Universidade de Aveiro Departamento de Matemática,
2012

Pedro Miguel Teixeira Olhero Pessoa Nora

Dualidades na Lógica Modal

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática,
2012

Pedro Miguel Teixeira Olhero Pessoa Nora

Dualidades na lógica modal

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requesitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, realizada sob a orientação científica do Doutor Dirk Hofmann e do Doutor Manuel António Martins, Professores Auxiliares do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Esta dissertação é financiada por Fundos FEDER através do Programa Operacional Fatores de Competitividade - COMPETE e por Fundos Nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projeto FCOMP-01-0124-FEDER-010047 sob uma Bolsa de Investigação (BI/UI97/6123/2012).

Para todas as pessoas que através de ideias, conversas, discussões e sentimentos vivem dentro de mim.

o júri

presidente

Prof. Doutor Enrique Hernandez Manfredini
Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Gonçalo Gutierres da Conceição
Professor Auxiliar da Universidade de Coimbra

Prof. Doutor Dirk Hofmann
Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

Prof Doutor Manuel António Martins
Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Agradeço aos meus orientadores pela disponibilidade, dedicação, conhecimento e personalidade de ambos.

palavras-chave teoria das categorias, dualidade, adjunção, mónada, categoria de Kleisli, mónada de Kock-Zöberlein, produto tensorial.

resumo

O objectivo deste trabalho é desenvolver algumas ferramentas categoriais para provar teoremas de dualidades para categorias de álgebras relevantes na lógica (modal). O primeiro capítulo engloba os conceitos mais elementares de teoria das categorias. No segundo, analisamos adjunções, mónadas e algumas construções associadas, no sentido de determinar uma relação entre as meta-categorias das mónadas definidas numa categoria e das adjunções de Kleisli sobre a mesma categoria. Além disso, mostramos que a construção de Vietoris é uma componente de uma mónada de Kock-Zöberlein. No terceiro capítulo provamos teoremas de dualidades para álgebras Booleanas com operador e reticulados distributivos com operador, como consequência de dualidades mais gerais de categorias de espaços e relações. Para finalizar, mostramos que a operação nas categorias de álgebras e "hemimorfismos" que corresponde ao produto cartesiano nas categorias de espaços e relações é o produto tensorial.

keywords category theory, duality, adjunction, monad, Kleisli category, Kock-Zöberlein monad, tensor product.

abstract The aim of this work is to develop some categorial tools for proving dualities for categories of algebras relevant in (modal) logic. The first chapter covers the most basic concepts of category theory. In the second, we analyze adjunctions, monads and some associated constructions, in order to determine a relationship between the meta-categories of monads defined on a category and of the Kleisli adjunctions on the same category. Moreover, we prove that the Vietoris construction is part of a Kock-Zöberlein monad. In the third chapter we prove duality theorems for Boolean algebras with operator and distributive lattices with operator as a consequence of more general dualities of categories of spaces and relations. Finally, we show that the operation in the categories of algebras and " hemimorfismos" that corresponds to the cartesian product on the categories of spaces and relations is the tensor product.

Conteúdo

Introdução

A Lógica Modal emergiu enquanto disciplina matemática no início do século XX com base nos trabalhos de [Lew18]. Em síntese, à lógica proposicional adicionaram-se modalidades; símbolos que qualificam a verdade de cada afirmação. De forma mais concreta, a lógica modal estuda afirmações do estilo "é necessário que" ou "é possvél que". Este estudo permanaceu, sobretudo, a nível sintáctico, até que nos anos 60 a semântica relacional de Kripke ([Kri59, Kri63]) revolucionou o situacionismo com a adição de conceitos como frame, modelo de Kripke e validade, estabelecendo-se como a semântica por excelência para as lógicas modais. Finalmente, no início dos anos 70, observou-se que os frames de Kripke relacionam-se com as álgebras Booleanas com operador através do teorema de representação de Jónsson e Tarski. ([JT51, JT52]). De facto, o teorema de Jónsson - Tarski faz parte de um trabalho mais lato que afirma a equivalência dual entre duas categorias e generaliza a dualidade clássica de Stone para álgebras Booleanas. Com este trabalho como motivação, nas últimas décadas estabeleceram-se vários resultados que estendem as dualidades de Stone e Priestley para categorias de álgebras com operadores. Neste trabalho seguimos uma ideia de Halmos [Hal62, SV88] e consideramos categorias de relações num lado e categorias de "hemimorfismos" (isto é, os morfismos não preservam todas as operações) onde os operadores surgem como morfismos no outro. O objectivo é desenvolver algumas ferramentas categoriais para provar teoremas de dualidades entre categorias deste tipo. Para cada categoria pode-se determinar uma nova categoria (dual) invertendo o sentido dos morfismos. Do mesmo modo, para cada afirmação sobre morfismos numa categoria obtém-se uma nova afirmação (dual) invertendo o sentido de todos os morfismos. O princípio da dualidade afirma que se uma afirmação é válida em todas as categorias então a afirmação dual também é. Por outro lado, dada uma categoria específica A, a construção formal da categoria dual A^{op} por si só não fornece nova informação sobre A. Contudo, o mesmo não acontece se identificarmos a categoria dual com alguma categoria conhecida B. Neste caso, podemos traduzir qualquer problema em A num problema dual e equivalente em B. Por exemplo, a construção de co-produto é frequentemente difícil, mas a construção de produtos tipicamente é simples .

A exposição divide-se em três partes. O primeiro capítulo engloba os conceitos mais elementares de teoria das categorias. No segundo, analisamos adjunções, mónadas e algumas construções associadas, no sentido de, para uma dada categoria A, determinar uma relação entre as meta-categorias das mónadas e a meta-categoria das adjunções de Kleisli e provar que a construção de Vietoris é uma componente de uma mónada de Kock-Zöberlein.

No terceiro capítulo provamos alguns teoremas de dualidades para álgebras Booleanas com operador e reticulados distributivos com operador como consequências de dualidades mais gerais de categorias de espaços e relações. Para finalizar, mostramos que a operação nas categorias de álgebras e "hemimorfismos" que corresponde ao produto cartesiano nas categorias de espaços e relações é o produto tensorial.

Capítulo 1

Categoria, functor e transformação natural

O conceito de categoria foi introduzido por Eilenberg e MacLane em [EM45]. Neste capítulo apresentamos brevemente as definições e resultados mais relevantes para o trabalho realizado, para maior detalhe pode-se consultar [Mac71].

1.1 Categoria

Definição 1.1.1. Uma ***categoria*** A é um quádruplo $(\text{ob}(\mathsf{A}), \mathsf{A}, 1, \circ)$ constituído por:

- uma classe de objectos, $\text{ob}(\mathsf{A})$.
- para cada $A, B \in \text{ob}(\mathsf{A})$, um conjunto[1] $\mathsf{A}(A, B)$ de morfismos.
- para cada $A \in \text{ob}(\mathsf{A})$, um elemento $1_A \in \mathsf{A}(A, A)$ denominado identidade em A.
- para cada $A, B, C \in \text{ob}(\mathsf{A})$, uma função, denominada composição,

$$\begin{aligned} \circ : \mathsf{A}(B, C) \times \mathsf{A}(A, B) &\longrightarrow \mathsf{A}(A, C) \\ (g, f) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

  satisfazendo:

- **associatividade**

  Para todo $f \in \mathsf{A}(A, B)$, $g \in \mathsf{A}(B, C)$ e $h \in \mathsf{A}(C, D)$, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

- **lei da identidade**

  Para todo $f \in \mathsf{A}(A, B)$, $f \circ 1_A = f$ e $1_B \circ f = f$

[1] Na literatura habitualmente considera-se que $\mathsf{A}(A, B)$ é uma classe. A definição apresentada coincide com a usual definição de categoria localmente pequena.

Notação.

- Regra geral os objectos de uma categoria serão denotados por letras maiúsculas como A, B, C, A', B', C' ... e os morfismos por letras minúsculas, f, g, h, f',g', h' ...

- Serão utilizadas as usuais abreviações:

  - $A \in \mathsf{A}$ para $A \in \mathrm{ob}(\mathsf{A})$
  - $A \xrightarrow{f} B$ ou $f : A \longrightarrow B$ para $f \in \mathsf{A}(A, B)$. Neste caso, diz-se que f é um morfismo de A para B.
  - gf para $g \circ f$

Notas 1.1.2.

- A representação de morfismos como setas [2] permite representar graficamente a composição entre morfismos através de diagramas. Informalmente, um diagrama é a representação de algum digrafo e dizemos que um diagrama comuta se todos os caminhos entre dois pontos forem iguais. Neste paradigma visual, um diagrama é uma imagem que capta a "interação" entre morfismos. A afirmação o diagrama comuta transforma a imagem em equações. Por exemplo, os axiomas de associatividade e lei de identidade poderiam ser enunciados afirmando que os seguintes diagramas comutam:

  - **associatividade**

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g\circ f"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r, "h\circ g"'] & D \end{tikzcd}$$

  - **lei da identidade**

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_A"'] & B \\ A \arrow[ur, "f"'] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[u, "1_B"'] \end{tikzcd}$$

- Para $f : A \longrightarrow B$, diz-se que o domínio de f é A e o codomínio é B e escreve-se $\mathrm{dom}(f) = A$ e $\mathrm{cod}(f) = B$.

- Uma vez que $\circ$ é associativa não existe ambiguidade na expressão $f \circ g \circ h$.

[2] Por este motivo, muitas vezes os morfismos são nomeados setas.

- Por vezes é vantajoso esquecer o sentido dos morfismos. A ***classe de morfismo de*** A é a reunião disjunta de todos os conjuntos de morfismos de A.

Exemplos. Categorias **de** estruturas matemáticas.

1. Set: objectos são conjuntos e morfismos são funções.

2. Top: espaços topológicos e funções contínuas.

3. Top_0: espaços topológicos T_0 e funções contínuas.

4. Stone: espaços de Stone e funcões contínuas.

5. Spec: espaços espectrais e funções espectrais.

6. Bool: álgebras booleanas e homomorfismos de álgebras booleanas.

7. DLat: reticulados distributivos e homomorfismos de reticulados distributivos.

8. PoSet: conjuntos parcialmente ordenados (ou, simplesmente, conjuntos ordenados) e funções monótonas.

Notas 1.1.3.

1. Quando se pretende construir uma categoria, regra geral, a pergunta chave é: o que são os morfismos? Nas categorias anteriores os morfismos são funções que preservam a estrutura dos objectos.

2. As categorias de estruturas são uma motivação natural para a definição de categoria e explicam porque motivo a ordem dos morfismos na representação gráfica é inversa à da composição.

Exemplos. Categorias **como** estruturas matemáticas.

1. $\mathsf{0}$ é a categoria sem objectos.

2. $\mathsf{1}$ é a categoria com apenas um objecto e um morfismo, a identidade.

3. $\mathsf{0}$ e $\mathsf{1}$ são ***categorias discretas***. Uma categoria é discreta se todos os morfismos são identidades. Portanto, a classe de morfismos é uma duplicação da classe de objectos, o que significa que as categorias discretas representam classes.

4. $\mathsf{2}$ é constituída por dois objectos e três morfismos: as identidades e um morfismo entre os objectos.

$$\circlearrowright \cdot \longrightarrow \cdot \circlearrowleft$$

5. $\mathsf{3}$ é composta por 3 objectos e 6 morfismos.

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[loop left] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \cdot \arrow[loop right] \\
& \cdot \arrow[ur] \arrow[loop below] &
\end{tikzcd}$$

6. Uma relação de ***pré-ordem*** é uma relação reflexiva e transitiva e uma relação de ***ordem*** é uma relação de pré-ordem antissimétrica . A um conjunto pré-ordenado corresponde uma categoria cujos objectos são os elementos do conjunto e os morfismos são os pares da relação. Os domínios e contradomínios são determinados pelas coordenadas de cada par ordenado. Desta forma, uma vez que existe no máximo um morfismo por par de objectos, a transitividade define a composição como uma operação associativa. Por outro lado, a reflexividade assegura a existência das identidades.

   Os exemplos anteriores são exemplos de ***categorias pré-ordem***.

7. Um ***monóide*** pode ser considerado como uma categoria com apenas um objecto. Os morfismos são os elementos do monóide e a composição é definida como a multiplicação.

Notas 1.1.4.

- Os exemplos anteriores mostram, em particular, que um morfismo não se comporta e necessariamente similar a uma função. Outro exemplo importante para este trabalho é o da categoria Rel onde os objectos são conjuntos e os morfismos relações entre os conjuntos.

- As categorias discretas sugerem uma possível definição - menos intuitiva - de categoria sem objectos. De facto, esta ideia não só é viável como é preferível em alguns casos não relevantes para o trabalho desenvolvido.

- Os exemplos 6 e 7 reflectem dois ângulos de introspecção sobre a estrutura de uma categoria. Em 6, transmite-se uma ideia para construir uma categoria a partir de uma classe de objectos, desde que no máximo se tenha um morfismo entre cada par de objectos iguais. Por outro lado, 7 realça que o conjunto de morfismos entre cada par de objectos iguais é um monóide.

Notação. Para evitar um processo repetitivo, se uma categoria representa uma estrutura - como um monóide - não se distinguirá entre ambas.

Em geral, na teoria das categorias pretende-se estudar relações entre categorias que em grande parte são descritas a partir de objectos e morfismos com propriedades peculiares. Visto que é possível descrever diferentes universos de discurso matemático, não é de estranhar que alguns destes objectos e morfismos especiais generalizem conceitos conhecidos de diferentes teorias.

1.1.1 Morfismos especiais

Considere-se uma categoria A.

Definição 1.1.5. Seja $f : A \longrightarrow B \in \mathsf{A}$. O morfismo f é um ***isomorfismo*** se existir $g : B \longrightarrow A \in \mathsf{A}$ tal que $f \circ g = 1_B$ e $g \circ f = 1_A$.

Notação. Por motivo análogo ao que acontece num monóide, quando g existe é único. Desta forma, escreve-se f^{-1} em lugar de g.

Definição 1.1.6. Seja $f : A \longrightarrow B \in \mathsf{A}$. O morfismo f é um ***monomorfismo*** se $g = g'$ para todos os $g, g' \in \mathsf{A}$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g'"'] & A \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

comuta.

Definição 1.1.7. Seja $f : A \longrightarrow B \in \mathsf{A}$. O morfismo f é um ***epimorfismo*** se $g = g'$, para todos os $g, g' \in \mathsf{A}$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
B' & B \arrow[l, "g'"'] \\
B \arrow[u, "g"] & A \arrow[l, "f"] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

comuta.

Exemplos.

1. Em Set os monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos são, precisamente, as funções injectivas, sobrejectivas e bijectivas.

2. Um ***grupo*** é um monóide onde todos os elementos têm inverso. Logo, se A é um monóide, A é um grupo se e só se todos os morfismos são isomorfismos.

3. Se A é um conjunto ordenado então todos os morfismos são monomorfismos e epimorfismos. Contudo, apenas as identidades são isomorfismos.

Notas 1.1.8.

1. Ao contrário do que acontece em Set, o exemplo 3 mostra que um morfismo pode ser um monomorfismo e um epimorfismo e não um isomorfismo. Todavia, para qualquer categoria, todo o isomorfismo é um monomorfismo e um epimorfismo.

1.1.2 Objectos especiais

Na discussão que se segue, considere-se que A é uma categoria.

Definição 1.1.9. A e B são ***objectos isomorfos*** em A, $A \cong B$, se existe um isomorfismo de A para B.

Definição 1.1.10. A é um ***objecto inicial*** em A se para qualquer $B \in \mathsf{A}$ existe um único morfismo $A \xrightarrow{f} B$ em A.

Definição 1.1.11. B é um ***objecto terminal*** em A se para qualquer $A \in \mathsf{A}$ existe um único $A \xrightarrow{f} B \in \mathsf{A}$.

Definição 1.1.12. Sejam A, B objectos de A. Um objecto P equipado com morfismos $\pi_1 : P \to A$ e $\pi_2 : P \to B$ é um ***produto*** de A e B se para quaisquer morfismos $f_1 : C \to A$ e $f_2 : C \to B$ existe um único morfismo $f : C \to P$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dotted, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ A & P \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B \end{tikzcd}$$

comuta.

Definição 1.1.13. Sejam A, B objectos de A. Um objecto S equipado com morfismos $i_1 : A \to S$ e $i_2 : B \to S$ é um ***coproduto*** de A e B se para quaisquer morfismos $f_1 : A \to C$ e $f_2 : B \to C$ existe um único morfismo $f : S \to C$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "i_1"'] & S \arrow[u, dotted, "f"'] & B \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

comuta.

Notação. Objectos iniciais e terminais e produtos e coprodutos são únicos a menos de um isomorfismo. Assim, denotamos o objecto inicial por 0, o objecto terminal por 1, o produto de A e B por $A \times B$ e o coproduto A e B por $A \sqcup B$.

Exemplos.

1. Em Set o conjunto vazio é o único objecto inicial. Por outro lado, todos os conjuntos com um único elemento são objectos terminais.

2. Se A é um conjunto ordenado, o objecto inicial, caso exista, é o menor elemento do conjunto. Por outro lado, o objecto terminal é o maior elemento do conjunto.

