\cdots+t_r))^\alpha$, então também é verificada a proposição:

Proposição 3.9 *Os polinómios $Q_\sigma(\boldsymbol{x})$, $\sigma \in \mathbb{N}_0^r$ satisfazem a igualdade*

$$\frac{\partial}{\partial x_k} Q_\sigma(\boldsymbol{x}) = \sigma_k Q_{\sigma-\mathbf{1}_k}(\boldsymbol{x}),$$

para $k = 1,\ldots,r$, onde o segundo membro é zero se $\sigma_k = 0$.

Proposição 3.10 *Seja $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^r$. Então*

$$Q_\sigma(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = \sum_{\beta_1=0}^{\sigma_1} \cdots \sum_{\beta_r=0}^{\sigma_r} \binom{\sigma}{\beta} Q_\beta(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{h}^{\sigma-\beta}.$$

Dem. Iniciando com a definição de polinómios de Laguerre multidimensionais, a prova é análoga à da Proposição 3.6. ■

Polinómios de Hermite multidimensionais

Consideremos os conjuntos de polinómios de Hermite $\{\mathcal{H}_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ e $\{\widehat{H}_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ referidos no Capítulo 2. Obteremos aqui generalizações destes conjuntos para várias variáveis e vários índices.

Definição 3.8 *Sejam $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^r$ e $\sigma \in \mathbb{N}_0^r$. Os polinómios de Hermite multidimensionais $\mathcal{H}_\sigma(\boldsymbol{x})$, são definidos como coeficientes da série de potências formal múltipla*

$$\operatorname{Exp}(-\frac{1}{2}\boldsymbol{t},\boldsymbol{t}) \operatorname{Exp}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \mathcal{H}_\sigma(\boldsymbol{x}) \frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!}. \tag{3.44}$$

Esta definição generaliza para várias variáveis os polinómios $\mathcal{H}_n(x)$. Analogamente, com uma pequena alteração na função geradora, podem definir-se os polinómios $\widehat{H}_\sigma(\boldsymbol{x})$ como coeficientes das série múltipla

$$\operatorname{Exp}(-\frac{1}{4}\boldsymbol{t},\boldsymbol{t}) \operatorname{Exp}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \widehat{H}_\sigma(\boldsymbol{x}) \frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!}, \tag{3.45}$$

que generalizam os polinómios unidimensionais $\widehat{H}_n(x)$.

Da Definição 3.8 obtém-se a seguinte expressão explícita para os polinómios $\mathcal{H}_\sigma(\boldsymbol{x})$,

$$\mathcal{H}_\sigma(\boldsymbol{x}) = \sum_{2\beta+\gamma=\sigma} \frac{\sigma!(-1)^{|\beta|}\boldsymbol{x}^\gamma}{2^{|\beta|}\beta!\gamma!} \tag{3.46}$$

ou

$$\mathcal{H}_\sigma(\boldsymbol{x}) = \sum_{\beta_1=0}^{[\frac{\sigma_1}{2}]} \cdots \sum_{\beta_r=0}^{[\frac{\sigma_r}{2}]} \frac{\sigma!(-1)^{|\beta|}\boldsymbol{x}^{\sigma-2\beta}}{2^{|\beta|}\beta!(\sigma-2\beta)!}. \tag{3.47}$$

que generaliza (2.42). De modo semelhante, $\widehat{H}_\sigma(\boldsymbol{x})$ pode exprimir-se na forma

$$\widehat{H}_\sigma(\boldsymbol{x}) = \sum_{2\beta+\gamma=\sigma} \frac{\sigma!(-1)^{|\beta|}\boldsymbol{x}^\gamma}{4^{|\beta|}\beta!\gamma!}. \tag{3.48}$$

Alguns elementos do conjunto $\{\mathcal{H}_\sigma(\boldsymbol{x})\}$ são apresentados na Secção B.5 do APÊNDICE B.

Qualquer dos tipos de polinómios de Hermite multidimensionais que definimos constituem conjuntos de Appell, como revela a estrutura da sua função geradora. Em consequência podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 3.11

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{H}_\sigma(\boldsymbol{x}) &= \sigma_k \mathcal{H}_{\sigma-\mathbf{1}_k}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x_k}\widehat{H}_\sigma(\boldsymbol{x}) &= \sigma_k \widehat{H}_{\sigma-\mathbf{1}_k}(\boldsymbol{x}), \end{aligned} \tag{3.49}$$

para $k = 1, \ldots, r$, onde os segundos membros são zero se $\sigma_k = 0$.

A extensão dos polinómios clássicos de Hermite (2.36) para várias variáveis baseada na função geradora

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) \equiv \operatorname{Exp}(2\boldsymbol{x}\boldsymbol{t}, -\boldsymbol{t}^2) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} H_\sigma(\boldsymbol{x}) \frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!}, \tag{3.50}$$

permite a representação explícita de tais polinómios do seguinte modo:

$$H_\sigma(\boldsymbol{x}) = \sum_{\beta_1=0}^{\left[\frac{\sigma_1}{2}\right]} \cdots \sum_{\beta_r=0}^{\left[\frac{\sigma_r}{2}\right]} \frac{(-1)^{|\beta|}\sigma! 2^{|\sigma-2\beta|}\boldsymbol{x}^{\sigma-2\beta}}{\beta!(\sigma-2\beta)!}.$$

Da comparação desta igualdade com (3.47) e (3.48) obtêm-se as relações

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\sigma(\boldsymbol{x}) &= (\sqrt{2})^{-|\sigma|} H_\sigma\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{2}}\right) \\ \widehat{H}_\sigma(\boldsymbol{x}) &= 2^{-|\sigma|} H_\sigma(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{3.51}$$

Além disso, a função geradora $F \equiv F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ satisfaz as equações diferenciais

$$\frac{\partial F}{\partial t_k} - (2x_k - 2t_k)F = 0, \quad k = 1, \ldots, r,$$

donde, usando (3.50), se obtém sucessivamente

$$\frac{\partial}{\partial t_k}\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} H_\sigma(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!} - (2x_k - 2t_k)\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} H_\sigma(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!} = 0,$$

$$\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} H_{\sigma+\mathbf{1}_k}(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!} - 2x_k\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} H_\sigma(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!} + 2\sigma_k\sum_{|\sigma|=0} H_{\sigma-\mathbf{1}_k}(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!} = 0,$$

ou seja, verifica-se a relação de recorrência a três termos

$$H_{\sigma+\mathbf{1}_k}(\boldsymbol{x}) - 2x_kH_\sigma(\boldsymbol{x}) + 2\sigma_kH_{\sigma-\mathbf{1}_k}(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{3.52}$$

onde $H_{\sigma-\mathbf{1}_k} = 0$ se $\sigma_k - 1 < 0, k = 1, \ldots, r$.

Proposição 3.12

$$\mathcal{H}_{\sigma+\mathbf{1}_k}(\boldsymbol{x}) - x_k\mathcal{H}_\sigma(\boldsymbol{x}) + \sigma_k\mathcal{H}_{\sigma-\mathbf{1}_k}(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{3.53}$$

considerando $\mathcal{H}_{\sigma-\mathbf{1}_k}(\boldsymbol{x}) = 0$ *se* $\sigma_k - 1 < 0,\ k = 1, \ldots, r.$

Dem. Usando (3.52) e conjugando com a relação (3.51) entre os polinómios $H_\sigma(\boldsymbol{x})$ e $\mathcal{H}_\sigma(\boldsymbol{x})$, conclui-se o resultado enunciado. ■

Proposição 3.13

$$\mathcal{H}_\sigma(-\boldsymbol{x}) = (-1)^{|\sigma|}\mathcal{H}_\sigma(\boldsymbol{x}).$$

Dem. Obtém-se directamente de (3.46). ■

Por (3.53) e (3.49) tem-se que, para cada $k = 1, \ldots, r$,

$$\mathcal{H}_{\sigma+\mathbf{1}_k}(\boldsymbol{x}) = x_k\mathcal{H}_\sigma(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{H}_\sigma(\boldsymbol{x}).$$

Derivando ambos os membros desta igualdade em ordem a x_k e usando novamente (3.49) obtém-se

$$(\sigma_k + 1)\mathcal{H}_\sigma(\boldsymbol{x}) = \mathcal{H}_\sigma(\boldsymbol{x}) + x_k\frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{H}_\sigma(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\mathcal{H}_\sigma(\boldsymbol{x}),$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\mathcal{H}_\sigma(\boldsymbol{x}) - x_k\frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{H}_\sigma(\boldsymbol{x}) + \sigma_k\mathcal{H}_\sigma(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Daqui resulta que $\mathcal{H}_\sigma(\boldsymbol{x})$ é uma solução particular da equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}f(\boldsymbol{x}) - x_k\frac{\partial}{\partial x_k}f(\boldsymbol{x}) + \sigma_kf(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Polinómios de Legendre multidimensionais

Como já referido anteriormente, os polinómios de Legendre de uma variável estão relacionados com a função de Bessel de primeira espécie e ordem zero, $J_0(y) = {}_0F_1\left(-;1;-\frac{1}{4}y^2\right)$. Sendo nosso objectivo generalizar para o caso multidimensional os polinómios "modificados" de Legendre $\widetilde{P}_n(z)$ (ver Proposição 2.5), houve necessidade de relacionar esses polinómios com uma função de Bessel em várias variáveis.

Consideremos o produto das funções

$$\begin{aligned}J_0(y_1)J_0(y_2)\cdots J_0(y_r) &= \prod_{k=1}^{r} {}_0F_1\left(-;1;-\frac{1}{4}y_k^2\right)\\ &= \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{|\sigma|}y_1^{2\sigma_1}\cdots y_r^{2\sigma_r}}{2^{2|\sigma|}(1)_{\sigma_1}\cdots(1)_{\sigma_r}\sigma_1!\cdots\sigma_r!}.\end{aligned}$$

Se substituirmos $(1)_{\sigma_1}\cdots(1)_{\sigma_r}$ por $(1)_{|\sigma|}$ obtém-se a função

$${}_0F_1\left(-;1;-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{r}y_k^2\right) \equiv J_0\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{r}y_k^2}\right).$$

De facto,

$$\begin{aligned}{}_0F_1\left(-;1;-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{r}y_k^2\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(y_1^2+\cdots+y_r^2)^n}{2^{2n}(1)_n n!}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\left(\sum_{|\sigma|=n}\binom{n}{\sigma}\boldsymbol{y}^{2\sigma}\right)\\ &= \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{|\sigma|}\boldsymbol{y}^{2\sigma}}{2^{2|\sigma|}|\sigma|!\sigma!},\end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_r)$.

Esta ideia já havia sido usada em [105] ao substituir no produto de funções hipergeométricas

$${}_2F_1(a,b;c;x)\,{}_2F_1(a',b';c';y) = \sum_{m+n=0}^{+\infty}\frac{(a)_m(a')_n(b)_m(b')_n}{(c)_m(c')_n}\frac{x^m y^n}{m!n!}$$

um ou mais dos pares

$$(a)_m(a')_n, \quad (b)_m(b')_n, \quad (c)_m(c')_n$$

por

$$(a)_{m+n}, \quad (b)_{m+n}, \quad (c)_{m+n},$$

para obter novas funções em duas variáveis, nomeadamente as funcões de Appell.

Definição 3.9 *Sejam $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^r$ e $\sigma \in \mathbb{N}_0^r$. Os polinómios de Legendre multidimensionais $P_\sigma(\boldsymbol{x})$ são definidos como coeficientes da série de potências formal múltipla*

$$J_0\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{r} t_k^2(1-x_k^2)}\right) \operatorname{Exp}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} P_\sigma(\boldsymbol{x}) \frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!}. \tag{3.54}$$

A partir de (3.54) deduz-se que

$$\begin{aligned} P_\sigma(\boldsymbol{x}) &= \sum_{2\beta+\gamma=\sigma} \frac{\sigma!(-1)^{|\beta|} \boldsymbol{x}^\gamma \boldsymbol{X}^\beta}{2^{2|\beta|}|\beta|!\beta!\gamma!} \\ &= \sum_{\beta_1=0}^{\left[\frac{\sigma_1}{2}\right]} \cdots \sum_{\beta_r=0}^{\left[\frac{\sigma_r}{2}\right]} \frac{\sigma!(-1)^{|\beta|} \boldsymbol{x}^{\sigma-2\beta} \boldsymbol{X}^\beta}{2^{2|\beta|}|\beta|!\beta!(\sigma-2\beta)!}, \end{aligned}$$

$\boldsymbol{X} = (1-x_1^2, 1-x_2^2, \ldots, 1-x_r^2)$.

A partir de $\{P_\sigma(\boldsymbol{x})\}$, usando um procedimento análogo ao do caso unidimensional, podemos gerar um conjunto de polinómios de Legendre que é simultaneamente um conjunto de Appell.

Proposição 3.14 *Sejam $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_r) \in \mathbb{R}^r$, $\boldsymbol{W} = \left(\frac{w_1}{\sqrt{w_1^2+1}}, \ldots, \frac{w_r}{\sqrt{w_r^2+1}}\right) \in \mathbb{R}^r$ e $\sigma \in \mathbb{N}_0^r$. O conjunto $\{\widetilde{P}_\sigma(\boldsymbol{w})\} \equiv \left\{P_\sigma(\boldsymbol{W}) \prod_{k=1}^r (w_k^2+1)^{\frac{\sigma_k}{2}}\right\}$ é um conjunto de polinómios de Appell multidimensionais.*

Dem. Fazendo em (3.54) as mudanças de variáveis

$$t_k = \tau_k \sqrt{w_k^2+1} \quad \text{e} \quad x_k = \frac{w_k}{\sqrt{w_k^2+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, r, \tag{3.55}$$

obtém-se

$$J_0\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{r} \tau_k^2}\right) \operatorname{Exp}(\boldsymbol{w}, \tau) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} P_\sigma(\boldsymbol{W}) \prod_{k=1}^{r} (w_k^2+1)^{\frac{\sigma_k}{2}} \frac{\tau^\sigma}{\sigma!}, \tag{3.56}$$

$\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_r)$. Assim, de acordo com a Definição (3.5), $\{\widetilde{P}_\sigma(\boldsymbol{w})\}$ é um conjunto de Appell. ■

De (3.56), função geradora de $\widetilde{P}_\sigma(\boldsymbol{w})$, obtém-se a fórmula

$$\widetilde{P}_\sigma(\boldsymbol{w}) = \sum_{2\beta+\gamma=\sigma} \frac{\sigma!(-1)^{|\beta|}\boldsymbol{w}^\gamma}{2^{2|\beta|}|\beta|!\beta!\gamma!},$$

ou seja,

$$\widetilde{P}_\sigma(\boldsymbol{w}) = \sum_{\beta_1=0}^{\left[\frac{\sigma_1}{2}\right]} \cdots \sum_{\beta_r=0}^{\left[\frac{\sigma_r}{2}\right]} \frac{\sigma!(-1)^{|\beta|}\boldsymbol{w}^{\sigma-2\beta}}{2^{2|\beta|}|\beta|!\beta!(\sigma-2\beta)!}. \tag{3.57}$$

Alguns exemplares destes polinómios apresentam-se na Secção B.6 do APÊNDICE B.

Polinómios de Chebyshev de primeira e de segunda espécies multidimensionais

Consideremos agora os seguintes produtos de funções hipergeométricas

$$\prod_{k=1}^{r} {}_0F_1\left(-;\frac{1}{2};-\frac{1}{4}y_k^2\right) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{|\sigma|}y_1^{2\sigma_1}\cdots y_r^{2\sigma_r}}{2^{2|\sigma|}(\frac{1}{2})_{\sigma_1}\cdots(\frac{1}{2})_{\sigma_r}\sigma_1!\cdots\sigma_r!} \tag{3.58}$$

e

$$\prod_{k=1}^{r} {}_0F_1\left(-;\frac{3}{2};-\frac{1}{4}y_k^2\right) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{|\sigma|}y_1^{2\sigma_1}\cdots y_r^{2\sigma_r}}{2^{2|\sigma|}(\frac{3}{2})_{\sigma_1}\cdots(\frac{3}{2})_{\sigma_r}\sigma_1!\cdots\sigma_r!}. \tag{3.59}$$

À semelhança do que foi feito no caso dos polinómios de Legendre, substituindo $(\frac{1}{2})_{\sigma_1}\cdots(\frac{1}{2})_{\sigma_r}$ por $(\frac{1}{2})_{|\sigma|}$ em (3.58) e $(\frac{3}{2})_{\sigma_1}\cdots(\frac{3}{2})_{\sigma_r}$ por $(\frac{3}{2})_{|\sigma|}$ em (3.59), obtêm-se as funções

$${}_0F_1\left(-;\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{r}y_k^2\right) \equiv \cos\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{r}y_k^2}\right) \tag{3.60}$$

e

$${}_0F_1\left(-;\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{r}y_k^2\right) \equiv \frac{\sin\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{r}y_k^2}\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{r}y_k^2}}, \tag{3.61}$$

respectivamente ([99]).

Definição 3.10 *Sejam $\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^r$ e $\sigma\in\mathbb{N}_0^r$. Os polinómios de Chebyshev de primeira espécie, $T_\sigma(\boldsymbol{x})$, e os de segunda espécie, $U_\sigma(\boldsymbol{x})$, multidimensionais são definidos como* *coeficientes das séries de potências formais*

$$\cosh\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{r} t_k^2(x_k^2-1)}\right)\operatorname{Exp}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} T_\sigma(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!} \tag{3.62}$$

e

$$\frac{\sinh\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{r} t_k^2(x_k^2-1)}\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{r} t_k^2(x_k^2-1)}}\operatorname{Exp}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} U_\sigma(\boldsymbol{x})\frac{1}{\prod_{k=1}^{r}(\sigma_k+1)}\frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!}, \tag{3.63}$$

respectivamente.

Esta definição permite obter para estes polinómios as seguintes fórmulas explícitas:

$$\begin{aligned} T_\sigma(\boldsymbol{x}) &= \sum_{2\beta+\gamma=\sigma} \frac{\sigma!|\beta|!(-1)^{|\beta|}\boldsymbol{X}^\beta \boldsymbol{x}^\gamma}{(2|\beta|)!\beta!\gamma!} \\ &= \sum_{\beta_1=0}^{\left[\frac{\sigma_1}{2}\right]} \cdots \sum_{\beta_r=0}^{\left[\frac{\sigma_r}{2}\right]} \frac{\sigma!|\beta|!(-1)^{|\beta|}\boldsymbol{X}^\beta \boldsymbol{x}^{\sigma-2\beta}}{(2|\beta|)!\beta!(\sigma-2\beta)!} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} U_\sigma(\boldsymbol{x}) &= \sum_{2\beta+\gamma=\sigma} \frac{(\sigma+\mathbf{1})!|\beta|!(-1)^{|\beta|}\boldsymbol{X}^\beta \boldsymbol{x}^\gamma}{(2|\beta|+1)!\beta!\gamma!} \\ &= \sum_{\beta_1=0}^{\left[\frac{\sigma_1}{2}\right]} \cdots \sum_{\beta_r=0}^{\left[\frac{\sigma_r}{2}\right]} \frac{(\sigma+\mathbf{1})!|\beta|!(-1)^{|\beta|}\boldsymbol{X}^\beta \boldsymbol{x}^{\sigma-2\beta}}{(2|\beta|+1)!\beta!(\sigma-2\beta)!}. \end{aligned}$$

Aplicando a (3.62) as mesmas mudanças de variáveis (3.55), usadas no caso dos polinómios de Legendre multidimensionais, obtém-se

$$\cosh\left(i\sqrt{\sum_{k=1}^{r}\tau_k^2}\right)\operatorname{Exp}(\boldsymbol{w},\tau) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} T_\sigma(\boldsymbol{W})\prod_{k=1}^{r}(w_k^2+1)^{\frac{\sigma_k}{2}}\frac{\tau^\sigma}{\sigma!},$$

onde i é a unidade imaginária, ou

$$\cos\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{r}\tau_k^2}\right)\operatorname{Exp}(\boldsymbol{w},\tau) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} T_\sigma(\boldsymbol{W})\prod_{k=1}^{r}(w_k^2+1)^{\frac{\sigma_k}{2}}\frac{\tau^\sigma}{\sigma!}. \tag{3.64}$$

Analogamente, de (3.63) vem que

$$\frac{\sinh\left(i\sqrt{\sum_{k=1}^{r}\tau_k^2}\right)}{i\sqrt{\sum_{k=1}^{r}\tau_k^2}}\,\mathrm{Exp}(\boldsymbol{w},\tau)=\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}U_\sigma\left(\boldsymbol{W}\right)\prod_{k=1}^{r}\frac{(w_k^2+1)^{\frac{\sigma_k}{2}}}{\sigma_k+1}\frac{\tau^\sigma}{\sigma!},$$

ou seja,

$$\frac{\sin\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{r}\tau_k^2}\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{r}\tau_k^2}}\,\mathrm{Exp}(\boldsymbol{w},\tau)=\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}U_\sigma\left(\boldsymbol{W}\right)\prod_{k=1}^{r}\frac{(w_k^2+1)^{\frac{\sigma_k}{2}}}{\sigma_k+1}\frac{\tau^\sigma}{\sigma!}. \tag{3.65}$$

Por (3.60) e (3.61), (3.64) e (3.65) podem representar-se usando a função hipergeométrica, respectivamente, por

$${}_0F_1\left(-;\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{r}\tau_k^2\right)\mathrm{Exp}(\boldsymbol{w},\tau)=\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}T_\sigma\left(\boldsymbol{W}\right)\prod_{k=1}^{r}(w_k^2+1)^{\frac{\sigma_k}{2}}\frac{\tau^\sigma}{\sigma!}$$

e

$${}_0F_1\left(-;\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{r}\tau_k^2\right)\mathrm{Exp}(\boldsymbol{w},\tau)=\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}U_\sigma\left(\boldsymbol{W}\right)\prod_{k=1}^{r}\frac{(w_k^2+1)^{\frac{\sigma_k}{2}}}{\sigma_k+1}\frac{\tau^\sigma}{\sigma!}.$$

Como as funções geradoras dos polinómios $T_\sigma\left(\boldsymbol{W}\right)\prod_{k=1}^{r}(w_k^2+1)^{\frac{\sigma_k}{2}}$ e $U_\sigma\left(\boldsymbol{W}\right)\prod_{k=1}^{r}\frac{(w_k^2+1)^{\frac{\sigma_k}{2}}}{\sigma_k+1}$ estão na forma (3.9), podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 3.15 *Sejam* $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\ldots,w_r)\in\mathbb{R}^r$, $\boldsymbol{W}=\left(\frac{w_1}{\sqrt{w_1^2+1}},\ldots,\frac{w_r}{\sqrt{w_r^2+1}}\right)\in\mathbb{R}^r$ *e* $\sigma\in\mathbb{N}_0^r$. *Os conjuntos de polinómios* $\{\widetilde{T}_\sigma(\boldsymbol{w})\}\equiv\left\{T_\sigma\left(\boldsymbol{W}\right)\prod_{k=1}^{r}(w_k^2+1)^{\frac{\sigma_k}{2}}\right\}$ *e* $\{\widetilde{U}(\boldsymbol{w})\}\equiv\{U_\sigma\left(\boldsymbol{W}\right)\prod_{k=1}^{r}\frac{(w_k^2+1)^{\frac{\sigma_k}{2}}}{\sigma_k+1}\}$ *são conjuntos de Appell multidimensionais.*

As funções geradoras (3.64) e (3.65) permitem ainda deduzir

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_\sigma(\boldsymbol{w})&=\sum_{2\beta+\gamma=\sigma}\frac{\sigma!(-1)^{|\beta|}|\beta|!\boldsymbol{w}^\gamma}{(2|\beta|)!\beta!\gamma!}\\&=\sum_{\beta_1=0}^{\left[\frac{\sigma_1}{2}\right]}\cdots\sum_{\beta_r=0}^{\left[\frac{\sigma_r}{2}\right]}\frac{\sigma!(-1)^{|\beta|}|\beta|!\boldsymbol{w}^{\sigma-2\beta}}{(2|\beta|)!\beta!(\sigma-2\beta)!}\end{aligned} \tag{3.66}$$

e

$$\widetilde{U}_\sigma(\boldsymbol{w})=\sum_{2\beta+\gamma=\sigma}\frac{\sigma!(-1)^{|\beta|}|\beta|!\boldsymbol{w}^\gamma}{(2|\beta|+1)!\beta!\gamma!}$$

$$= \sum_{\beta_1=0}^{\left[\frac{\sigma_1}{2}\right]} \cdots \sum_{\beta_r=0}^{\left[\frac{\sigma_r}{2}\right]} \frac{\sigma!(-1)^{|\beta|}|\beta|!\boldsymbol{w}^{\sigma-2\beta}}{(2|\beta|+1)!\beta!(\sigma-2\beta)!}. \tag{3.67}$$

Exemplos destes polinómios apresentam-se nas secções B.7 e B.8 do APÊNDICE B.

Capítulo 4

Representação Matricial de Polinómios de Appell Multidimensionais

4.1 Representação matricial de polinómios bidimensionais

Após o estudo do caso unidimensional, onde a matriz H desempenha um papel central na representação matricial de polinómios de Appell, propomos nesta secção o desenvolvimento de um formalismo matricial e unificador para polinómios de Appell em duas variáveis e dois índices baseado numa generalização adequada de H.