3. Se A é um conjunto pré-ordenado então dois objectos são isomorfos se e só se $A \leq B$ e $B \leq A$. Portanto, num conjunto ordenado não existem objectos isomorfos distintos.

4. Em Rel o produto categorial é a reunião disjunta. Considere-se o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "R_1"'] \arrow[d, dotted, "R"] \arrow[dr, "R_2"] & \\ A & A \sqcup B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B \end{tikzcd}$$

   onde R_1, R_2 são duas relações quaisquer, $A \sqcup B = \{(a,0),(b,1) : a \in A, b \in B\}$ e π_1, π_2 são definidas por: $(x,y)\pi_1 a \iff x = a$ e $y = 0$ e $(x,y)\pi_2 b \iff x = b$ e $y = 1$. A relação R definida por

$$zR(a,b) \iff \begin{cases} zR_1 a \text{ e } b = 0 \\ zR_2 a \text{ e } b = 1 \end{cases}$$

   é a única que torna o diagrama comutativo. De facto, $z\pi_1 \circ Ra \iff \exists (x,y) : zR(x,y)$ e $(x,y)\pi_1 a$. Logo, por definição de π_1, $z\pi_1 \circ Ra \iff zR(a,0)$. Assim, por definição de R, $z\pi_1 \circ Ra \iff zR_1 a$.

5. Se A representa um conjunto ordenado, $A \times A'$ corresponde a um elemento B, com $B \leq A$ e $B \leq A'$ tal que para todo $B' \leq A$ e $B' \leq A'$, $B' \leq B$. Isto é, B é o ínfimo de $\{A, A'\}$. Similarmente, o coproduto é o supremo de $\{A, A'\}$.

Notas 1.1.14.

1. Em Set o produto é o produto cartesiano, mas, tal como indica o exemplo 4, o mesmo não acontece em Rel. Se $|A \times B| < |A \sqcup B|$ existem relações para as quais não existe uma relação que torna o diagrama 1.1.12 comutativo. Por outro lado, se $|A \times B| > |A \sqcup B|$ a relação não é única. Por exemplo, considere-se o diagrama

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "R_1"'] \arrow[dr, "R_2"] & \\ \{a\} & \{a\} \times \{b\} \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & \{b\} \end{tikzcd}$$

   onde R_1 é uma qualquer relação não vazia e R_2 é definida por $zR_2 y \Leftrightarrow$ não $(x,y)\pi_2 b$. Suponha-se que existe $C \xrightarrow{R} \{(a,b)\}$ que torna o diagrama comutativo. Visto que R_1 é não vazia e $\pi_1 \circ R = R_1$ então existe c tal que $cR(a,b)$ e $(a,b)\pi_1 a$. Agora, por definição de R_2, se $(a,b)\pi_2 b$ então c não $R_2 b$, logo o diagrama não comuta. Por outro lado, se não $(a,b)\pi_2 b$ então $cR_2 b$ e uma vez que $|\{a\} \times \{b\}| = 1$ o diagrama não comuta.

1.1.3 Categoria dual

Definição 1.1.15. Seja $\mathsf{A} = (\mathrm{ob}(\mathsf{A}), \mathsf{A}, 1, \circ)$ uma categoria. $\mathsf{A}^{\mathrm{op}} = (\mathrm{ob}(\mathsf{A}^{\mathrm{op}}), \mathsf{A}^{\mathrm{op}}, 1, \circ^{\mathrm{op}})$ é a **categoria dual** de A, definida por:

- $\mathrm{ob}(\mathsf{A}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{ob}(\mathsf{A})$.
- Para $A, B \in \mathsf{A}^{\mathrm{op}}$, $\quad \mathsf{A}^{\mathrm{op}}(A, B) = \mathsf{A}(B, A)$.
- Para $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A'' \in \mathsf{A}^{\mathrm{op}}$, $\quad f' \circ^{\mathrm{op}} f = f \circ f'$

Exemplos.

1. Se A é um monóide então A^{op} é um monóide com os mesmos elementos de A e cuja operação é definida à custa da operação de A trocando a ordem dos operandos.

2. Se A é um conjunto pré-ordenado, A^{op} é o mesmo conjunto pré-ordenado com a ordem dual.

Notas 1.1.16.

1. Visualmente a categoria A^{op} é definida a partir de A invertendo o sentido das setas (morfismos).

2. Convém realçar que os objectos e morfismos em A e A^{op} são exactamente os mesmos (com sentidos opostos). Assim, por exemplo, em $\mathsf{Set}^{\mathrm{op}}$ os objectos são conjuntos e os morfismos são funções entre conjuntos. No entanto, um **morfismo** de A para B em $\mathsf{Set}^{\mathrm{op}}$ é uma **função** de B para A.

3. $(\mathsf{A}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathsf{A}$.

Por construção de A^{op}, é possível traduzir uma qualquer afirmaçaco P interpretada em A, $P(\mathsf{A})$, numa afirmação logicamente equivalente em A^{op}, $P^{\mathrm{op}}(\mathsf{A}^{\mathrm{op}})$. De grosso modo, inverte-se o sentido de todos os morfismos em P e troca-se a ordem dos factores nas composições.

Definição 1.1.17. Dada uma afirmação $P(\mathsf{A})$ na linguagem de categorias, $P^{\mathrm{op}}(\mathsf{A}) := P(\mathsf{A}^{\mathrm{op}})$.

Notas 1.1.18.

- $(P^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}(\mathsf{A}) = P(\mathsf{A})$. Assim, diz-se que P e P^{op} são afirmações duais.

Exemplos. As afirmações seguintes são duais:

1. "A é um objecto inicial" e "A é um objecto terminal".

2. "A é um produto" e "A é um coproduto".

3. "f é monomorfismo" e "f é epimorfismo".

4. "f é isomorfismo" e "f é isomorfismo".

Informalmente o conceito de dualidade corresponde a reverter todos os morfismos. Neste processo, no caso da categoria dual, por vezes a afirmação "f é um morfismo de A para B" deixa de ter um significado matemático intuitivo, como por exemplo na categoria $\mathsf{Set}^{\mathrm{op}}$. Isto cria uma sensação de artificialidade, contudo o conceito de categoria dual não é inócuo como revela o teorema seguinte, consequência imediata da definição de P^{op}.

Teorema 1.1.19. *Se uma afirmação P é verdadeira em todas as categorias então a afirmação P^{op} é verdadeira em todas as categorias.*

1.2 Functor

Recordando a secção anterior poderíamos agora regressar aos exemplos de categorias **de** estruturas e tentar construir uma categoria cujos objectos são categorias. Invariavelmente, surgia a questão: o que são os morfismos? Isto é, que *funções* preservam a estrutura de categoria?

Definição 1.2.1. Sejam A e B categorias. Um functor $F : \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{B}$ é um par (F_{ob}, F) constituído por:

- uma função, $F_{\mathrm{ob}} : \mathrm{ob}(\mathsf{A}) \longrightarrow \mathrm{ob}(\mathsf{B})$
- para cada A,$A' \in \mathsf{A}$, uma função $F_{A,A'}$:$\mathsf{A}(A, A') \longrightarrow \mathsf{B}(F_{\mathrm{ob}}(A), F_{\mathrm{ob}}(A'))$

satisfazendo

- se $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$, $F_{A,A''}(f' \circ f) = F_{A',A''}(f') \circ F_{A,A'}(f)$
- se $A \in \mathsf{A}$, $F_{A,A}(1_A) = 1_{F_{\mathrm{ob}}(A)}$

Notação.

- F_{ob} e $F_{A,A'}$ serão representadas apenas por F. A função utilizada é distinguida pelo contexto.
- De uma forma geral é útil abdicar dos parênteses na tradicional notação de imagem de um objecto por uma função. No caso de functores isto traduz-se em FA e Ff em lugar de $F(A)$ e $F(f)$ respectivamente.

Definição 1.2.2. Se $F : \mathsf{A}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{B}$ é um functor então diz-se que F é um **functor contravariante** de A para B.

Exemplos.

1. Dada uma categoria A, o ***functor identidade***, 1_{A}, actua como a identidade nos objectos e morfismos.

2. ***Functores de esquecimento*** são functores cuja aplicação resulta em perda de informação sobre a estrutura dos objectos. Por exemplo, o functor $F : \mathsf{Bool} \longrightarrow \mathsf{DLat}$ que a cada álgebra booleana corresponde o reticulado distributivo subjacente esquece a operação complemento.

3. Se A e B são monóides então um functor de A para B forçosamente atribui ao único objecto em A o único objecto em B, pelo que é determinado pelo seu efeito nos morfismos. Portanto, F é uma função entre monóides tal que $F(1_{\mathsf{A}}) = 1_{\mathsf{B}}$ e $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$. Isto é, F é um homomorfismo de monóides.

4. Suponha-se que $F : \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{B}$ é um functor entre conjuntos pré-ordenados. Recorde-se que $X \xrightarrow{f} Y \in \mathsf{A} \iff X \leq_{\mathsf{A}} Y$ e a imagem de um morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ é um morfismo $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)$. Portanto, se $X \leq_{\mathsf{A}} Y$ então $F(X) \leq_{\mathsf{B}} F(Y)$. Ou seja, F é uma função monótona.

5. O ***functor das partes***, $P : \mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Set}$, atribui a cada conjunto A o conjunto das partes de A e a cada função $f : A \longrightarrow B$ a função que a $X \subseteq A$ corresponde $f(X) \subseteq B$.

6. O ***functor de Vietoris***, $V : \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Top}$, atribui a cada espaço topológico X o espaço topológico formado pelo conjunto $VX = \{A : A \subseteq X \text{ e } A \text{ é fechado}\}$ e a topologia gerada pelos conjuntos $B^{\diamond} = \{A \in VX : A \cap B \neq \varnothing\}$ com $B \subseteq X$ aberto. Para cada função contínua $f : X \longrightarrow Y$, $Vf : VX \longrightarrow VY$ é a função contínua que a cada fechado A em VX corresponde $\overline{f(A)}$.

7. O ***functor de Stone***, $S : \mathsf{Top}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Bool}$, atribui a cada espaço topológico a álgebra booleana dos conjuntos simultâneamente abertos e fechados e cada função contínua $f : X \longrightarrow Y$ o homomorfismo de álgebras booleanas que a cada B em Y corresponde $f^{-1}B$.

8. **Functores-Hom**.

   (a) Para toda a categoria A e $A \in \mathsf{A}$, o functor $\mathsf{A}(A, \_) : \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{Set}$ atribui a cada $B \in \mathsf{A}$ o conjunto de morfismos $\mathsf{A}(A, B)$ e a cada $B \xrightarrow{f} B'$ a função $\mathsf{A}(A, f) = f\_ : g \longmapsto f \circ g$.

   Observe-se que por definição de categoria, $\mathsf{A}(B, A) \in \mathsf{Set}$. Por outro lado, é claro que que $1_{B}\_ = 1_{\mathsf{A}(A,B)}$. Além disso, para $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A'' \in \mathsf{A}$,

   $$(f' \circ f)\_(g) = (f' \circ f) \circ g = f' \circ (f \circ g) = f'\_(f \circ g) = f'\_ \circ f\_(g)$$

(b) Como consequência do ponto anterior, para $A \in \mathsf{A}$, $\mathsf{A}(\_, A) = \mathsf{A}^{\mathrm{op}}(A, \_) : \mathsf{A}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Set}$ é um functor contravariante de A para Set que atribui a cada $B \in \mathsf{A}$ o conjunto de morfismos $\mathsf{A}(B, A)$ e a cada $B \xrightarrow{f} B'$ a função $\mathsf{A}(f, A) = \_f : g \longmapsto g \circ f$

Definição 1.2.3. Dado um functor $F = (F_{\mathrm{ob}}, F) : \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{B}$, $F^{\mathrm{op}} = (F_{\mathrm{ob}}, F^{\mathrm{op}})$ é o functor de A^{op} para B^{op} tal que para $A, B \in \mathrm{ob}(\mathsf{A}^{\mathrm{op}})$, $F^{\mathrm{op}}_{A,B} = F_{B,A}$.

Notação. Os functores $\mathsf{A}(A, \_)$ e $\mathsf{A}(\_, A)$ serão abreviados para A^A e A_A respectivamente. Não existe ambiguidade com a notação de F^{op} pois $\mathsf{A}^{\mathrm{op}}(\_, A) = \mathsf{A}(A, \_)$ e portanto será escrito como A^A e não como $\mathsf{A}^{\mathrm{op}}_A$.

As próximas definições resumem algumas das propriedades mais importantes que um functor pode assumir.

Definição 1.2.4. Um functor $F : \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{B}$ é fiel (pleno) se para qualquer $A, A' \in \mathsf{A}$ a função $F : \mathsf{A}(A, A') \longrightarrow \mathsf{B}(FA, FA')$ é injectiva (sobrejectiva).

Definição 1.2.5. Um functor $F : \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{B}$ é essencialmente sobrejectivo nos objectos se para qualquer $B \in \mathsf{B}$ existe $A \in \mathsf{A}$ tal que $FA \cong B$.

Notas 1.2.6. Um functor pleno e fiel não é obrigatoriamente um isomorfismo, é ainda necessário que seja bijectivo nos objectos.

Proposição 1.2.7. *Seja $F : \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{B}$ um functor fiel. O diagrama em A*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "g'"] \\ A'' \arrow[r, "g"'] & A''' \end{tikzcd}$$

comuta se e só se o diagrama em B

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Ff'"] \arrow[d, "Ff"'] & FA' \arrow[d, "Fg'"] \\ FA'' \arrow[r, "Fg"'] & FA''' \end{tikzcd}$$

comuta.

Demonstração. Consequência imediata da definiçao de functor fiel. ☐

Proposição 1.2.8. *Se $(F_{\mathrm{ob}}, F) : \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{B}$ e $(F'_{\mathrm{ob}}, F') : \mathsf{B} \longrightarrow \mathsf{C}$ são functores então $F' \circ F = (F'_{\mathrm{ob}} \circ F_{\mathrm{ob}}, F' \circ F)$, com $F' \circ F_{A,A'} = F'_{FA,FA'} \circ F_{A,A'}$ é um functor de A para C.*

Demonstração. Seja $A \xrightarrow{f} A'$ um morfismo de A. Claramente $F'F(\ A \xrightarrow{f} A'\ )$ é um morfismo em C de $F'FA$ para $F'FA'$. Além disso $F'F$ é functorial, pois $F'F1_A = F'_{1_{FA}} = 1_{F'FA}$ e

$$F'F(\ A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''\ ) = \ F'(FA \xrightarrow{Ff} FA' \xrightarrow{Ff'} FA'') = F'FA \xrightarrow{F'Ff} F'FA' \xrightarrow{F'Ff'} F'FA''\ .$$

□

Notação. As expressões $F \circ F$, $F \circ F \circ F$, ... serão abreviadas para F^2, F^3, ...

Neste momento podemos parcialmente responder à questão que motivou a secção: functores são *funções* que preservam a estrutura de categoria. Por outro lado, a proposição anterior define uma operação de composição que é associativa e satisfaz a lei da identidade, verificando-se que o functor 1_{A} é o elemento identidade. Porém, apesar de satisfeitas as condições algébricas, não é possível construir a categoria de categorias, uma vez que a colecção de todas as categorias não é uma classe. Assim, distinguimos as estruturas que não satisfazem os axiomas de categoria por uma questão de tamanho como ***meta-categorias***, no entanto, para as descrever, recorremos ao mesmo vocabulário desenvolvido para categorias.

1.3 Transformação natural

O conceito de transformação natural por si só impulsionou Eilenber e Maclane a formalizarem a teoria das categorias em 1945 [EM45]. Intuitivamente, captura a ideia de uma tranformação uniforme entre duas construções.

Definição 1.3.1. Sejam A e B categorias e $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] & \mathsf{B} \end{tikzcd}$ functores. Uma ***transformação natural*** $\alpha : F \longrightarrow G$ é uma família $\left(F(A) \xrightarrow{\alpha_A} G(A)\right)_{A \in \mathsf{A}}$ de morfismos em B tal que, para todo morfismo $A \xrightarrow{f} A' \in \mathsf{A}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & FA' \arrow[d, "\alpha_{A'}"] \\ GA \arrow[r, "Gf"'] & GA' \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

comuta.

Notação. Se $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] & \mathsf{B} \end{tikzcd}$ são functores e $\alpha : F \longrightarrow G$ é uma transformação natural, α será representada por $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left, "\mathsf{F}"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathsf{B} \end{tikzcd}$.

Exemplos.

1. Se $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ um functor, a ***transformação natural identidade*** em F, $1_F : F \to F$ é a família de identidades $\left(F(A) \xrightarrow{1_{FA}} F(A)\right)_{A \in \mathsf{A}}$ em B.

2. Se $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] & \mathsf{B} \end{tikzcd}$ são functores e A é uma categoria discreta então para qualquer morfismo α_A o diagrama 1.1 comuta trivialmente. Portanto, uma transformação natural resume-se a uma qualquer família $\left(F(A) \xrightarrow{\alpha_A} G(A)\right)_{A \in \mathsf{A}}$ de morfismos em B.