Sabendo que as matrizes de Pascal estão intimamente ligadas com a matriz H e dado que um estudo preliminar sobre polinómios de Euler e Bernoulli hipercomplexos ([90], [91]) permitiu obter generalizações das matrizes de Pascal até aí inexistentes, a fase seguinte foi estabelecer ligação entre estas matrizes e uma matriz que constitui a pretendida generalização de H.

Nesta dissertação seguiremos um caminho inverso. Começaremos com a introdução de uma generalização de H satisfazendo propriedades que possibilitam chegar às generalizações das matrizes de Pascal obtidas em [90] e [91].

Apesar de nos centrarmos no caso bidimensional o referido formalismo é generalizável para polinómios com mais de duas variáveis, implicando para tal o uso de matrizes de maiores dimensões, como veremos adiante (Secção 4.2).

As matrizes que iremos definir e que constituem a base da nossa abordagem, podem ter dimensão infinita, no entanto, restringiremos a sua dimensão a um número finito, o que corresponde a restringir também o grau dos polinómios a representar.

4.1.1 Matrizes especiais de blocos

Definição 4.1 *Sejam $H, I \equiv I_{m+1}$ e $O \equiv O_{m+1}$ a matriz de criação, a matriz identidade e a matriz nula de ordem $m+1$, respectivamente. A matriz $\mathbb{H} = [\mathbb{H}_{st}]$ definida por*

$$\mathbb{H}_{st} = \begin{cases} H & , s = t \\ sI & , s = t+1 \\ O & , s \neq t \wedge s \neq t+1, \end{cases}$$

$(s, t = 0, 1, \dots, m)$, é dita matriz bloco de criação de ordem $(m+1)^2$.

Por conseguinte, a estrutura de $\mathbb{H}$ é como a seguir se representa:

$$\mathbb{H} = \begin{bmatrix} H & O & O & \cdots & O & O \\ I & H & O & \cdots & O & O \\ O & 2I & H & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & H & O \\ O & O & O & \cdots & mI & H \end{bmatrix}.$$

Observação 4.1 *O bloco st da matriz $\mathbb{H}$, $\mathbb{H}_{st}$, pode obter-se por $(E_s)^T \mathbb{H} E_t$, $s, t = 0, 1, \dots, m$.*[18]

A estrutura da matriz $\mathbb{H}$ sugere a sua decomposição na forma $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 + \mathbb{H}_2$, onde $\mathbb{H}_1 = [(\mathbb{H}_1)_{st}]$ é a matriz bloco diagonal definida por

$$(\mathbb{H}_1)_{st} = \begin{cases} H & , s = t \\ O & , s \neq t \end{cases}$$

e $\mathbb{H}_2 = [(\mathbb{H}_2)_{st}]$ é definida por

$$(\mathbb{H}_2)_{st} = \begin{cases} sI & , s = t+1 \\ O & , s \neq t+1 \ , \end{cases}$$

$(s, t = 0, 1, \dots, m)$.

[18] E_k são os vectores de blocos (1.7) com $k = 0, \dots, m$.

Lema 4.1 *Seja $k \in \mathbb{N}$. As potências de expoente natural das matrizes $\mathbb{H}_1$ e $\mathbb{H}_2$, isto é, $\mathbb{H}_1^k = \left[(\mathbb{H}_1^k)_{st}\right]$ e $\mathbb{H}_2^k = \left[(\mathbb{H}_2^k)_{st}\right]$, são obtidas, respectivamente, por*

$$(\mathbb{H}_1^k)_{st} = \begin{cases} H^k & , s = t \\ O & , s \neq t \end{cases} \tag{4.1}$$

e

$$(\mathbb{H}_2^k)_{st} = \begin{cases} \frac{s!}{t!} I & , s = t + k \\ O & , s \neq t + k \ , \end{cases} \tag{4.2}$$

$(s, t = 0, 1, \ldots, m)$, respectivamente.

Dem. Usemos o método de indução sobre k.

A veracidade de (4.1) para $k = 1$ é de verificação imediata.

Sendo

$$(\mathbb{H}_1^{k+1})_{st} = (\mathbb{H}_1^k \mathbb{H}_1)_{st} = \sum_{n=0}^{m} \left(\mathbb{H}_1^k\right)_{sn} (\mathbb{H}_1)_{nt} \, ,$$

e porque apenas as parcelas em que $s = n$ e $n = t$ são não nulas, então

$$\left(\mathbb{H}_1^{k+1}\right)_{st} = H^k H = H^{k+1}, \quad s = t,$$

ficando provada (4.1).

Analogamente, se em (4.2) se considerar $k = 1$,

$$\begin{aligned} (\mathbb{H}_2)_{st} &= \begin{cases} \frac{s!}{t!} I & , s = t + 1 \\ O & , s \neq t + 1 \ , \end{cases} \\ &= \begin{cases} sI & , s = t + 1 \\ O & , s \neq t + 1 \ , \end{cases} \end{aligned}$$

que é uma proposição verdadeira.

Sendo

$$(\mathbb{H}_2^{k+1})_{st} = \sum_{n=0}^{m} \left(\mathbb{H}_2^k\right)_{sn} (\mathbb{H}_2)_{nt} \, ,$$

e como apenas as parcelas em que $s = n + k$ e $n = t + 1$, isto é, $s = t + k + 1$, são não nulas, então

$$\left(\mathbb{H}_2^{k+1}\right)_{st} = \frac{s!}{n!} I \frac{n!}{t!} I = \frac{s!}{t!} I, \quad s = t + k + 1$$

e, portanto,

$$(\mathbb{H}_2^{k+1})_{st} = \begin{cases} \frac{s!}{t!} I & , s = t + k + 1 \\ O & , s \neq t + k + 1 \ , \end{cases}$$

concluindo-se a demonstração de (4.2). ∎

Proposição 4.1 *As matrizes, de ordem* $(m+1)^2$, $\mathbb{H}_1$ *e* $\mathbb{H}_2$ *são nilpotentes de ordem* $m+1$.

Dem. Como H é nilpotente de ordem $m+1$, atendendo ao Lema 4.1, $\mathbb{H}_1$ é também nilpotente de ordem $m+1$.

Relativamente a $\mathbb{H}_2$, sendo $\mathcal{O} \equiv O_{(m+1)^2}$ a matriz nula de ordem $(m+1)^2$, verifica-se que $\mathbb{H}_2^m \neq \mathcal{O}$ porque $(\mathbb{H}_2^m)_{m0} = m!I$. Contudo, se $k \geq m+1$, $\left(\mathbb{H}_2^k\right)_{st} = O$, pois $s \neq t+k, \forall s,t \in \{0,\ldots,m\}$ e, portanto, $\mathbb{H}_2^k = \mathcal{O}$, ou seja, $\mathbb{H}_2$ é nilpotente de ordem $m+1$. ∎

Lema 4.2 *As matrizes, de ordem* $(m+1)^2$, $\mathbb{H}_1$ *e* $\mathbb{H}_2$ *são permutáveis.*

Dem. Sendo $\mathbb{H}_1$ uma matriz bloco diagonal em que os blocos diagonais são a matriz H de ordem $m+1$, a sua multiplicação à esquerda (direita) por outra matriz, com a mesma dimensão e particionada do mesmo modo, equivale a multiplicar à esquerda (direita) H por cada bloco dessa matriz. Como os blocos de $\mathbb{H}_2$ são nulos ou múltiplos da matriz identidade, permutam com H e, portanto, $\mathbb{H}_1\mathbb{H}_2 = \mathbb{H}_2\mathbb{H}_1$. ∎

Lema 4.3 *Sejam* $k,l \in \mathbb{N}$. *A matriz* $\mathbb{H}_1^k\mathbb{H}_2^l = \left[\left(\mathbb{H}_1^k\mathbb{H}_2^l\right)_{st}\right]$, *produto de potências de expoente natural de* $\mathbb{H}_1$ *e* $\mathbb{H}_2$, *é obtida por*

$$(\mathbb{H}_1^k\mathbb{H}_2^l)_{st} = \begin{cases} \frac{s!}{t!}H^k & , s = t+l \\ O & , s \neq t+l \end{cases}, \tag{4.3}$$

$(s,t = 0,1,\ldots,m)$.

Dem. Efectuando a multiplicação das matrizes $\mathbb{H}_1^k$ e $\mathbb{H}_2^l$ obtém-se

$$(\mathbb{H}_1^k\mathbb{H}_2^l)_{st} = \sum_{n=0}^{m} (\mathbb{H}_1^k)_{sn}(\mathbb{H}_2^l)_{nt},$$

onde as parcelas não nulas (no caso de $k,l < m+1$) são aquelas em que $s = n$ e $n = t+l$, isto é, $s = t+l$. Então

$$(\mathbb{H}_1^k\mathbb{H}_2^l)_{st} = H^k\frac{s!}{t!}I = \frac{s!}{t!}H^k, \quad s = t+l,$$

ficando demonstrado (4.3). ∎

Observação 4.2 *Atendendo à nilpotência de* $\mathbb{H}_1$ *e* $\mathbb{H}_2$*, se* $k \geq m+1$ *ou* $l \geq m+1$*, então* $\mathbb{H}_1^k \mathbb{H}_2^l = \mathcal{O}$*.*

Lema 4.4 *Sejam* $k \in \mathbb{N}$ *e* $\mathbb{H}$ *a matriz bloco de criação de ordem* $(m+1)^2$*. Então*

$$\mathbb{H}^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \mathbb{H}_1^{k-n} \mathbb{H}_2^n. \tag{4.4}$$

Dem. A igualdade decorre do facto de $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 + \mathbb{H}_2$ e $\mathbb{H}_1^k, \mathbb{H}_2^l, k, l \in \mathbb{N}_0$, serem permutáveis. ■

Observação 4.3 *Resulta dos Lemas* 4.1 *e* 4.4 *que* $\mathbb{H}_1^0 = \mathbb{H}_2^0 = \mathcal{I}$ *e* $\mathbb{H}^0 = (\mathbb{H}_1 + \mathbb{H}_2)^0 = \mathcal{I}$*, respectivamente, sendo* $\mathcal{I} \equiv I_{(m+1)^2}$*.*

Proposição 4.2 *A matriz* $\mathbb{H}$*, de ordem* $(m+1)^2$*, é nilpotente de ordem* $2m+1$*, isto é,* $\mathbb{H}^{2m} \neq \mathcal{O}$*, mas* $\mathbb{H}^k = \mathcal{O}$ *se* $k \geq 2m+1$*.*

Dem. Sendo $k = 2m$, pelo Lema 4.4,

$$\mathbb{H}^{2m} = \sum_{n=0}^{2m} \binom{2m}{n} \mathbb{H}_1^{2m-n} \mathbb{H}_2^n.$$

Se $n = m$, por (4.3), $\mathbb{H}_1^m \mathbb{H}_2^m \neq \mathcal{O}$, ou seja, $\mathbb{H}^{2m} \neq \mathcal{O}$.[19]

Provemos agora, por indução, que $\mathbb{H}^k = \mathcal{O}$ se $k \geq 2m+1$. Sendo $k = 2m+1$,

$$\mathbb{H}^{2m+1} = \sum_{n=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{n} \mathbb{H}_1^{2m+1-n} \mathbb{H}_2^n.$$

Se $n \leq m$, então $2m+1-n \geq m+1$ e $\mathbb{H}_1^{2m+1-n} = \mathcal{O}$. Se $n > m$, então $\mathbb{H}_2^n = \mathcal{O}$. Logo, $\mathbb{H}^{2m+1} = \mathcal{O}$.

É imediato que, para $v \in \mathbb{N}$, se $\mathbb{H}^{2m+v} = \mathcal{O}$ então $\mathbb{H}^{2m+v+1} = \mathcal{O}$, o que termina a demonstração. ■

Além da nilpotência, várias são as propriedades de $\mathbb{H}$ que se podem deduzir e que generalizam as já conhecidas da matriz H (ver [2], [82]).

Proposição 4.3 *Seja* $\mathbb{H}$ *a matriz bloco de criação de ordem* $(m+1)^2$ *e*

$$E_i = [O \ \cdots O \ I \ O \ \cdots \ O]^T,$$

[19]Se $n < m$ ou $n > m$, as parcelas $\mathbb{H}_1^{2m-n} \mathbb{H}_2^n$ são nulas. Com efeito, se $n < m$, então $2m - n > m$ e $\mathbb{H}_1^{2m-n} = \mathcal{O}$ (porque $\mathbb{H}_1$ é nilpotente de ordem $m+1$). Se $n > m$, então também $\mathbb{H}_2^n = \mathcal{O}$.

$i = 0, 1, \ldots$, o vector de $m+1$ blocos de ordem $m+1$, onde o i-ésimo bloco é a matriz identidade e os restantes blocos são matrizes nulas. Supõe-se ainda que E_i é o vector de blocos nulo se $i > m$. Então, para cada $t = 0, 1, \ldots, m$,

i)

$$\mathbb{H}E_t = E_t H + (t+1)E_{t+1} \tag{4.5}$$

ii)

$$\mathbb{H}^k E_t = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{(t+k-j)!}{t!} E_{t+k-j} H^j, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

Dem.

i) $\mathbb{H}E_t$ é o $t-$ésimo bloco coluna da matriz $\mathbb{H}$, isto é,

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}E_t &= [\mathbb{H}_{0t} \;\; \mathbb{H}_{1t} \;\; \cdots \;\; \mathbb{H}_{tt} \;\; \mathbb{H}_{(t+1)t} \;\; \cdots \;\; \mathbb{H}_{mt}]^T \\
&= [O \;\; O \;\; \cdots \;\; H \;\; (t+1)I \;\; \cdots \;\; O]^T \\
&= E_t H + (t+1)E_{t+1}.
\end{aligned}$$

ii) Se $k = 1$, atendendo a ***i)***, de imediato se verifica que a proposição é verdadeira. Suponhamos agora, que ***ii)*** é verificada para $k = n$. Então,

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}^{n+1}E_t &= \mathbb{H}(\mathbb{H}^n E_t) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(t+n-j)!}{t!} \mathbb{H}E_{t+n-j} H^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(t+n-j)!}{t!} \left[E_{t+n-j}H^{j+1} + (t+n+1-j)E_{t+n+1-j}H^j\right] \\
&= \binom{n}{0} \frac{(t+n+1)!}{t!} E_{t+n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] \frac{(t+n)!}{t!} E_{t+n} H \\
&+ \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] \frac{(t+n-1)!}{t!} E_{t+n-1} H^2 + \cdots \\
&+ \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] \frac{(t+1)!}{t!} E_{t+1} H^n + \binom{n}{n} E_t H^{n+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \frac{(t+n+1-j)!}{t!} E_{t+n+1-j} H^j,
\end{aligned}$$

logo a proposição é válida para $k = n+1$, o que conclui a demonstração. ∎

A exponencial de $\mathbb{H}$ é uma matriz de blocos com uma estrutura especial relacionada com a da matriz de Pascal P.

Teorema 4.1 *Sejam P a matriz de Pascal de ordem $m+1$ e $\mathcal{A} = [\mathcal{A}_{st}]$ a matriz de blocos de ordem $(m+1)^2$ definida por*

$$\mathcal{A}_{st} = \begin{cases} \binom{s}{t} P & , \ s \geq t \\ O & , \ s < t \ , \end{cases}$$

$(s, t = 0, 1, \ldots, m)$. Então $\mathcal{A} = e^{\mathbb{H}}$.

Dem. Atendendo à nilpotência de $\mathbb{H}$,

$$e^{\mathbb{H}} = \sum_{k=0}^{2m} \frac{\mathbb{H}^k}{k!}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} (e^{\mathbb{H}})_{st} &= E_s^T e^{\mathbb{H}} E_t \\ &= \sum_{k=0}^{2m} \frac{E_s^T \mathbb{H}^k E_t}{k!}. \end{aligned}$$

De acordo com (4.6),

$$\begin{aligned} (e^{\mathbb{H}})_{st} &= \sum_{k=0}^{2m} \frac{E_s^T}{k!} \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{(t+k-j)!}{t!} E_{t+k-j} H^j \right] \\ &= \sum_{k=0}^{2m} \left[\sum_{j=0}^{k} \frac{(t+k-j)!}{j!(k-j)!t!} \delta_{s,t+k-j} I H^j \right]. \end{aligned}$$

Se $s < t$, então $s < t+k-j$ e $\delta_{s,t+k-j} I = O$. Se $s \geq t$, quando $s = t+k-j$, $\delta_{s,t+k-j} I = I$. Então,

$$(e^{\mathbb{H}})_{st} = \sum_{k=s-t}^{2m} \frac{s!}{(t-s+k)!(s-t)!t!} H^{t-s+k}$$

$$= \binom{s}{t} \sum_{h=0}^{m} \frac{H^h}{h!}$$
$$= \binom{s}{t} P,$$

ou seja, as entradas correspondentes de $e^{\mathbb{H}}$ e $\mathcal{A}$ são iguais. ■

Observação 4.4 *A tese deste teorema generaliza para o contexto de matrizes de blocos, o conhecido resultado* $e^H = P$.

Observação 4.5 *A matriz* $\mathcal{A}$ *que acabámos de referir tem a forma*

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} P & O & O & \cdots & O \\ P & P & O & \cdots & O \\ P & 2P & P & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{m}{0}P & \binom{m}{1}P & \binom{m}{2}P & \cdots & \binom{m}{m}P \end{bmatrix},$$

cuja estrutura é semelhante à da matriz de Pascal

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \cdots & \binom{m}{m} \end{bmatrix}.$$

Doravante designaremos a matriz $\mathcal{A}$ *por matriz bloco de Pascal e denotá-la-emos por* $\mathcal{P}$.

Designemos por matriz bloco de Pascal simétrica, a matriz definida positiva $\mathcal{S} = [\mathcal{S}_{st}]$, onde

$$\mathcal{S}_{st} = \binom{s+t}{t} PP^T,$$

$(s, t = 0, 1, \ldots, m)$.

À semelhança do caso da matriz de Pascal simétrica, a factorização de Cholesky da matriz $\mathcal{S}$ é o produto $\mathcal{P}\mathcal{P}^T$.

Proposição 4.4 *Consideremos a matriz de blocos,* $\mathcal{Q} = [\mathcal{Q}_{st}]$, *de ordem* $(m+1)^2$, *defi-*

nida por

$$\mathcal{Q}_{st} = \begin{cases} \binom{s}{t}(-1)^{s-t}P^{-1} & , s \geq t \\ O & , s < t \ , \end{cases}$$

$(s, t = 0, 1, \ldots, m)$. *Então* $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{-1}$.

Dem. É de fácil verificação que

$$(\mathcal{P}\mathcal{Q})_{st} = \begin{cases} I & , s = t \\ O & , s < t \ , \end{cases}$$

$(s, t = 0, 1, \ldots, m)$. Resta mostrar que noutro caso, $(\mathcal{P}\mathcal{Q})_{st} = O$.

Suponhamos que $s > t$. Então $s = t + n, n > 0$, e portanto,

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}\mathcal{Q})_{st} &= \sum_{k=0}^{n} \mathcal{P}_{t+n,t+k}\mathcal{Q}_{t+k,t} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{t+n}{t+k}\binom{t+k}{t}(-1)^k P P^{-1} \\ &= \frac{(t+n)!}{t!n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!}(-1)^k I \\ &= \binom{t+n}{t} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k I \\ &= \binom{s}{t}(1-1)^n I = O. \end{aligned}$$

Assim, $(\mathcal{P}\mathcal{Q}) = \mathcal{I}$, ou seja, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são matrizes inversas. ∎

Observação 4.6 *A entrada ij do bloco st da matriz* $\mathcal{P}$ *será representada por* $\mathcal{P}_{ij}^{st}$*, isto é,* $\mathcal{P} = [\mathcal{P}_{ij}^{st}]$ *tal que*

$$\mathcal{P}_{ij}^{st} = \begin{cases} \binom{i}{j}\binom{s}{t} & , i \geq j \wedge s \geq t \\ 0 & , i < j \vee s < t \ , \end{cases}$$

$(i, j, s, t = 0, 1, \ldots, m)$. *Analogamente, para a matriz inversa de* $\mathcal{P}$ *tem-se* $\mathcal{P}^{-1} = [(\mathcal{P}^{-1})_{ij}^{st}]$ *tal que*

$$(\mathcal{P}^{-1})_{ij}^{st} = \begin{cases} \binom{i}{j}\binom{s}{t}(-1)^{i-j}(-1)^{s-t} & , i \geq j \wedge s \geq t \\ 0 & , i < j \vee s < t \ , \end{cases}$$

$(i, j, s, t = 0, 1, \ldots, m)$.

Definição 4.2 *Seja* $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. *À matriz de blocos* $\mathcal{P}(x_1, x_2) = [(\mathcal{P}(x_1, x_2))_{st}]$ *definida por*

$$(\mathcal{P}(x_1, x_2))_{st} = \begin{cases} \binom{s}{t} P(x_1) x_2^{s-t} & , \ s \geq t \\ O & , \ s < t \ , \end{cases}$$

$(s, t = 0, 1, \ldots, m)$, *onde*

$$(P(x_1) x_2^{s-t})_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j} x_1^{i-j} x_2^{s-t} & , \ i \geq j \\ 0 & , \ i < j \ , \end{cases}$$

$(i, j = 0, 1, \ldots, m)$, *chamamos matriz bloco de Pascal generalizada de ordem* $(m+1)^2$.

Algumas das matrizes anteriormente definidas obtêm-se de $\mathcal{P}(x_1, x_2)$ para valores particulares de (x_1, x_2). Por exemplo, da Definição 4.2 e da Observação 4.6 conclui-se que

$$\mathcal{P}(0,0) = \mathcal{I}, \tag{4.7}$$

$$\mathcal{P}(1,1) = \mathcal{P}, \tag{4.8}$$

$$\mathcal{P}(-1,-1) = \mathcal{P}^{-1}. \tag{4.9}$$

Proposição 4.5 *Sejam* $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{P}(x_1, x_2)$ *e* $\mathcal{P}(y_1, y_2)$ *matrizes bloco de Pascal generalizadas de ordem* $(m+1)^2$. *Então*

$$\mathcal{P}(x_1, x_2)\mathcal{P}(y_1, y_2) = \mathcal{P}(x_1 + y_1, x_2 + y_2). \tag{4.10}$$

Dem. A igualdade

$$(\mathcal{P}(x_1, x_2)\mathcal{P}(y_1, y_2))_{st} = (\mathcal{P}(x_1 + y_1, x_2 + y_2))_{st} = O$$

se $s < t$ é imediata.

Se $s \geq t$, isto é, $s = t + n, \ n \geq 0$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}(x_1, x_2)\mathcal{P}(y_1, y_2))_{st} &= \sum_{k=0}^{n} (\mathcal{P}(x_1, x_2))_{t+n, t+k} (\mathcal{P}(y_1, y_2))_{t+k, t} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{t+n}{t+k} \binom{t+k}{t} x_2^{n-k} y_2^k P(x_1) P(y_1), \end{aligned}$$

onde $P(x_1)$ e $P(y_1)$ são matrizes de Pascal generalizadas de ordem $m+1$ nas variáveis x_1 e y_1, respectivamente. Além disso, sendo $P(x_1)P(y_1) = P(x_1 + y_1)$ ([17]) e aplicando o teorema binomial,

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}(x_1,x_2)\mathcal{P}(y_1,y_2))_{st} &= \frac{(t+n)!}{n!t!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_2^{n-k}y_2^k P(x_1+y_1)\\ &= \frac{(t+n)!}{n!t!}P(x_1+y_1)(x_2+y_2)^n\\ &= \binom{s}{t}P(x_1+y_1)(x_2+y_2)^{s-t}\\ &= (\mathcal{P}(x_1+y_1,x_2+y_2))_{st}\,,\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Proposição 4.6 *Sejam $c \in \mathbb{Z}$ e $k \in \mathbb{Z}-\{0\}$.*

i) $\mathcal{P}(c,c) = \mathcal{P}^c$;

ii) $\left[\mathcal{P}(\frac{c}{k},\frac{c}{k})\right]^k = \mathcal{P}^c$.

Dem.

i) Por (4.7), (4.8) e convencionando que $\mathcal{P}^0 = \mathcal{I}$, a igualdade é verificada para $c=0$ e $c=1$.