3. Num grupo diz-se que a e b são **elementos conjugados** se existe um elemento e tal que $a = e \circ b \circ e^{-1}$. Se $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left=50, "\mathsf{F}"] \arrow[r, bend right=50, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathsf{B} \end{tikzcd}$ é uma transformação natural entre grupos então, para todo $a \in \mathsf{A}$, os elementos $G(a)$ e $F(a)$ são conjugados, dado que $G(a) = \alpha \circ F(a) \circ \alpha^{-1}$.

4. Se $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left=50, "\mathsf{F}"] \arrow[r, bend right=50, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathsf{B} \end{tikzcd}$ é uma transformação natural entre conjuntos pré-ordenados então $F(A) \leq G(A)$ para todo $A \in \mathsf{A}$. Isto é, $F \leq G$.

5. Considere-se $P : \mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Set}$ o functor das partes.

   (a) A família de funções $\left(X \xrightarrow{e_X} PX\right)_{X \in \mathsf{Set}}$ com $e_X(x) = \{x\}$, para todo $x \in X$, é uma transformação natural de 1_{Set} para P. Observe-se que o diagrama

   $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_X"'] & Y \arrow[d, "e_Y"] \\ PX \arrow[r, "Pf"'] & PY \end{tikzcd}$$

   comuta, pois $Pf \circ e_X(x) = Pf(\{x\}) = \{f(x)\} = e_Y(f(x)) = e_Y \circ f(x)$.

   (b) A família de funções $\left(P^2X \xrightarrow{m_X} PX\right)_{X \in \mathsf{Set}}$ com $m_X(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$, para todo $\mathcal{A} \in P^2X$, é uma transformação natural de P^2 para P. De facto, considere-se o diagrama

   $$\begin{tikzcd} P^2X \arrow[r, "P^2f"] \arrow[d, "m_X"'] & P^2Y \arrow[d, "m_Y"] \\ PX \arrow[r, "Pf"'] & PY. \end{tikzcd}$$

Assim, $Pf \circ m_X(\mathcal{A}) = Pf(\bigcup \mathcal{A}) = \{f(a) : a \in \bigcup \mathcal{A}\}$. Por outro lado, $m_Y \circ P^2 f(\mathcal{A}) = \bigcup\{PfA : A \in \mathcal{A}\} = \{f(a) : a \in A \in \mathcal{A}\}$. Mas, $a \in \bigcup \mathcal{A} \iff a \in A \in \mathcal{A}$. Portanto, o diagrama comuta.

6. (a) A família de funções $\left(X \xrightarrow{ev_X} S_A S_A^{\mathrm{op}} X\right)_{X \in \mathsf{Set}}$ com $ev_X(x) = ev_x : g \longmapsto g(x)$ é uma transformação natural de 1_{Set} para $S_A {S_A}^{\mathrm{op}}$ Com efeito, considere-se o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "ev_X"'] & Y \arrow[d, "ev_Y"] \\ \mathsf{S}_A\mathsf{S}_A^{\mathrm{op}} X \arrow[r, "\mathsf{S}_A\mathsf{S}_A^{\mathrm{op}} f"'] & \mathsf{S}_A\mathsf{S}_A^{\mathrm{op}} Y. \end{tikzcd}$$

Assim, $\mathsf{S}_A\mathsf{S}_A^{\mathrm{op}} f \circ ev_X(x) = \mathsf{S}_A{\mathsf{S}_A}^{\mathrm{op}} f(ev_x) = ev_x \circ \mathsf{S}_A f$. Então, para todo $g \in \mathsf{S}_A X'$, $ev_x \circ \mathsf{S}_A f(g) = ev_x(\mathsf{S}_A f(g)) = g \circ f(x) = g(f(x)) = ev_{fx}(g)$. Portanto, o diagrama comuta.

(b) Como consequência do ponto anterior, a família $\left(X \xleftarrow{ev_X} S_A S_A^{\mathrm{op}} X\right)_{X \in \mathsf{Set}^{\mathrm{op}}}$ é uma transformação natural de ${1_{\mathsf{Set}}}^{\mathrm{op}}$ para $\mathsf{S}_A^{\mathrm{op}}\mathsf{S}_A$.

Proposição 1.3.2. *Sejam* $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\Downarrow\beta"] & \mathsf{B} \end{tikzcd}$ *transformações naturais.* $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\circ\alpha"] & \mathsf{B} \end{tikzcd}$ *é uma transformação natural definida por* $\beta \circ \alpha_A = \beta_A \circ \alpha_A$.

Demonstração. Seja $A \xrightarrow{f} A'$. Uma vez que α e β são transformações naturais os quadrados interiores do diagrama seguinte comutam.

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & FA' \arrow[d, "\alpha_{A'}"] \\ GA \arrow[r, "Gf"'] \arrow[d, "\beta_A"'] & GA' \arrow[d, "\beta_{A'}"] \\ HA \arrow[r, "Hf"'] & HA' \end{tikzcd}$$

Logo, o diagrama exterior comuta. □

Proposição 1.3.3. *Sejam* $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathsf{B} \arrow[r, bend left=50, "F'"] \arrow[r, bend right=50, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha'"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$ *transformações naturais.* $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left=50, "F'\circ F"] \arrow[r, bend right=50, "G'\circ G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha' * \alpha"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$ *é uma transformação natural definida por* $\alpha' * \alpha_A = G'\alpha_A \circ \alpha'_{FA}$.

Demonstração. Seja $A \xrightarrow{f} A'$. Os quadrados interiores comutam, o primeiro porque α' é transformação natural e o segundo porque α é transformação natural e G' é functor.

$$\begin{tikzcd}
F'FA \arrow[r, "F'Ff"] \arrow[d, "\alpha'_{FA}"'] & F'FA' \arrow[d, "\alpha'_{FA'}"] \\
G'FA \arrow[r, "G'Ff"'] \arrow[d, "G'\alpha_A"'] & G'FA' \arrow[d, "G'\alpha_{A'}"] \\
G'GA \arrow[r, "G'Gf"'] & G'GA'
\end{tikzcd}$$

Logo, o diagrama exterior comuta. □

Notas 1.3.4.

1. Como casos particulares da proposição acima , quando α e α' são identidades obtém-se que:

   (a) $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, "F"] & \mathsf{A'} \arrow[r, bend left, "F'"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha'"] & \mathsf{A''} \end{tikzcd}$ dá origem a $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left, "F'\circ F"] \arrow[r, bend right, "G'\circ F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha'_F"] & \mathsf{A''} \end{tikzcd}$

   (b) $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathsf{A'} \arrow[r, "G'"] & \mathsf{A''} \end{tikzcd}$ dá origem a $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left, "G'\circ F"] \arrow[r, bend right, "G'\circ G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow G'\alpha"] & \mathsf{A''} \end{tikzcd}$

   Desta forma, verifica-se que qualquer composição horizontal se decompõe na composição vertical dos casos b) e a), o que produz a seguinte elegante regra

$$\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathsf{B} \arrow[r, bend left, "F'"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha'"] & \mathsf{C} \end{tikzcd} = \begin{array}{c} \begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, "F"] & \mathsf{B} \arrow[r, bend left, "F'"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha'"] & \mathsf{C} \end{tikzcd} \\ \\ \begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathsf{B} \arrow[r, "G'"] & \mathsf{C} \end{tikzcd} \end{array}.$$

Proposição 1.3.5. *Sejam* $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\Downarrow\beta"] & \mathsf{B'} \arrow[r, bend left=50, "F'"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=50, "H'"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\Downarrow\alpha'"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\Downarrow\beta'"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$ *transformações naturais.*

$$(\beta' * \beta) \circ (\alpha' * \alpha) = (\beta' \circ \alpha') * (\beta \circ \alpha)$$

Demonstração. No diagrama

$$\begin{tikzcd} F'FA \arrow[r, "\alpha'_{FA}"] & G'FA \arrow[r, "G'\alpha_A"] \arrow[d, "\beta'_{FA}"'] & G'GA \arrow[d, "\beta'_{GA}"] & \\ & H'FA \arrow[r, "H'\alpha_A"'] & H'GA \arrow[r, "H'\beta_A"'] & H'HA \end{tikzcd}$$

o caminho superior representa o lado esquerdo da igualdade e o caminho inferior o lado direito. □

De forma análoga à discussão da secção anterior envolvendo functores e categorias, podemos utilizar a Proposição 1.3.2 e a transformação natural identidade para, dadas duas categorias A e B, construir a ***meta-categoria*** $[A, B]$ ***dos functores de*** A ***para*** B.

Definição 1.3.6. Seja $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left, "\mathsf{F}"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathsf{B} \end{tikzcd}$ uma transformação natural. A transformação natural α é um isomorfismo natural de F para G se é um isomorfismo em $[\mathsf{A}, \mathsf{B}]$.

A composição de transformações naturais é definida componente a componente, assim obtemos uma caracterização de isomorfismo natural de grande utilidade prática.

Proposição 1.3.7. *Seja* $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left, "\mathsf{F}"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathsf{B} \end{tikzcd}$ *uma transformação natural. a transformação* α *é um isomorfismo natural se e só se* α_A *é um isomorfismo para todo* $A \in \mathsf{A}$.

Para concluir o capítulo introduzimos o conceito de equivalência de categorias. Em especial, o terceiro capítulo será fértil em exemplos de categorias equivalentes.

Definição 1.3.8. Uma ***equivalência de categorias*** é um quadruplo $(F, G, \eta, \varepsilon)$, onde $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$, $G : \mathsf{B} \to \mathsf{A}$ são functores e $\eta : 1_{\mathsf{A}} \to GF$, $\varepsilon : FG \to 1_{\mathsf{B}}$ são isomorfismos naturais.

Definição 1.3.9. Diz-se que a ***categoria*** A ***é equivalente à categoria*** B e escreve-se $\mathsf{A} \simeq \mathsf{B}$ se existe uma equivalência com $F : A \to B$. Neste caso, diz-se ainda que F ***é uma equivalência***.

Proposição 1.3.10. $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ *é uma equivalência se e só se é pleno, fiel e essencialmente sobrejectivo nos objectos.*

Demonstração.
($\Rightarrow$)

Seja $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ componente de uma equivalência $(F, G, \eta, \varepsilon)$ e $f : A \to A'$ um morfismo de A. O diagrama

$$\begin{tikzcd} GFA \arrow[r, "GFf"] \arrow[d, bend right, "\eta_A^{-1}"'] & GFA' \arrow[d, "\eta_{A'}^{-1}"] \\ A \arrow[u, bend right, "\eta_A"'] \arrow[r, "f"'] & A' \end{tikzcd}$$

comuta, logo $f = \eta_{A'}^{-1} \circ GFf \circ \eta_A$. Assim, se $g, g' : A \to A' \in \mathsf{A}$ e $GFg = GFg'$ então $g = g'$. Portanto, F é fiel e análogamente verifica-se que G é fiel, o que implica que F é pleno. Por outro lado, para todo $B \in \mathsf{B}$, $\varepsilon_B : FGB \to B$ é um isomorfismo. Consequentemente, F é essencialmente sobrejectivo nos objectos.

$(\Leftarrow)$

Seja $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ um functor fiel, pleno e essencialmente sobrejectivo nos objectos. Para todo $B \in \mathsf{B}$ escolhe-se um A tal que $FA \cong B$, e define-se $GB = A$. Assim, $FGB = FA \cong B$ e $GFA \cong GB = A$. Desta forma, sejam $\varepsilon_B : FGB \to B$ e $\eta_A : A \to GFA$ isomorfismos, com $\varepsilon_{FA} = F\eta_A^{-1}$. F é pleno e fiel logo $F_{A,A'}$ é invertível. Assim, para $g : B \to B'$, defina-se $Gg = F^{-1}(\varepsilon_{B'}^{-1} \circ g \circ \varepsilon_B)$. Ou seja, $Gg : GB \to GB'$ é o único morfismo que torna o diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] & B' \arrow[d, "\varepsilon_{B'}^{-1}"] \\ FGB \arrow[u, "\varepsilon_B"] \arrow[r, "FGg"'] & FGB' \end{tikzcd}$$

comutativo. Se $g = 1_B$ então $\varepsilon_B^{-1} \circ g \circ \varepsilon_B = 1_{FGB}$. Logo, $G(1_B) = 1_{GB}$. Além disso, para $g' : B' \to B''$ o diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, bend left, "\varepsilon_{B'}^{-1}"] & B'' \arrow[d, "\varepsilon_{B''}^{-1}"] \\ FGB \arrow[u, "\varepsilon_B"] \arrow[r, "FGg"'] & FGB' \arrow[u, bend left, "\varepsilon_{B'}"] \arrow[r, "FGg'"'] & FGB'' \end{tikzcd}$$

comuta, logo $G(g' \circ g) = Gg' \circ Gg$. Portanto, $G : \mathsf{B} \to \mathsf{A}$ é um functor.

Para provar que $(F, G, \eta, \varepsilon)$ é uma equivalência, resta provar que ε e η são transformações naturais. É claro, por definição, que ε é transformação natural. Por outro lado seja $f : A \to A'$ um morfismo de A. Visto que o diagrama

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, bend left, "F\eta_A"] & FA' \arrow[d, bend left, "F\eta_{A'}"] \arrow[d, bend right, "\varepsilon_{FA'}^{-1}"'] \\ FGFA \arrow[u, bend left, "\varepsilon_{FA}"] \arrow[u, bend right, "F\eta_A^{-1}"'] \arrow[r, "FGFf"'] & FGFA' \end{tikzcd}$$

comuta e F é fiel, resulta que $GFf \circ \eta_A = \eta_{A'} \circ f$.

$\square$

Proposição 1.3.11. *A equivalência de categorias é uma relação de equivalência.*

Sejam A, B e C categorias. Então, $\mathsf{A} \simeq \mathsf{A}$ dado que o functor identidade é pleno, fiel e essencialmente sobrejectivo nos objectos. Além disso, se $\mathsf{A} \simeq \mathsf{B}$ então existe uma equivalência $(F, G, \eta, \varepsilon)$ com $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$. Logo, $(G, F, \varepsilon^{-1}, \eta^{-1})$ é uma equivalência e $G : \mathsf{B} \to \mathsf{A}$. Por fim, se $\mathsf{A} \simeq \mathsf{B}$, $\mathsf{B} \simeq \mathsf{C}$ e $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$, $F' : \mathsf{B} \to \mathsf{C}$ são equivalências $F'F : \mathsf{A} \to \mathsf{C}$ é uma equivalência. A composição de funções injectivas (sobrejectivas) é uma função injectiva (sobrejectiva), logo $F'F$ é pleno e fiel. Por outro lado, dado que F e F' são essencialmente sobrejectivos nos objectos, para todo $C \in \mathsf{C}$, $C \cong F'(FA) = F'FA$.

Capítulo 2

Adjunção, Mónada e Categoria de Kleisli

Este capítulo engloba os conceitos de teoria das categorias não elementares fundamentais para o trabalho desenvolvido. O objectivo consiste em, para uma categoria A, estabelecer uma relação entre a meta-categoria das adjunções de Kleisli e a meta-categoria das mónadas. Além disso, introduzimos a propriedade de Köck-Zoberlein que simplifica o estudo de uma mónada.

2.1 Adjunção

O conceito de adjunção é provavelmente o mais aplicável a diferentes áreas da matemática. MacLane sintetiza a surpreendente diversidade de utilização com o lema "Adjoint functors arise everywhere" [Mac71]. Para compreender a construção apresentamos três abordagens equivalentes mas com carácter próprio no que respeita à intuição que fornecem.

Definição 2.1.1. Uma ***adjunção*** é um quadruplo $(F, G, \eta, \varepsilon)$ constituído por:

- um par de functores $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathsf{B} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$
- uma transformação natural $\eta : 1_{\mathsf{A}} \longrightarrow GF$
- uma transformação natural $\varepsilon : FG \longrightarrow 1_{\mathsf{B}}$

tal que os seguintes diagramas

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "1_F"'] & FGF \arrow[d, "\varepsilon_F"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta_G"] \arrow[dr, "1_G"'] & GFG \arrow[d, "G\varepsilon"] \\ & G \end{tikzcd}$$

comutam, nestas condições dizemos que $(F, G, \eta, \varepsilon)$ satisfaz as identidades triangulares.

Definição 2.1.2. Se $(F, G, \eta, \varepsilon)$ é uma adjunção então diz-se que F é ***adjunto à esquerda*** de G, G é ***adjunto à direita*** de F e escreve-se $F \dashv G$.

Notação. Para realçar a relação entre os functores , por vezes, uma adjunção será denotada por $(F \dashv G, \eta, \varepsilon) : \mathsf{A} \rightleftarrows \mathsf{B}$, ou de forma mais compacta por $F \dashv G : \mathsf{A} \rightleftarrows \mathsf{B}$.

Exemplos.

1. Se $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathsf{B} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ são functores entre conjuntos ordenados então $F \dashv G$ se e só se para quaisquer $A \in \mathsf{A}$ e $B \in B$, $A \leq_{\mathsf{A}} GF(A)$ e $FG(B) \leq_{\mathsf{B}} B$. Neste caso, $F(A) = FGF(A)$ e $G(B) = GFG(B)$.