Supondo que, para $c>1$, $\mathcal{P}(c,c) = \mathcal{P}^c$,

$$\mathcal{P}^{c+1} = \mathcal{P}^c\mathcal{P} = \mathcal{P}(c,c)\mathcal{P}.$$

Obviamente que o bloco st, com $s<t$, desta matriz é a matriz nula de ordem $m+1$, bem como o correspondente bloco da matriz $\mathcal{P}(c+1,c+1)$. Se $s \geq t$, usando o produto das matrizes $\mathcal{P}(c,c)$ e $\mathcal{P}$ e o teorema binomial, de modo análogo ao da demonstração da Proposição 4.5,

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{P}^{c+1}\right)_{st} &= \binom{s}{t}(c+1)^{s-t}P(c+1)\\ &= (\mathcal{P}(c+1,c+1))_{st}\,,\end{aligned}$$

ficando demonstrado por indução que a proposição é verdadeira para $c \geq 0$. Por outro lado, como $\mathcal{P}(-1,-1) = \mathcal{P}^{-1}$ prova-se por indução sobre $|c|$ que a proposição também é válida para $c<0$.

ii) Pela Proposição 4.5 e ***i)*** ,

$$\left[\mathcal{P}\left(\frac{c}{k},\frac{c}{k}\right)\right]^k=\mathcal{P}\left(\frac{kc}{k},\frac{kc}{k}\right)=\mathcal{P}^c.$$

■

Consideremos a matriz de blocos $F(x_1,x_2)=[(F(x_1,x_2))_{st}]$ de ordem $(m+1)^2$, tal que

$$(F(x_1,x_2))_{st}=\begin{cases} x_1H & ,\ s=t\\ sx_2I & ,\ s=t+1\\ O & ,\ s\neq t\wedge s\neq t+1\ ,\end{cases} \tag{4.11}$$

$(s,t=0,1,\dots,m)$. Trata-se, portanto, de uma matriz de blocos com a seguinte estrutura:

$$F(x_1,x_2)=\begin{bmatrix} x_1H & O & O & \cdots & O & O\\ x_2I & x_1H & O & \cdots & O & O\\ O & 2x_2I & x_1H & \cdots & O & O\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & x_1H & O\\ O & O & O & \cdots & mx_2I & x_1H \end{bmatrix}.$$

Observação 4.7 *Como se pode verificar a partir de (4.11),* $F(1,1)=\mathbb{H}$.

Observação 4.8 *A matriz* $F(x_1,x_2)$ *é decomponível na forma* $F(x_1,x_2)=x_1\mathbb{H}_1+x_2\mathbb{H}_2$.

Proposição 4.7 *Sejam* $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ *e* $k\in\mathbb{N}$.

i) $F(x_1,x_2)E_t=x_1E_tH+(t+1)x_2E_{t+1}$;

ii) $F^k(x_1,x_2)E_t=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(t+k-j)!}{t!}x_1^jx_2^{k-j}E_{t+k-j}H^j$.

Dem.

i) A prova é inteiramente análoga à da igualdade ***i)*** da Proposição 4.3.

ii) Se $k=1$, de acordo com ***i)*** , a proposição é verdadeira.

Suponhamos que ***ii)*** é verificada para $k=n$. Então,

$$\begin{aligned} F^{n+1}(x_1,x_2)E_t &= F(x_1,x_2)(F^n(x_1,x_2)E_t)\\ &= F(x_1,x_2)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(t+n-j)!}{t!}x_1^jx_2^{n-j}E_{t+n-j}H^j\\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(t+n-j)!}{t!}F(x_1,x_2)E_{t+n-j}H^jx_1^jx_2^{n-j} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(t+n-j)!}{t!} \left[x_1 E_{t+n-j} H + (t+n+1-j) x_2 E_{t+n+1-j}\right] H^j x_1^j x_2^{n-j} \\
&= \binom{n}{0} \frac{(t+n+1)!}{t!} x_2^{n+1} E_{t+n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] x_1 x_2^n \frac{(t+n)!}{t!} E_{t+n} H \\
&+ \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] x_1^2 x_2^{n-1} \frac{(t+n-1)!}{t!} E_{t+n-1} H^2 + \cdots \\
&+ \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] x_1^n x_2 \frac{(t+1)!}{t!} E_{t+1} H^n + \binom{n}{n} x_1^{n+1} E_t H^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} \frac{(t+n+1)!}{t!} x_2^{n+1} E_{t+n+1} + \binom{n+1}{1} \frac{(t+n)!}{t!} x_1 x_2^n E_{t+n} H \\
&+ \binom{n+1}{2} \frac{(t+n-1)!}{t!} x_1^2 x_2^{n-1} E_{t+n-1} H^2 + \cdots \\
&+ \binom{n+1}{n} \frac{(t+1)!}{t!} x_1^n x_2 E_{t+1} H^n + \binom{n+1}{n+1} \frac{t!}{t!} x_1^{n+1} E_t H^{n+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \frac{(t+n+1-j)!}{t!} x_1^j x_2^{n+1-j} E_{t+n+1-j} H^j,
\end{aligned}
$$

logo a proposição é válida para $k = n+1$, o que conclui a demonstração. ■

Esta última proposição permite generalizar para duas variáveis, usando matrizes de blocos, o resultado já conhecido para uma variável, $P(x) = e^{xH}$.

Teorema 4.2 *Seja* $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. *A matriz bloco de Pascal generalizada é tal que*

$$\mathcal{P}(x_1, x_2) = e^{F(x_1, x_2)}.$$

Dem. Usando a Proposição 4.7, a demonstração é análoga à do Teorema 4.1. ■

4.1.2 Polinómios bidimensionais e matrizes de blocos

O polinómio (3.1), com $r = 2$, com os seus monómios ordenados colexicograficamente pode escrever-se na forma

$$p_{n_1,n_2}(x_1, x_2) = \mathbf{c}^T \mathbf{v},$$

onde

$$\mathbf{c} = [c_{n_1-i,n_2} | c_{n_1-i,n_2-1} | \cdots | c_{n_1-i,0}]^T$$

e

$$\mathbf{v} = [x_1^i x_2^0 | x_1^i x_2 | \cdots | x_1^i x_2^{n_2}]^T,$$

$i = 0, 1, \ldots, n_1$, são vectores bloco.

Centremo-nos agora no caso $n_1 = n_2 = m$.

Introduzamos os vectores bloco

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = [p_{i,0}(\boldsymbol{x})|p_{i,1}(\boldsymbol{x})| \cdots |p_{i,m}(\boldsymbol{x})]^T$$

e

$$\xi(x_k) = [1 \ x_k \ \cdots \ x_k^m]^T,$$

$k = 1, 2$. Então

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) &= \mathcal{C}\mathrm{vec}(\xi(x_1) \otimes \xi(x_2)^T) \\ &= \mathcal{C}\xi(\boldsymbol{x}), \end{aligned}$$

onde $\mathcal{C} = [\mathcal{C}_{ij}^{st}]$ é a matriz bloco tal que

$$\mathcal{C}_{ij}^{st} = \begin{cases} c_{i-j,s-t} & , i \geq j \wedge s \geq t \\ 0 & , i < j \vee s < t, \end{cases} \tag{4.12}$$

$(i, j, s, t = 0, 1, \ldots, m)$.

Observação 4.9 *O vector $\xi(\boldsymbol{x})$ é precisamente a primeira coluna da matriz bloco de Pascal generalizada $\mathcal{P}(x_1, x_2)$.*

Em particular, no caso de $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ ser um vector bloco de polinómios de Appell (3.5), a matriz $\mathcal{C} \equiv \mathbb{M} = [\mathbb{M}_{ij}^{st}]$ é tal que

$$\mathbb{M}_{ij}^{st} = \begin{cases} \binom{i}{j}\binom{s}{t} c_{i-j,s-t} & , i \geq j \wedge s \geq t \\ 0 & , i < j \vee s < t \ , \end{cases} \tag{4.13}$$

$(i, j, s, t = 0, 1, \ldots, m)$.

Assim, a matriz $\mathbb{M}$ pode ser encarada como a *matriz de transformação* do vector que contém as potências de x_1 e x_2 ordenadas colexicograficamente, no vector de polinómios de Appell em duas variáveis.

Teorema 4.3 *Sejam $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{t} = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, N = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}_0^2$ um multi-índice e $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = f(\boldsymbol{t})Exp(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ a função geradora do conjunto $\{p_N(\boldsymbol{x})\}$ de polinómios de Appell, isto é,*

$$f(\boldsymbol{t})Exp(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \sum_{|N|=0}^{+\infty} p_N(\boldsymbol{x}) \frac{\boldsymbol{t}^N}{N!}. \tag{4.14}$$

Então a matriz $\mathbb{M}$ *é tal que* $\mathbb{M} = f(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$.

Consideremos o seguinte Lema auxiliar para a demonstração deste Teorema.

Lema 4.5 *Seja* $k \in \mathbb{N}_0$ *e* $t = 0, \ldots, m$.

i) $\mathbb{H}_1^k E_t = E_t H^k$;

ii) $\mathbb{H}_2^k E_t = (k+t)^{(k)} E_{k+t} = \frac{(k+t)!}{t!} E_{k+t}$.

Dem.

i) Decorre imediatamente de (4.1).

ii) Pela definição de $\mathbb{H}_2$ tem-se, $\mathbb{H}_2 E_t = (t+1)E_{t+1}$, ou seja, a proposição é verificada para $k = 1$.

Suponhamos agora que a proposição é verdadeira para $k = n$. Então

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}_2^{n+1} E_t &= \mathbb{H}_2(\mathbb{H}_2^n E_t) \\
&= \mathbb{H}_2 \frac{(n+t)!}{t!} E_{n+t} \\
&= \frac{(n+t)!}{t!} \mathbb{H}_2 E_{n+t} \\
&= \frac{(n+t)!(n+t+1)}{t!} E_{n+t+1} \\
&= \frac{(n+t+1)!}{t!} E_{n+t+1},
\end{aligned}$$

o que mostra que a proposição é válida para $k = n+1$, ficando concluída a demonstração.

$\blacksquare$

Dem. (do Teorema 4.3)

A partir de (3.5) verifica-se que $p_{n_1,n_2}(0,0) = c_{n_1,n_2}$ e, portanto, fazendo em (4.14) $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ obtém-se

$$f(\boldsymbol{t}) = \sum_{|N|=0}^{+\infty} p_N(\mathbf{0}) \frac{\boldsymbol{t}^N}{N!},$$

ou seja,

$$f(t_1, t_2) = \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} c_{n_1,n_2} \frac{t_1^{n_1} t_2^{n_2}}{n_1! n_2!}.$$

A substituição de t_1 por $\mathbb{H}_1$ e t_2 por $\mathbb{H}_2$ origina a matriz

$$f(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2) = \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} c_{n_1,n_2} \frac{\mathbb{H}_1^{n_1} \mathbb{H}_2^{n_2}}{n_1! n_2!}, \tag{4.15}$$

cujas entradas coincidem com as da matriz $\mathbb{M}$. Com efeito,

$$(f(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2))_{ij}^{st} = \left(\sum_{n_1=0}^{+\infty}\sum_{n_2=0}^{+\infty} c_{n_1,n_2}\frac{E_s^T\mathbb{H}_1^{n_1}\mathbb{H}_2^{n_2}E_t}{n_1!n_2!}\right)_{ij}$$

e aplicando o Lema 4.5,

$$\begin{aligned}(f(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2))_{ij}^{st} &= \left(\sum_{n_1=0}^{+\infty}\sum_{n_2=0}^{+\infty} c_{n_1,n_2}\frac{E_s^T\mathbb{H}_1^{n_1}(n_2+t)!E_{n_2+t}}{n_1!n_2!t!}\right)_{ij}\\ &= \left(\sum_{n_1=0}^{+\infty}\sum_{n_2=0}^{+\infty} c_{n_1,n_2}\frac{(n_2+t)!}{n_1!n_2!t!}E_s^TE_{n_2+t}H^{n_1}\right)_{ij}\\ &= \left(\sum_{n_1=0}^{+\infty}\sum_{n_2=0}^{+\infty} c_{n_1,n_2}\frac{(n_2+t)!}{n_1!n_2!t!}\delta_{s,n_2+t}IH^{n_1}\right)_{ij}.\end{aligned}$$

Se $s<t$, então $s<n_2+t$ e $\delta_{s,n_2+t}I=O$. Se $s\geq t$, quando $s=n_2+t, \delta_{s,n_2+t}I=I$. Então,

$$\begin{aligned}(f(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2))_{ij}^{st} &= \left(\sum_{n_1=0}^{+\infty} c_{n_1,s-t}\frac{s!}{n_1!(s-t)!t!}H^{n_1}\right)_{ij}\\ &= \binom{s}{t}\sum_{n_1=0}^{+\infty} c_{n_1,s-t}\frac{e_i^TH^{n_1}e_j}{n_1!}\\ &= \binom{s}{t}\sum_{n_1=0}^{+\infty} c_{n_1,s-t}\frac{e_i^T(n_1+j)!e_{n_1+j}}{j!n_1!}\\ &= \binom{s}{t}\sum_{n_1=0}^{+\infty} c_{n_1,s-t}\frac{(n_1+j)!}{j!n_1!}\delta_{i,n_1+j}.\end{aligned}$$

Se $i<j$, então $i<n_1+j$ e $\delta_{i,n_1+j}=0$. Se $i\geq j$, quando $i=n_1+j, \delta_{i,n_1+j}=1$ e, portanto,

$$\begin{aligned}(f(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2))_{ij}^{st} &= \binom{s}{t}c_{i-j,s-t}\frac{i!}{j!(i-j)!}\\ &= \binom{i}{j}\binom{s}{t}c_{i-j,s-t}\end{aligned}$$

$$= (\mathbb{M})_{ij}^{st}, \qquad i \geq j \wedge s \geq t,$$

como se pretendia demonstrar. ■

Teorema 4.4 *Sejam* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *e* $N = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}_0^2$. *Os polinómios* $p_N(\boldsymbol{x})$ *são de Appell sse a sua função geradora matricial é da forma*

$$f(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)e^{F(x_1,x_2)} = \sum_{|N|=0}^{+\infty} p_N(\boldsymbol{x}) \frac{\mathbb{H}_1^{n_1}\mathbb{H}_2^{n_2}}{N!}.$$

Dem. Suponhamos que a função geradora matricial dos polinómios $p_N(\boldsymbol{x})$ é

$$f(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)e^{F(x_1,x_2)} = \sum_{|N|=0}^{+\infty} p_N(\boldsymbol{x}) \frac{\mathbb{H}_1^{n_1}\mathbb{H}_2^{n_2}}{N!}. \tag{4.16}$$

Derivando em ordem a x_1 ambos os membros obtém-se

$$f(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)\mathbb{H}_1 e^{x_1\mathbb{H}_1 + x_2\mathbb{H}_2} = \sum_{|N|=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_1} p_{n_1,n_2}(\boldsymbol{x}) \frac{\mathbb{H}_1^{n_1}\mathbb{H}_2^{n_2}}{n_1!n_2!},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}_1 \sum_{|N|=0}^{+\infty} p_{n_1,n_2}(\boldsymbol{x}) \frac{\mathbb{H}_1^{n_1}\mathbb{H}_2^{n_2}}{n_1!n_2!} &= \sum_{|N|=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_1} p_{n_1,n_2}(\boldsymbol{x}) \frac{\mathbb{H}_1^{n_1}\mathbb{H}_2^{n_2}}{n_1!n_2!} \\
\Leftrightarrow \sum_{|N|=0}^{+\infty} p_{n_1,n_2}(\boldsymbol{x}) \frac{\mathbb{H}_1^{n_1+1}\mathbb{H}_2^{n_2}}{n_1!n_2!} &= \sum_{|N|=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_1} p_{n_1,n_2}(\boldsymbol{x}) \frac{\mathbb{H}_1^{n_1}\mathbb{H}_2^{n_2}}{n_1!n_2!} \\
\Leftrightarrow \sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} p_{n_1-1,n_2}(\boldsymbol{x}) \frac{\mathbb{H}_1^{n_1}\mathbb{H}_2^{n_2}}{(n_1-1)!n_2!} &= \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_1} p_{n_1,n_2}(\boldsymbol{x}) \frac{\mathbb{H}_1^{n_1}\mathbb{H}_2^{n_2}}{n_1!n_2!},
\end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial x_1} p_{n_1,n_2}(\boldsymbol{x}) = n_1 p_{n_1-1,n_2}(\boldsymbol{x}), \qquad n_1 \geq 1.$$

Derivando (4.16) em ordem a x_2, de modo semelhante se prova que

$$\frac{\partial}{\partial x_2} p_{n_1,n_2}(\boldsymbol{x}) = n_2 p_{n_1,n_2-1}(\boldsymbol{x}), \qquad n_2 \geq 1.$$

Então $p_N(\boldsymbol{x})$ são polinómios de Appell.

Suponhamos que $p_N(\boldsymbol{x})$ são polinómios de Appell, então a sua função geradora é $f(t_1,t_2)e^{x_1t_1+x_2t_2}$. Substituindo t_1 e t_2 por $\mathbb{H}_1$ e $\mathbb{H}_2$, respectivamente, e atendendo a (4.15),

$$\begin{aligned}
f(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2)e^{x_1\mathbb{H}_1+x_2\mathbb{H}_2} &= \left(\sum_{|\alpha|=0}^{+\infty} c_{\alpha_1,\alpha_2}\frac{\mathbb{H}_1^{\alpha_1}\mathbb{H}_2^{\alpha_2}}{\alpha_1!\alpha_2!}\right)\left(\sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\frac{\mathbb{H}_1^{\sigma_1}\mathbb{H}_2^{\sigma_2}}{\sigma_1!\sigma_2!}\right)\\
&= \sum_{|N|=0}^{+\infty}\left(\sum_{\alpha+\sigma=N}\frac{n_1!n_2!c_{\alpha_1,\alpha_2}x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}}{\alpha_1!\alpha_2!\sigma_1!\sigma_2!}\right)\frac{\mathbb{H}_1^{n_1}\mathbb{H}_2^{n_2}}{n_1!n_2!}\\
&= \sum_{|N|=0}^{+\infty}\left(\sum_{\sigma=0}^{N}\binom{N}{\sigma}c_{N-\sigma}\boldsymbol{x}^{\sigma}\right)\frac{\mathbb{H}_1^{n_1}\mathbb{H}_2^{n_2}}{n_1!n_2!}.
\end{aligned}$$

Por (3.7),

$$f(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2)e^{x_1\mathbb{H}_1+x_2\mathbb{H}_2} = \sum_{|N|=0}^{+\infty} p_N(\boldsymbol{x})\frac{\mathbb{H}_1^{n_1}\mathbb{H}_2^{n_2}}{n_1!n_2!}.$$

■

4.1.3 Representação matricial de classes particulares

Apliquemos agora os resultados obtidos às classes particulares dos polinómios de Appell já considerados anteriormente.

Corolário 4.4.1 *Sejam $m = 0,1,\ldots$ e*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) &= [B_{0,0}(\boldsymbol{x})\ \cdots\ B_{m,0}(\boldsymbol{x})|B_{0,1}(\boldsymbol{x})\ \cdots\ B_{m,1}(\boldsymbol{x})|\ \cdots\ |B_{0,m}(\boldsymbol{x})\ \cdots\ B_{m,m}(\boldsymbol{x})]^T,\\
\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}) &= [E_{0,0}(\boldsymbol{x})\ \cdots\ E_{m,0}(\boldsymbol{x})|E_{0,1}(\boldsymbol{x})\ \cdots\ E_{m,1}(\boldsymbol{x})|\ \cdots\ |E_{0,m}(\boldsymbol{x})\ \cdots\ E_{m,m}(\boldsymbol{x})]^T,\\
\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) &= [G_{0,0}(\boldsymbol{x})\ \cdots\ G_{m,0}(\boldsymbol{x})|G_{0,1}(\boldsymbol{x})\ \cdots\ G_{m,1}(\boldsymbol{x})|\ \cdots\ |G_{0,m}(\boldsymbol{x})\ \cdots\ G_{m,m}(\boldsymbol{x})]^T,\\
\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) &= [Q_{0,0}(\boldsymbol{x})\ \cdots\ Q_{m,0}(\boldsymbol{x})|Q_{0,1}(\boldsymbol{x})\ \cdots\ Q_{m,1}(\boldsymbol{x})|\ \cdots\ |Q_{0,m}(\boldsymbol{x})\ \cdots\ Q_{m,m}(\boldsymbol{x})]^T,\\
\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) &= [\mathcal{H}_{0,0}(\boldsymbol{x})\ \cdots\ \mathcal{H}_{m,0}(\boldsymbol{x})|\mathcal{H}_{0,1}(\boldsymbol{x})\ \cdots\ \mathcal{H}_{m,1}(\boldsymbol{x})|\ \cdots\ |\mathcal{H}_{0,m}(\boldsymbol{x})\ \cdots\ \mathcal{H}_{m,m}(\boldsymbol{x})]^T,
\end{aligned}$$

vectores de blocos de polinómios bidimensionais de Bernoulli, de Euler, de Genocchi, de Laguerre (3.41) e de Hermite (3.44), respectivamente e $\xi(\boldsymbol{x})$ a primeira coluna da matriz bloco de Pascal generalizada de ordem $(m+1)^2$. Então

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) &= \mathbb{B}\xi(\boldsymbol{x}), \qquad \mathbb{B} = \left(\sum_{k=0}^{2m}\frac{\mathbb{H}^k}{(k+1)!}\right)^{-1},\\
\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}) &= \mathbb{E}\xi(\boldsymbol{x}), \qquad \mathbb{E} = 2\left(\mathcal{P}+\mathcal{I}\right)^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) &= \mathbb{G}\xi(\boldsymbol{x}), & \mathbb{G} &= 2\mathbb{H}\left(\mathcal{P}+\mathcal{I}\right)^{-1}, \\
\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) &= \mathbb{Q}\xi(\boldsymbol{x}), & \mathbb{Q} &= \left(\mathcal{I}-\mathbb{H}\right)^{\alpha}, \quad \alpha > -1, \\
\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) &= \mathbb{S}\xi(\boldsymbol{x}), & \mathbb{S} &= \sum_{\sigma_1=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\sum_{\sigma_2=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^{|\sigma|}\mathbb{H}_1^{2\sigma_1}\mathbb{H}_2^{2\sigma_2}}{2^{|\sigma|}\sigma!}.
\end{aligned}$$

Dem. Atendendo à função geradora (3.10) dos polinómios de Bernoulli tem-se

$$\begin{aligned}
f(t_1,t_2) &= \left(\frac{e^{t_1+t_2}-1}{t_1+t_2}\right)^{-1} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(t_1+t_2)^k}{(k+1)!}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

De acordo com o Teorema 4.3 e sabendo que $\mathbb{H}$ é nilpotente de ordem $2m+1$, a matriz de transformação do vector $\xi(\boldsymbol{x})$ no vector $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ é

$$\begin{aligned}
\mathbb{B} \equiv f(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2) &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\mathbb{H}_1+\mathbb{H}_2)^k}{(k+1)!}\right)^{-1} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{2m}\frac{\mathbb{H}^k}{(k+1)!}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Analogamente, de (3.11) se obtém

$$\begin{aligned}
f(t_1,t_2) &= 2\left(e^{t_1+t_2}+1\right)^{-1} \\
&= 2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(t_1+t_2)^k}{k!}+1\right)^{-1}
\end{aligned}$$

e pelo mesmo teorema, a matriz que transforma $\xi(\boldsymbol{x})$ em $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x})$ é

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \equiv f(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2) &= 2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\mathbb{H}_1+\mathbb{H}_2)^k}{k!}+\mathcal{I}\right)^{-1} \\
&= 2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathbb{H}^k}{k!}+\mathcal{I}\right)^{-1} \\
&= 2\left(e^{\mathbb{H}}+\mathcal{I}\right)^{-1} \\
&= 2\left(\mathcal{P}+\mathcal{I}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Também, a partir de (3.12),

$$
\begin{aligned}
f(t_1,t_2) &= 2(t_1+t_2)\left(e^{t_1+t_2}+1\right)^{-1} \\
&= 2(t_1+t_2)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(t_1+t_2)^k}{k!}+1\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{G} \equiv f(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2) &= 2(\mathbb{H}_1+\mathbb{H}_2)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathbb{H}^k}{k!}+\mathcal{I}\right)^{-1} \\
&= 2\mathbb{H}\left(\mathcal{P}+\mathcal{I}\right)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Atendendo à função geradora (3.41) dos polinómios de Laguerre,

$$
f(t_1,t_2) = \left(1-(t_1+t_2)\right)^{\alpha}.
$$

Pelo Teorema 4.3, a matriz de transformação do vector $\xi(\boldsymbol{x})$ no vector $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$ é

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Q} \equiv f(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2) &= \left(\mathcal{I}-(\mathbb{H}_1+\mathbb{H}_2)\right)^{\alpha} \\
&= \left(\mathcal{I}-\mathbb{H}\right)^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Pela função geradora (3.44) dos polinómios de Hermite,

$$
f(t_1,t_2) = e^{-\frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2)}
$$

e de acordo com o Teorema 4.3, a matriz de transformação do vector $\xi(\boldsymbol{x})$ no vector $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ é

$$
\begin{aligned}
\mathbb{S} \equiv f(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\left(\mathbb{H}_1^2+\mathbb{H}_2^2\right)^k}{2^k k!} \\
&= \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{|\sigma|}\mathbb{H}_1^{2\sigma_1}\mathbb{H}_2^{2\sigma_2}}{2^{|\sigma|}\sigma!}.
\end{aligned}
$$

Como $\mathbb{H}_1$ e $\mathbb{H}_2$ são nilpotentes de ordem $m+1$, então

$$\mathbb{S} = \sum_{\sigma_1=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \sum_{\sigma_2=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^{|\sigma|}\mathbb{H}_1^{2\sigma_1}\mathbb{H}_2^{2\sigma_2}}{2^{|\sigma|}\sigma!}.$$