2. Se A é um objecto de Set então $\mathsf{S}_A^{\mathrm{op}} \dashv \mathsf{S}_A$. De acordo com os exemplos de transformações naturais do capítulo anterior, $ev : 1_{\mathsf{Set}} \longrightarrow \mathsf{S}_A \circ \mathsf{S}_A{}^{\mathrm{op}}$ é uma transformação natural e define uma transformação natural de $\mathsf{S}_A{}^{\mathrm{op}} \circ \mathsf{S}_A$ para $1_{\mathsf{Set}^{\mathrm{op}}}$. Desta forma, para todo $B \in \mathsf{Set}$, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{S}(B, A) \arrow[r, "ev"] \arrow[dr, "1"'] & \mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{S}(B, A), A), A) \arrow[d, "_ev"] \\
& \mathsf{S}(B, A)
\end{tikzcd}$$

pois $\_ev \circ ev(g) = ev_g \circ ev$ e, para todo $b \in B$, $ev_g \circ ev\_(b) = ev_g(ev_b) = g(b)$.

As próximas proposições mostram que os adjuntos à direita são *únicos* e que é possível *compor adjunções.*

Proposição 2.1.3. *Se $F \dashv G$ e $F \dashv G'$ então $G \cong G'$.*

Demonstração. Sejam $(F \dashv G, \eta, \varepsilon) : \mathsf{A} \rightleftarrows \mathsf{B}$, $(F \dashv G', \eta', \varepsilon') : \mathsf{A} \rightleftarrows \mathsf{B}$ adjunções e $\alpha : G \to G'$, $\alpha^{-1} : G' \to G$ transformações naturais definidas por $\alpha_B = G'\varepsilon_B \circ \eta'_{GB}$ e $\alpha_B^{-1} = G\varepsilon'_B \circ \eta_{G'B}$. Deste modo, visto que as transformações naturais envolvidas satisfazem as identidades triangulares de uma adjunção, verifica-se que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& GFGB \arrow[dr, "GF\eta'_{GB}"] \arrow[ddrr, bend left, "1_{GFGB}"] & & \\
GB \arrow[ur, "\eta_{GB}"] \arrow[r, "\eta'_{GB}"] \arrow[dr, "\alpha_B"'] \arrow[ddrr, bend right, "1_{GB}"'] & G'FGB \arrow[r, "\eta_{G'FGB}"] \arrow[d, "G'\varepsilon_B"] & GFG'FGB \arrow[d, "GFG'\varepsilon_B"] \arrow[dr, "G\varepsilon'_{FGB}"] & \\
& G'B \arrow[r, "\eta_{G'B}"'] \arrow[dr, "\alpha_B^{-1}"'] & GFG'B \arrow[d, "G\varepsilon'_B"] & GFGB \arrow[dl, "G\varepsilon_B"] \\
& & GB &
\end{tikzcd}$$

comuta. Portanto, $\alpha_B^{-1} \circ \alpha_B = 1_{GB}$. Analogamente, prova-se que $\alpha \circ \alpha_B^{-1} = 1_{G'B}$. $\square$

Proposição 2.1.4. *Se* $F \dashv G : \mathsf{A} \rightleftarrows \mathsf{B}$ *e* $F' \dashv G' : \mathsf{B} \rightleftarrows \mathsf{C}$ *então* $F'F \dashv GG' : \mathsf{A} \rightleftarrows \mathsf{C}$

Demonstração. Sejam $(F \dashv G, \eta, \varepsilon) : \mathsf{A} \rightleftarrows \mathsf{B}$ e $(F' \dashv G', \eta', \varepsilon') : \mathsf{B} \rightleftarrows \mathsf{C}$ adjunções e $\alpha : 1_{\mathsf{A}} \to GG'F'F$, $\beta : F'FGG'' \to 1_{\mathsf{C}}$ as transformações naturais definidas por $\alpha_A = G\eta'_{FA} \circ \eta_A$ e $\beta_C = \varepsilon_C \circ F'\varepsilon_{G'C}$. Assim, α e β satisfazem as identidades triangulares pois os diagramas

$$\begin{tikzcd}
F'FA \arrow[r, "F'F\eta_A"] \arrow[dr, "1_{F'FA}"'] & F'FGFA \arrow[r, "F'FG\eta'_{FA}"] \arrow[d, "F'\varepsilon_{FA}"] & F'FGG'F'FA \arrow[d, "F'\varepsilon_{G'F'FA}"] \\
& F'FA \arrow[r, "F'\eta'_{FA}"'] \arrow[dr, "1_{F'FA}"'] & F'G'F'FA \arrow[d, "\varepsilon'_{F'FA}"] \\
& & F'FA
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
GG'C \arrow[r, "\eta_{GG'C}"] \arrow[dr, "1_{GG'C}"'] & GFGG'C \arrow[r, "G\eta'_{FGG'C}"] \arrow[d, "G\varepsilon_{G'C}"] & GG'F'FGG'C \arrow[d, "GG'F'\varepsilon_{G'C}"] \\
& GG'C \arrow[r, "G\eta'_{G'C}"'] \arrow[dr, "1_{GG'C}"'] & GG'F'G'C \arrow[d, "GG'\varepsilon_C"] \\
& & GG'C
\end{tikzcd}$$

comutam uma vez que as transformações naturais envolvidadas satisfazem as identidades triangulares de uma adjunção.

$\square$

Teorema 2.1.5. *Sejam* $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathsf{B} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ *functores. Então,* $F \dashv G$ *se e só se*

$$\mathsf{B}((F(A), B)) \cong \mathsf{B}(A, G(B))$$

naturalmente em $A \in A$ *e* $B \in \mathsf{B}$*. Isto é, os functores* $\mathsf{A}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{B} \underset{\mathsf{A}(\_,G\_)}{\overset{\mathsf{B}(F\_,\_)}{\rightrightarrows}} \mathsf{Set}$ *definidos por*

$$\mathsf{B}(F\_,\_)(\, A \xrightarrow{f} A' \,,\ B \xrightarrow{g} B' \,) = \ \mathsf{B}(FA', B) \xrightarrow{g\circ\_\circ Ff} \mathsf{B}(FA, B')$$

$$\mathsf{A}(\_,G\_)(\, A \xrightarrow{f} A' \,,\ B \xrightarrow{g} B' \,) = \ \mathsf{A}(A', GB) \xrightarrow{Gg\circ\_\circ f} \mathsf{A}(A, GB')$$

são isomorfos.

Demonstração.

($\Rightarrow$)

Sejam $(F \dashv G, \eta, \varepsilon) : \mathsf{A} \rightleftarrows \mathsf{B}$ uma adjunção, $h : FA' \to B$ um morfismo de B e $h' : A' \to GB$ um morfismo de A . Defina-se $\alpha_{(A,B)} : \mathsf{B}(FA, B) \to \mathsf{A}(A, GB) = G\_ \circ \eta_A$ e $\beta_{(A,B)} : \mathsf{A}(A, GB) \to \mathsf{B}(FA, B) = \varepsilon_B \circ F\_$. O diagrama

$$\begin{tikzcd}
FA' \arrow[r, "F\eta_{A'}"] \arrow[dr, "1_{FA'}"'] & FGFA' \arrow[r, "FGh"] \arrow[d, "\varepsilon_{FA'}"] & FGB \arrow[d, "\varepsilon_B"] \\
& FA' \arrow[r, "h"'] & B
\end{tikzcd}$$

comuta, uma vez que ε é transformação natural e η e ε satisfazem as identidades triangulares de uma adjunção. Desta forma, $\beta \circ \alpha(h) = \varepsilon_B \circ FGh \circ F\eta_{A'} = h$. De forma semelhante verifica-se ainda que $\alpha \circ \beta(h') = h'$. Por outro lado, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{B}(FA', B) \arrow[r, "g\circ_\circ Ff"] \arrow[d, "G_\circ\eta_{A'}"'] & \mathsf{B}(FA, B) \arrow[d, "G_\circ\eta_A"] \\
\mathsf{A}(A', GB) \arrow[r, "Gg\circ_\circ f"'] & \mathsf{A}(A, GB)
\end{tikzcd}$$

comuta pois $(Gg \circ \_ \circ f) \circ (G\_ \circ \eta_{A'})(h) = Gg \circ Gh \circ \eta_{A'} \circ f$, $(G\_ \circ \eta_A) \circ (g \circ \_ \circ Ff)(h) = Gg \circ Gh \circ GFf \circ \eta_A$ e η é transformação natural.

($\Leftarrow$)

Seja $\alpha : \mathsf{B}(F\_, \_) \longrightarrow \mathsf{A}(\_, G\_)$ um isomorfismo. Para $A \in \mathsf{A}$, $B \in \mathsf{B}$ defina-se $\eta_A = \alpha(1_{FA})$ e $\varepsilon_B = \alpha^{-1}(1_{GB})$.

- η é uma transformação natural de 1 para GF.

  Seja $A \xrightarrow{f} A'$ um morfismo de A. Considere-se o morfismo $(1_A, Ff) \in \mathsf{A}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{B}$. O diagrama

  $$\begin{tikzcd}
  \mathsf{B}(FA, FA) \arrow[r, "Ff_"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathsf{B}(FA, FA') \arrow[d, "\alpha"] \\
  \mathsf{A}(A, GFA) \arrow[r, "GFf_"'] & \mathsf{A}(A, GFA')
  \end{tikzcd}$$

  comuta. Logo,

  $$GFf \circ \eta_A = GFf\_ \circ \alpha(1_{FA}) = \alpha \circ Ff\_(1_{FA}) = \alpha(Ff).$$

Por outro lado, para o morfismo $(f, 1_{FA'}) \in \mathsf{A}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{B}$ obtém-se diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{B}(FA', FA') \arrow[r, "_Ff"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathsf{B}(FA, FA') \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathsf{A}(A', GFA') \arrow[r, "_f"'] & \mathsf{A}(A, GFA')
\end{tikzcd}$$

Logo,

$$\eta_{A'} \circ f = \_f \circ \alpha(1_{FA'}) = \alpha \circ \_Ff(1_{FA'}) = \alpha(Ff).$$

- $\varepsilon_{FA} \circ F\eta_A = 1_{FA}$

Para o morfismo $(\eta_A, 1_{FA}) \in \mathsf{A} \times \mathsf{B}$ resulta que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{B}(FGFA, FA) \arrow[r, "_F\eta_A"] & \mathsf{B}(FA, FA) \\
\mathsf{A}(GFA, GFA) \arrow[r, "_\eta_A"'] \arrow[u, "\alpha^{-1}"] & \mathsf{A}(A, GFA) \arrow[u, "\alpha^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

comuta. Isto é, $\varepsilon_{FA} \circ F\eta_A = \alpha^{-1}(\eta_A) = 1_{FA}$.

As restantes condições verificam-se de forma similar.

$\square$

Teorema 2.1.6. *Sejam* $\begin{tikzcd} \mathsf{A} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathsf{B} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ *functores.* $F \dashv G$ *se e só se existe uma transformação natural* $\eta : 1 \longrightarrow GF$ *tal que, para todo* $B \in B$ *e* $f : A \to GB \in \mathsf{A}$*, existe um único morfismo* $g : FA \to B$ *com* $Gg \circ \eta_A = f$.

Demonstração.
($\Rightarrow$)
Procuramos $g : FA \to B$ tal que $Gg \circ \eta_A = f$, ou seja $G\_ \circ \eta_A(g) = f$. Mas, $G\_ \circ \eta_A$ é o isomorfismo de $\mathsf{B}(FA, B)$ para $\mathsf{A}(A, GB)$ identificado na prova do Teorema 2.1.5. Por conseguinte, o resultado segue de imediato.
($\Leftarrow$)

Defina-se ε_B como o único morfismo tal que $G\varepsilon_B \circ \eta_{GB} = 1_{GB}$.

- $\varepsilon : FG \longrightarrow 1_{\mathsf{B}}$ é transformação natural.

Seja $B \xrightarrow{g} B'$ um morfismo de B. Por definicação de ε, verifica-se que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
GB \arrow[r, "Gg"] \arrow[d, "\eta_{GB}"] \arrow[dd, bend right=60, "1_{GB}"'] & GB' \arrow[d, "\eta_{GB'}"] \arrow[dd, bend left=60, "1_{GB'}"] \\
GFGB \arrow[d, "G\varepsilon_B"] & GFGB' \arrow[d, "G\varepsilon_{B'}"] \\
GB \arrow[r, "Gg"'] & GB'
\end{tikzcd}$$

comuta. Mas, η é transformação natural, logo $G(g \circ \varepsilon_B) \circ \eta_{GB} = G(\varepsilon_{B'} \circ FGg) \circ \eta_{GB} = Gg$. Portanto, $g \circ \varepsilon_B = \varepsilon_{B'} \circ FGg$.

- η e ε satisfazem as identidades triangulares.

  Por definição de ε verifica-se que resta apenas provar que $1_{FA} = \varepsilon_{FA} \circ F\eta_A$ e que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\eta_A"'] & GFA \arrow[d, "\eta_{GFA}"] \arrow[dr, "1_{GFA}"] & \\
GFA \arrow[r, "GF\eta_A"'] & GFGFA \arrow[r, "G\varepsilon_{FA}"'] & GFA
\end{tikzcd}$$

  comuta. Logo, $G(1_A) \circ \eta_A = G(\varepsilon_{FA} \circ F\eta_A) \circ \eta_A = \eta_A$. Portanto, $1_{FA} = \varepsilon_{FA} \circ F\eta_A$.

$\square$

2.2 Mónada

Conceptualmente uma mónada é similar a um monóide e relaciona-se com o conceito de adjunção. De facto, verificaremos que toda a mónada induz e é induzida por uma adjunção. De particular interesse, introduzimos as mónadas de Kock-Zöberlein. Como referências indicamos [MS04] para mónadas e [Koc95, Zöb76, EF99] para mónadas de Kock-Zöberlein.

Definição 2.2.1. Seja A uma categoria. Uma ***mónada*** $\mathbb{T}$ em A é um triplo (T, e, m) constituído por:

- Um endofunctor $T : \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{A}$.
- uma transformação natural $e : 1_{\mathsf{A}} \longrightarrow T$.
- uma transformação natural $m : T^2 \longrightarrow T$.

tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "m_T"] \arrow[d, "Tm"'] & T^2 \arrow[d, "m"'] & T \arrow[l, "e_T"'] \arrow[d, "Te"] \arrow[dl, "1_T"'] \\ T^2 \arrow[r, "m"'] & T & T^2 \arrow[l, "m"'] \end{tikzcd}$$

comuta.

Exemplos.

1. Se A é um conjunto pré-ordenado, uma mónada em A é uma função monótona tal que para todo $a \in \mathsf{A}$, $a \leq f(a)$ e $f^2(a) \leq f(a)$.

2. Considere-se P o functor das partes e as transformações naturais $e : 1_{\mathsf{Set}} \longrightarrow P$ e $m : P^2 \longrightarrow P$ definidas por $e_X(x) = \{x\}$ e $m_X(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$. O triplo (P, e, m) é uma mónada. De facto, (P, e, m) satisfaz os axiomas de mónada, dado que:

   - $m_X \circ Pm_X(\hat{\mathcal{A}}) = m_X(\{\bigcup \mathcal{A} : \mathcal{A} \in \hat{\mathcal{A}}\}) = \{a : a \in \bigcup \mathcal{A} \text{ e } \mathcal{A} \in \hat{\mathcal{A}}\} = \{a : a \in A \in \mathcal{A} \in \hat{\mathcal{A}}\}$;
   - $m_X \circ m_{PX}(\hat{\mathcal{A}}) = m_X(\bigcup \hat{\mathcal{A}}) = m_X(\{A : A \in \mathcal{A} \in \hat{\mathcal{A}}\}) = \{a : a \in A \in \mathcal{A} \in \hat{\mathcal{A}}\}$;
   - $m_X \circ e_{PX}(A) = m_X(\{A\}) = A$;
   - $m_X \circ Pe_X(A) = m_X(\{\{a\} : a \in A\}) = A$.

Proposição 2.2.2. *Qualquer adjunção $(F \dashv G, \eta, \varepsilon) : \mathsf{A} \rightleftarrows \mathsf{X}$ induz uma monada (T, e, m) em A constituída por:*

- *$T = GF$;*
- *$e = \eta$;*
- *$m = G\varepsilon_F$.*

Demonstração. Seja A um objecto de A. Visto que $\varepsilon : FG \longrightarrow 1_{\mathsf{A}}$ é uma transformação natural, o diagrama

$$\begin{tikzcd} GFGFGFA \arrow[r, "GFG\varepsilon_{FA}"] \arrow[d, "G\varepsilon_{FGFA}"'] & GFGFA \arrow[d, "G\varepsilon_{FA}"] \\ GFGFA \arrow[r, "G\varepsilon_{FA}"'] & GFA \end{tikzcd}$$

comuta. Além disso, porque ε e η satisfazem as identidades triangulares, os diagramas

$$\begin{tikzcd} GFA \arrow[r, "GF\eta_A"] \arrow[dr, "1_{GFA}"'] & GFGFA \arrow[d, "G\varepsilon_{FA}"] \\ & GFA \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} GFA \arrow[r, "\eta_{GFA}"] \arrow[dr, "1_{GFA}"'] & GFGFA \arrow[d, "G\varepsilon_{FA}"] \\ & GFA \end{tikzcd}$$

comutam. □

2.2.1 Mónada de Kock-Zöberlein

Definição 2.2.3. Uma categoria A diz-se ***enriquecida em*** PoSet se, para todo $A, B \in \mathsf{A}$, $\mathsf{A}(A, B)$ é um conjunto parcialmente ordenado e a composição é uma operação monótona.