■

Corolário 4.4.2 *Seja* $m = 0, 1, \ldots$ *e*

$$\widetilde{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{w}) = [\widetilde{P}_{0,0}(\boldsymbol{w}) \ \cdots \ \widetilde{P}_{m,0}(\boldsymbol{w})|\widetilde{P}_{0,1}(\boldsymbol{w}) \ \cdots \ \widetilde{P}_{m,1}(\boldsymbol{w})| \ \cdots \ |\widetilde{P}_{0,m}(\boldsymbol{w}) \ \cdots \ \widetilde{P}_{m,m}(\boldsymbol{w})]^T,$$
$$\widetilde{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{w}) = [\widetilde{T}_{0,0}(\boldsymbol{w}) \ \cdots \ \widetilde{T}_{m,0}(\boldsymbol{w})|\widetilde{T}_{0,1}(\boldsymbol{w}) \ \cdots \ \widetilde{T}_{m,1}(\boldsymbol{w})| \ \cdots \ |\widetilde{T}_{0,m}(\boldsymbol{w}) \ \cdots \ \widetilde{T}_{m,m}(\boldsymbol{w})]^T,$$
$$\widetilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}) = [\widetilde{U}_{0,0}(\boldsymbol{w}) \ \cdots \ \widetilde{U}_{m,0}(\boldsymbol{w})|\widetilde{U}_{0,1}(\boldsymbol{w}) \ \cdots \ \widetilde{U}_{m,1}(\boldsymbol{w})| \ \cdots \ |\widetilde{U}_{0,m}(\boldsymbol{w}) \ \cdots \ \widetilde{U}_{m,m}(\boldsymbol{w})]^T,$$

os vectores de blocos de polinómios bidimensionais de Legendre (3.56), de Chebyshev de primeira espécie (3.64) e de segunda espécie (3.65), e $\xi(\boldsymbol{w})$ *a primeira coluna da matriz bloco de Pascal generalizada de ordem* $(m+1)^2$*. Então*

$$\widetilde{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{w}) = \mathbb{L}\xi(\boldsymbol{w}), \qquad \mathbb{L} = \sum_{\sigma_1=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \sum_{\sigma_2=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^{|\sigma|}\mathbb{H}_1^{2\sigma_1}\mathbb{H}_2^{2\sigma_2}}{4^{|\sigma|}(|\sigma|)!\sigma!},$$
$$\widetilde{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{w}) = \mathbb{T}\xi(\boldsymbol{w}), \qquad \mathbb{T} = \sum_{\sigma_1=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \sum_{\sigma_2=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^{|\sigma|}(|\sigma|)!\mathbb{H}_1^{2\sigma_1}\mathbb{H}_2^{2\sigma_2}}{(2|\sigma|)!\sigma!},$$
$$\widetilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}) = \mathbb{U}\xi(\boldsymbol{w}), \qquad \mathbb{U} = \sum_{\sigma_1=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \sum_{\sigma_2=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^{|\sigma|}(|\sigma|)!\mathbb{H}_1^{2\sigma_1}\mathbb{H}_2^{2\sigma_2}}{(2|\sigma|+1)!\sigma!}.$$

Dem. Pela função geradora (3.56) dos polinómios de Legendre,

$$f(\tau_1, \tau_2) = J_0\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{2} \tau_k^2}\right) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{|\sigma|}\tau_1^{2\sigma_1}\tau_2^{2\sigma_2}}{4^{|\sigma|}(|\sigma|)!\sigma!}.$$

De acordo com o Teorema 4.3, a matriz de transformação do vector $\xi(\boldsymbol{w})$ no vector $\widetilde{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{w})$ é

$$\mathbb{L} \equiv f(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2) = \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{|\sigma|}\mathbb{H}_1^{2\sigma_1}\mathbb{H}_2^{2\sigma_2}}{4^{|\sigma|}(|\sigma|)!\sigma!}.$$

Sabendo que $\mathbb{H}_1$ e $\mathbb{H}_2$ são nilpotentes de ordem $m+1$,

$$\mathbb{L} = \sum_{\sigma_1=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \sum_{\sigma_2=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^{|\sigma|}\mathbb{H}_1^{2\sigma_1}\mathbb{H}_2^{2\sigma_2}}{4^{|\sigma|}(|\sigma|)!\sigma!}.$$

Atendendo à função geradora (3.64) dos polinómios de Chebyshev de primeira espécie, tem-se

$$\begin{aligned} f(\tau_1,\tau_2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k(\tau_1^2+\tau_2^2)^k}{(2k)!} \\ &= \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{|\sigma|}(|\sigma|)!\tau^{2\sigma_1}\tau^{2\sigma_2}}{(2|\sigma|)!\sigma!} \end{aligned}$$

e de acordo com o Teorema 4.3, a matriz de transformação do vector $\xi(\boldsymbol{w})$ no vector $\widetilde{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{w})$ é

$$\mathbb{T} \equiv f(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2) = \sum_{\sigma_1=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \sum_{\sigma_2=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^{|\sigma|}(|\sigma|)!\mathbb{H}_1^{2\sigma_1}\mathbb{H}_2^{2\sigma_2}}{(2|\sigma|)!\sigma!}.$$

Analogamente, de (3.65) se obtém

$$\begin{aligned} f(\tau_1,\tau_2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k(\tau_1^2+\tau_2^2)^k}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{|\sigma|}(|\sigma|)!\tau_1^{2\sigma_1}\tau_2^{2\sigma_2}}{(2|\sigma|+1)!\sigma!}. \end{aligned}$$

e pelo mesmo teorema, a matriz que transforma $\xi(\boldsymbol{w})$ em $\widetilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w})$ é

$$\mathbb{U} \equiv f(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2) = \sum_{\sigma_1=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \sum_{\sigma_2=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^{|\sigma|}(|\sigma|)!\mathbb{H}_1^{2\sigma_1}\mathbb{H}_2^{2\sigma_2}}{(2|\sigma|+1)!\sigma!}.$$

$\blacksquare$

O Teorema 4.3 permite ainda concluir que a matriz $\mathbb{M}^{-1}$, se existir, é a matriz de transformação entre o desenvolvimento de Taylor de uma dada função e o desenvolvimento dessa mesma função em termos de polinómios de Appell. Com efeito, seja

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}^T \xi(\boldsymbol{x}) + \cdots$$

a série de Taylor de uma função analítica de duas variáveis $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2)$, onde $\boldsymbol{f}^T$ é o vector que contém os coeficientes da expansão. Seja $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ um vector de polinómios de Appell bidimensionais ordenados colexicograficamente. Como $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{M}\xi(\boldsymbol{x})$, então

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}^T \mathbb{M}^{-1} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) + \cdots .$$

Em particular, os desenvolvimentos de $f(\boldsymbol{x})$ em termos dos referidos polinómios de Bernoulli, Euler, Laguerre e Hermite são, respectivamente,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f}^T \mathbb{B}^{-1} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) + \cdots , \\ f(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f}^T \mathbb{E}^{-1} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}) + \cdots , \\ f(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f}^T \mathbb{Q}^{-1} \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) + \cdots , \\ f(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f}^T \mathbb{S}^{-1} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) + \cdots . \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{w}) &= \boldsymbol{f}^T \mathbb{L}^{-1} \widetilde{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{w}) + \cdots , \\ f(\boldsymbol{w}) &= \boldsymbol{f}^T \mathbb{T}^{-1} \widetilde{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{w}) + \cdots , \\ f(\boldsymbol{w}) &= \boldsymbol{f}^T \mathbb{U}^{-1} \widetilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}) + \cdots , \end{aligned}$$

são os desenvolvimentos de $f(\boldsymbol{w})$ em termos dos polinómios de Legendre e de Chebyshev de primeira e de segunda espécie.

Definição 4.3 *Seja* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. *A matriz de blocos de ordem* $(m+1)^2$, $\mathcal{M}(x_1, x_2) = \left[(\mathcal{M}(\boldsymbol{x}))_{ij}^{st} \right]$, *tal que*

$$(\mathcal{M}(\boldsymbol{x}))_{ij}^{st} = \begin{cases} \binom{i}{j}\binom{s}{t} p_{i-j,s-t}(\boldsymbol{x}) & , \ i \geq j \wedge s \geq t \\ 0 & , \ i < j \vee s < t \ , \end{cases}$$

$(i, j, s, t = 0, 1, \ldots, m)$, *onde* $p_{i-j,s-t}(\boldsymbol{x})$ *são polinómios de Appell bidimensionais, é chamada matriz polinomial de Appell.*

A concretização de $p_{i-j,s-t}(\boldsymbol{x})$ por polinómios de Euler ou Bernoulli, por exemplo, origina as matrizes polinomiais de Euler e de Bernoulli já definidas em [90] e [91].

Teorema 4.5 *Seja* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{P}(\boldsymbol{x})\mathbb{M} = \mathbb{M}\mathcal{P}(\boldsymbol{x}).$$

Dem.

Se $i < j \vee s < t$ é imediato que

$$(\mathcal{M}(\boldsymbol{x}))_{ij}^{st} = (\mathcal{P}(\boldsymbol{x})\mathbb{M})_{ij}^{st} = 0.$$

Se $i \geq j \wedge s \geq t$ e escrevendo $i = j + l$ e $s = t + q$, $l, q \geq 0$,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}(\boldsymbol{x})\mathbb{M})_{ij}^{st} &= \sum_{k_1=0}^{l} \sum_{k_2=0}^{q} (\mathcal{P}(\boldsymbol{x}))_{j+l,j+k_1}^{t+q,t+k_2} \mathbb{M}_{j+k_1,j}^{t+k_2,t} \\
&= \sum_{k_1=0}^{l} \sum_{k_2=0}^{q} \binom{j+l}{j+k_1}\binom{t+q}{t+k_2}\binom{j+k_1}{j}\binom{t+k_2}{t} x_1^{l-k_1} x_2^{q-k_2} c_{k_1,k_2}.
\end{aligned}$$

Pela propriedade

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m},$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}(\boldsymbol{x})\mathbb{M})_{ij}^{st} &= \binom{j+l}{j}\binom{t+q}{t} \sum_{k_1=0}^{l} \sum_{k_2=0}^{q} \binom{l}{k_1}\binom{q}{k_2} x_1^{l-k_1} x_2^{q-k_2} c_{k_1,k_2} \\
&= \binom{i}{j}\binom{s}{t} \sum_{k_1=0}^{i-j} \sum_{k_2=0}^{s-t} \binom{i-j}{k_1}\binom{s-t}{k_2} x_1^{i-j-k_1} x_2^{s-t-k_2} c_{k_1,k_2}
\end{aligned}$$

e por (3.6),

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}(\boldsymbol{x})\mathbb{M})_{ij}^{st} &= \binom{i}{j}\binom{s}{t} p_{i-j,s-t}(\boldsymbol{x}) \\
&= (\mathcal{M}(\boldsymbol{x}))_{ij}^{st}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{M}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{P}(\boldsymbol{x})\mathbb{M}$.

Pelos cálculos efectuados a igualdade $\mathcal{M}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{M}\mathcal{P}(\boldsymbol{x})$ é imediata. ∎

Partindo de $\mathcal{M}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{P}(\boldsymbol{x})\mathbb{M}$ e notando que a primeira coluna da matriz $\mathcal{M}(\boldsymbol{x})$ coincide com $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ e que as entradas da primeira coluna de $\mathbb{M}$ são os valores dos polinómios de Appell na origem, podemos escrever que

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{P}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{0}).$$

Por exemplo, os polinómios de Bernoulli bidimensionais obtêm-se facilmente, usando esta relação, já que $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{0})$ contém os conhecidos números de Bernoulli.

Além disso, de $\mathcal{M}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{M}\mathcal{P}(\boldsymbol{x})$ confirma-se o resultado $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{M}\xi(\boldsymbol{x})$, uma vez que $\xi(\boldsymbol{x})$ é a primeira coluna da matriz bloco de Pascal generalizada.

4.2 Representação matricial de polinómios com mais de duas variáveis

Tal como referido anteriormente, o formalismo matricial usado na secção anterior para polinómios de duas variáveis e dois índices pode ser generalizado para polinómios com r variáveis e r índices, com $r > 2$. No primeiro caso, para a obtenção de polinómios de grau m nas variáveis x_1 e x_2, as matrizes envolvidas são constituídas por $(m+1)\times(m+1)$ blocos de ordem $m+1$, ou seja, são matrizes de ordem $(m+1)^2$. Genericamente, para obter polinómios de grau m nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_r,\quad r \in \mathbb{N}$, as matrizes envolvidas têm $(m+1)\times(m+1)$ blocos de ordem $(m+1)^{r-1}$, o que significa que são matrizes de ordem $(m+1)^r$.

As matrizes envolvidas na representação matricial de polinómios de r variáveis e r índices ($r \in \mathbb{N}$) podem definir-se do seguinte modo:

Definição 4.4 *A matriz bloco de criação de ordem $(m+1)^r$, $r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{H}_{(m+1)^r} = \left[\left(\mathbb{H}_{(m+1)^r}\right)_{st}\right]$, é definida por*

$$\left(\mathbb{H}_{(m+1)^r}\right)_{st} = \begin{cases} \mathbb{H}_{(m+1)^{r-1}} & , \ s = t \\ sI_{(m+1)^{r-1}} & , \ s = t+1 \\ O_{(m+1)^{r-1}} & , \ s \neq t \wedge s \neq t+1, \end{cases} \tag{4.17}$$

$(s, t = 0, 1, \ldots, m)$, *onde* $\mathbb{H}_{(m+1)^0} = 0$, $I_{(m+1)^0} = 1$ *e* $O_{(m+1)^0} = 0$.

Observação 4.10 *Considerando $r = 1$ ou $r = 2$ em (4.17) obtém-se $\mathbb{H}_{m+1} \equiv H$ e $\mathbb{H}_{(m+1)^2} \equiv \mathbb{H}$, respectivamente.*

À semelhança do que acontece com $\mathbb{H}$, esta matriz é decomponível na soma de r matrizes,

$$\mathbb{H}_{(m+1)^r} = (\mathbb{H}_1)_{(m+1)^r} + \cdots + (\mathbb{H}_r)_{(m+1)^r},$$

onde $(\mathbb{H}_p)_{(m+1)^r} = [((\mathbb{H}_p)_{(m+1)^r})_{st}]$ são definidas do seguinte modo:

$$\left((\mathbb{H}_p)_{(m+1)^r}\right)_{st} = \begin{cases} (\mathbb{H}_p)_{(m+1)^{r-1}} & , s = t \\ O_{(m+1)^{r-1}} & , s \neq t, \quad p = 1, 2, \ldots, r-1, \end{cases}$$

e

$$\left((\mathbb{H}_r)_{(m+1)^r}\right)_{st} = \begin{cases} sI_{(m+1)^{r-1}} & , s = t+1 \\ O_{(m+1)^{r-1}} & , s \neq t+1, \end{cases}$$

$(s, t = 0, 1, \ldots, m)$.

Observação 4.11 *Para $r = 1$, $(\mathbb{H}_1)_{(m+1)} \equiv H$. Para $r = 2$, obtêm-se as matrizes $\mathbb{H}_1$ e $\mathbb{H}_2$ definidas na secção anterior.*

Por razões análogas às expostas para o caso das matrizes $\mathbb{H}_1$ e $\mathbb{H}_2$, de ordem $(m+1)^2$, as matrizes $(\mathbb{H}_p)_{(m+1)^r}, \quad p = 1, \ldots, r-1$ e $(\mathbb{H}_r)_{(m+1)^r}$ são permutáveis. Além disso, por indução sobre r pode concluir-se:

Proposição 4.8 *As matrizes de ordem $(m+1)^r, (\mathbb{H}_1)_{(m+1)^r}, \ldots, (\mathbb{H}_r)_{(m+1)^r}$, são nilpotentes de ordem $m+1$.*

As suas potências de expoente inteiro não negativo $(\mathbb{H}_p)^k_{(m+1)^r}, \quad p = 1, \ldots, r-1$ e $(\mathbb{H}_r)^k_{(m+1)^r}$ são matrizes cujos blocos são definidos por

$$\left((\mathbb{H}_p)^k_{(m+1)^r}\right)_{st} = \begin{cases} (\mathbb{H}_p)^k_{(m+1)^{r-1}} & , s = t \\ O_{(m+1)^{r-1}} & , s \neq t, \quad p = 1, 2, \ldots, r-1, \end{cases}$$

e

$$\left((\mathbb{H}_r)^k_{(m+1)^r}\right)_{st} = \begin{cases} \frac{s!}{t!} I_{(m+1)^{r-1}} & , s = t+k \\ O_{(m+1)^{r-1}} & , s \neq t+k, \end{cases}$$

$(s, t = 0, 1, \ldots, m)$. Além disso, a matriz $(\mathbb{H}_1)^{\sigma_1}_{(m+1)^r} \cdots (\mathbb{H}_r)^{\sigma_r}_{(m+1)^r}$, $\sigma_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, r$, é definida por

$$\left((\mathbb{H}_1)^{\sigma_1}_{(m+1)^r} \cdots (\mathbb{H}_r)^{\sigma_r}_{(m+1)^r}\right)_{st} = \begin{cases} \frac{s!}{t!} (\mathbb{H}_1)^{\sigma_1}_{(m+1)^{r-1}} \cdots (\mathbb{H}_{r-1})^{\sigma_{r-1}}_{(m+1)^{r-1}} & , s = t + \sigma_r \\ O_{(m+1)^{r-1}} & , s \neq t + \sigma_r, \end{cases} \tag{4.18}$$

Lema 4.6 *Seja $k \in \mathbb{N}_0$ e $\mathbb{H}_{(m+1)^r}$ a matriz bloco de criação de ordem $(m+1)^r$. Então*

$$\mathbb{H}^k_{(m+1)^r} = \sum_{|\sigma|=k} \binom{k}{\sigma} (\mathbb{H}_1)^{\sigma_1}_{(m+1)^r} \cdots (\mathbb{H}_r)^{\sigma_r}_{(m+1)^r}. \tag{4.19}$$

Dem. Sendo $\mathbb{H}_1, \dots, \mathbb{H}_r$ permutáveis e $\mathbb{H}_{(m+1)^r} = (\mathbb{H}_1)_{(m+1)^r} + \cdots + (\mathbb{H}_r)_{(m+1)^r}$, o resultado conclui-se do teorema polinomial. ■

Proposição 4.9 *A matriz $\mathbb{H}_{(m+1)^r}$, de ordem $(m+1)^r$, é nilpotente de ordem $rm+1$.*

Dem. Suponhamos em (4.19) $k = rm$:

$$\mathbb{H}^{rm}_{(m+1)^r} = \sum_{|\sigma|=rm} \binom{rm}{\sigma} (\mathbb{H}_1)^{\sigma_1}_{(m+1)^r} \cdots (\mathbb{H}_r)^{\sigma_r}_{(m+1)^r}.$$

Se $\sigma_i \geq m+1$ para algum $i = 1, \dots, r$, então $\mathbb{H}^{rm}_{(m+1)^r} = O_{(m+1)^r}$ porque $(\mathbb{H}_i)_{(m+1)^r}$ são nilpotentes de ordem $m+1$.

Se $\sigma_1 = \cdots = \sigma_r = m$ então, por (4.18) e (4.3), $\mathbb{H}^{rm}_{(m+1)^r} = \frac{(rm)!}{(m!)^r} (\mathbb{H}_1)^m_{(m+1)^r} \cdots (\mathbb{H}_r)^m_{(m+1)^r}$ $\neq O_{(m+1)^r}$.

Por outro lado, as parcelas de

$$\mathbb{H}^{rm+1}_{(m+1)^r} = \sum_{|\sigma|=rm+1} \binom{rm+1}{\sigma} (\mathbb{H}_1)^{\sigma_1}_{(m+1)^r} \cdots (\mathbb{H}_r)^{\sigma_r}_{(m+1)^r},$$

contêm r factores. Logo, algum desses factores terá expoente superior a m e, portanto, $\mathbb{H}^{rm+1}_{(m+1)^r} = O_{(m+1)^r}$. ■

A matriz $\mathbb{H}_{(m+1)^r}$ possui também propriedades correspondentes às que constam na Proposição 4.3 para a matriz $\mathbb{H}$:

Proposição 4.10 *Seja $\mathbb{H}_{(m+1)^r}$ a matriz bloco de criação de ordem $(m+1)^r$ e*

$$E_i = \left[O_{(m+1)^{r-1}} \cdots \;\; O_{(m+1)^{r-1}} \;\; I_{(m+1)^{r-1}} \;\; O_{(m+1)^{r-1}} \cdots \;\; O_{(m+1)^{r-1}} \right]^T,$$

$i = 0, 1, \dots,$ o vector de $m+1$ blocos de ordem $(m+1)^{r-1}$, onde o i-ésimo bloco é a matriz identidade e os restantes blocos são matrizes nulas. Supõe-se ainda que E_i é o vector de blocos nulo se $i > m$. Então, para cada $t = 0, 1, \dots, m$,

i)

$$\mathbb{H}_{(m+1)^r} E_t = E_t \mathbb{H}_{(m+1)^{r-1}} + (t+1) E_{t+1} \tag{4.20}$$

ii)

$$\mathbb{H}^k_{(m+1)^r} E_t = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{(t+k-j)!}{t!} E_{t+k-j} \mathbb{H}^j_{(m+1)^{r-1}}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.21}$$

Dem. A demonstração é inteiramente análoga à da Proposição 4.3. ■

Definição 4.5 *A matriz bloco de Pascal de ordem* $(m+1)^r$, $\mathcal{P}_{(m+1)^r} = \left[\left(\mathcal{P}_{(m+1)^r}\right)_{st}\right]$, *é definida por*

$$\left(\mathcal{P}_{(m+1)^r}\right)_{st} = \begin{cases} \binom{s}{t}\mathcal{P}_{(m+1)^{r-1}} & , \; s \geq t \\ O_{(m+1)^{r-1}} & , \; s < t, \end{cases} \tag{4.22}$$

$(s, t = 0, 1, \ldots, m)$, *onde* $\mathcal{P}_{(m+1)^0} = 1$ *e* $O_{(m+1)^0} = 0$.

Observação 4.12 *Fazendo* $r = 1$ *ou* $r = 2$ *em (4.22) obtém-se, respectivamente,* $\mathcal{P}_{m+1} \equiv P$ *e* $\mathcal{P}_{(m+1)^2} \equiv \mathcal{P}$.

Teorema 4.6 *A matriz bloco de Pascal de ordem* $(m+1)^r$ *coincide com a exponencial da matriz* $\mathbb{H}_{(m+1)^r}$, *isto é,*

$$\mathcal{P}_{(m+1)^r} = e^{\mathbb{H}_{(m+1)^r}}.$$

Dem.

Usemos o método de indução sobre r.

Se $r = 1$,

$$e^{\mathbb{H}_{m+1}} = e^H = P = \mathcal{P}_{m+1}.$$

Suponhamos que a proposição é verificada para $r = n$, isto é, $\mathcal{P}_{(m+1)^n} = e^{\mathbb{H}_{(m+1)^n}}$. Então,

$$\begin{aligned}
\left(e^{\mathbb{H}_{(m+1)^{n+1}}}\right)_{st} &= \sum_{k=0}^{(n+1)m} \frac{E_s^T \mathbb{H}^k_{(m+1)^{n+1}} E_t}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{(n+1)m} \frac{E_s^T}{k!} \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{(t+k-j)!}{t!} E_{t+k-j} \mathbb{H}^j_{(m+1)^n}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{(n+1)m} \left[\sum_{j=0}^{k} \frac{(t+k-j)!}{j!(k-j)!t!} \delta_{s,t+k-j} I_{(m+1)^n} \mathbb{H}^j_{(m+1)^n}\right].
\end{aligned}$$

Se $s < t$, então $s < t + k - j$ e $\delta_{s,t+k-j} I_{(m+1)^n} = O_{(m+1)^n}$. Se $s \geq t$, quando $s = t + k - j$, $\delta_{s,t+k-j} I_{(m+1)^n} = I_{(m+1)^n}$ e

$$\left(e^{\mathbb{H}_{(m+1)^{n+1}}}\right)_{st} = \sum_{k=s-t}^{(n+1)m} \frac{s!}{(t-s+k)!(s-t)!t!} \mathbb{H}^{t-s+k}_{(m+1)^n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{s}{t} \sum_{h=0}^{nm} \frac{\mathbb{H}^h_{(m+1)^n}}{h!} \\
&= \binom{s}{t} e^{\mathbb{H}_{(m+1)^n}} \\
&= \binom{s}{t} \mathcal{P}_{(m+1)^n},
\end{aligned}
$$

ou seja, as entradas correspondentes de $e^{\mathbb{H}_{(m+1)^{n+1}}}$ e de $\mathcal{P}_{(m+1)^{n+1}}$ são iguais, o que conclui a demonstração. $\blacksquare$

Definição 4.6 *Seja* $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^r$. *A matriz bloco de Pascal generalizada de ordem* $(m+1)^r$, $\mathcal{P}_{(m+1)^r}(\boldsymbol{x}) = \left[\left(\mathcal{P}_{(m+1)^r}(\boldsymbol{x})\right)_{st}\right]$, $r \geq 2$, *é definida por*

$$
\left(\mathcal{P}_{(m+1)^r}(\boldsymbol{x})\right)_{st} = \begin{cases} \binom{s}{t}\mathcal{P}_{(m+1)^{r-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1})x_r^{s-t} & , s \geq t \\ O_{(m+1)^{r-1}} & , s < t, \end{cases} \tag{4.23}
$$

$(s, t = 0, 1, \ldots, m)$.

A extensão da matriz $F(x_1, x_2)$ para r variáveis, $r \geq 2$, é a matriz $F_{(m+1)^r}(\boldsymbol{x}) = \left[\left(F_{(m+1)^r}(\boldsymbol{x})\right)_{st}\right]$, de ordem $(m+1)^r$, definida por

$$
\left(F_{(m+1)^r}(\boldsymbol{x})\right)_{st} = \begin{cases} F_{(m+1)^{r-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}) & , s = t \\ sx_r I_{(m+1)^{r-1}} & , s = t+1 \\ O_{(m+1)^{r-1}} & , s \neq t \wedge s \neq t+1, \end{cases} \tag{4.24}
$$

$(s, t = 0, 1, \ldots, m)$, onde $F_{(m+1)}(x_1) = x_1 H$.

Também para o caso desta matriz, as suas propriedades são generalizações das referidas na Proposição 4.7 para a matriz $F(x_1, x_2)$:

Proposição 4.11 *Sejam* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^r$ *e* $k \in \mathbb{N}$.

i)$F_{(m+1)^r}(\boldsymbol{x})E_t = E_t F_{(m+1)^r}(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}) + (t+1)x_r E_{t+1}$;

ii) $F^k_{(m+1)^r}(\boldsymbol{x})E_t = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{(t+k-j)!}{t!} x_r^{k-j} E_{t+k-j} F^j_{(m+1)^r}(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1})$.

Dem. A demonstração de ***i)*** é análoga à correspondente da Proposição 4.3. Tal como na Proposição 4.7, usando o método de indução sobre k e ***i)***, prova-se ***ii)***. $\blacksquare$

Observação 4.13 *As matrizes* $\mathcal{P}(x_1, x_2)$ *e* $F(x_1, x_2)$ *obtêm-se de (4.23) e (4.24), respectivamente, fazendo* $r = 2$.

A conjugação das propriedades acabadas de enunciar com a definição de exponencial duma matriz permite provar, de modo semelhante ao Teorema 4.1, o seguinte:

Teorema 4.7 *A matriz bloco de Pascal generalizada de ordem* $(m+1)^r$ *é tal que*

$$\mathcal{P}_{(m+1)^r}(\boldsymbol{x}) = e^{F_{(m+1)^r}(\boldsymbol{x})}.$$

A matriz $F_{(m+1)^r}(\boldsymbol{x})$ pode ainda decompor-se na soma de r matrizes de blocos da mesma ordem da matriz original:

$$F_{(m+1)^r}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{r} x_k (\mathbb{H}_k)_{(m+1)^r}. \tag{4.25}$$

Consideremos os polinómios (3.1). Estes podem ser escritos como um produto de vectores, isto é,

$$p_N(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{v},$$

onde

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c} =& [c_{n_1-i,n_2,\ldots,n_r} | c_{n_1-i,n_2-1,\ldots,n_r} | \cdots | c_{n_1-i,0,\ldots,n_r} | \cdots | c_{n_1-i,n_2,\ldots,n_r-1} | c_{n_1-i,n_2-1,\ldots,n_r-1} | \cdots | \\ & c_{n_1-i,0,\ldots,n_r-1} | \cdots | c_{n_1-i,n_2,\ldots,n_r-2} | c_{n_1-i,n_2-1,\ldots,n_r-2} | \cdots | c_{n_1-i,0,\ldots,n_r-2} | \cdots | \\ & c_{n_1-i,n_2,\ldots,0} | c_{n_1-i,n_2-1,\ldots,0} | \cdots | c_{n_1-i,0,\ldots,0}]^T\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} =& [x_1^i x_2^0 \ldots x_r^0 | x_1^i x_2 \ldots x_r^0 | \cdots | x_1^i x_2^{n_2} \ldots x_r^0 | \cdots | x_1^i x_2^0 \ldots x_r | x_1^i x_2 \ldots x_r | \cdots | \\ & x_1^i x_2^{n_2} \ldots x_r | \cdots | x_1^i x_2^0 \ldots x_r^2 | x_1^i x_2 \ldots x_r^2 | \cdots | x_1^i x_2^{n_2} \ldots x_r^2 | \cdots | \\ & x_1^i x_2^0 \ldots x_r^{n_r} | x_1^i x_2 \ldots x_r^{n_r} | \cdots | x_1^i x_2^{n_2} \ldots x_r^{n_r}]^T,\end{aligned}$$

$i = 0, 1, \ldots, n_1$.

No caso $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = m$, o vector de polinómios

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) =& [p_{i,0,\ldots,0}(\boldsymbol{x}) | p_{i,1,\ldots,0}(\boldsymbol{x}) | \cdots | p_{i,m,\ldots,0}(\boldsymbol{x}) | \cdots | p_{i,0,\ldots,1}(\boldsymbol{x}) | p_{i,1,\ldots,1}(\boldsymbol{x}) | \cdots | p_{i,m,\ldots,1}(\boldsymbol{x}) | \cdots | \\ & p_{i,0,\ldots,m}(\boldsymbol{x}) | p_{i,1,\ldots,m}(\boldsymbol{x}) | \cdots | p_{i,m,\ldots,m}(\boldsymbol{x})]^T\end{aligned}$$

pode ser representado através do produto

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{C}_{(m+1)^r} \xi(\boldsymbol{x}),$$

onde $\xi(\boldsymbol{x})$ é a primeira coluna da matriz $\mathcal{P}_{(m+1)^r}(\boldsymbol{x})$, que também se pode exprimir na forma

$$\xi(\boldsymbol{x}) = \mathrm{vec}[\cdots[\mathrm{vec}[\mathrm{vec}[\xi(x_1) \otimes \xi(x_2)^T] \otimes \xi(x_3)^T] \cdots \otimes \xi(x_r)^T],$$

e $\mathcal{C}_{(m+1)^r}$ é a matriz de $(m+1) \times (m+1)$ blocos de ordem $(m+1)^{r-1}$, que contém os coeficientes dos polinómios que constam em $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$. Essa matriz $\mathcal{C}_{(m+1)^r} = [(\mathcal{C}_{(m+1)^r})_{s_r t_r}]$ é definida por

$$\left(\mathcal{C}_{(m+1)^r}\right)_{s_r t_r} = \begin{cases} \left(\mathcal{C}_{(m+1)^{r-1}}\right)_{s_r - t_r} & , s_r \geq t_r \\ O_{(m+1)^{r-1}} & , s_r < t_r, \end{cases}$$

$(s_r, t_r = 0, 1, \ldots, m)$, considerando $\left(\mathcal{C}_{(m+1)^0}\right)_{s_1 - t_1} = c_{s_1 - t_1}$ e $(((c_{s_1-t_1})_{s_2-t_2})\cdots)_{s_r-t_r} \equiv c_{s_1-t_1,\ldots,s_{r-1}-t_{r-1},s_r-t_r}$.

Se os polinómios que figuram em $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ são de Appell, a matriz $\mathcal{C}_{(m+1)^r} \equiv \mathbb{M}_{(m+1)^r} = \left[\left(\mathbb{M}_{(m+1)^r}\right)_{s_r t_r}\right]$ é tal que

$$\left(\mathbb{M}_{(m+1)^r}\right)_{s_r t_r} = \begin{cases} \binom{s_r}{t_r} \left(\mathbb{M}_{(m+1)^{r-1}}\right)_{s_r - t_r} & , s_r \geq t_r \\ O_{(m+1)^{r-1}} & , s_r < t_r, \end{cases}$$

$(s_r, t_r = 0, 1, \ldots, m)$.

Nestas condições, o Teorema 4.3 pode generalizar-se do seguinte modo:

Teorema 4.8 *Sejam* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^r$, $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_r) \in \mathbb{R}^r$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}_0^r$ *e* $f(\boldsymbol{t})Exp(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ *a função geradora dos polinómios de Appell* $\{p_N(\boldsymbol{x})\}$, *isto é,*

$$f(\boldsymbol{t})Exp(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \sum_{|N|=0}^{+\infty} p_N(\boldsymbol{x}) \frac{\boldsymbol{t}^N}{N!}. \tag{4.26}$$

Então a matriz $\mathbb{M}_{(m+1)^r} \equiv f((\mathbb{H}_1)_{(m+1)^r}, \ldots, (\mathbb{H}_r)_{(m+1)^r})$.

A demonstração deste teorema é análoga à do Teorema 4.3, tendo em conta o Lema seguinte:

Lema 4.7 *Seja* $k \in \mathbb{N}_0$ *e* $t = 0, 1, \ldots, m$.

i) $(\mathbb{H}_p)^k_{(m+1)^r} E_t = E_t (\mathbb{H}_p)^k_{(m+1)^{r-1}}, \quad p = 1, 2, \ldots, r-1;$

ii) $(\mathbb{H}_r)^k_{(m+1)^r} E_t = (k+t)^{(k)} E_{k+t} = \frac{(k+t)!}{t!} E_{k+t},$

onde cada bloco de E_t *é de ordem* $(m+1)^{r-1}$.

Podemos também enunciar o teorema que generaliza, para polinómios de r variáveis, o Teorema 4.4.

Teorema 4.9 *Sejam* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^r$ *e* $N \in \mathbb{N}_0^r$*. Os polinómios* $p_N(\boldsymbol{x})$ *são de Appell se e só se a sua função geradora matricial é da forma*

$$f((\mathbb{H}_1)_{(m+1)^r}, \dots, (\mathbb{H}_r)_{(m+1)^r})e^{F_{(m+1)^r}(\boldsymbol{x})} = \sum_{|N|=0}^{+\infty} p_N(\boldsymbol{x}) \frac{(\mathbb{H}_1)_{(m+1)^r}^{n_1} \cdots (\mathbb{H}_r)_{(m+1)^r}^{n_r}}{N!}. \quad (4.27)$$

Dem. Analogamente à demonstração do Teorema 4.4, tendo em conta a decomposição (4.25) da matriz $F_{(m+1)^r}(\boldsymbol{x})$ e derivando ambos os membros de (4.27) em ordem a cada variável $x_i,\ i = 1, 2, \dots, r$, prova-se que $p_N(\boldsymbol{x})$ são polinómios de Appell. Reciprocamente, supondo que $p_N(\boldsymbol{x})$ são polinómios de Appell, efectuando o produto

$$f((\mathbb{H}_1)_{(m+1)^r}, \dots, (\mathbb{H}_r)_{(m+1)^r})e^{F_{(m+1)^r}(\boldsymbol{x})} \quad (4.28)$$

e atendendo ao teorema anterior, mostra-se que (4.28) é função geradora matricial de $p_N(\boldsymbol{x})$. ■

Capítulo 5

Polinómios de Appell no Contexto da Análise de Clifford

5.1 Polinómios de Appell em termos de para-vectores

Contrariamente ao caso dos polinómios de Appell definidos nos espaços vectoriais $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, o interesse pelo estudo de tais polinómios no contexto da Análise de Clifford é bastante recente e, por vezes, foi motivado pela sua relação com outros problemas ([10], [18], [19], [20], [52], [53], [86], [92]).

Em todas as referências citadas, a ideia de construir polinómios de Appell de grau n, $p_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $x = x_0 + x_1e_1 + \cdots + x_re_r \in \mathcal{A} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{1, e_1, \ldots, e_r\}$, a partir da definição clássica ([5]), consiste em generalizar no quadro da Análise de Clifford a relação analítica $\frac{d}{dx}p_n(x) = np_{n-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, entre os polinómios e as suas derivadas. Assim, o uso de $\frac{1}{2}\overline{\partial} \equiv \frac{\partial}{\partial x_0}$ como derivada hipercomplexa, aplicada a uma função monogénica, permite uma extensão natural da noção de conjunto de Appell para $\mathbb{R}^{r+1} \cong \mathcal{A}$. Tal extensão consiste em considerar conjunto de Appell $\{p_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, $x \in \mathbb{R}^{r+1}$, aquele cujos elementos satisfazem as condições:

i)

$$\frac{\partial}{\partial x_0}p_n(x) = np_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.1}$$

ii)

$$p_0(x) = a_0, \text{ sendo } a_0 \text{ uma constante não nula.} \tag{5.2}$$

Esta definição é usada em [19], [52], [53] e [92], onde os autores definem conjuntos de polinómios monogénicos e homogéneos em termos de para-vectores e seus conjugados.

Em particular, definem polinómios $\mathcal{P}_n^r(x),\ n \in \mathbb{N}_0,\ r \in \mathbb{N}$, tais que

$$\mathcal{P}_n^r(x) = \sum_{s=0}^{n} T_s^n(r) x^{n-s} \bar{x}^s,$$

onde $T_s^n(r) = \frac{n!}{(r)_n} \frac{\left(\frac{r+1}{2}\right)_{n-s} \left(\frac{r-1}{2}\right)_s}{(n-s)!s!}$. Estes polinómios, conjugados com a condição de normalização $\mathcal{P}_n^r(1) = 1$, constituem um conjunto de Appell, $\{\mathcal{P}_n^r(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ([53]). Assim sendo desempenham um papel análogo ao das potências complexas $z^n = (x_0 + ix_1)^n,\ n \in \mathbb{N}$, no sentido em que satisfazem a condição

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \mathcal{P}_n^r(x) = n \mathcal{P}_{n-1}^r(x),\ n \in \mathbb{N},$$

que generaliza a regra de derivação das potências complexas $\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$.

Como era de esperar, pelo facto de constituirem um conjunto de Appell, tais polinómios admitem uma expansão de tipo binomial ([22]), neste caso induzida pela decomposição de x em $x_0 + \underline{x}$:

$$\mathcal{P}_n^r(x) = \mathcal{P}_n^r(x_0 + \underline{x}) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x_0^{n-s} \mathcal{P}_s^r(\underline{x}). \tag{5.3}$$

Esta identidade pode ainda exprimir-se na forma

$$\mathcal{P}_n^r(x) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} c_s(r) x_0^{n-s} \underline{x}^s, \tag{5.4}$$

com

$$c_s(r) = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k T_k^s(r) \tag{5.5}$$

$$= \begin{cases} \frac{s!!(r-2)!!}{(r+s-1)!!}, & s \text{ ímpar} \\ c_{s-1}(r), & s \text{ par}, \end{cases} \tag{5.6}$$

$c_0(r) = 1$ e $(-1)!! = 0!! = 1$ (cf. [18], [53]).

De (5.4) conclui-se que $\mathcal{P}_0^r(x) = 1$ e $\mathcal{P}_n^r(0) = 0,\ \ n > 0$. Além disso, se $\underline{x} = 0$ (caso real), obtêm-se as potências de x_0, para cada $n = 0, 1, \ldots$, isto é, $\mathcal{P}_n^r(x_0) = x_0^n$. Tal resultado permite representar (5.3) na forma, também de tipo binomial,

$$\mathcal{P}_n^r(x) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \mathcal{P}_{n-s}^r(x_0) \mathcal{P}_s^r(\underline{x}).$$

A ideia de que polinómios de Appell admitem uma expansão de tipo binomial foi recentemente aplicada em [93], no sentido de encontrar outros polinómios monogénicos de Appell em termos de para-vectores, além dos já conhecidos $\mathcal{P}_n^r(x)$. Consistiu em considerar em (5.4) a parte vectorial de x, $\underline{x} = \sum_{j=1}^{r} x_j e_j$, substituída por $\underline{X} = \sum_{j=1}^{r} X_j e_j$ em que os coeficientes de e_j são funções reais lineares $X_j = X_j(x_1, \ldots, x_r)$. A partir daí foram pesquisadas condições a que devem satisfazer os coeficientes dessas funções lineares de modo que os polinómios

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n^r(x_0, x_1, \ldots, x_r) &= \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} d_s(r) x_0^{n-s} \underline{X}^s \\ &= \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \mathcal{P}_{n-s}^r(x_0) \mathcal{P}_s^r(\underline{X}),\end{aligned}$$

com $d_s(r)$ coeficientes reais adequados, sejam polinómios monogénicos de Appell. O estudo levado a cabo para $r = 2$, considerando a condição de normalização $d_0(2) = 1$, permitiu concluir que, verificando-se a condição $\frac{\partial}{\partial x_1} X_1 . \frac{\partial}{\partial x_2} X_2 = 0$ se obtêm os polinómios de Appell triviais

$$\mathcal{P}_n(x_0, x_j) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x_0^{n-s} (x_j e_j)^s = (x_0 + x_j e_j)^n,$$

$j = 1, 2$. Além destes, existem apenas mais dois tipos [20] de polinómios correspondentes às condições $\frac{\partial}{\partial x_1} X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} X_1 = 0$ e $\frac{\partial}{\partial x_1} X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} X_1 \neq 0$ que são, respectivamente,

- os *monogénicos de Appell*

$$\mathcal{P}_n^2(x_0, \underline{x}) = \mathcal{P}_n^2(x),$$

- os *monogénicos especiais generalizados de Appell (ou polinómios pseudo-complexos)* ([20], [93])

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n^2(x_0, x_1, x_2) &= \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x_0^{n-s} ((i_1 x_1 + i_2 x_2)(i_1 e_1 + i_2 e_2))^s \\ &= (x_0 + (i_1 x_1 + i_2 x_2)(i_1 e_1 + i_2 e_2))^n,\end{aligned}$$

  onde i_1, i_2 são parâmetros reais que satisfazem a condição $i_1^2 + i_2^2 = 1$.

Retomando os polinómios (5.4), refira-se que a sua expressão em termos das variáveis

[20] O caso $r = 3$, estudado recentemente em [32], revela a existência de mais outro tipo de polinómios de Appell.

hipercomplexas $z_k = x_k - x_0 e_k, \quad k = 1, \ldots, r$ se deduz por recurso à noção de extensão de Cauchy-Kowalevskaya. Na verdade, a extensão de Cauchy-Kowalevskaya da restrição de $\mathcal{P}_n^r(x)$ ao hiperplano $x_0 = 0$ deve coincidir com $\mathcal{P}_n^r(x)$, devido ao Teorema 1.9. Quer dizer, restringindo (5.4) ao hiperplano $x_0 = 0$, tem-se

$$\mathcal{P}_n^r(x)|_{x_0=0} = c_n(r)\underline{x}^n \tag{5.7}$$

e, portanto, aplicando a fórmula polinomial às potências de $\underline{x}$ conclui-se que

$$\mathcal{P}_n^r(x)|_{x_0=0} = c_n(r) \sum_{|\sigma|=n} \binom{n}{\sigma} x_1^{\sigma_1} \cdots x_r^{\sigma_r} e_1^{\sigma_1} \times \cdots \times e_r^{\sigma_r}.$$

A extensão de Cauchy-Kowalevskaya $\mathcal{P}_n^r(x)$ de $\mathcal{P}_n^r(x)|_{x_0=0}$ é obtida substituindo os produtos $x_1^{\sigma_1} \cdots x_r^{\sigma_r}$ pelos produtos $z_1^{\sigma_1} \times \cdots \times z_r^{\sigma_r}$:

$$\mathcal{P}_n^r(x) = \mathcal{P}_n^r(\boldsymbol{z}) = c_n(r) \sum_{|\sigma|=n} \binom{n}{\sigma} z_1^{\sigma_1} \times \cdots \times z_r^{\sigma_r} e_1^{\sigma_1} \times \cdots \times e_r^{\sigma_r}.$$

As constantes $c_n(r)$ podem agora determinar-se tendo em conta a condição de normalização $\mathcal{P}_n^r(1) = \mathcal{P}_n^r(-e_1, \ldots, -e_r) = 1$:

$$c_n(r) = \left[\sum_{|\sigma|=n} (-1)^n \binom{n}{\sigma} (e_1^{\sigma_1} \times \cdots \times e_r^{\sigma_r})^2 \right]^{-1}$$

([52]).

As propriedades dos polinómios $\mathcal{P}_n^r(x)$ tornam-os uma ferramenta importante, por exemplo, na construção de funções monogénicas especiais como séries da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \mathcal{P}_n^r(x) \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{P}_n^r(x) b_n, \quad x \in \mathbb{R}^{r+1},$$

onde b_n são coeficientes determinados adequadamente e não necessariamente reais. Funções desse tipo foram obtidas em [52] como generalizações da função exponencial complexa, fazendo a determinação daqueles coeficientes de modo que fossem satisfeitas a equação diferencial de primeira ordem $f' = f$ e a condição $f(0) = 1$, onde f' representa a derivada hipercomplexa. As funções construídas nestas condições são as funções exponenciais monogénicas

$$\operatorname{Exp}_r(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{P}_n^r(x)}{n!}. \tag{5.8}$$

Estas, além de verificarem as propriedades $\bar{\partial} \operatorname{Exp}_r(x) = 0$, $\frac{1}{2}\partial \operatorname{Exp}_r(x) = \operatorname{Exp}_r(x)$ e $\operatorname{Exp}_r(0) = 1$, ainda verificam

$$\frac{1}{2}\partial \operatorname{Exp}_r(\lambda x) = \lambda \operatorname{Exp}_r(\lambda x), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

e

$$\operatorname{Exp}_r(x_0 + \underline{x}) = e^{x_0} \operatorname{Exp}_r(\underline{x}),$$

([52], [53]).

Embora a definição clássica de polinómios de Appell tenha sido a mais explorada, pela sua relação directa com a derivada, a representação de tais polinómios reais em termos de séries formais (Proposição 2.1) pode ser também usada como motivadora para novas abordagens. Nestes casos, atendendo a que essa função geradora envolve a função exponencial, o ponto de partida para uma abordagem diferente no contexto da Análise de Clifford poderá ser a procura de funções exponenciais holomorfas generalizadas que possam ser usadas na geração de polinómios de Appell. Ora, uma dessas funções pode ser precisamente (5.8).

Notemos que a sucessão de polinómios monogénicos

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= a_0\mathcal{P}_0^r(x), \quad a_0 \neq 0\\
p_1(x) &= a_1\mathcal{P}_0^r(x) + a_0\mathcal{P}_1^r(x)\\
p_2(x) &= a_2\mathcal{P}_0^r(x) + 2a_1\mathcal{P}_1^r(x) + a_0\mathcal{P}_2^r(x)\\
&\vdots\\
p_n(x) &= \binom{n}{0}a_n\mathcal{P}_0^r(x) + \binom{n}{1}a_{n-1}\mathcal{P}_1^r(x) + \cdots + \binom{n}{n-1}a_1\mathcal{P}_{n-1}^r(x) + \binom{n}{n}a_0\mathcal{P}_n^r(x)\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.9}$$

que se escreve condensadamente na forma

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}\mathcal{P}_k^r(x), \;\; n \in \mathbb{N}_0,$$

é de Appell já que satisfaz (5.1)-(5.2). Assim, tal como no caso dos polinómios de Appell $p_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, estes *polinómios monogénicos especiais de Appell* podem ser definidos através da função geradora que se obtém multiplicando a série formal

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} \quad (a_0 \neq 0)$$

pela série

$$\mathrm{Exp}_r(xt) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{P}_n^r(x) \frac{t^n}{n!}, \tag{5.10}$$

ou seja,

$$f(t)\,\mathrm{Exp}_r(xt) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x) \frac{t^n}{n!}. \tag{5.11}$$

Fazendo escolhas apropriadas para a função $f(t)$ obtêm-se generalizações de polinómios particulares de Appell reais para o caso hipercomplexo, nomeadamente,

- os polinómios do conjunto $\{\mathcal{P}_n^r(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, quando $f(t) = 1$;

- os polinómios monogénicos especiais de Bernoulli, de Euler, de Genocchi, de Hermite e de Laguerre, quando $f(t)$ coincide com as mesmas funções escolhidas para os correspondentes polinómios no caso real, isto é, com $\frac{t}{e^t-1}$, $\frac{2}{e^t+1}$, $\frac{2t}{e^t+1}$, $e^{-\frac{t^2}{2}}$ e $(1-t)^\alpha$, $\alpha > -1$, respectivamente.

Considerando estas funções particulares e usando (5.11) obtêm-se as seguintes expressões para o cálculo dos polinómios monogénicos especiais de:

- Bernoulli,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B_{n-k}^r(x)}{k+1} = \mathcal{P}_n^r(x), \ n \in \mathbb{N}_0; \tag{5.12}$$

- Euler,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k^r(x) + E_n^r(x) = 2\mathcal{P}_n^r(x), \ n \in \mathbb{N}_0; \tag{5.13}$$

- Genocchi,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_k^r(x) + G_n^r = 2n\mathcal{P}_{n-1}^r(x), \ n \in \mathbb{N}; \tag{5.14}$$

- Hermite,

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(\sqrt{2})^{n-2k} \mathcal{H}_{n-2k}^r(\sqrt{2}x)}{2^n k!(n-2k)!} = \frac{\mathcal{P}_n^r(x)}{n!}, \ n \in \mathbb{N}_0;$$

- Laguerre,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha)_k Q^r_{n-k}(x) = \mathcal{P}^r_n(x), \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Como $\frac{t}{e^t-1}$, $\frac{2e^t}{e^{2t}+1}$ e $\frac{2t}{e^t+1}$ são as funções geradoras dos números de Bernoulli, Euler e Genocchi, respectivamente, e tendo em conta (5.11), os polinómios de Bernoulli (5.12), de Euler (5.13) e de Genocchi (5.14) podem escrever-se explicitamente na forma

$$B^r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} \mathcal{P}^r_k(x),$$

$$E^r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_{n-k} \mathcal{P}^r_k(x - \frac{1}{2})$$

e

$$G^r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_{n-k} \mathcal{P}^r_k(x).$$

Os polinómios de Legendre e de Chebyshev encerram dificuldades adicionais relativamente ao caso real. Para os polinómios de Legendre com função geradora

$$J_0(t\sqrt{1-x^2}) \operatorname{Exp}_r(xt) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) \frac{t^n}{n!},$$

$t \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{A}$, a dificuldade consiste na transformação desta na forma (5.11) uma vez que a função de Bessel não tem, neste caso, argumento real. Ainda assim, partindo da função geradora

$$J_0(t\sqrt{1-\underline{x}^2}) \operatorname{Exp}_r(\underline{x}t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(\underline{x}) \frac{t^n}{n!},$$

notando que $\underline{x} = \frac{x_1 e_1 + \cdots + x_r e_r}{|\underline{x}|} |\underline{x}| = w(x)|\underline{x}|$ e que $w^2(x) = -1$, pode escrever-se

$$J_0(t\sqrt{1-w^2(x)|\underline{x}|^2}) \operatorname{Exp}_r(\underline{x}t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(\underline{x}) \frac{t^n}{n!}.$$

ou seja,

$$J_0(t\sqrt{1+|\underline{x}|^2}) \operatorname{Exp}_r(\underline{x}t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(\underline{x}) \frac{t^n}{n!}, \tag{5.15}$$

onde $t\sqrt{1+|\underline{x}|^2} \in \mathbb{R}$.