Exemplos.

- A categoria PoSet é uma categoria enriquecida em PoSet com a ordem parcial usual, definida pontualmente.

- A categoria Top_0 pode ser enriquecida de uma ordem parcial em cada $\mathsf{Top}_0(A, B)$ considerando que $f \leq g \iff \forall a \in A, Nbh(fa) \supseteq Nbh(ga)$. Para observar que a composição é monótona considere-se $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $f' \leq f$, $g' \leq g$. Suponha-se que N_{gfa} é uma vizinhança de gfa. Assim, $g^{-1}(N_{gfa})$ é uma vizinhança de fa. Como $f' \leq f$, $g^{-1}(N_{gfa})$ é uma vizinhança de $f'a$. Logo, N_{gfa} é uma vizinhança de gfa'. Contudo, $g' \leq g$, portanto N_{gfa} é uma vizinhança de $g'f'a$.

Uma das vantagens de uma categoria enriquecida em PoSet é a possibilidade de definir adjunções na categoria, envolvendo objectos e morfismos.

Definição 2.2.4. Sejam A uma categoria enriquecida em PoSet e $f : A \to B$, $g : B \to A$ morfismos de A. Diz-se que f é adjunto à esquerda de g e escreve-se $f \dashv g$ se $1_A \leq gf$ e $fg \leq 1_B$. Adicionalmente, se $gf = 1_A$ escreve-se $f \dashv_c g$.

Definição 2.2.5. Sejam A e B categorias enriquecidas em PoSet. $F : \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{B}$ é um ***poset-functor*** se, para todo $A, A' \in \mathsf{A}$, $F_{A,A'}$ é uma função monótona.

Proposição 2.2.6. *Seja $\mathbb{T} = (T, e, m)$ uma mónada em A, onde T é um poset-functor. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $e_{TA} \leq Te_A$

b) $e_{TA} \dashv m_A$

c) $m_A \dashv Te_A$

d) Para todo $\alpha : TA \longrightarrow A \in \mathsf{A}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e_A"] \arrow[dr, "1_A"'] & TA \arrow[d, "\alpha"'] & T^2 \arrow[l, "T\alpha"'] \arrow[d, "m_A"] \\ & A & TA \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

comuta se e só se $\alpha \circ e_A = 1_A$ (e, neste caso, $e_A \dashv \alpha$)

Demonstração.

- $a) \Rightarrow b)$

  Por definicao de mónada, $m_A \circ e_{TA} = 1_{TA}$. Por outro lado, $e_{TA} \circ m_A = Tm_A \circ e_{TA}$. Logo, $e_{TA} \circ m_A \leq Tm_A \circ Te_{TA} = 1_{T^2A}$.

- $a) \Leftarrow b)$

  $e_{TA} \circ m_A \leq 1_{T^2A}$. Logo, $e_{TA} = e_{TA} \circ m_A \circ Te_A \leq Te_A$.

- $b) \Rightarrow d)$

  $(\Rightarrow)$

  O diagrama 2.1 comuta, portanto $\alpha \circ e_A = 1_A$.

  $(\Leftarrow)$

  $e_A \circ \alpha = T\alpha \circ e_{TA}$. Logo, $T\alpha \circ e_{TA} \circ m_A \circ Te_A \leq T\alpha \circ Te_A$. Portanto, $e_A \circ \alpha \leq 1_{TA}$. Assim, tem-se que $e_A \dashv_c \alpha$, $e_{TA} \dashv_c m_A$ e $Te_A \dashv_c T\alpha$. Logo $e_{TA} \circ e_A \dashv_c \alpha \circ m_A$ e $e_{TA} \circ e_A \dashv \alpha \circ_c T\alpha$. Portanto, $\alpha \circ T\alpha = \alpha \circ m_A$.

- $d) \Rightarrow b)$

  Por definicao de mónada, para TA, m satisfaz o diagrama (2.1), logo $e_{TA} \dashv m_{TA}$.

- $a) \Rightarrow c)$

  Por definição de mónada, $m_A \circ Te_A = 1_{TA}$. Por outro lado, $Te_A \circ m_A = m_{TA} \circ T^2e_A$ e $Te_TA \leq T^2e_A$. Logo, $1_{T^2A} = m_{TA} \circ Te_{TA} \leq m_{TA} \circ T^2e_A$.

- $a) \Leftarrow c)$

  $1_{T^2A} \leq Te_A \circ m_A$. Logo, $e_{TA} \leq Te_A \circ m_A \circ e_{TA} = Te_A$.

$\square$

Definição 2.2.7. Seja $\mathbb{T}$ uma mónada, onde T é um poset-functor. $\mathbb{T}$ é uma ***mónada de Kock-Zöberlein*** se satisfaz alguma das condições (equivalentes) da proposição anterior.

Proposição 2.2.8. *Seja $\mathbb{T} = (T, e, m)$ um triplo, onde $T : \mathsf{A} \to \mathsf{A}$ é um functor e $e : 1 \to T$, $m : T^2 \to T$ são transformações naturais. $\mathbb{T}$ é uma mónada de Kock-Zöberlein se e só se $m_A Te_A = 1_{TA}$ e $e_{TA} \dashv_c m_A$.*

Teorema 2.2.9. *$\mathbb{V} = (V, e, m)$ é uma mónada em Top e a sua restrição para Top_0 é do tipo Kock-Zöberlein, onde*

- *V é o functor de Vietoris;*
- *$e_X : X \longrightarrow VX, x \mapsto \overline{\{x\}}$;*
- *$m_X : V^2X \longrightarrow VX$, $\mathcal{A} \mapsto \overline{\bigcup \mathcal{A}}$.*

Demonstração.

a) V é (poset-)functor

- Vf é uma função continua.
  - $f^{-1}B'^{\diamond} \subseteq Vf^{-1}B'^{\diamond}$

    Seja $A \in f^{-1}B'^{\diamond}$. Então, $A \cap f^{-1}B' \neq \varnothing$. Logo, existe $a \in A \cap f^{-1}B'$. Assim, $fa \in fA \cap ff^{-1}B' \subseteq VfA \cap B'$. Portanto, $A \in Vf^{-1}B'^{\diamond}$.

  - $f^{-1}B'^{\diamond} \supseteq Vf^{-1}B'^{\diamond}$

    Seja $A \in Vf^{-1}B'^{\diamond}$. Então $\overline{fA} \cap B' \neq \varnothing$. Logo, existe $b' \in B'$ tal que para qualquer $N_{b'}$ existe $a \in A$ com $fa \in N_{b'}$. Em particular, para $N_{b'} = B'$...
- V é functorial

  Sejam $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ morfismos em Top e $A \in VX$. Então, uma vez que g é contínua, $V(g \circ f)(A) = \overline{gf(A)} = \overline{g\overline{fA}} = Vg \circ Vf(A)$.
- VX é T_0

  Seja $A \neq B$. Sem perda de generalidade considere-se que existe $a \in A$ e $a \notin B$. B fechado, logo existe N_a tal que $N_a \cap B = \varnothing$. Portanto $A \in N_a^{\diamond}$ e $B \notin N_a^{\diamond}$.
- $f \leq g \implies Vf \leq Vg$

  Seja $b \in \overline{gA}$. Para qualquer N_b existe $a \in A$ tal que $ga \in N_b$. Mas, $f \leq g$, logo $fa \in N_b$. Portanto, $b \in \overline{fA}$.

b) e_X é uma função continua.

- $B \subseteq e_X^{-1}(B^{\diamond})$

  Seja $b \in B$. $e_X(b) = \overline{\{b\}}$. Logo, $e_X(b) \cap B \neq \varnothing$. Portanto, $b \in e_X^{-1}(B^{\diamond})$.
- $B \supseteq e_X^{-1}(B^{\diamond})$

  Seja $x \in e_X^{-1}(B^{\diamond})$. Então, $\overline{\{x\}} \cap B \neq \varnothing$. Logo, existe $b \in \overline{\{x\}}$. Assim, por definição de fecho, $x \in N_b$. Em particular, para $N_b = B$. Portanto, $x \in B$.

c) m é uma função contínua.

- $(B^{\diamond})^{\diamond} \subseteq m^{-1}B^{\diamond}$

  Seja $\mathcal{B} \in (B^{\diamond})^{\diamond}$. Então, $\mathcal{B} \cap B^{\diamond} \neq \varnothing$. Logo, existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $A \cap B \neq \varnothing$. Portanto, $m(\mathcal{B}) = \overline{\bigcup \mathcal{B}} \cap B \neq \varnothing$.

- $(B^{\diamond})^{\diamond} \supseteq m^{-1}B^{\diamond}$

  Seja $\mathcal{B} \in m^{-1}B^{\diamond}$. Então, $m(\mathcal{B}) = \overline{\bigcup \mathcal{B}} \cap B \neq \varnothing$. Logo, existem $b \in B$ e $A \in \mathcal{B}$ tal que $b \in A$. Assim, $A \cap B \neq \varnothing$. Portanto, $\mathcal{B} \cap B^{\diamond} \neq \varnothing$.

d) e é transformação natural.

Seja $X \xrightarrow{f} Y \in \mathsf{Top}$.

$e_X \circ f(a) = \overline{\{fa\}}$.

$Vf \circ e_X(a) = \overline{f\overline{\{a\}}}$.

- $\overline{\{fa\}} \subseteq \overline{f\overline{\{a\}}}$

  Seja $b \in \overline{\{fa\}}$. Então, para qualquer N_b, $f(a) \in N_b$. Mas $f(a) \in f\overline{\{a\}}$. Logo, $N_b \cap f\overline{\{a\}} \neq \varnothing$.

- $\overline{\{fa\}} \supseteq \overline{f\overline{\{a\}}}$

  Seja $b \in \overline{f\overline{\{a\}}}$. Então, para qualquer N_b, existe $a' \in \overline{\{a\}}$ tal que $fa' \in N_b$. Mas $a' \in \overline{\{a\}}$, logo, para qualquer $N_{a'}$, $a \in N_{a'}$. Assim, para qualquer N_b, $a \in f^{-1}N_b$. Portanto, $fa \in N_b$.

e) m é transformação natural.

Seja $X \xrightarrow{f} Y \in \mathsf{Top}$. $m_B \circ V^2 f(\mathcal{A}) = \overline{\bigcup \mathcal{B}}$, $\mathcal{B} = \overline{\{\overline{fA} : A \in \mathcal{A}\}}$ e $Vf \circ m_A(\mathcal{A}) = \overline{f\bigcup \mathcal{A}}$.

- $\overline{f\overline{\bigcup \mathcal{A}}} \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{B}}$

  Seja $b \in \overline{f\overline{\bigcup \mathcal{A}}} = \overline{f\bigcup \mathcal{A}}$. Então, para qualquer N_b, existe $a \in A$ tal que $fa \in N_b$. Logo, $N_b \cap \overline{fA} \neq \varnothing$. Portanto, $N_b \cap \bigcup \mathcal{B} \neq \varnothing$.

- $\overline{f\overline{\bigcup \mathcal{A}}} \supseteq \overline{\bigcup \mathcal{B}}$

  Seja $b \in \overline{\bigcup \mathcal{B}}$. Então, para qualquer N_b, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $N_b \cap B \neq \varnothing$. Isto é, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \in N_b^{\diamond}$. Mas, para qualquer N_B, $N_B \cap \{\overline{fA} : A \in \mathcal{A}\} \neq \varnothing$. Em particular, para $N_b^{\diamond}$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\overline{fA} \in N_b^{\diamond}$. Consequentemente, $fA \cap N_b \neq \varnothing$. Mas, $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, portanto $N_b \cap f\bigcup \mathcal{A} \neq \varnothing$.

f) $m_X e_{VX}(A) = A$

$A \subseteq m_X e_{VX}(A)$

$A = m_X V e_X(A) = \overline{\cup \overline{\{\overline{\{a\}} : a \in A\}}}$

$(\subseteq)$

Seja $a \in A$. Para qualquer N_a, $N_a \cap \overline{\{a\}} \neq \varnothing$. Portanto, $a \in \overline{\cup \overline{\{\overline{\{a\}} : a \in A\}}}$.

$(\supseteq)$

Seja $a' \in \overline{\cup\overline{\{\overline{\{a\}} : a \in A\}}}$. Para qualquer $N_{a'}$ existe $A' \in \overline{\{\overline{\{a\}} : a \in A\}}$ tal que $N_{a'} \cap A' \neq \varnothing$. Logo, $A' \in N_{a'}^{\diamond}$. Portanto, existe $a \in A$ tal que $\overline{\{a\}} \in N_{a'}^{\diamond}$. Logo, $a \in N_{a'}$. Mas, A é fechado, portanto $a' \in A$.

g) $e_{TX} \dashv m_X$

h) $A \supseteq m_X e_{TX}(A)$

$m_X e_{TX}(A) = \overline{\cup\overline{\{A\}}}$. Seja $a \in \overline{\cup\overline{\{A\}}}$. Para qualquer N_a existe $A' \in \overline{\{A\}}$ tal que $N_a \cap A' \neq \varnothing$. Logo, $A' \in {N_a}^{\diamond}$ e $A' \in \overline{\{A\}}$. Portanto, $A \in N_a^{\diamond}$. Isto é, $N_a \cap A \neq \varnothing$. Mas A é fechado, logo $a \in A$.

i) $e_{TX} m_X(\mathcal{A}) \supseteq \mathcal{A}$

Seja $A \in \mathcal{A}$). Então, $A \subseteq \overline{\cup\mathcal{A}}$. Logo, $A \in \overline{\{\overline{\cup\mathcal{A}}\}}$.

Portanto, pela proposição 2.2.8, conlui-se que $\mathbb{V}$ é uma mónada em Top e a sua restrição em Top_0 é é do tipo Kock-Zöberlein.

$\square$

2.3 Categoria de Kleisli

Definição 2.3.1. Seja $\mathbb{T} = (T, e, m)$ uma monada em A. A ***categoria de Kleisli*** de A é a categoria $\mathsf{A}_{\mathbb{T}} = (\mathrm{ob}(\mathsf{A}_{\mathbb{T}}), \mathsf{A}_{\mathbb{T}}, 1_{\mathbb{T}}, \circ_{\mathbb{T}})$ constituída por:

- $\mathrm{ob}(\mathsf{A}_{\mathbb{T}}) = \mathrm{ob}(\mathsf{A})$
- $\mathsf{A}_{\mathbb{T}}(A, A') = \mathsf{A}(A, T(A'))$
- $1_{\mathbb{T}A} = e_A$
- $f \circ_{\mathbb{T}} g = m \circ Tf \circ g$

Exemplos.

1. Rel é a categoria de Kleisli para a mónada das partes. Qualquer relação $X \xrightarrow{R} Y$ expressa-se como uma função $f : X \longrightarrow PY$ com $f(x) = \{y : xRy\}$. Por outro lado, toda a função de $f : X \longrightarrow PY$ define uma relação $X \xrightarrow{R} Y$ através da condição $xRy \iff y \in fx$. A composição de funções na categoria de Kleisli corresponde precisamente à composição das correspondentes funções.

Para uma mónada $\mathbb{T}$ numa categoria A, as proposições e o teorema seguintes definem algumas construções envolvendo a respectiva categoria de Kleisli.

Proposição 2.3.2. $F_{\mathbb{T}} : A \longrightarrow \mathsf{A}_{\mathbb{T}}$ *definido como a identidade nos objectos e por*

$$F_{\mathbb{T}}(\ A \xrightarrow{f} B\ ) =\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{e_B} TB$$

é um functor.

Demonstração. Sejam $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ morfismos de A.

$$F_{\mathbb{T}}(g) \circ_K F_{\mathbb{T}}(f) =\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{e_B} TB \xrightarrow{Tg} TC \xrightarrow{Te_C} T^2C \xrightarrow{m_C} TC\ .$$

Assim, visto que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "e_B"'] & C \arrow[d, "e_C"] & \\
& TB \arrow[r, "Tg"'] & TC \arrow[r, "Te_C"] \arrow[dr, "1_{TC}"'] & T^2C \arrow[d, "m_C"] \\
& & & TC
\end{tikzcd}$$

comuta, uma vez que e é transformação natural e (T, e, m) é uma mónada, conclui-se que $F_{\mathbb{T}}(g \circ f) = F_{\mathbb{T}}(g) \circ_K F_{\mathbb{T}}(f)$. □

Proposição 2.3.3. $G_{\mathbb{T}} : \mathsf{A}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathsf{A}$ *definido por* $G_{\mathbb{T}}(\ A \xrightarrow{g} B\ ) =\ TA \xrightarrow{Tg} T^2B \xrightarrow{m_B} TB$ *é um functor.*

Demonstração. Sejam $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ morfismos de $\mathsf{A}_{\mathbb{T}}$. Pelos axiomas de mónada, $G_{\mathbb{T}}(1_A) = G_{\mathbb{T}}(e_A) = m_A \circ Te_A = 1_{TA}$. Por outro lado,

$$G_{\mathbb{T}}(g \circ f) =\ TA \xrightarrow{Tf} T^2B \xrightarrow{T^2g} T^3C \xrightarrow{Tm_C} T^2C \xrightarrow{m_C} TC\ .$$

Desta forma, tendo em conta que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
TA \arrow[r, "Tf"] & T^2B \arrow[r, "T^2g"] \arrow[d, "m_B"'] & T^3C \arrow[r, "Tm_C"] \arrow[d, "m_{TC}"] & T^2C \arrow[d, "m_C"] \\
& TB \arrow[r, "Tg"'] & T^2C \arrow[r, "m_C"'] & TC
\end{tikzcd}$$

comuta, dado que m é transformação natural e (T, e, m) é uma mónada, conclui-se que $G_{\mathbb{T}}(g \circ f) = G_{\mathbb{T}}(g) \circ G_{\mathbb{T}}(f)$. □

Teorema 2.3.4. *O quadruplo* $(F_{\mathbb{T}}, G_{\mathbb{T}}, e, 1_T)$ *é uma adjunção e induz a mónada* $\mathbb{T}$.