Com as mudanças de variáveis

$$t = \tau\sqrt{1 - |\underline{y}|^2} \qquad \text{e} \qquad \underline{x} = \frac{\underline{y}}{\sqrt{1 - |\underline{y}|^2}},$$

de (5.15) obtém-se

$$J_0(\tau)\,\mathrm{Exp}_r(\underline{y}\tau) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{P}_n(\underline{y})\frac{\tau^n}{n!},$$

com $\widetilde{P}_n(\underline{y}) \equiv P_n\left(\frac{\underline{y}}{\sqrt{1-|\underline{y}|^2}}\right)\left(1 - |\underline{y}|^2\right)^{n/2}$, no policilindro $\{(y_1, \ldots, y_r) \in \mathbb{R}^r : \sum_{i=1}^r y_i^2 < 1\}$.

Por (5.10) e (5.7),

$$\mathrm{Exp}_r(\underline{y}\tau) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(r)\underline{y}^n \frac{\tau^n}{n!}$$

e, portanto,

$$J_0(\tau)\,\mathrm{Exp}_r(\underline{y}\tau) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!(-1)^k c_{n-2k}(r)\underline{y}^{n-2k}}{2^{2k}(k!)^2(n-2k)!}\right)\frac{\tau^n}{n!}.$$

Assim,

$$\widetilde{P}_n(\underline{y}) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!(-1)^k \mathcal{P}^r_{n-2k}(\underline{y})}{2^{2k}(k!)^2(n-2k)!}.$$

Os polinómios assim obtidos não são monogénicos. Poder-se-ia ainda aplicar formalmente a extensão de Cauchy-Kowalevskaya no sentido de gerar a partir destas funções de r variáveis reais polinómios monogénicos. Contudo, não é possível a obtenção de polinómios de Appell de variável real quando se considera $\underline{y} = 0$.

Do mesmo modo, para os polinómios de Chebyshev de primeira e de segunda espécie, partindo das funções geradoras

$$\cosh(t\sqrt{\underline{x}^2 - 1})\,\mathrm{Exp}_r(\underline{x}t) = \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(\underline{x})\frac{t^n}{n!}$$

e

$$\frac{\sinh(t\sqrt{\underline{x}^2 - 1})}{\sqrt{\underline{x}^2 - 1}}\,\mathrm{Exp}_r(\underline{x}t) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(\underline{x})\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

obtém-se, respectivamente,

$$\cos\tau\,\mathrm{Exp}_r(\underline{y}\tau)=\sum_{n=0}^{+\infty}\widetilde{T}_n(\underline{y})\frac{\tau^n}{n!}$$

e

$$\mathrm{sinc}\,\tau\,\mathrm{Exp}_r(\underline{y}\tau)=\sum_{n=0}^{+\infty}\widetilde{U}_n(\underline{y})\frac{\tau^n}{n!},$$

onde $\widetilde{T}_n(\underline{y})\equiv T_n\left(\frac{\underline{y}}{\sqrt{1-|\underline{y}|^2}}\right)\left(1-|\underline{y}|^2\right)^{n/2}$ e $\widetilde{U}_n(\underline{y})\equiv\frac{1}{n+1}U_n\left(\frac{\underline{y}}{\sqrt{1-|\underline{y}|^2}}\right)\left(1-|\underline{y}|^2\right)^{n/2}$, que também não são polinómios monogénicos.

5.1.1 Representação matricial de polinómios monogénicos especiais de Appell

A representação matricial dos polinómios monogénicos especiais baseia-se no estudo já apresentado para polinómios de Appell reais. Na verdade, considerando os vectores coluna $p(x)=[p_0(x)\ p_1(x)\ \cdots\ p_m(x)\ ]^T$, de polinómios monogénicos especiais de Appell até ao grau m, e $\xi(\mathcal{P}^r(x))=[\mathcal{P}_0^r(x)\ \mathcal{P}_1^r(x)\ \cdots\ \mathcal{P}_m^r(x)]^T$, os polinómios (5.9) podem escrever-se na forma

$$p(x)=M\xi(\mathcal{P}^r(x)),$$

onde M é a matriz (2.68). Além disso, $M\equiv f(H)$ e, portanto, $f(H)$ é a matriz de transformação entre o vector $\xi(\mathcal{P}^r(x))$ e o vector dos polinómios monogénicos especiais de Appell.

Nos exemplos que se seguem é apresentado o cálculo matricial dos polinómios especiais de Bernoulli, de Euler, de Genocchi, de Hermite e de Laguerre ($\alpha=3$), até ao grau 3 ($m=3$):

$$\begin{bmatrix}B_0^r(x)\\B_1^r(x)\\B_2^r(x)\\B_3^r(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1/2&1&0&0\\1/6&-1&1&0\\0&1/2&-3/2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathcal{P}_0^r(x)\\\mathcal{P}_1^r(x)\\\mathcal{P}_2^r(x)\\\mathcal{P}_3^r(x)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{2}+x_0+\frac{1}{r}\underline{x}\\\frac{1}{6}-x_0-\frac{1}{r}\underline{x}+x_0^2+\frac{2}{r}x_0\underline{x}+\frac{1}{r}\underline{x}^2\\\frac{1}{2}(x_0+\frac{1}{r}\underline{x})-\frac{3}{2}(x_0^2+\frac{2}{r}x_0\underline{x}+\frac{1}{r}\underline{x}^2)+x_0^3+\frac{3}{r}x_0^2\underline{x}+\frac{3}{r}x_0\underline{x}^2+\frac{3}{r(r+2)}\underline{x}^3\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} E_0^r(x) \\ E_1^r(x) \\ E_2^r(x) \\ E_3^r(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & -3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_0^r(x) \\ \mathcal{P}_1^r(x) \\ \mathcal{P}_2^r(x) \\ \mathcal{P}_3^r(x) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + x_0 + \frac{1}{r}\underline{x} \\ -x_0 - \frac{1}{r}\underline{x} + x_0^2 + \frac{2}{r}x_0\underline{x} + \frac{1}{r}\underline{x}^2 \\ \frac{1}{4} - \frac{3}{2}(x_0^2 + \frac{2}{r}x_0\underline{x} + \frac{1}{r}\underline{x}^2) + x_0^3 + \frac{3}{r}x_0^2\underline{x} + \frac{3}{r}x_0\underline{x}^2 + \frac{3}{r(r+2)}\underline{x}^3 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} G_0^r(x) \\ G_1^r(x) \\ G_2^r(x) \\ G_3^r(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_0^r(x) \\ \mathcal{P}_1^r(x) \\ \mathcal{P}_2^r(x) \\ \mathcal{P}_3^r(x) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 + 2x_0 + \frac{2}{r}\underline{x} \\ -3x_0 - \frac{3}{r}\underline{x} + 3x_0^2 + \frac{6}{r}x_0\underline{x} + \frac{3}{r}\underline{x}^2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_0^r(x) \\ \mathcal{H}_1^r(x) \\ \mathcal{H}_2^r(x) \\ \mathcal{H}_3^r(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_0^r(x) \\ \mathcal{P}_1^r(x) \\ \mathcal{P}_2^r(x) \\ \mathcal{P}_3^r(x) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ x_0 + \frac{1}{r}\underline{x} \\ -1 + x_0^2 + \frac{2}{r}x_0\underline{x} + \frac{1}{r}\underline{x}^2 \\ -3x_0 - \frac{3}{r}\underline{x} + x_0^3 + \frac{3}{r}x_0^2\underline{x} + \frac{3}{r}x_0\underline{x}^2 + \frac{3}{r(r+2)}\underline{x}^3 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} Q_0^r(x) \\ Q_1^r(x) \\ Q_2^r(x) \\ Q_3^r(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 1 & 0 \\ -6 & 18 & -9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_0^r(x) \\ \mathcal{P}_1^r(x) \\ \mathcal{P}_2^r(x) \\ \mathcal{P}_3^r(x) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -3 + x_0 + \frac{1}{r}\underline{x} \\ 6 - 6x_0 - \frac{6}{r}\underline{x} + x_0^2 + \frac{2}{r}x_0\underline{x} + \frac{1}{r}\underline{x}^2 \\ -6 + 18x_0 + \frac{18}{r}\underline{x} - 9x_0^2 - \frac{18}{r}x_0\underline{x} - \frac{9}{r}\underline{x}^2 + x_0^3 + \frac{3}{r}x_0^2\underline{x} + \frac{3}{r}x_0\underline{x}^2 + \frac{3}{r(r+2)}\underline{x}^3 \end{bmatrix}.$$

5.2 Polinómios de Appell hipercomplexos com multi-índices

Nesta secção, e tendo como base o trabalho desenvolvido nos capítulos anteriores, propomo-nos estudar conjuntos de polinómios de Appell em várias variáveis hipercomplexas (variáveis de Fueter) e com vários índices. Tal como no caso dos polinómios de Appell de r variáveis reais, partimos da ideia de modificação da função geradora combinando-a com métodos de representação em série de potências generalizadas, próprios da teoria de funções holomorfas generalizadas no contexto da Análise de Clifford. Podemos, portanto, considerar que se trata de uma extensão do já exposto nos capítulos anteriores usando os instrumentos adequados da Análise de Clifford, onde o produto permutativo (1.14) tem particular importância.

Sejam $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_r) \in \mathcal{H}^r, \boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_r) \in \mathcal{H}^r$ e $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_r) \in \mathbb{R}^r$.

Definição 5.1 *Um conjunto* $\{p_N(\boldsymbol{z})\} \equiv \{p_N(\boldsymbol{z})\}_{N \in \mathbb{N}_0^r}$ *que satisfaça cumulativamente as condições*

i) $\frac{\partial}{\partial x_i} p_N(\boldsymbol{z}) = n_i p_{N-\mathbf{1}_i}(\boldsymbol{z}),\ i = 1, 2, \cdots, r,$

ii) $p_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{z}) = c_{\mathbf{0}}, \quad c_{\mathbf{0}} \neq 0$

iii) *cada polinómio* $p_N(\boldsymbol{z})$ *é monogénico em* $\mathcal{H}^r$, *isto é,* $\bar{\partial} p_N(\boldsymbol{z}) = 0,\ \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{H}^r$,

chama-se conjunto de Appell hipercomplexo.

Os polinómios que se obtêm de (3.5) por substituição das potências $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}$ pelas potências generalizadas $z_1^{\sigma_1} \times z_2^{\sigma_2}$ cumprem as condições da Definição 5.1 e, portanto, são polinómios de Appell hipercomplexos. Assim, analogamente ao estabelecido no capítulo anterior, os polinómios de Appell hipercomplexos de r variáveis e r índices podem escrever-se na forma

$$p_N(\boldsymbol{z}) = \sum_{\sigma=0}^{N} \binom{N}{\sigma} c_{N-\sigma} \boldsymbol{z}^{\sigma}. \tag{5.16}$$

A caracterização destes polinómios em termos da sua função geradora é também possível modificando adequadamente a função geradora dos polinómios de Appell reais. Para isso, é necessário procurar uma função exponencial holomorfa generalizada que corresponda aos propósitos apresentados. Nesse sentido, definamos a função exponencial hipercomplexa $\mathrm{Exp}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{t})$, recorrendo ao produto de Cauchy-Kowalewskaya referido na Subsecção 1.5.3, como sendo a extensão de Cauchy-Kowalewskaya de (3.8), cuja existência e unicidade são garantidas pelo Teorema 1.9.

Consideremos, para $i = 1, \ldots, r$, as funções

$$\exp(x_i t_i) := e^{x_i t_i} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x_i^k t_i^k}{k!},$$

inteiras em $\mathbb{R}^r$. As suas extensões de Cauchy-Kowalewskaya são as funções

$$\exp(z_i t_i) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z_i^k t_i^k}{k!}, \; i = 1, \ldots, r,$$

monogénicas em $\mathbb{R}^{r+1}$.

A função exponencial (3.8),

$$\begin{aligned} \operatorname{Exp}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) &= \prod_{i=1}^{r} \exp(x_i t_i) \\ &= \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \boldsymbol{x}^\sigma \frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!}, \end{aligned}$$

é inteira em $\mathbb{R}^r$. A sua extensão de Cauchy-Kowalewskaya é a função exponencial hipercomplexa, monogénica em $\mathbb{R}^{r+1}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Exp}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{t}) &= \prod_{i=1}^{r} \odot \exp(z_i t_i) \\ &= \sum_{|\sigma|=0}^{+\infty} \boldsymbol{z}^\sigma \frac{\boldsymbol{t}^\sigma}{\sigma!}, \end{aligned} \tag{5.17}$$

([11]) que, devido à fórmula polinomial (1.21), se pode exprimir na forma

$$\operatorname{Exp}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{t}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z_1 t_1 + \cdots + z_r t_r)^k}{k!}. \tag{5.18}$$

Esta função exponencial hipercomplexa permite a caracterização de polinómios de Appell hipercomplexos em termos da sua função geradora de modo análogo ao caso de várias variáveis reais.

Definição 5.2 *Um conjunto de polinómios* $\{p_N(\boldsymbol{z})\}$ *diz-se um conjunto de Appell hipercomplexo se existir uma série de potências formal múltipla* $f(\boldsymbol{t}) = \sum_{|\beta|=0}^{\infty} c_\beta \frac{\boldsymbol{t}^\beta}{\beta!}$, $c_{\boldsymbol{0}} \neq 0$

tal que

$$f(\boldsymbol{t})\operatorname{Exp}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{t}) = \sum_{|N|=0}^{+\infty} p_N(\boldsymbol{z})\frac{\boldsymbol{t}^N}{N!}. \tag{5.19}$$

Neste contexto, é possível a obtenção de qualquer conjunto de polinómios de Appell hipercomplexos desde que a função geradora desses polinómios se consiga escrever na forma $f(\boldsymbol{t})\operatorname{Exp}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{t})$. Em alguns casos particulares referidos na Subsecção 3.2.1, mais concretamente os polinómios de Bernoulli, de Euler, de Genocchi, de Laguerre e de Hermite, a extensão para o caso hipercomplexo é imediata, bastando substituir em Definição 3.6 , Definição 3.7 e Definição 3.8, a função $\operatorname{Exp}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ pela função exponencial hipercomplexa agora definida.

Sintetizamos a definição desses polinómios do seguinte modo:

Definição 5.3 *Sejam* $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^r, \boldsymbol{z}\in\mathcal{H}^r, j\in\mathbb{N}_0^r$ *e* $\mathfrak{a}=(\alpha,\alpha,\ldots,\alpha),\ \alpha>-1$. *Os polinómios de Bernoulli* $B_j(\boldsymbol{z})$, *de Euler* $E_j(\boldsymbol{z})$, *de Genocchi* $G_j(\boldsymbol{z})$, *de Laguerre* $Q_j(\boldsymbol{z}) = (-1)^{|j|}j!L_j^{(\mathfrak{a}-j)}(\boldsymbol{z})$ *e de Hermite* $\mathcal{H}_j(\boldsymbol{z})$ *hipercomplexos são definidos como coeficientes das séries de potências formais múltiplas*

$$\operatorname{Exp}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{t}) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(t_1+\cdots+t_r)^k}{(k+1)!}\right)\left(\sum_{|j|=0}^{+\infty}B_j(\boldsymbol{z})\frac{\boldsymbol{t}^j}{j!}\right), \tag{5.20}$$

$$2\operatorname{Exp}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{t}) = \left(1+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(t_1+\cdots+t_r)^k}{k!}\right)\left(\sum_{|j|=0}^{+\infty}E_j(\boldsymbol{z})\frac{\boldsymbol{t}^j}{j!}\right), \tag{5.21}$$

$$2(t_1+\cdots+t_r)\operatorname{Exp}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{t}) = \left(1+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(t_1+\cdots+t_r)^k}{k!}\right)\left(\sum_{|j|=0}^{+\infty}G_j(\boldsymbol{z})\frac{\boldsymbol{t}^j}{j!}\right), \tag{5.22}$$

$$\operatorname{Exp}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{t}) = (1-(t_1+\cdots+t_r))^{-\alpha}\left(\sum_{|j|=0}^{+\infty}(-1)^{|j|}L_j^{(\mathfrak{a}-j)}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{t}^j\right) \tag{5.23}$$

e

$$\operatorname{Exp}(-\frac{1}{2}\boldsymbol{t},\boldsymbol{t})\operatorname{Exp}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{t}) = \sum_{|j|=0}^{+\infty}\mathcal{H}_j(\boldsymbol{z})\frac{\boldsymbol{t}^j}{j!}, \tag{5.24}$$

respectivamente.

Observação 5.1 *No caso de polinómios de Legendre ou Chebyshev verifica-se a mesma dificuldade referida na Secção 5.1 para os mesmos polinómios definidos em termos dos* *polinómios monogénicos de Appell* $\mathcal{P}_n^r(x)$.

5.2.1 Representação matricial dos polinómios de Appell hipercomplexos

A abordagem matricial dos polinómios de Appell hipercomplexos, baseada na matriz bloco de criação $\mathbb{H}$, é semelhante à já elaborada para o caso dos polinómios multidimensionais reais. Há, no entanto, algumas diferenças decorrentes das ferramentas próprias da Análise de Clifford. Por exemplo, a matriz bloco de Pascal generalizada $\mathcal{P}(x_1, x_2)$ de ordem $(m+1)^2$ tem a seguinte correspondência no actual contexto:

Definição 5.4 *Seja* $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2) \in \mathcal{H}^2$. *À matrix de blocos* $\mathcal{P}(z_1, z_2) = [(\mathcal{P}(z_1, z_2))_{st}]$ *definida por*

$$(\mathcal{P}(z_1, z_2))_{st} = \begin{cases} \binom{s}{t} P(z_1) \times z_2^{s-t} & , s \geq t \\ O & , s < t \ , \end{cases}$$

$(s, t = 0, 1, \ldots, m)$, *onde*

$$(P(z_1) \times z_2^{s-t})_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j} z_1^{i-j} \times z_2^{s-t} & , i \geq j \\ 0 & , i < j \ , \end{cases}$$

$(i, j = 0, 1, \ldots, m)$, *chamamos matriz hipercomplexa de Pascal de ordem* $(m+1)^2$ *([91]).*

Esta matriz pode, à semelhança da matriz $\mathcal{P}(x_1, x_2)$, ser expressa como a exponencial da matriz de blocos $F(z_1, z_2)$ que resulta de (4.11) considerando variáveis de Fueter z_1 e z_2 em vez de variáveis reais x_1 e x_2, isto é,

$$\mathcal{P}(z_1, z_2) = e^{F(z_1, z_2)}, \quad (z_1, z_2) \in \mathcal{H}^2.$$

A demonstração deste resultado é análoga à do Teorema 4.2 uma vez que as propriedades enunciadas na Proposição 4.7 para a matriz real $F(x_1, x_2)$ são extensíveis para $F(z_1, z_2)$ do seguinte modo:

Proposição 5.1 *Sejam* $(z_1, z_2) \in \mathcal{H}^2$ *e* $k \in \mathbb{N}$.

i) $F(z_1, z_2) E_t = z_1 E_t H + (t+1) z_2 E_{t+1}$;

ii) $F^k(z_1, z_2) E_t = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} \frac{(t+k-h)!}{t!} z_1^h \times z_2^{k-h} E_{t+k-h} H^h$.

A demonstração destas propriedades é efectuada do mesmo modo que a da Proposição 4.7, contudo faremos a prova da propriedade ***ii)*** onde se salienta a importância das

fórmulas recursivas (1.19)-(1.20) verificadas pelo produto permutativo.
Dem.

ii) Tendo em conta ***i)***, a verificação da propriedade para k=1 é imediata.

Supondo que a propriedade é verdadeira para $k = n$, então

$$\begin{aligned} F^{n+1}(z_1, z_2)E_t &= F(z_1, z_2)(F^n(z_1, z_2)E_t) \\ &= \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} \frac{(t+n-h)!}{t!} z_1^h \times z_2^{n-h} F(z_1, z_2) E_{t+n-h} H^h. \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade ***i)*** aos produtos $F(z_1, z_2)E_{t+n-h}$ e após algumas manipulações algébricas

$$\begin{aligned} F^{n+1}(z_1, z_2)E_t &= \frac{(t+n+1)!}{t!} z_2^{n+1} E_{t+n+1} + \frac{(t+n)!}{t!}(n+1) z_1 \times z_2^n E_{t+n} H \\ &+ \frac{(t+n-1)!}{t!} \frac{n}{2} \left[2(z_1 \times z_2^{n-1}) z_1 + (n-1)(z_1^2 \times z_2^{n-2}) z_2 \right] E_{t+n-1} H^2 + \cdots \\ &+ \frac{(t+1)!}{t!} \left[n(z_1^{n-1} \times z_2) z_1 + z_1^n z_2 \right] E_{t+1} H^n + z_1^{n+1} E_t H^{n+1}. \end{aligned}$$

Pela fórmula (1.20),

$$\begin{aligned} F^{n+1}(z_1, z_2)E_t &= \frac{(t+n+1)!}{t!} z_2^{n+1} E_{t+n+1} + \frac{(t+n)!}{t!}(n+1) z_1 \times z_2^n E_{t+n} H \\ &+ \frac{(t+n-1)!}{t!} \frac{(n+1)n}{2} z_1^2 \times z_2^{n-1} E_{t+n-1} H^2 + \cdots \\ &+ \frac{(t+1)!}{t!}(n+1) z_1^n \times z_2 E_{t+1} H^n + z_1^{n+1} E_t H^{n+1} \\ &= \sum_{h=0}^{n+1} \binom{n+1}{h} \frac{(t+n-h+1)!}{t!} z_1^h \times z_2^{n+1-h} E_{t+n-h+1} H^h \end{aligned}$$

o que, pelo método de indução matemática, conclui a demonstração. ■

Seja

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{z}) = [p_{i,0}(\boldsymbol{z}) | p_{i,1}(\boldsymbol{z}) | \cdots | p_{i,m}(\boldsymbol{z})]^T,$$

$i = 0, \ldots, m$, o vector bloco de polinómios de grau m nas variáveis z_1 e z_2.

Considerando o vector

$$\xi(z_k) = [1 \ z_k \ \cdots \ z_k^m]^T,$$

$k = 1, 2,$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{z}) &= \mathcal{C}\,\mathrm{vec}(\xi(z_1) \circledast \xi(z_2)^T) \\ &= \mathcal{C}\xi(\boldsymbol{z}), \end{aligned}$$

onde $\mathcal{C}$ é a matriz (4.12) e $\circledast$ é o produto de Kronecker adaptado à Análise de Clifford, isto é,

$$\begin{aligned} \xi(z_1) \circledast \xi(z_2)^T &= [1 \; z_1 \; \cdots \; z_1^m]^T \circledast [1 \; z_2 \; \cdots \; z_2^m] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & z_2 & \cdots & z_2^m \\ z_1 & z_1 \times z_2 & \cdots & z_1 \times z_2^m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_1^m & z_1^m \times z_2 & \cdots & z_1^m \times z_2^m \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nota 5.1 *Também neste caso, o vector $\xi(\boldsymbol{z})$ coincide com a primeira coluna da matriz hipercomplexa de Pascal $\mathcal{P}(z_1, z_2)$.*

No caso de $p(\boldsymbol{z})$ ser um vector bloco de polinómios de Appell, a matriz $\mathcal{C}$ coincide com a matriz (4.13) e, portanto, o tratamento matricial de polinómios de Appell de variáveis reais é agora extensível a polinómios de Appell de variáveis hipercomplexas.

Capítulo 6

Conclusão

Geralmente, no estudo de polinómios quer reais quer no contexto da Análise de Clifford, a tónica é colocada nos polinómios ortogonais, pelas suas propriedades e características que os tornam de grande utilidade em Matemática Pura e Aplicada, nomeadamente, em teoria da aproximação. Nesta dissertação pretendeu-se ampliar um pouco mais o estudo de outros polinómios, sobretudo no tocante à sua representação matricial, sem a preocupação de verificarem a propriedade de ortogonalidade, mas que também tivessem um papel importante em aplicações. Os polinómios de Appell enquadram-se nestes objectivos pelas suas aplicações em Teoria dos Números, Teoria Combinatória, processamento de sinal, entre outras áreas. Recorde-se, por exemplo, o papel importante dos polinómios e números de Bernoulli em Análise Numérica, relacionados com a fórmula de Euler-Maclaurin e também o seu envolvimento em Funções Especiais, relacionado com a determinação de alguns valores da função zeta de Riemann.

Embora o ponto de partida para este trabalho tenha sido estudar polinómios de Appell em várias variáveis hipercomplexas, o ênfase aqui colocado na abordagem matricial de polinómios de Appell de várias varáveis reais resultou do reconhecimento de que tal estudo facilitaria a correspondente abordagem para aqueles polinómios.

A pesquisa sobre polinómios de Appell reais deixou patente a sua estreita e natural relação com a matriz de Pascal, como foi realçado nos trabalhos de Aceto e Trigiante citados ao longo desta dissertação. Essa relação é encarada como natural pela presença dos números binomiais na estrutura desses polinómios. Porém, uma análise mais profunda deixou perceber que na verdade a matriz que estava na base da possibilidade de representar matricialmente e de uma forma unificada todos os polinómios da classe de Appell era a matriz de criação. Nesse sentido, a procura de uma matriz particionada em blocos que desempenhasse, para polinómios em várias variáveis, um papel semelhante ao da matriz de criação afigurou-se ser o caminho ideal para atingir os objectivos traçados. Foi com base nessa matriz e na estrutura particular da função geradora dos polinómios da classe de Appell que foi conseguida uma representação matricial unificadora para polinómios dessa classe.

Espera-se agora que a abordagem matricial apresentada contribua, de algum modo, para que no futuro sejam explorados domínios ainda não desenvolvidos, em particular no âmbito da Análise de Clifford.

Apêndice A

Algumas Propriedades de Polinómios Particulares

A.1 Propriedades dos polinómios e dos números de Bernoulli

$$\frac{d}{dx}B_n(x) = nB_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{A.1}$$

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{A.2}$$

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{A.3}$$

$$B_n(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{A.4}$$

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{A.5}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k(x) = (n+1)x^n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{A.6}$$

$$B_n(1) = (-1)^n B_n(0) = (-1)^n B_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{A.7}$$

$$B_0 = 1, \ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0, \quad n = 2, 3, \cdots . \tag{A.8}$$

A.2 Propriedades dos polinómios e dos números de Euler

$$\frac{d}{dx}E_n(x) = nE_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{A.9}$$

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{E_k}{2^k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{A.10}$$

$$E_n(x+1) + E_n(x) = 2x^n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{A.11}$$

$$E_n(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(x), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{A.12}$$

$$E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{A.13}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(x) + E_n(x) = 2x^n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{A.14}$$

$$E_n = 2 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} E_k, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{A.15}$$

$$2^n E_n(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E_k, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{A.16}$$

A.3 Propriedades dos polinómios de Genocchi

$$\frac{d}{dx}G_n(x) = nG_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{A.17}$$

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_k x^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{A.18}$$

$$G_n(x+1) + G_n(x) = 2nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{A.19}$$

$$G_n(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_k(x), \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{A.20}$$

$$G_n(1-x) = (-1)^{n+1} G_n(x) \;\; n \in \mathbb{N}_0, \tag{A.21}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_k(x) + G_n(x) = 2nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{A.22}$$

$$G_0 = 0, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_k + G_n = 2\delta_{1,n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{A.23}$$

A.4 Propriedades dos polinómios de Laguerre

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1$$

$$L_1^{(\alpha)}(x) = 1 + \alpha - x$$

$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (1 + 2n + \alpha - x)L_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=0}^{n} L_k^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha+1)}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{A.24}$$

$$L_n^{(\alpha-1)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{A.25}$$

$$\frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) \tag{A.26}$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} L_k^{(\alpha)}(x)$$

$$= x^{-1}\left[nL_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)\right], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{A.27}$$

$$\frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) - \frac{d}{dx} L_{n-1}^{(\alpha)}(x) + L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{A.28}$$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha - \beta)_k L_{n-k}^{(\beta)}(x)}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!(1+\alpha)_n L_k^{(\alpha)}(x)}{(n-k)!(1+\alpha)_k} \tag{A.29}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k n! \binom{n+\alpha}{n-k} L_k^{(\alpha)}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

A.5 Propriedades dos polinómios de Hermite

$$
\begin{aligned}
H_0(x) &= 1 \\
H_1(x) &= 2x \\
H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, && \text{(A.30)} \\
\frac{d}{dx}H_n(x) &= 2nH_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, && \text{(A.31)} \\
H_n(-x) &= (-1)^n H_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0, && \text{(A.32)} \\
x^n &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n! H_{n-2k}(x)}{2^n k!(n-2k)!}, \quad n \in \mathbb{N}_0. && \text{(A.33)}
\end{aligned}
$$

A.6 Propriedades dos polinómios de Legendre

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
(n+1)P_{n+1}(x) &= (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, && \text{(A.34)} \\
(x^2-1)\frac{d}{dx}P_n(x) &= nxP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, && \text{(A.35)} \\
x\frac{d}{dx}P_n(x) - \frac{d}{dx}P_{n-1}(x) &= nP_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, && \text{(A.36)}
\end{aligned}
$$

$$
P_n(\cos\alpha) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}\right)^{n-k} P_k(\cos\beta), \quad n \in \mathbb{N}_0. \qquad \text{(A.37)}
$$

A.7 Propriedades dos polinómios de Chebyshev

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= x \\
T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, && \text{(A.38)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
U_0(x) &= 1 \\
U_1(x) &= 2x \\
U_{n+1}(x) &= 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \text{(A.39)}
\end{aligned}$$

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}T_n(x) = nT_{n-1}(x) - nxT_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{A.40}$$

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}U_n(x) = (n+1)U_{n-1}(x) - nxU_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{A.41}$$

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N} \tag{A.42}$$

$$(1-x^2)U_{n-1}(x) = xT_n(x) - T_{n+1}(x), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{A.43}$$

Apêndice B

Alguns Exemplos de Polinómios de Várias Variáveis

B.1 Polinómios de Bernoulli, $B_j(\boldsymbol{x}),\ r = 1, 2, 3$

Grau	$B_j(x)$	$B_{j_1,j_2}(x_1,x_2)$	$B_{j_1,j_2,j_3}(x_1,x_2,x_3)$
0	$B_0(x) = 1$	$B_{0,0}(\boldsymbol{x}) = 1$	$B_{0,0,0}(\boldsymbol{x}) = 1$
1	$B_1(x) = -\frac{1}{2} + x$	$B_{1,0}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2} + x_1$ $B_{0,1}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2} + x_2$	$B_{1,0,0}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2} + x_1$ $B_{0,1,0}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2} + x_2$ $B_{0,0,1}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2} + x_3$
2	$B_2(x) = \frac{1}{6} - x + x^2$	$B_{2,0}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{6} - x_1 + x_1^2$ $B_{1,1}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + x_1x_2$ $B_{0,2}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{6} - x_2 + x_2^2$	$B_{2,0,0}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{6} - x_1 + x_1^2$ $B_{1,1,0}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + x_1x_2$ $B_{0,2,0}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{6} - x_2 + x_2^2$ $B_{1,0,1}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(x_1 + x_3) + x_1x_3$ $B_{0,1,1}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(x_2 + x_3) + x_2x_3$ $B_{0,0,2}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}x_3 + x_3^2$
3	$B_3(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + x^3$	$B_{3,0}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_1^2 + x_1^3$ $B_{2,1}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2 - x_1x_2 + x_1^2x_2$ $B_{1,2}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + x_1x_2^2$ $B_{0,3}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 + x_2^3$	$B_{3,0,0}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_1^2 + x_1^3$ $B_{2,1,0}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2 - x_1x_2 + x_1^2x_2$ $B_{1,2,0}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + x_1x_2^2$ $B_{0,3,0}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 + x_2^3$ $B_{2,0,1}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{6}x_3 - x_1x_3 + x_1^2x_3$ $B_{1,1,1}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{2}x_1x_3 - \frac{1}{2}x_2x_3 + x_1x_2x_3$ $B_{0,2,1}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{6}x_3 - x_2x_3 + x_2^2x_3$ $B_{1,0,2}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_3 - x_1x_3 - \frac{1}{2}x_3^2 + x_1x_3^2$ $B_{0,1,2}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - x_2x_3 - \frac{1}{2}x_3^2 + x_2x_3^2$ $B_{0,0,3}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_3^2 + x_3^3$
⋮	⋮	⋮	⋮

B.2 Polinómios de Euler, $E_j(\boldsymbol{x}),\ r=1,2,3$

Grau	$E_j(x)$	$E_{j_1,j_2}(x_1,x_2)$	$E_{j_1,j_2,j_3}(x_1,x_2,x_3)$
0	$E_0(x)=1$	$E_{0,0}(\boldsymbol{x})=1$	$E_{0,0,0}(\boldsymbol{x})=1$
1	$E_1(x)=-\frac{1}{2}+x$	$E_{1,0}(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{2}+x_1$ $E_{0,1}(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{2}+x_2$	$E_{1,0,0}(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{2}+x_1$ $E_{0,1,0}(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{2}+x_2$ $E_{0,0,1}(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{2}+x_3$
2	$E_2(x)=-x+x^2$	$E_{2,0}(\boldsymbol{x})=-x_1+x_1^2$ $E_{1,1}(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+x_1x_2$ $E_{0,2}(\boldsymbol{x})=-x_2+x_2^2$	$E_{2,0,0}(\boldsymbol{x})=-x_1+x_1^2$ $E_{1,1,0}(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+x_1x_2$ $E_{0,2,0}(\boldsymbol{x})=-x_2+x_2^2$ $E_{1,0,1}(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{2}(x_1+x_3)+x_1x_3$ $E_{0,1,1}(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{2}(x_2+x_3)+x_2x_3$ $E_{0,0,2}(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{2}x_3+x_3^2$
3	$E_3(x)=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}x^2+x^3$	$E_{3,0}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}x_1^2+x_1^3$ $E_{2,1}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x_1^2-x_1x_2+x_1^2x_2$ $E_{1,2}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4}-x_1x_2-\frac{1}{2}x_2^2+x_1x_2^2$ $E_{0,3}(\boldsymbol{x})==\frac{1}{4}-\frac{3}{2}x_2^2+x_2^3$	$E_{3,0,0}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}x_1^2+x_1^3$ $E_{2,1,0}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x_1^2-x_1x_2+x_1^2x_2$ $E_{1,2,0}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4}-x_1x_2-\frac{1}{2}x_2^2+x_1x_2^2$ $E_{0,3,0}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}x_2^2+x_2^3$ $E_{2,0,1}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x_1^2-x_1x_3+x_1^2x_3$ $E_{1,1,1}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x_1x_2-\frac{1}{2}x_1x_3-\frac{1}{2}x_2x_3+$ $x_1x_2x_3$ $E_{0,2,1}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x_2^2-x_2x_3+x_2^2x_3$ $E_{1,0,2}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4}-x_1x_3-\frac{1}{2}x_3^2+x_1x_3^2$ $E_{0,1,2}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4}-x_2x_3-\frac{1}{2}x_3^2+x_2x_3^2$ $E_{0,0,3}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}x_3^2+x_3^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

B.3 Polinómios Genocchi, $G_j(\boldsymbol{x}),\ r = 1, 2, 3$

Grau	$G_j(x)$	$G_{j_1,j_2}(x_1,x_2)$	$G_{j_1,j_2,j_3}(x_1,x_2,x_3)$
0	$G_0(x)=0$ $G_1(x)=1$	$G_{0,0}(\boldsymbol{x})=0$ $G_{1,0}(\boldsymbol{x})=1$ $G_{0,1}(\boldsymbol{x})=1$	$G_{0,0,0}(\boldsymbol{x})=0$ $G_{1,0,0}(\boldsymbol{x})=1$ $G_{0,1,0}(\boldsymbol{x})=1$ $G_{0,0,1}(\boldsymbol{x})=1$
1	$G_2(x)=-1+2x$	$G_{2,0}(\boldsymbol{x})=-1+2x_1$ $G_{1,1}(\boldsymbol{x})=-1+x_1+x_2$ $G_{0,2}(\boldsymbol{x})=-1+2x_2$	$G_{2,0,0}(\boldsymbol{x})=-1+2x_1$ $G_{1,1,0}(\boldsymbol{x})=-1+x_1+x_2$ $G_{0,2,0}(\boldsymbol{x})=-1+2x_2$ $G_{1,0,1}(\boldsymbol{x})=-1+x_1+x_3$ $G_{0,1,1}(\boldsymbol{x})=-1+x_2+x_3$ $G_{0,0,2}(\boldsymbol{x})=-1+2x_3$
2	$G_3(x)=-3x+3x^2$	$G_{3,0}(\boldsymbol{x})=-3x_1+3x_1^2$ $G_{2,1}(\boldsymbol{x})=-2x_1+x_1^2-x_2+2x_1x_2$ $G_{1,2}(\boldsymbol{x})=-x_1-2x_2+2x_1x_2+x_2^2$ $G_{0,3}(\boldsymbol{x})=-3x_2+3x_2^2$	$G_{3,0,0}(\boldsymbol{x})=-3x_1+3x_1^2$ $G_{2,1,0}(\boldsymbol{x})=-2x_1+x_1^2-x_2+2x_1x_2$ $G_{1,2,0}(\boldsymbol{x})=-x_1-2x_2+2x_1x_2+x_2^2$ $G_{0,3,0}(\boldsymbol{x})=-3x_2+3x_2^2$ $G_{2,0,1}(\boldsymbol{x})=-2x_1+x_1^2-x_3+2x_1x_3$ $G_{1,1,1}(\boldsymbol{x})=-x_1-x_2+x_1x_2-x_3+x_1x_3+x_2x_3$ $G_{0,2,1}(\boldsymbol{x})=-2x_2+x_2^2-x_3+2x_2x_3$ $G_{1,0,2}(\boldsymbol{x})=-x_1-2x_3+2x_1x_3+x_3^2$ $G_{0,1,2}(\boldsymbol{x})=-x_2-2x_3+2x_2x_3+x_3^2$ $G_{0,0,3}(\boldsymbol{x})=-3x_3+3x_3^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

B.4 Polinómios de Laguerre, $Q_j(\boldsymbol{x}),\ r = 1, 2, 3$

Grau	$Q_j(x)$	$Q_{j_1,j_2}(x_1,x_2)$	$Q_{j_1,j_2,j_3}(x_1,x_2,x_3)$
0	$Q_0(x) = 1$	$Q_{0,0}(\boldsymbol{x}) = 1$	$Q_{0,0,0}(\boldsymbol{x}) = 1$
1	$Q_1(x) = -\alpha + x$	$Q_{1,0}(\boldsymbol{x}) = -\alpha + x_1$ $Q_{0,1}(\boldsymbol{x}) = -\alpha + x_2$	$Q_{1,0,0}(\boldsymbol{x}) = -\alpha + x_1$ $Q_{0,1,0}(\boldsymbol{x}) = -\alpha + x_2$ $Q_{0,0,1}(\boldsymbol{x}) = -\alpha + x_3$
2	$Q_2(x) = \alpha(\alpha-1) - 2\alpha x + x^2$	$Q_{2,0}(\boldsymbol{x}) = \alpha(\alpha-1) - 2\alpha x_1 + x_1^2$ $Q_{1,1}(\boldsymbol{x}) = \alpha(\alpha-1) - \alpha(x_1+x_2) + x_1x_2$ $Q_{0,2}(\boldsymbol{x}) = \alpha(\alpha-1) - 2\alpha x_2 + x_2^2$	$Q_{2,0,0}(\boldsymbol{x}) = \alpha(\alpha-1) - 2\alpha x_1 + x_1^2$ $Q_{1,1,0}(\boldsymbol{x}) = \alpha(\alpha-1) - \alpha(x_1+x_2) + x_1x_2$ $Q_{0,2,0}(\boldsymbol{x}) = \alpha(\alpha-1) - 2\alpha x_2 + x_2^2$ $Q_{1,0,1}(\boldsymbol{x}) = \alpha(\alpha-1) - \alpha(x_1+x_3) + x_1x_3$ $Q_{0,1,1}(\boldsymbol{x}) = \alpha(\alpha-1) - \alpha(x_2+x_3) + x_2x_3$ $Q_{0,0,2}(\boldsymbol{x}) = \alpha(\alpha-1) - 2\alpha x_3 + x_3^2$
3	$Q_3(x) = -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + 3\alpha(\alpha-1)x - 3\alpha x^2 + x^3$	$Q_{3,0}(\boldsymbol{x}) = -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + 3\alpha(\alpha-1)x_1 - 3\alpha x_1^2 + x_1^3$ $Q_{2,1}(\boldsymbol{x}) = -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + 2\alpha(\alpha-1)x_1 - \alpha x_1^2 + \alpha(\alpha-1)x_2 - 2\alpha x_1x_2 + x_1^2x_2$ $Q_{1,2}(\boldsymbol{x}) = -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + \alpha(\alpha-1)x_1 + 2\alpha(\alpha-1)x_2 - 2\alpha x_1x_2 - \alpha x_2^2 + x_1x_2^2$ $Q_{0,3}(\boldsymbol{x}) = -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + 3\alpha(\alpha-1)x_2 - 3\alpha x_2^2 + x_2^3$	$Q_{3,0,0}(\boldsymbol{x}) = -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + 3\alpha(\alpha-1)x_1 - 3\alpha x_1^2 + x_1^3$ $Q_{2,1,0}(\boldsymbol{x}) = -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + 2\alpha(\alpha-1)x_1 - \alpha x_1^2 + \alpha(\alpha-1)x_2 - 2\alpha x_1x_2 + x_1^2x_2$ $Q_{1,2,0}(\boldsymbol{x}) = -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + \alpha(\alpha-1)x_1 + 2\alpha(\alpha-1)x_2 - 2\alpha x_1x_2 - \alpha x_2^2 + x_1x_2^2$ $Q_{0,3,0}(\boldsymbol{x}) = -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + 3\alpha(\alpha-1)x_2 - 3\alpha x_2^2 + x_2^3$ $Q_{2,0,1}(\boldsymbol{x}) = -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + 2\alpha(\alpha-1)x_1 - \alpha x_1^2 + \alpha(\alpha-1)x_3 + 2\alpha x_1x_3 + x_1^2x_3$ $Q_{1,1,1}(\boldsymbol{x}) = -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + \alpha(\alpha-1)x_1 + \alpha(\alpha-1)x_2 - \alpha x_1x_2 + \alpha(\alpha-1)x_3 - \alpha x_1x_3 - \alpha x_2x_3 + x_1x_2x_3$ $Q_{0,2,1}(\boldsymbol{x}) = -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) - \alpha x_2^2 + \alpha(\alpha-1)x_3 + 2\alpha x_2x_3 + x_2^2x_3$ $Q_{1,0,2}(\boldsymbol{x}) = -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + \alpha(\alpha-1)x_1 + 2\alpha x_1x_3 - \alpha x_3^2 + x_1x_3^2$ $Q_{0,1,2}(\boldsymbol{x}) = -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + \alpha(\alpha-1)x_2 + 2\alpha x_2x_3 - \alpha x_3^2 + x_2x_3^2$ $Q_{0,0,3}(\boldsymbol{x}) = -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + 3\alpha(\alpha-1)x_3 - 3\alpha x_3^2 + x_3^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

B.5 Polinómios de Hermite, $\mathcal{H}_j(\boldsymbol{x}),\ r = 1, 2, 3$

Grau	$\mathcal{H}_j(x)$	$\mathcal{H}_{j_1,j_2}(x_1,x_2)$	$\mathcal{H}_{j_1,j_2,j_3}(x_1,x_2,x_3)$
0	$\mathcal{H}_0(x) = 1$	$\mathcal{H}_{0,0}(\boldsymbol{x}) = 1$	$\mathcal{H}_{0,0,0}(\boldsymbol{x}) = 1$
1	$\mathcal{H}_1(x) = x$	$\mathcal{H}_{1,0}(\boldsymbol{x}) = x_1$ $\mathcal{H}_{0,1}(\boldsymbol{x}) = x_2$	$\mathcal{H}_{1,0,0}(\boldsymbol{x}) = x_1$ $\mathcal{H}_{0,1,0}(\boldsymbol{x}) = x_2$ $\mathcal{H}_{0,0,1}(\boldsymbol{x}) = x_3$
2	$\mathcal{H}_2(x) = -1 + x^2$	$\mathcal{H}_{2,0}(\boldsymbol{x}) = -1 + x_1^2$ $\mathcal{H}_{1,1}(\boldsymbol{x}) = x_1x_2$ $\mathcal{H}_{0,2}(\boldsymbol{x}) = -1 + x_2^2$	$\mathcal{H}_{2,0,0}(\boldsymbol{x}) = -1 + x_1^2$ $\mathcal{H}_{1,1,0}(\boldsymbol{x}) = x_1x_2$ $\mathcal{H}_{0,2,0}(\boldsymbol{x}) = -1 + x_2^2$ $\mathcal{H}_{1,0,1}(\boldsymbol{x}) = x_1x_3$ $\mathcal{H}_{0,1,1}(\boldsymbol{x}) = x_2x_3$ $\mathcal{H}_{0,0,2}(\boldsymbol{x}) = -1 + x_3^2$
3	$\mathcal{H}_3(x) = -3x + x^3$	$\mathcal{H}_{3,0}(\boldsymbol{x}) = -3x_1 + x_1^3$ $\mathcal{H}_{2,1}(\boldsymbol{x}) = -x_2 + x_1^2x_2$ $\mathcal{H}_{1,2}(\boldsymbol{x}) = -x_1 + x_1x_2^2$ $\mathcal{H}_{0,3}(\boldsymbol{x}) = -3x_2 + x_2^3$	$\mathcal{H}_{3,0,0}(\boldsymbol{x}) = -3x_1 + x_1^3$ $\mathcal{H}_{2,1,0}(\boldsymbol{x}) = -x_2 + x_1^2x_2$ $\mathcal{H}_{1,2,0}(\boldsymbol{x}) = -x_1 + x_1x_2^2$ $\mathcal{H}_{0,3,0}(\boldsymbol{x}) = -3x_2 + x_2^3$ $\mathcal{H}_{2,0,1}(\boldsymbol{x}) = -x_3 + x_1^2x_3$ $\mathcal{H}_{1,1,1}(\boldsymbol{x}) = x_1x_2x_3$ $\mathcal{H}_{0,2,1}(\boldsymbol{x}) = -x_3 + x_2^2x_3$ $\mathcal{H}_{1,0,2}(\boldsymbol{x}) = -x_1 + x_1x_3^2$ $\mathcal{H}_{0,1,2}(\boldsymbol{x}) = -x_2 + x_2x_3^2$ $\mathcal{H}_{0,0,3}(\boldsymbol{x}) = -3x_3 + x_3^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

B.6 Polinómios de Legendre, $\widetilde{P}_j(\boldsymbol{w})$, $r = 1, 2, 3$

Grau	$\widetilde{P}_j(w)$	$\widetilde{P}_{j_1,j_2}(w_1, w_2)$	$\widetilde{P}_{j_1,j_2,j_3}(w_1, w_2, w_3)$
0	$\widetilde{P}_0(w) = 1$	$\widetilde{P}_{0,0}(\boldsymbol{w}) = 1$	$\widetilde{P}_{0,0,0}(\boldsymbol{w}) = 1$
1	$\widetilde{P}_1(w) = w$	$\widetilde{P}_{1,0}(\boldsymbol{w}) = w_1$ $\widetilde{P}_{0,1}(\boldsymbol{w}) = w_2$	$\widetilde{P}_{1,0,0}(\boldsymbol{w}) = w_1$ $\widetilde{P}_{0,1,0}(\boldsymbol{w}) = w_2$ $\widetilde{P}_{0,0,1}(\boldsymbol{w}) = w_3$
2	$\widetilde{P}_2(w) = -\frac{1}{2} + w^2$	$\widetilde{P}_{2,0}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{2} + w_1^2$ $\widetilde{P}_{1,1}(\boldsymbol{w}) = w_1 w_2$ $\widetilde{P}_{0,2}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{2} + w_2^2$	$\widetilde{P}_{2,0,0}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{2} + w_1^2$ $\widetilde{P}_{1,1,0}(\boldsymbol{w}) = w_1 w_2$ $\widetilde{P}_{0,2,0}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{2} + w_2^2$ $\widetilde{P}_{1,0,1}(\boldsymbol{w}) = w_1 w_3$ $\widetilde{P}_{0,1,1}(\boldsymbol{w}) = w_2 w_3$ $\widetilde{P}_{0,0,2}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{2} + w_3^2$
3	$\widetilde{P}_3(w) = -\frac{3}{2}w + w^3$	$\widetilde{P}_{3,0}(\boldsymbol{w}) = -\frac{3}{2}w_1 + w_1^3$ $\widetilde{P}_{2,1}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{2}w_2 + w_1^2 w_2$ $\widetilde{P}_{1,2}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{2}w_1 + w_1 w_2^2$ $\widetilde{P}_{0,3}(\boldsymbol{w}) = -\frac{3}{2}w_2 + w_2^2$	$\widetilde{P}_{3,0,0}(\boldsymbol{w}) = -\frac{3}{2}w_1 + w_1^3$ $\widetilde{P}_{2,1,0}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{2}w_2 + w_1^2 w_2$ $\widetilde{P}_{1,2,0}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{2}w_1 + w_1 w_2^2$ $\widetilde{P}_{0,3,0}(\boldsymbol{w}) = -\frac{3}{2}w_2 + w_2^2$ $\widetilde{P}_{2,0,1}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{2}w_3 + w_1^2 w_3$ $\widetilde{P}_{1,1,1}(\boldsymbol{w}) = w_1 w_2 w_3$ $\widetilde{P}_{0,2,1}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{2}w_3 + w_2^2 w_3$ $\widetilde{P}_{1,0,2}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{2}w_1 + w_1 w_3^2$ $\widetilde{P}_{0,1,2}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{2}w_2 + w_2 w_3^2$ $\widetilde{P}_{0,0,3}(\boldsymbol{w}) = -\frac{3}{2}w_3 + w_3^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