Demonstração. Sejam $A \xrightarrow{f} B$ e $A \xrightarrow{g} TB$ morfismos de A.

$$G_{\mathbb{T}}F_{\mathbb{T}}(\ A \xrightarrow{f} B\ ) = \ TA \xrightarrow{Tf} TB \xrightarrow{Te_B} T^2B \xrightarrow{m_B} TB\ = T(\ A \xrightarrow{f} B\ ).$$

Portanto, $G_{\mathbb{T}}F_{\mathbb{T}} = T$ e $e : 1 \longrightarrow G_{\mathbb{T}}F_{\mathbb{T}}$ é uma transformação natural. Por outro lado, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
TA \arrow[r, "F_{\mathbb{T}}G_{\mathbb{T}}g"] \arrow[d, "1_{TA}"'] & TB \arrow[d, "1_{TB}"] \\
A \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

em $\mathsf{A}_{\mathbb{T}}$ comuta, dado que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
TA \arrow[r, "Tg"] \arrow[d, "1_{TA}"'] & T^2B \arrow[r, "m_B"] & TB \arrow[r, "e_{TB}"] \arrow[d, "1_{TB}"] & T^2B \arrow[d, "1_{T^2B}"] \\
TA \arrow[r, "Tg"'] & T^2B \arrow[r, "m_B"'] & TB & T^2B \arrow[l, "m_B"]
\end{tikzcd}$$

em A comuta. Além disso, e e 1_T satisfazem as identidades triangulares pois os diagramas

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "e_A"] \arrow[ddrr, "e_A"'] & TA \arrow[r, "e_{TA}"] & T^2A \arrow[d, "1^2_TA"] \\
 & & T^2A \arrow[d, "m_A"] \\
 & & TA
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
TA \arrow[r, "e_{TA}"] \arrow[ddr, "1_{TA}"'] & T^2A \arrow[d, "1_{T^2A}"] \\
 & T^2A \arrow[d, "m_A"] \\
 & TA
\end{tikzcd}$$

comutam pelos axiomas de mónada. □

Teorema 2.3.5. *Sejam $(F \dashv G, \eta, \varepsilon) : \mathsf{A} \rightleftarrows \mathsf{X}$ uma adjunção, $\mathbb{T}$ a correspondente mónada induzida e $(F_{\mathbb{T}} \dashv G_{\mathbb{T}}, \eta_{\mathbb{T}}, \varepsilon_{\mathbb{T}}) : \mathsf{A} \rightleftarrows \mathsf{A}_{\mathbb{T}}$ a adjunção induzida por $\mathbb{T}$. $K : \mathsf{A}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathsf{X}$ definido por*

$$K(\ A \xrightarrow{f} TB\ ) = \ FA \xrightarrow{Ff} FGFB \xrightarrow{\varepsilon_{FB}} FB$$

é um functor e o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{A}_{\mathbb{T}} \arrow[rr, "K"] & & \mathsf{X} \\
 & \mathsf{A} \arrow[ul, "F_{\mathbb{T}}"] \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta.

Demonstração. Seja A um objecto de $\mathsf{A}_{\mathbb{T}}$.

$$K(\ A \xrightarrow{e_A} TA\ ) = \ FA \xrightarrow{Fe_A} FGFA \xrightarrow{\varepsilon_{FA}} FA\ = \ FA \xrightarrow{1_{FA}} FA\ .$$

Por outro lado,

$$K(\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C\ ) = \ FA \xrightarrow{Ff} FTB \xrightarrow{FTg} FT^2C \xrightarrow{FG\varepsilon_{FC}} FTC \xrightarrow{\varepsilon_{FC}} FC\ .$$

Mas, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "Ff"] & FTB \arrow[r, "FTg"] \arrow[d, "\varepsilon_{FB}"] & FT^2C \arrow[r, "FG\varepsilon_{FC}"] \arrow[d, "\varepsilon_{FGFC}"] & FTC \arrow[d, "\varepsilon_{FC}"] \\
 & FB \arrow[r, "Fg"'] & FTC \arrow[r, "\varepsilon_{FC}"'] & FC
\end{tikzcd}$$

comuta, pois ε é transformação natural. Portanto, $K(g \circ f) = Kg \circ Kf$.

□

Proposição 2.3.6. *K é pleno e fiel.*

Demonstração.

- K é pleno.

  Seja $FA \xrightarrow{g} FB \in \mathsf{X}$. O diagrama

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "F\eta_A"] \arrow[dr, "1_{FA}"'] & FGFA \arrow[r, "FGg"] \arrow[d, "\varepsilon_{FA}"] & FGFB \arrow[d, "\varepsilon_{FB}"] \\
 & FA \arrow[r, "g"'] & FAB
\end{tikzcd}$$

  comuta porque ε é transformação natural e η, ε satisfazem as identidades triangulares de uma adjunção. Logo, $K(Gg \circ \eta_A) = g$.

- K é fiel

  Sejam $A \underset{f'}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ morfismos de $\mathsf{A}_{\mathbb{T}}$. Suponha-se que $K(f) = K(f')$, isto é, suponha-se que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "Ff'"'] & FGFB \arrow[d, "\varepsilon_{FB}"] \\
FGFB \arrow[r, "\varepsilon_{FB}"'] & FA
\end{tikzcd}$$

  comuta. Então, uma vez que η é transformação natural e η, ε satisfazem as identidades triangulares de uma adjunção, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
GFB \arrow[r, "\eta_{GFB}"] & GFGFB \arrow[dr, "G\varepsilon_{FB}"] & \\
A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f'"'] & GFA \arrow[u, "GFf"'] \arrow[d, "GFf'"'] & GFB \\
GFB \arrow[r, "\eta_{GFB}"'] & GFGFB \arrow[ur, "G\varepsilon_{FB}"'] &
\end{tikzcd}$$

também comuta. Portanto, $f = f'$.

$\square$

Recordando que um functor é uma equivalência se e só se é pleno, fiel e essencialmente sobrejectivo nos objectos, obtém-se que:

Corolário 2.3.7. *O functor K é uma equivalência se e só se F é essencialmente sobrejectivo nos objectos.*

Definição 2.3.8. $(F \dashv G, \eta, \varepsilon) : \mathsf{A} \rightleftarrows \mathsf{X}$ é uma ***adjunção de Kleisli*** se F é essencialmente sobrejectivo nos objectos.

2.4 A meta-categoria das adjunções de Kleisli e a meta-categoria das mónadas

Definição 2.4.1. Sejam $(F \dashv G, \eta, \varepsilon) : \mathsf{A} \rightleftarrows \mathsf{X}$ e $(F' \dashv G', \eta', \varepsilon') : \mathsf{A} \rightleftarrows \mathsf{X}'$ adjunções de Kleisli. Um ***morfismo de adjunções de Kleisli*** é um functor $K : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{X}'$ que torna o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{X} \arrow[rr, "K"] & & \mathsf{X}' \\
& \mathsf{A} \arrow[ul, "F"] \arrow[ur, "F'"'] &
\end{tikzcd}$$

comutativo.

Proposição 2.4.2. *Seja A uma categoria. O quadruplo*

$$\mathrm{KAdj}(\mathsf{A}) = (\mathrm{ob}(\mathrm{KAdj}(\mathsf{A})), \mathrm{KAdj}(\mathsf{A}), 1, \circ_{KAdj})$$

é uma meta-categoria, onde

- *$ob(\mathrm{KAdj}(\mathsf{A}))$ é a coleção de adjunções de Kleisli $(F \dashv G, \eta, \varepsilon) : \mathsf{A} \rightleftarrows \mathsf{X}$*

- *para todo* $F, F' \in ob(\mathrm{KAdj}(\mathsf{A}))$, $\mathrm{KAdj}(F, F')$ *é a colecção de morfismos de adjunções de Kleisli*

- *para todo* $K \in \mathrm{KAdj}(F, F')$ *e* $K' \in \mathrm{KAdj}(F', F'')$, $K' \circ_{\mathrm{KAdj}} K = K' \circ K$

- *para todo* $F : \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{X} \in \mathrm{KAdj}$, $1_F = 1_X$

Demonstração. Basta observar que a composição em $\mathrm{KAdj}(\mathsf{A})$ é a normal composição de functores. □

Notas 2.4.3. Para um morfismo de ajdunções de Kleisli K, não é obrigatória a condição $G = G'K$. Todavia, podemos sempre definir uma transformação natural $i : G \longrightarrow G'K$ como $G'K\varepsilon \circ \eta'_G$.

Definição 2.4.4. Sejam $\mathbb{T} = (T, e, m)$ e $\mathbb{T}' = (T', e', m')$ mónadas numa categoria A. Um ***morfismo de mónadas*** é uma tranformação natural $\delta : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$ tal que os diagramas

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "\delta"] & & T' \\ & 1 \arrow[ul, "e"] \arrow[ur, "e'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^2 \arrow[r, "\delta^2"] \arrow[d, "m"'] & T'^2 \arrow[d, "m'"] \\ T \arrow[r, "\delta"'] & T' \end{tikzcd}$$

comutam, onde $\delta^2 : T^2 \longrightarrow T'^2$ é uma transformação natural definida através do diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} T^2 \arrow[r, "T\delta"] \arrow[d, "\delta_T"'] \arrow[dr, "\delta^2"] & TT' \arrow[d, "\delta_{T'}"] \\ T'T \arrow[r, "T'\delta"'] & T'^2 \end{tikzcd}$$

Proposição 2.4.5. *Seja* A *uma categoria. O quadruplo*

$$\mathrm{Mon}(\mathsf{A}) = (\mathrm{ob}(\mathrm{Mon}(\mathsf{A})), \mathrm{Mon}(\mathsf{A}), 1_{\mathbb{T}}, \circ_M)$$

é uma meta-categoria

- $ob(\mathrm{Mon}(\mathsf{A}))$ *é a colecção de todas as mónadas em* A

- *para todo* $\mathbb{T}, \mathbb{T}' \in ob(\mathsf{A})$, $\mathrm{Mon}(\mathsf{A})(\mathbb{T}, \mathbb{T}')$ *é a coleção de morfismos de mónadas de* $\mathbb{T}$ *para* $\mathbb{T}'$.

- *para todo* $\mathbb{T}$, $1_{\mathbb{T}} = 1_T$

- *para* $\delta \in \mathrm{Mon}(\mathbb{T}, \mathbb{T}')$ *e* $\delta' \in \mathrm{Mon}(\mathbb{T}', \mathbb{T}'')$, $\delta' \circ_{\mathrm{Mon}} \delta = \delta' \circ \delta$

Demonstração. Sejam $\delta : \mathbb{T} \to \mathbb{T}'$ e $\delta' : \mathbb{T}' \to \mathbb{T}''$ morfismos de mónadas. Uma vez que δ e δ' são transformações naturais, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
T^2 \arrow[r, "T\delta"] \arrow[d, "\delta_T"'] \arrow[dr, "\delta^2"] & TT' \arrow[r, "T\delta'"] \arrow[d, "\delta_{T'}"] & TT'' \arrow[d, "\delta''_T"] \\
T'T \arrow[r, "T'\delta"'] \arrow[d, "\delta'_T"'] & T'^2 \arrow[r, "T'\delta'"] \arrow[d, "\delta'_{T'}"'] \arrow[dr, "\delta'^2"] & T'T'' \arrow[d, "\delta'_{T''}"] \\
T''T \arrow[r, "T''\delta"'] & T''T' \arrow[r, "T''\delta'"'] & T''^2
\end{tikzcd}$$

comuta. Assim, $(\delta' \circ \delta)^2 = \delta'^2 \circ \delta$. Portanto, $\delta' \circ \delta : \mathbb{T} \to \mathbb{T}''$ é um morfismo de mónadas e o resultado segue de imediato. $\square$

Proposição 2.4.6. *Seja $\delta : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$ um morfismo de mónadas numa categoria A. $J : \mathsf{A}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathsf{A}_{\mathbb{T}'}$ definido por $J(\ A \xrightarrow{f} B\ ) = \ A \xrightarrow{f} TB \xrightarrow{\delta_B} T'B$ é um morfismo de adjunções de Kleisli entre as adjunções induzidas pelas respectivas mónadas.*

Demonstração. Seja $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ um morfismo de $\mathsf{A}_{\mathbb{T}}$.

$$J(\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C\ ) = \ A \xrightarrow{f} TB \xrightarrow{Tg} T^2C \xrightarrow{m_C} TC \xrightarrow{\delta_C} T'C\ .$$

Mas, porque δ é transformação natural e um morfismo de mónadas, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[ddrrr, bend right, "Jg\circ_{\mathbb{T}'}Jf"'] & TB \arrow[r, "Tg"] \arrow[d, "\delta_B"'] & T^2C \arrow[r, "m_C"] \arrow[d, "\delta_{TC}"'] \arrow[dd, bend left, "\delta^2_C"] & TC \arrow[dd, "\delta_C"] \\
& T'B \arrow[r, "T'g"'] & T'TC \arrow[d, "T'\delta_C"'] & \\
& & T'^2C \arrow[r, "m'_C"'] & T'C
\end{tikzcd}$$

comuta. Logo $J(g \circ_{\mathbb{T}} f) = Jg \circ_{\mathbb{T}'} Jf$. Por outro lado, visto que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "F_{\mathbb{T}}f"] \arrow[dr, "F_{\mathbb{T}'}f"'] & B \arrow[r, "e_B"] \arrow[d, "e'_B"] & TB \arrow[dl, "\delta_B"] \\
& T'B &
\end{tikzcd}$$

comuta, pode-se concluir que $J(1_A) = 1_{JA}$ e $J \circ F_{\mathbb{T}} = F_{\mathbb{T}'}$. $\square$

Proposição 2.4.7. *Seja $J : F \longrightarrow F'$ um morfismo de adjunções de Kleisli .Então, $i_F : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$, com*

$$i_{FA} = \ TA \xrightarrow{\eta'_{TA}} T'TA \xrightarrow{G'J\varepsilon_{FA}} T'A$$

é um morfismo de mónadas entre as mónadas induzidas pelas correspondentes adjunções.