B.7 Polinómios de Chebyshev de primeira espécie, $\widetilde{T}_j(\boldsymbol{w})$, $r = 1, 2, 3$

Grau	$\widetilde{T}_j(w)$	$\widetilde{T}_{j_1,j_2}(w_1, w_2)$	$\widetilde{T}_{j_1,j_2,j_3}(w_1, w_2, w_3)$
0	$\widetilde{T}_0(w) = 1$	$\widetilde{T}_{0,0}(\boldsymbol{w}) = 1$	$\widetilde{T}_{0,0,0}(\boldsymbol{w}) = 1$
1	$\widetilde{T}_1(w) = w$	$\widetilde{T}_{1,0}(\boldsymbol{w}) = w_1$ $\widetilde{T}_{0,1}(\boldsymbol{w}) = w_2$	$\widetilde{T}_{1,0,0}(\boldsymbol{w}) = w_1$ $\widetilde{T}_{0,1,0}(\boldsymbol{w}) = w_2$ $\widetilde{T}_{0,0,1}(\boldsymbol{w}) = w_3$
2	$\widetilde{T}_2(w) = -1 + w^2$	$\widetilde{T}_{2,0}(\boldsymbol{w}) = -1 + w_1^2$ $\widetilde{T}_{1,1}(\boldsymbol{w}) = w_1 w_2$ $\widetilde{T}_{0,2}(\boldsymbol{w}) = -1 + w_2^2$	$\widetilde{T}_{2,0,0}(\boldsymbol{z}) = -1 + w_1^2$ $\widetilde{T}_{1,1,0}(\boldsymbol{w}) = w_1 w_2$ $\widetilde{T}_{0,2,0}(\boldsymbol{w}) = -1 + w_2^2$ $\widetilde{T}_{1,0,1}(\boldsymbol{w}) = w_1 w_3$ $\widetilde{T}_{0,1,1}(\boldsymbol{w}) = w_2 w_3$ $\widetilde{T}_{0,0,2}(\boldsymbol{w}) = -1 + w_3^2$
3	$\widetilde{T}_3(w) = -3w + w^3$	$\widetilde{T}_{3,0}(\boldsymbol{w}) = -3w_1 + w_1^3$ $\widetilde{T}_{2,1}(\boldsymbol{w}) = -w_2 + w_1^2 w_2$ $\widetilde{T}_{1,2}(\boldsymbol{w}) = -w_1 + w_1 w_2^2$ $\widetilde{T}_{0,3}(\boldsymbol{w}) = -3w_2 + w_2^3$	$\widetilde{T}_{3,0,0}(\boldsymbol{z}) = -3w_1 + w_1^3$ $\widetilde{T}_{2,1,0}(\boldsymbol{w}) = -w_2 + w_1^2 w_2$ $\widetilde{T}_{1,2,0}(\boldsymbol{w}) = -w_1 + w_1 w_2^2$ $\widetilde{T}_{0,3,0}(\boldsymbol{w}) = -3w_2 + w_2^3$ $\widetilde{T}_{2,0,1}(\boldsymbol{w}) = -w_3 + w_1^2 w_3$ $\widetilde{T}_{1,1,1}(\boldsymbol{w}) = w_1 w_2 w_3$ $\widetilde{T}_{0,2,1}(\boldsymbol{w}) = -w_3 + w_2^2 w_3$ $\widetilde{T}_{1,0,2}(\boldsymbol{w}) = -w_1 + w_1 w_3^2$ $\widetilde{T}_{0,1,2}(\boldsymbol{w}) = -w_2 + w_2 w_3^2$ $\widetilde{T}_{0,0,3}(\boldsymbol{w}) = -3w_3 + w_3^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

B.8 Polinómios de Chebyshev de segunda espécie, $\widetilde{U}_j(\boldsymbol{w})$, $r = 1, 2, 3$

Grau	$\widetilde{U}_j(w)$	$\widetilde{U}_{j_1,j_2}(w_1, w_2)$	$\widetilde{U}_{j_1,j_2,j_3}(w_1, w_2, w_3)$
0	$\widetilde{U}_0(w) = 1$	$\widetilde{U}_{0,0}(\boldsymbol{w}) = 1$	$\widetilde{U}_{0,0,0}(\boldsymbol{w}) = 1$
1	$\widetilde{U}_1(w) = w$	$\widetilde{U}_{1,0}(\boldsymbol{w}) = w_1$ $\widetilde{U}_{0,1}(\boldsymbol{w}) = w_2$	$\widetilde{U}_{1,0,0}(\boldsymbol{w}) = w_1$ $\widetilde{U}_{0,1,0}(\boldsymbol{w}) = w_2$ $\widetilde{U}_{0,0,1}(\boldsymbol{w}) = w_3$
2	$\widetilde{U}_2(w) = -\frac{1}{3} + w^2$	$\widetilde{U}_{2,0}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{3} + w_1^2$ $\widetilde{U}_{1,1}(\boldsymbol{w}) = w_1 w_2$ $\widetilde{U}_{0,2}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{3} + w_2^2$	$\widetilde{U}_{2,0,0}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{3} + w_1^2$ $\widetilde{U}_{1,1,0}(\boldsymbol{w}) = w_1 w_2$ $\widetilde{U}_{0,2,0}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{3} + w_2^2$ $\widetilde{U}_{1,0,1}(\boldsymbol{w}) = w_1 w_3$ $\widetilde{U}_{0,1,1}(\boldsymbol{w}) = w_2 w_3$ $\widetilde{U}_{0,0,2}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{3} + w_3^2$
3	$\widetilde{U}_3(w) = -w + w^3$	$\widetilde{U}_{3,0}(\boldsymbol{w}) = -w_1 + w_1^3$ $\widetilde{U}_{2,1}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{3}w_2 + w_1^2 w_2$ $\widetilde{U}_{1,2}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{3}w_1 + w_1 w_2^2$ $\widetilde{U}_{0,3}(\boldsymbol{w}) = -w_2 + w_2^3$	$\widetilde{U}_{3,0,0}(\boldsymbol{w}) = -w_1 + w_1^3$ $\widetilde{U}_{2,1,0}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{3}w_2 + w_1^2 w_2$ $\widetilde{U}_{1,2,0}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{3}w_1 + w_1 w_2^2$ $\widetilde{U}_{0,3,0}(\boldsymbol{w}) = -w_2 + w_2^3$ $\widetilde{U}_{2,0,1}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{3}w_3 + w_1^2 w_3$ $\widetilde{U}_{1,1,1}(\boldsymbol{w}) = w_1 w_2 w_3$ $\widetilde{U}_{0,2,1}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{3}w_3 + w_2^2 w_3$ $\widetilde{U}_{1,0,2}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{3}w_1 + w_1 w_3^2$ $\widetilde{U}_{0,1,2}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{3}w_2 + w_2 w_3^2$ $\widetilde{U}_{0,0,3}(\boldsymbol{w}) = -w_3 + w_3^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Lista de Símbolos

Referências

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical functions*, Dover, New York, 1965.

[2] L. Aceto and D. Trigiante, *The matrices of Pascal and other greats*, Amer. Math. Monthly **108(3)** (2001), 232–245.

[3] W. W. Adams and P. Loustaunau, *An Introduction to Gröbner Bases*, American Mathematical Society, USA, 1994.

[4] T. M. Apostol, *Calculus*, 2nd ed., vol. II, John Wiley & Sons, New York-London-Sydney-Toronto, 1969.

[5] P. Appell, *Sur une classe de polynômes*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **9 (2)** (1880), 119–144.

[6] T. Arponen, *A matrix approach to polynomials*, Linear Algebra Appl. **359** (2003), 181–196.

[7] ______, *Matrix approach to polynomials 2*, Linear Algebra Appl. **394** (2005), 257–276.

[8] S. Barnett, *Matrices: Methods and Applications*, Clarendon Press, Oxford, 1990.

[9] C. Belingeri, G. Dattoli, and P. E. Ricci, *The monomiality approach to multi-index polynomials in several variables*, Georgian Math. J. **14** (2007), no. 1, 53–64.

[10] S. Bock and K. Gürlebeck, *On a generalized Appell system and monogenic power series*, Math. Methods Appl. Sci. **33** (2010), 394–411.

[11] F. Brackx, R. Delanghe, and F. Sommen, *Clifford Analysis*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melbourne, 1982.

[12] ______, *Cauchy-Kowalewski theorems in Clifford analysis*, Proceedings of the 11th Winter School on Abstract Analysis (Zdeně Frolík, ed.), Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II, Suppl. 3, 1984, pp. 55–70.

[13] R. Brawer and M. Pirovino, *The Linear Algebra of the Pascal matrix*, Linear Algebra Appl. **174** (1992), 13–23.

[14] G. Bretti, C. Cesarano, and P. E. Ricci, *Laguerre-type exponentials and generalized Appell polynomials*, Comput. Math. Appl. **48** (2004), 833–839.

[15] G. Bretti, P. Natalini, and P. E. Ricci, *Generalizations of the Bernoulli and Appell polynomials*, Abstr. Appl. Anal. **7** (2004), 613–623.

[16] G. Bretti and P. E. Ricci, *Multidimensional extensions of the Bernoulli and Appell polynomials*, Taiwanese J. Math. **8(3)** (2004), 415–428.

[17] G. S. Call and D. J. Velleman, *Pascal's matrices*, Amer. Math. Monthly **100** (1993), 372–376.

[18] I. Cação, M. I. Falcão, and H. R. Malonek, *Laguerre derivative and monogenic Laguerre polynomials: an operational approach*, Math. Comput. Modelling **53** (2011), 1084–1094.

[19] I. Cação and H. Malonek, *Remarks on some properties of monogenic polynomials*, International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2006 (T. E. Simos, G. Psihoyios, and Ch. Tsitouras, eds.), 2006, pp. 596–599.

[20] ______, *On complete sets of hypercomplex Appell polynomials*, AIP Conf. Proc. **1048** (2008), 647–650.

[21] I. Cação, H. R. Malonek, and G. Tomaz, *Lecture Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica*, vol. IX, ch. Special polynomials and polynomial bases in hypercomplex function theory, pp. 129–151, 2010.

[22] B. C. Carlson, *Polynomials Satisfying a Binomial Theorem*, J. Math. Anal. Appl. **32** (1970), 543–558.

[23] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Éditeurs des Sciences et des Arts, 1985.

[24] S. Chapman and T. G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, 3 ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[25] Y. B. Cheikh and H. Chaggara, *Linearization coefficients for Sheffer polynomial sets via lowering operators*, Int. J. Math. & Math. Sci. **2006** (2006), 1–15.

[26] G.-S. Cheon, *A note on the Bernoulli and Euler polynomials*, Appl. Math. Lett. **16** (2003), 365–368.

[27] G.-S. Cheon and J.-S. Kim, *Stirling matrix via Pascal matrix*, Linear Algebra Appl. **329** (2001), 49–59.

[28] J. Cnops and H. Malonek, *An introduction to Clifford Analysis*, Textos de Matemática Série B, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, 1995.

[29] F. Colombo, I. Sabadini, and D. Struppa, *Noncommutative functional calculus. Theory and applications of slice hyperholomorphic functions*, 1st ed., Progress in Mathematics., vol. 289, Basel: Birkhäuser, 2011.

[30] L. Comtet, *Advanced Combinatorics*, D. Reidel Publishing Company, 1974.

[31] D. Cox, J. Little, and D. O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms: An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, Springer-Verlag, 1992.

[32] C. Cruz, M. I. Falcão, and H. R. Malonek, *On the structure of generalized Appell sequences of paravector valued homogeneous monogenic polynomials*, AIP Conf. Proc. **1479** (2012), 283–286.

[33] G. Dattoli, *Generalized polynomials, operational identities and applications in pure and applied mathematics*, J. Comput. Math. Appl. **118** (2000), 111–123.

[34] ———, *Hermite-Bessel and Laguerre-Bessel functions: A by-product of the monomiality principle*, Advanced Special Functions and Applications, Proceedings of the Melfi School on Advanced Topics in Mathematics and Physics; 9-12 May 1999 (Melfi) (D. Cocolicchio, G. Dattoli, and H. M. Srivastava, eds.), Aracne Editrice, Rome, 2000, pp. 147–164.

[35] ———, *Operational methods, fractional operators and special polynomials*, Appl. Math. Comput. **141** (2003), 151–159.

[36] G. Dattoli, C. Cesarano, and D. Sacchetti, *A note on truncated polynomials*, Appl. Math. Comput. **134** (2003), 595–605.

[37] G. Dattoli, B. Germano, and P. E. Ricci, *Comments on monomiality, ordinary polynomials and associated bi-orthogonal functions*, Appl. Math. Comput. **154** (2004), 219–227.

[38] G. Dattoli, P.E. Ricci, and L. Marinelli, *Generalized Truncated Exponential Polynomials and Applications*, Rend. Istit. Univ. Trieste **XXXIV** (2002), 9–18.

[39] G. Dattoli, H. M. Srivastava, and C. Cesarano, *The Laguerre and Legendre polynomials from an operational point of view*, Appl. Math. Comput. **124** (2001), 117–127.

[40] G. Dattoli, H. M. Srivastava, and D. Sacchetti, *The Hermite polynomials and the Bessel functions from a general point of view*, Int. J. Math. Sci. **2003 (57)** (2003), 3633–3642.

[41] G. Dattoli and A. Torre, *Operational Identities and Properties of Ordinary and Generalized Special Functions*, J. Math. Anal. Appl. **236** (1999), 399–414.

[42] G. Dattoli, A. Torre, and M. Carpanese, *Operational Rules and Arbitrary Order Hermite Generating Functions*, J. Math. Ann. Appl. **227** (1998), 98–111.

[43] G. Dattoli and K. Zhukovsky, *Appèl Polynomial Series Expansions*, International Mathematical Forum **5 (14)** (2010), 649–662.

[44] R. Delanghe, *On regular-analytic functions with values in a Clifford algebra*, Math. Ann. **185** (1970), 91–111.

[45] ______, *Clifford Analysis: History and Perspective*, Computat. Meth. and Funct. Theory **1** (2001), 107–153.

[46] A. M. Delgado, J. S. Geronimo, P. Iliev, and F. Marcellán, *Two variable orthogonal polynomials and structured matrices*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **28 (1)** (2006), 118–147.

[47] K. Douak, *The relation of the d-orthogonal polynomials to the Appell polynomials*, J. Comput Appl. Math. **70 (2)** (1996), 279–295.

[48] A. Edelman and G. Strang, *Pascal Matrices*, Amer. Math. Monthly **111 (3)** (2004), 361–385.

[49] A. Erdélyi, W. Magnus, F.Oberhettinger, and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Function*, vol. I, McGraw-Hill Book Company, New York-Toronto-London, 1953.

[50] ______, *Higher Transcendental Function*, vol. III, McGraw-Hill Book Company, New York-Toronto-London, 1955.

[51] ______, *Higher Transcendental Function*, vol. II, McGraw-Hill Book Company, New York-Toronto-London, 1955.

[52] M. I. Falcão, J. F. Cruz, and H. R. Malonek, *Remarks on the generation of monogenic functions*, Proceedings of the 17th International Conference on the Application of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering (Weimar, Germany) (K. Gürlebeck and C. Könke, eds.), Bauhaus-University, 2006.

[53] M. I. Falcão and H. R. Malonek, *Generalized exponentials through Appell sets in* $\mathbb{R}^{n+1}$ *and Bessel functions*, AIP Conf. Proc. **936** (2007), 738–741.

[54] R. Fueter, *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen* $\triangle u = 0$ *und* $\triangle\triangle u = 0$ *mit vier reellen Variablen*, Comment. Math. Helv. **7** (1935), 307–330.

[55] ______, *Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen*, Comment. Math. Helv. **8** (1935-36), 371–378.

[56] ______, *Über die Funktionentheorie in einer hyperkomplexen Algebra*, Elemente der Mathematik, III **5** (1948), 89–94.

[57] ______, *Funktionentheorie im Hyperkomplexen*, Vorlesung Wintersemester 1948/49, Ausgearbeitet und erweitert von Erwin Bareiss, Mathematisches Institut der Universität Zürich, 1949, p. 318.

[58] F. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, 1960.

[59] J. S. Geronimo and H. Woerdeman, *Two variable orthogonal polynomials on the bicircle and structured matrices*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **29 (3)** (2007), 796–825.

[60] J. S. Geronimo and H. J. Woerdeman, *Positive extensions, Fejér-Riesz factorization and autoregressive filters in two variables*, Ann. Math. **160** (2004), 839–906.

[61] G. H. Golub and C.F.Van Loan, *Matrix computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.

[62] R. L. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász, *Handbook of Combinatorics*, vol. 1, Elsevier Science B. V., Amsterdam, The Netherlands, 1995.

[63] A. Gsponer and J.-P. Hurni, *Quaternions in mathematical physics (1): Alphabetical bibliography*, Report ISRI-05-04, Independent Scientific Research Institute, Oxford-England, 2008, version 4.

[64] ———, *Quaternions in mathematical physics (2): Analytical bibliography*, Report ISRI-05-05, Independent Scientific Research Institute, Oxford-England, 2008, version 3.

[65] K. Gürlebeck, K. Habetha, and W. Sprössig, *Holomorphic Functions in the Plane and n-dimensional Space*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2008.

[66] K. Gürlebeck and H. Malonek, *A hypercomplex derivative of monogenic functions in* $\mathbb{R}^{m+1}$ *and its applications*, Complex Variables **39** (1999), 199–228.

[67] K. Gürlebeck and W. Sprössig, *Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems*, Akademie Verlag, Berlin, 1989.

[68] ———, *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers*, John Wiley & Sons, Chichester, 1997.

[69] M. X. He and P. E. Ricci, *Differential equation of Appell polynomials via the factorization method*, J. Comput. Appl. Math. **139** (2002), 231–237.

[70] D. Hestenes, *Space-Time Algebra*, Gordon & Breach, Ney York, 1966.

[71] ———, *A unified language for mathematics and physics*, Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics (Dordrecht/Boston) (J. S. R. Chisholm and A. K. Commons, eds.), Reidel, 1986, pp. 1–23.

[72] D. Hestenes and G. Sobczyk, *Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics*, Reidel, Dordrecht, 1984.

[73] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in matrix analysis*, Cambridge University Press, New York, 1991.

[74] K. Hrbacek and T. Jech, *Introduction to Set Theory*, 3rd ed., Marcel Dekker, Inc., New York. Basel, 1999.

[75] D. Jackson, *Formal properties of orthogonal polynomials in two variables*, Duke Math. J. **2** (1936), 423–434.

[76] R. P. Boas Jr. and R. C. Buck, *Polynomial Expansions of Analytic Functions*, Springer-Verlag, Berlin.Göttingen.Heidelberg, 1964.

[77] W. G. Kelley and A. C. Peterson, *Difference equations: An introduction with applications*, Harcourt / Academic Press, USA, 2001.

[78] S. Khan, M. W. Al-Saad, and R. Khan, *Laguerre-based Appell polynomials: Properties and applications*, Math. Comput. Modelling **52** (2010), 247–259.

[79] S. Khan, M. W. Al-Saad, and G. Yasmin, *Some properties of Hermite-based Sheffer polynomials*, Appl. Math. Comput. **217** (2010), 2169–2183.

[80] S. Khan, G. Yasmin, R. Khan, and N A. M.Hassan, *Hermite-based Appell polynomials: Properties and applications*, J. Math. Ann. Appl. **351** (2009), 756–764.

[81] V.V. Kisil and E. Ramírez de Arellano, *The Riesz-Clifford Functional Calculus for Several Non-Commuting Operators and Quantum Field Theory*, Math. Methods Appl. Sci. **19 (8)** (1996), 593–605.

[82] V. Lakshmikantham and D. Trigiante, *Theory of difference equations: Numerical methods and applications*, Marcel Dekker, Inc., New York, 2002.

[83] P. Lancaster and M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices*, Academic Press, London, 1985.

[84] N.N. Lebedev, *Special Functions & Their Applications*, Dover Publicatons, Inc., New York, 1972.

[85] H. Liu and W. Wang, *Some identities on the Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials via power sums and alternate power sums*, Discrete Math. **309** (2009), 3346–3363.

[86] R. Lávička, *Canonical bases for* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$*-modules of spherical monogenics in dimension 3*, Arch. Math. (Brno) **46 (5)** (2010), 339–349.

[87] H. Malonek, *A new hypercomplex structure of the Euclidean space* $\mathbb{R}^{m+1}$ *and the concept of hypercomplex differentiability*, Complex Variables **14** (1990), 25–33.

[88] ———, *Power series representation for monogenic functions in $\mathbb{R}^{m+1}$ based on a permutational product*, Complex Variables **15** (1990), 181–191.

[89] ———, *Selected topics in hypercomplex function theory*, Clifford Algebras and Potential Theory (Sirkka-Liisa Eriksson, ed.), University of Joensuu, Report Series 7, 2004, pp. 111–150.

[90] H. Malonek and G. Tomaz, *On generalized Euler polynomials in Clifford Analysis*, Int. J. Pure Appl. Math. **44(3)** (2008), 447–465.

[91] ———, *Bernoulli polynomials and matrices in the context of Clifford Analysis*, Discrete Appl. Math. **157** (2009), 838–847.

[92] H. R. Malonek and M. I. Falcão, *Special monogenic polynomials - properties and applications*, AIP Conf. Proc. **936** (2007), 764–767.

[93] ———, *On paravector valued homogeneous monogenic polynomials with binomial expansion*, Advances in Applied Clifford Algebras (2012).

[94] H. R. Malonek and G. Tomaz, *Laguerre polynomials in several hypercomplex variables and their matrix representation*, Computational Science and Its Applications - ICCSA 2011 (B. Murgante, O. Gervasi, A. Iglesias, D. Taniar, and B. Apduhan, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 6784, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011, pp. 261–270.

[95] C. Matos and J. C. Santos, *Curso de Análise Complexa*, Escolar Editora, Lisboa, 2000.

[96] B. Mazur, *Bernoulli Numbers and the Unity of Mathematics*, Hilldale Lecture in the Pysical Sciences, September 2004.

[97] P. Natalini and A. Bernardini, *A generalization of the Bernoulli polynomials*, J. Appl. Math. **3** (2003), 155–163.

[98] D. Pommeret, *Orthogonal and pseudo-orthogonal multi-dimensional Appell polynomials*, Appl. Math. Comput. **117** (2001), 258–299.

[99] E. D. Rainville, *Special Functions*, Chelsea Publishing Company, New York, 1971.

[100] S. Roman, *The Umbral Calculus*, Academic Press, Inc., 1984.

[101] P. Rózsa, *Theory of block matrices and its applications*, Lecture Notes of a special course held in 1973/74, Department of Applied Mathematics, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada, 1974.

[102] C. Scaravelli, *Su i polinomi di Appell*, Riv. Mat. Univ. Parma **(2) 6** (1965), 103–116.

[103] I. M. Sheffer, *Some applications of certain polynomial classes*, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), no. 12, Part I, 885–898.

[104] ______, *Note on Appell Polynomials*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), no. 10, 739–744.

[105] H. M. Srivastava and H. L. Manocha, *A Treatise on Generating Functions*, Halsted Press-Ellis Horwood Limited-John Wiley and Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto, 1984.

[106] J. F. Steffensen, *The poweroid, an extension of the mathematical notion of power*, Acta Math. **73** (1941), 333–366.

[107] A. Sudbery, *Quaternionic analysis*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **85** (1979), 199–225.

[108] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1939.

[109] G. Tomaz and H. R. Malonek, *Special block matrices and multivariate polynomials*, International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2010 (T. E. Simos, G. Psihoyios, and Ch. Tsitouras, eds.), vol. 1281, III, AIP Conference Proceedings, 2010, pp. 1515–1518.

[110] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4 ed., Cambridge University Press, England, 1990.

[111] S-L. Yang and H. You, *On a connection between the Pascal, Stirling and Vandermonde matrices*, Discrete Appl. Math. **155** (2007), 2025–2030.

[112] Z. Zhang, *The linear algebra of the generalized Pascal matrix*, Linear Algebra Appl. **250** (1997), 51–60.

[113] Z. Zhang and M. Liu, *An extension of the generalized Pascal matrix and its algebraic properties*, Linear Algebra Appl. **271** (1998), 169–177.

[114] Z. Zhang and J. Wang, *Bernoulli matrix and its algebraic properties*, Discrete Appl. Math. **154 (11)** (2006), 1622–1632.

[115] Z. Zhang and T. Wang, *Generalized Pascal matrix and recurrence sequences*, Linear Algebra Appl. **283** (1998), 289–299.