Demonstração. Seja A um objecto de A. O diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta'_A"] \arrow[d, "\eta_A"'] & T'A \arrow[d, "T'\eta_A"] \arrow[dr, "1_{T'A}"] & \\
TA \arrow[r, "\eta'_{TA}"'] & T'TA \arrow[r, "G'J\varepsilon_{FA}"'] & T'A
\end{tikzcd}$$

comuta, dado que η' é transformação natural e ε, η satisfazem as identidades triangulares de uma adjunção. Logo i_F é compatível com as unidades. Por outro lado, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
T^2A \arrow[r, "\eta'_{T^2A}"] \arrow[d, "G\varepsilon_{FA}"'] & T'T^2A \arrow[r, "G'J\varepsilon_{FT}"] \arrow[dr, "T'G\varepsilon_{FA}"'] & T'TA \arrow[r, "T'\eta'_T"] \arrow[drr, "G'J\varepsilon_{FA}"'] & T'^2TA \arrow[r, "T'G'J\varepsilon_{FA}"] & T'^2A \arrow[d, "G'\varepsilon'_{F'A}"] \\
TA \arrow[rr, "\eta'_{TA}"'] & & T'TA \arrow[rr, "G'J\varepsilon_{FA}"'] & & T'A
\end{tikzcd}$$

comuta, porque η', ε e ε' são transformações naturais e η' e ε' satisfazem as identidades triangulares de uma adjunção. Portanto, δ é compatível com as multiplicações. $\square$

Proposição 2.4.8. $M_{\mathsf{A}} : \mathrm{KAdj}(\mathsf{A}) \longrightarrow \mathrm{Mon}(\mathsf{A})$ *é um functor, onde*

- $M_{\mathsf{A}}(F) = (GF, \eta, G\varepsilon_F)$
- $M_{\mathsf{A}}(J : F \longrightarrow F') = i_F$

Demonstração. O caminho superior do diagrama corresponde a $M_{\mathsf{A}}(J') \circ M(J)$ e o caminho inferior a $M_{\mathsf{A}}(J' \circ J)$.

$$\begin{tikzcd}
TA \arrow[r, "\eta'_{TA}"] \arrow[d, "\eta''_{TA}"'] & T'TA \arrow[r, "G'J\varepsilon_{FA}"] \arrow[d, "\eta''_{T'TA}"'] & T'A \arrow[d, "\eta''_{T'A}"] \\
T''TA \arrow[r, "G''J'F'\eta'_{TA}"'] \arrow[dr, "1_{T''TA}"'] & T''T'TA \arrow[r, "T''G'J\varepsilon_{FA}"'] \arrow[d, "G''J'\varepsilon'_{FT}"'] & T''TA \arrow[d, "G''J\varepsilon'_{FA}"] \\
& T''TA \arrow[r, "G''J'J\varepsilon_{FA}"'] & T''A
\end{tikzcd}$$

Além disso, η'' e ε' são transformações naturais e η' e ε' satisfazem as identidades triangulares de uma adjunção. Logo, o diagrama comuta e o resultado segue de imediato. $\square$

Proposição 2.4.9. $K_{\mathsf{A}} : \mathrm{Mon}(\mathsf{A}) \longrightarrow \mathrm{KAdj}(\mathsf{A})$ *é um functor, onde*

- $K_{\mathsf{A}}(\mathbb{T}) = (F_{\mathbb{T}}, G_{\mathbb{T}}, e, 1_T)$
- $K_{\mathsf{A}}\delta(\ A \xrightarrow{f} B\ ) = \ A \xrightarrow{f} TB \xrightarrow{\delta_B} T'B$

Demonstração. Seja $\mathbb{T} \xrightarrow{\delta} \mathbb{T}' \xrightarrow{\delta'} \mathbb{T}''$ um morfismo de mónadas em A e $A \xrightarrow{f} B$ um morfismo de $\mathsf{A}_{\mathbb{T}}$. Então,

$$\begin{aligned} K_{\mathsf{A}}(\delta' \circ \delta)(\ A \xrightarrow{f} B\ ) &= \ A \xrightarrow{f} TB \xrightarrow{\delta_B} T'B \xrightarrow{\delta'_B} T''B \\ &= K_{\mathsf{A}}\delta'(\ A \xrightarrow{f} TB \xrightarrow{\delta_B} T'B\ ) \\ &= K_{\mathsf{A}}\delta' \circ K_{\mathsf{A}}\delta(\ A \xrightarrow{f} B\ ). \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.4.10. *O quádruplo* $(K_{\mathsf{A}}, M_{\mathsf{A}}, (1_{\mathbb{T}}), (K_F))$ *é uma adjunção.*

Demonstração. Vamos apenas provar que $K : K_{\mathsf{A}}M_{\mathsf{A}} \to 1$ é uma transformação natural. Verificar as restantes condições é um processo trivial visto que $1_{\mathbb{T}}$ é a identidade. Seja $J : F \to F'$ um morfismo de adjunções de Kleisli e $A \xrightarrow{f} B$ um morfismo de $\mathsf{A}_{\mathbb{T}}$. Assim, o diagrama

$$\begin{tikzcd} F'A \arrow[r, "F'f"] & F'TB \arrow[r, "F'\eta'_T"] \arrow[dr, "1_{F'TB}"'] & F'T'TB \arrow[r, "F'G'J\varepsilon_{FB}"] \arrow[d, "\varepsilon'_{F'T}"] & F'T'B \arrow[d, "\varepsilon'_{F'B}"] \\ & & F'T \arrow[r, "J\varepsilon_{FB}"'] & F'B \end{tikzcd}$$

comuta, pois ε' é transformação natural e η' e ε' satisfazem as identidades triangulares de uma adjunção. Além disso, os caminhos superior e inferior correspondem a $K_{F'} \circ K_{\mathsf{A}}M_{\mathsf{A}}J(f)$ e $J \circ K_F(J)$ respectivamente. Portanto, $K_{F'} \circ K_{\mathsf{A}}M_{\mathsf{A}}J = J \circ K_F(J)$. $\square$

O Teorema 2.4.11 determina uma condição suficiente para que um functor seja uma equivalência. Na prática, pretende-se traduzir a afirmação “prove que o functor é uma equivalência” na afirmação, potencialmente mais simples, “prove que a transformação natural é um isomorfismo”.

Teorema 2.4.11. *Seja* $J : F \longrightarrow F'$ *um morfismo de adjunções de Kleisli. Se* $M_{\mathsf{A}}(J)$ *é um isomorfismo então* J *é uma equivalência.*

Demonstração. Suponha-se que $M_{\mathsf{A}}(J)$ é um isomorfismo. Então, $K_{\mathsf{A}}M_{\mathsf{A}}(J)$ é um isomorfismo, em particular é uma equivavência, e o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathsf{A}_{\mathbb{T}} \arrow[r, "K_{\mathsf{A}}M_{\mathsf{A}}J"] \arrow[d, "K_F"'] & \mathsf{A}_{\mathbb{T}'} \arrow[d, "K_{F'}"] \\ \mathsf{X} \arrow[r, "J"'] & \mathsf{X}' \end{tikzcd}$$

comuta. Assim, uma vez que K e $K' \circ K_{\mathsf{A}}M_{\mathsf{A}}J$ são equivalências, J é uma equivalência. $\square$

Capítulo 3

Dualidades

Este capítulo é dedicado ao estudo de equivalências duais. Começamos por abordar as dualidades de Stone para álgebras Booleanas e reticulados distributivos, para, recorrendo ao Teorema 2.4.11, obtermos uma prova elementar das dualidades $\mathsf{Spec}_{\mathbb{V}} \simeq \mathsf{DLat}^{\mathrm{op}}_{\perp,\vee}$ e $\mathsf{Stone}_{\mathbb{V}} \simeq \mathsf{Bool}^{\mathrm{op}}_{\perp,\vee}$. Para concluir, mostramos que a operação algébrica em $\mathsf{DLat}_{\perp,\vee}$ e $\mathsf{Bool}_{\perp,\vee}$ correspondente ao produto cartesiano em $\mathsf{Spec}_{\mathbb{V}}$ e $\mathsf{Stone}_{\mathbb{V}}$ respectivamente é o produto tensorial.

3.1 Equivalências duais

Definição 3.1.1. Uma ***adjunção dual*** entre A e B é uma adjunção do tipo $F \dashv G : \mathsf{A} \rightleftarrows \mathsf{B}^{\mathrm{op}}$. Uma ***equivalência dual*** (dualidade) é uma equivalência da forma $\mathsf{A} \simeq \mathsf{B}^{\mathrm{op}}$. Neste caso, diz-se que A é dualmente equivalente a B ou A é dual a B.

A proposição seguinte descreve um método geral para construir adjunções duais que generaliza o exemplo $\mathsf{Set}(\_, A)^{\mathrm{op}} \dashv \mathsf{Set}(\_, A)$. A ideia consta na observação que verificar que os diagramas comutam é independente das propriedades das funções e conjuntos intervenientes.

Proposição 3.1.2. *Sejam A e B categorias equipadas com um functor de esquecimento $|\_|$ para Set e $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ objectos de A e B respectivamente, com $|\tilde{A}| = |\tilde{B}|$. Os functores $\mathsf{A}(\_, \tilde{A})$ e $\mathsf{B}(_, \tilde{B})$admitem um levantamento para uma adjunção dual entre A e B se:*

1. *para qualquer $A \in \mathsf{A}$, a família $(ev_{A,a} : \mathsf{A}(A, \tilde{A}) \to |\tilde{B}|)_{a \in |\tilde{A}|}$ tem um levantamento $(ev_{A,a} : GA \to \tilde{B}, h \mapsto h(a))_{a \in |A|}$ tal que, para qualquer $f : A \to A' \in \mathsf{A}$, a função $\_f : |GA'| \to |GA|$ é um morfismo $Gf : GA' \to GA$ em B.*

2. *para qualquer $B \in \mathsf{B}$, a família $(ev_{B,b} : \mathsf{B}(B, \tilde{B}) \to |\tilde{A}|)_{b \in |\tilde{B}|}$ tem um levantamento $(ev_{B,b} : FB \to \tilde{A})_{b \in |B|}$ tal que, para qualquer $g : B \to B' \in \mathsf{B}$, a função $\_g : |FB'| \to |FB|$ é um morsfimo $Fg : FB' \to FB$ em A.*

3. *para cada $A \in \mathsf{A}$, a função $\eta_A : |A| \to |FGA|, a \mapsto ev_{A,a}$ é um morfismo $\eta_A : A \to FGA$ em A*

4. *para cada $B \in \mathsf{B}$, a função $\varepsilon_B : |B| \to |GFB|, b \mapsto ev_{B,b}$ é um morfismo $\varepsilon_B : B \to GFB$ em B*

Demonstração. Ver [PT91] □

Exemplos.

1. Considere-se que A é a categoria Stone e B é a categoria Bool, ambas equipadas com os functores de esquecimento usuais, $\tilde{A}$ é o espaço discreto com dois elementos (2) e $\tilde{B}$ é a algebra booleana com dois elementos ($2 = \{0 \leq 1\}$). Identificando $\mathsf{Stone}(X, 2)$ como conjunto de subconjuntos simultâneamente abertos e fechados de X, consideramos $\mathsf{Stone}(X, 2)$ como uma subalgebra GX do conjunto das partes de $|X|$. Por outro lado para qualquer álgebra booleana B identificamos $\mathsf{Bool}(B, 2)$ com o conjunto de filtros primos de B e consideramos o espaço topológico FB com a topologia gerada pelos conjuntos $\phi_b = \{u \subseteq B : b \in u \text{ e } u \text{ é filtro primo}\}$. Assim, verificam-se as condições da proposição anterior e obtém-se uma adjunção dual de Stone para Bool.

2. De forma semelhante, considere-se A a categoria Spec e B a categoria DLat, $\tilde{A}$ o espaço de Sierpiński (2) - e $\tilde{B}$ o reticulado distributivo com dois elementos ($2 = \{0 \leq 1\}$). A estrutura de $SPEC(X, 2)$ e $\mathsf{DLat}(L, 2)$ é definida de forma análoga ao exemplo anterior, verificando-se que são as satisfeitas as condições da proposição. Portanto, esta construção define uma adjunção dual.

Notação. Em virtude da dupla natureza do reticulado associado a cada espaço e vice-versa, a notação reflectirá a escolha da caracterização. Por exemplo, podemos dizer que $h \in \mathsf{Bool}(A, 2)$ é um filtro primo e $a \in h$.

Nos exemplos anteriores topologia e álgebra formam uma dicotomia na dificuldade de averiguação das condições do Teorema 3.1.2. Os próximos resultados mostram que, de facto, o espaço topológico associado a cada reticulado satisfaz as propriedades requeridas.

Teorema 3.1.3. *Seja L um reticulado, F um filtro e I um ideal em L. Se $I \cap F = \varnothing$ então existe um filtro primo F' tal que $F \subseteq F'$ e $I \cap F' = \varnothing$.*

Demonstração. Ver [Sto38, Teorema 6]. □

Proposição 3.1.4. *Sejam L e $2 = \{0 \leq 1\}$ reticulados distributivos e, para todo $a \in L$, $\phi_a = \{h \in \mathsf{DLat}(L, 2) : ha = 1\}$. Se $a \leq b$ então $\phi_a \subseteq \phi_b$.*

Demonstração. Sejam $a, b \in L$ tais que $a \leq b$ e $h \in \mathsf{DLat}(L, 2)$ tal que $ha = 1$. Então, dado que h preserva supremos finitos, $h(b) = h(a \vee b) = ha \vee hb = 1$. □

Proposição 3.1.5. *Sejam L e $2 = \{0 \leq 1\}$ reticulados distributivos. O espaço topológico* $\mathsf{DLat}(L,2)$ *com a topologia gerada pelos conjuntos $\phi_a = \{h \in \mathsf{DLat}(L,2) : ha = 1\}$, para $a \in L$ tem as seguintes propriedades:*

a) é T_0,

b) o conjunto $S = \{\phi_a : a \in L\}$ é uma base para a topologia,

c) S é o conjunto de todos os abertos e compactos,

d) é sóbrio.

Demonstração.

a) Sejam $h, h' \in \mathsf{DLat}(L,2)$ e $h \neq h'$. Então existe $a \in L$ tal que $ha \neq h'a$. Portanto, $h \in \phi_a$ e $h' \notin \phi_a$ ou $h \notin \phi_a$ e $h' \in \phi_a$.

b) Sejam $a, b \in L$ e $h \in \mathsf{DLat}(L,2)$. O morfismo h é um homomorfismo de reticulados logo $h(a \wedge b) = 1 \Leftrightarrow ha \wedge hb = 1$. Portanto, $\phi_a \cap \phi_b = \phi_{a \wedge b}$.

c) Seja a um elemento de L. Os conjuntos ϕ_b para $b \in L$ formam uma base para a topologia, logo $\phi_a = \bigcup_{b \in S} \phi_b$, com $S \subseteq L$. Assim, considere-se o filtro $\uparrow a$ e o ideal I gerado por S. Se $I \cap \uparrow a = \varnothing$ então, pelo Teorema 3.1.3 existe $h \in \phi_a$ tal que $h \notin \phi_b$ para qualquer $b \in S$ o que é uma contradição. Deste modo, suponha-se que $I \cap a \neq \varnothing$. Então, $a \leq b_1 \vee ... \vee b_n$. Logo, $\bigcup_{i=1}^{n} \phi_{b_i}$ é uma cobertura de ϕ_a. Reciprocamente, se $A \subseteq \mathsf{DLat}(L,2)$ é aberto e compacto então existem $a_1, ..., a_n$ tais que $A = \phi_{a_1} \cup ... \cup \phi_{a_n}$. Logo, $A = \phi_{a_1 \vee ... \vee a_n}$.

d) Seja $C \subseteq \mathsf{DLat}(L,2)$ fechado e irredutível. Suponha-se que não existe $h \in C$ tal que $C = \overline{\{h\}}$. Então, para todo $h \in C$ existem $h' \in C$ e $a \in L$ tais que $h' \in \phi_a$ e $h \notin \phi_a$. Portanto, $C = \bigcap_{b \in S} \phi_b^c \subseteq \bigcup_{a \in S'} \phi_a^c$. Agora, seja I o ideal gerado por S e F o filtro gerado por S'. Se $I \cap F = \varnothing$ então, pelo Teorema 3.1.3 existe h tal que $h \in \phi_a$ para todo $a \in S'$ e $h \notin \phi_b$ para todo $b \in S$. Logo, $h \in \bigcap_{b \in S} \phi_b^c$ e $h \notin \bigcup_{a \in S'} \phi_a^c$, o que é uma contradição. Por outro lado, considere-se que $I \cap F \neq \varnothing$. Então, existem $a_1 ... a_m \in' S$ e $b_1 ... b_n \in S$ tais que $a_1 \wedge ... \wedge a_m \leq b_1 \vee .. \vee b_n$. Logo, $\phi_{a_1} \cap ... \cap \phi_{a_m} \subseteq \phi_{b_1} \cup ... \cup \phi_{b_n}$. Portanto, $C \subseteq \phi_{a_1}^c \cup ... \cup \phi_{a_m}^c$ e $C \nsubseteq \phi_{a_i}^c$, o que é uma contradição. Deste modo, visto que $\mathsf{DLat}(L,2)$ é T_0, conlui-se que existe um único h tal que $C = \overline{\{h\}}$.

$\square$

Corolário 3.1.6. *Seja A uma álgebra booleana. O espaço topológico* $\mathsf{Bool}(A,2)$ *com a topologia gerada pelos conjuntos ϕ_a para $a \in A$ é um espaço de Stone.*

Demonstração. Basta verificar que $\phi_a^c = \phi_{\neg a}$ e o resultado segue de imediato. $\square$

Teorema 3.1.7 ([Sto36]). $\mathsf{Stone} \simeq \mathsf{Bool}^{\mathrm{op}}$ *(Dualidade de Stone)*

Demonstração.

De acordo com o exemplo de adjunções dual de Stone e Bool, basta verificar que as funções de avaliação ev_X e ev_A são isomorfismos.

- $ev_X : X \to \mathsf{Bool}(\mathsf{Stone}(X,2),2)$ é um isomorfismo.

  Suponha-se que $x \neq y$. X é Hausdorff e tem dimensão zero logo existe um conjunto simultâneamente aberto e fechado $f \in \mathsf{Stone}(X,2)$ tal que $x \in f$ e $y \notin f$. Portanto, $ev_x(f) \neq ev_y(f)$.

  Seja $\psi \in \mathsf{Bool}(\mathsf{Stone}(X,2),2)$. A função ev_X é continua logo $ev_X^{-1}(\phi_f)$ é fechado. Assim, começamos por provar que o conjunto $\{ev_X^{-1}(\phi_f) : \psi(f) = 1\}$ tem a propriedade de interseção finita. Sejam $f_1, ..., f_n \in \mathsf{Top}(X,2)$ tai que $\psi(f_i) = 1$. ψ é homomorfismo logo $\psi(f_1 \wedge .. \wedge f_n) = 1$. Portanto, $f_1 \wedge ... \wedge f_n \neq \bot$, logo $\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}\{1\} \neq \varnothing$. Isto é, existe x tal que $f_i(x) = 1$ e consequentemente $ev_x \in \bigcap_{i=1}^n \phi_{f_i}$. Desta forma, uma vez que X é compacto, obtém-se que $\bigcap\{ev_X^{-1}(\phi_f) : \psi(f) = 1\} \neq \varnothing$. Portanto, existe x tal que ev_x pertence a todas as vizinhanças de ψ. Mas, $\mathsf{Bool}(\mathsf{Stone}(X,2),2)$ é Hausdorff logo $ev_x = \psi$.

- $ev_A : A \to \mathsf{Stone}(\mathsf{Bool}(A,2),2)$ é um isomorfismo.

  Sejam $a, b \in A$. Suponha-se que $a \neq b$. Então, $a \nleq b$ ou $b \nleq a$. Sem perda de generalidade, considere-se que $a \nleq b$. Assim, $\uparrow a \cap \downarrow b = \varnothing$. Portanto, pelo Teorema 3.1.3 existe $h \in \mathsf{Bool}(A,2)$ tal que $ha = 1$ e $hb = 0$, o que permite concluir que $ev_a(h) \neq ev_b(h)$.

  Seja $\psi \in \mathsf{Stone}(\mathsf{Bool}(A,2),2)$. ψ é continua logo $\psi^{-1}\{1\} = \bigcup_{a \in S} \phi_a$ é compacto, pois é fechado e $\mathsf{Bool}(A,2)$ é compacto. Desta forma, existe $S' \subseteq S$ finito tal que $\psi^{-1}\{1\} = \bigcup_{a \in S'} \phi_a = \phi_{a'}$, com $a' = \vee_{a \in S'} a$. Mas, $\phi_{a'} = ev_{a'}^{-1}\{1\}$. Portanto, $\psi = ev_{a'}$.

$\square$

De forma análoga, Stone provou em 1938 um resultado semelhante para reticulados distributivos.

Teorema 3.1.8 ([Sto38])**.** $\mathsf{Spec} \simeq \mathsf{DLat}^{\mathrm{op}}$

Demonstração. A prova deste teorema é análoga à do teorema anterior. Por este motivo, vamos apenas provar que $ev_X : X \to \mathsf{DLat}(\mathsf{Spec}(X,2),2)$ é uma função sobrejectiva. Seja ψ um morfismo de $\mathsf{DLat}(\mathsf{Spec}(X,2),2)$. O morfismo ψ é um filtro primo de abertos e compactos em X. Assim, pelas Proposições A.0.6 e A.0.7, $lim\, \psi$ é fechado e irredutível. Logo, uma vez que X é sóbrio, existe $x \in X$ tal que $\overline{\{x\}} = lim\, \psi$. Desta forma, pela Proposição A.0.7 obtém-se que $\psi f = 1 \iff fx = 1$. Portanto, para todo $f \in \mathsf{Spec}(X,2)$, $\psi \in \phi_f \iff ev_x \in \phi_f$. Visto que $\mathsf{DLat}(\mathsf{Spec}(X,2),2)$ é T_0 conclui-se que $ev_x = \psi$. $\square$

Nos anos 70, Priestley apresentou uma nova perspectiva sobre esta dualidade [Pri70, Pri72] e provou que os reticulados distributivos correspondem também a certos espaços compactos, separados e ordenados [Nac50].

Como ponto de partida para a discussão final desta secção começamos por observar que a restrição da mónada de Vietoris para espaços espectrais e funções espectrais é ainda uma mónada em Spec. Isto é:

- se X é espectral, VX é espectral,
- se f é espectral, Vf é espectral,
- se X é espectral, e_X e m_X são espectrais.

Por outro lado, se X é um espaço de Stone, VX em geral não é um espaço de Stone. Não obstante, modificando a topologia em VX, considerando também como abertos todos os conjuntos $K^\Box = \{A \in VX : A \cap K = \varnothing\}$ para K compacto, VX é um espaço de Stone e obtemos uma mónada em Stone que também denotamos por $\mathbb{V}$ (ver [BKR07, KKV04]).

O próximo teorema destaca-se como o mais importante da secção na medida em que demonstra a potencialidade do teorema 2.4.11. Com base nas dualidades anteriores e recorrendo à(s) mónada(s) de Vietoris estabelecemos novas dualidades envolvendo as categorias $\mathsf{DLat}_{\perp,\vee}$ e $\mathsf{Bool}_{\perp,\vee}$. Nestas categorias os objectos são reticulados distributivos e álgebras booleanas respectivamente e os morfismos são as funções que preservam supremos finitos.

Teorema 3.1.9. *Nos seguintes diagramas, os functors* $\mathsf{Spec}_{\mathbb{V}}(\_,1)$ *e* $\mathsf{Stone}_{\mathbb{V}}(\_,1)$ *são equivalências.*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Spec}_{\mathbb{V}} \arrow[rr, "\mathsf{Spec}_{\mathbb{V}}(_{,}1)"] \arrow[dr, dotted] & & \mathsf{DLat}^{\mathrm{op}}_{\perp,\vee} \arrow[dl, dotted] \\
& \mathsf{Spec} \arrow[ul, bend left, "F_{\mathbb{V}}"] \arrow[ur, bend right, "\mathsf{Spec}(_{,}2)"'] &
\end{tikzcd}
\quad e \quad
\begin{tikzcd}
\mathsf{Stone}_{\mathbb{V}} \arrow[rr, "\mathsf{Stone}_{\mathbb{V}}(_{,}1)"] \arrow[dr, dotted] & & \mathsf{Bool}^{\mathrm{op}}_{\perp,\vee} \arrow[dl, dotted] \\
& \mathsf{Stone} \arrow[ul, bend left, "F_{\mathbb{V}}"] \arrow[ur, bend right, "\mathsf{Stone}(_{,}2)"'] &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Os functores $\mathsf{Stone}(\_,2)$ e $F_{\mathbb{V}}$ são essencialmente sobrejectivos nos objectos uma vez que $\mathsf{Stone}(\_,2) : \mathsf{Stone}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Bool}$ é uma equivalência e $F_{\mathbb{V}}$ é a adjunção para a categoria de Kleisli. Além disso, por argumentos semelhantes aos usados nos exemplos de adjunções duais, mas também como consequência de [Hof02, Lemma 1.5], os functores $\mathsf{Stone}(\_,2)$ e $\mathsf{Bool}_{\perp,\vee}(\_,2)$ admitem um levantamento para uma adjunção dual. Portanto, $\mathsf{Stone}(\_,2)$ e $F_{\mathbb{V}}$ são adjuntos à esquerda de adjunções de Kleisli.

Agora, seja $f : X \mapsto Y$ um morfismo de Stone. Dado que $F_{\mathbb{V}}$ actua como identidade nos objectos, $\mathsf{Stone}_{\mathbb{V}}(\_,1) \circ F_{\mathbb{V}}(X) = \mathsf{Stone}_{\mathbb{V}}(X,1)$. Mas, $V1 = 2$, logo, $\mathsf{Stone}_{\mathbb{V}}(X,1) = \mathsf{Stone}(X,2)$. Por outro lado, $\mathsf{Stone}_{\mathbb{V}}(\_,1) \circ F_{\mathbb{V}}(f) = \mathsf{Stone}_{\mathbb{V}}(e_Y \circ f, 1) = \_ \circ_K e_Y f = m_1 \circ V\_ \circ e_Y \circ f$. Assim, para $g : Y \mapsto 2 \in \mathsf{Stone}$, $\mathsf{Stone}_{\mathbb{V}}(\_,1) \circ F_{\mathbb{V}}(f)(g) = m_1 \circ Vg \circ e_Y \circ f$. Para todo $x \in X$, obtém-se $m_1 \circ Vg \circ e_Y \circ f(x) = \overline{\bigcup g\overline{\overline{\{fx\}}}} = \overline{\bigcup \overline{\{gfx\}}} = gfx = \_f(g)(x)$. Logo, considerando apenas os adjuntos à esquerda, o diagrama comuta. Portanto, $\mathsf{Stone}_{\mathbb{V}}(\_,1)$

é um morfismo da meta-categoria KAdj(Stone). De acordo com o Teorema 2.4.11, basta verificar que $M(\mathsf{Stone}_{\mathbb{V}}(\_,1))$ é um isomorfismo de mónadas.

Seja $\alpha = M(\mathsf{Stone}_{\mathbb{V}}(\_,1))_X$. Por definição,

$$\alpha = \; VX \xrightarrow{ev_{VX}} \mathsf{Bool}_{\perp,\vee}(\mathsf{Stone}(VX,2),2) \xrightarrow{-(m_1 \circ V\_)} \mathsf{Bool}_{\perp,\vee}(\mathsf{Stone}(X,2),2) \; .$$

Assim, para $A \in VX$, $\alpha(A) = ev_A \circ m_1 \circ V\_$. Desta forma, para $f \in \mathsf{Stone}(X,2)$, $ev_A \circ m_1 \circ V\_(f) = ev_A \circ m_1 \circ Vf = m_1 \circ Vf(A) = \overline{\bigcup \overline{fA}}$. Portanto, $\alpha(A)(f) = 0 \iff \forall a \in A, fa = 0 \iff A \subseteq f^{-1}\{0\}$.

Considere-se a função $\alpha^{-1} : \mathsf{Bool}_{\perp,\vee}(\mathsf{Stone}(X,2),2) \to VX$ definida por $\alpha^{-1}(\psi) = \bigcap_{f:\psi f=0} f^{-1}\{0\}$.

- $\alpha^{-1} \circ \alpha(A) = A$

  Dado que A é fechado e os conjuntos simultaneamente abertos e fechados formam uma base para a topologia, $A = \bigcap_{f:A\subseteq f^{-1}\{0\}} f^{-1}\{0\}$. Mas, $A \subseteq f^{-1}\{0\} \iff fA = \{0\}$. Logo, $A = \bigcap_{f:\alpha(A)(f)=0} f^{-1}\{0\} = \alpha^{-1} \circ \alpha(A)$.

- $\alpha \circ \alpha^{-1}(\psi) = \psi$

  Seja $\psi \in \mathsf{Bool}_{\perp,\vee}(\mathsf{Stone}(X,2),2)$.

  $(\alpha(\alpha^{-1}\psi)(f) = 0 \Rightarrow \psi f = 0)$

  Seja $g \in \mathsf{Stone}(X,2)$ tal que $g\alpha^{-1}\psi = \{0\}$. Assim, $\alpha^{-1}\psi \subseteq g^{-1}\{0\}$. Logo, $g^{-1}\{1\} \subseteq (\alpha^{-1}\psi)^c$. Isto é, $g^{-1}\{1\} \subseteq \bigcup_{f:\psi f=0} f^{-1}\{1\}$. Mas, $g^{-1}\{1\}$ é compacto, portanto $g^{-1} \subseteq f_1^{-1}\{1\} \cup ... \cup f_n^{-1}\{1\}$, com $\psi f_i = 0$. Assim, $g \leq f_1 \vee ... \vee f_n$ e $\psi f_i = 0$. Desta forma, visto que ψ preserva supremos finitos, conclui-se que $\psi g = 0$.

  $(\psi f = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha^{-1}\psi)(f) = 0)$

  Seja $f \in \mathsf{Stone}(X,2)$ tal que $\psi f = 0$. Por definição, $\alpha^{-1}\psi \subseteq f^{-1}\{0\}$. Logo, $f\alpha^{-1}\psi = \{0\}$.

De forma semelhante obtém-se que $\mathsf{Spec}_{\mathbb{V}}(\_,1)$ é uma equivalência. □

3.2 Produtos tensoriais

No espírito da categoria de Kleisli para a mónada das partes, podemos identificar os morfismos em $\mathsf{Spec}_{\mathbb{V}}$ como relações particulares. Para espaços espectrais X, Y, uma ***relação*** $R : X \to Y$ diz-se ***espectral*** se a correspondente função de $X \to PY$ se factoriza por intermédio da inclusão $VY \to PY$ e a corestrição $X \to VY$ é espectral.

Definição 3.2.1. SpecR é a categoria cujos objectos são endorelações espectrais e os morfismos são os morfismo de Spec para os quais o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "R"'] & X' \arrow[d, "R'"] \\ X \arrow[r, "f_*"'] & X' \end{tikzcd}$$

em $\mathsf{Spec}_{\mathbb{V}}$ comuta, onde f_* é a relação determinada por f.

A categoria StoneR define-se de forma idêntica substituindo espaços espectrais por espaços de Stone e relações espectrais por relações de Stone.

Definição 3.2.2. DLatO é a categoria cujos objectos são operadores em reticulados distributivos (endomorfismos na categoria $\mathsf{DLat}_{\perp,\vee}$) e os morfismos são os morfismo de DLat para os quais o diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "h"] \arrow[d, "O"'] & L' \arrow[d, "O'"] \\ L \arrow[r, "h"'] & L' \end{tikzcd}$$

em $\mathsf{DLat}_{\perp,\vee}$ comuta.

Do mesmo modo, BoolO é a categoria cujos objectos são operadores em álgebras booleanas e os morfimos são homomorfismos de álgebras Booleanas compatíveis com os operadores.

O próximo teorema expressa a equivalência entre a abordagem algébrica para a semântica da lógica modal proposicional, baseada em álgebras Booleanas com operador, e a abordagem relacional, baseada em frames de Kripke.

Teorema 3.2.3. $\mathsf{StoneR} \simeq \mathsf{BoolO}^{\mathrm{op}}$

Demonstração. De acordo com o Teorema 3.1.9, obtém-se que $\mathsf{Stone}_{\mathbb{V}} \simeq \mathsf{Bool}^{\mathrm{op}}_{\perp,\vee}$, $\mathsf{Stone} \simeq \mathsf{Bool}^{\mathrm{op}}$ e o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Stone}_{\mathbb{V}} \arrow[r, "F'"] & \mathsf{Bool}^{\mathrm{op}}_{\perp,\vee} \\ \mathsf{Stone} \arrow[u, "(\_)_*"] \arrow[r, "F"'] & \mathsf{Bool}^{\mathrm{op}} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

comuta, onde $F' = \mathsf{Stone}_{\mathbb{V}}(\_, 1)$ e $F = \mathsf{Stone}(\_, 2)$. Assim, o par de funções $E = (F', F)$ é um functor de StoneR para $\mathsf{BoolO}^{\mathrm{op}}$ que actua nos objectos como F e nos morfismos como F'. Desta forma, visto que F é fiel, E é fiel. Além disso, E é pleno pois F é pleno, F' é fiel e o diagrama comuta. Por outro lado, seja $O : B \to B'$ um objecto de BoolO. Uma vez que F é essencialmente sobrejectivo nos objectos existe $X \in \mathsf{Stone}$ tal que $B \cong FX = F'X$. Assim, seja $i : B \to F'X \in \mathsf{Bool}$ um isomorfismo. O endomorfismo definido pelo diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "O"'] & F'X \arrow[l, "i^{-1}"'] \arrow[d] \\
B \arrow[r, "i"'] & F'X
\end{tikzcd}$$

em $\mathsf{Bool}_{\perp,\vee}$ é isomorfo a O em BoolO. Portanto, uma vez que F' é pleno, conclui-se que E é essencialmente sobrejectivo nos objectos. $\square$

Recorrendo a um argumento idêntico ao da prova do teorema anterior, obtemos

Teorema 3.2.4. $\mathsf{SpecR} \simeq \mathsf{DLatO}^{\mathrm{op}}$

Agora, em vez de categorias de relações binárias, poderíamos considerar categorias de relações "trinárias" ($R : X \to X \times X$), etc. Assim, é pertinente descobrir qual a operação no lado algébrico correspondente ao produto cartesiano, que não é o produto nas categorias $\mathsf{Spec}_{\mathbb{V}}$ e $\mathsf{Stone}_{\mathbb{V}}$. Na discussão que se segue provamos que esta operação é o produto tensorial. Nas categorias $\mathsf{DLat}_{\perp,\vee}$ e $\mathsf{Bool}_{\perp,\vee}$ o produto tensorial de A e B é um objecto que representa bimorfismos de $A \times B \longrightarrow C$, isto é, funções que são morfismos em cada variável mas não necessariamente em ambas.

Definição 3.2.5. Sejam A, B, C reticulados distributivos. A função $\phi : A \times B \to C$ é um bimorfismo se preserva supremos finitos em cada variavel. Isto é, para todo $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$, $\phi(a, \perp) = \perp$, $\phi(\perp, b) = \perp$, $\phi(a \vee a', b) = \phi(a, b) \vee \phi(a', b)$ e $\phi(a, b \vee b') = \phi(a, b) \vee \phi(a, b')$.

Proposição 3.2.6. *Sejam X, Y, Z espaços espectrais, $S : \mathsf{Spec}_{\mathbb{V}} \to \mathsf{DLat}_{\perp,\vee}$ o functor equivalência discutido na secção anterior, $\phi : SX \times SY \to SZ$ um bimorfismo e $\hat{\phi} : S(X \times Y) \to PZ$ a função definida por $\hat{\phi}(w) = \bigcup\limits_{A \times B \subseteq w} \phi(A, B)$, com $A \in SX$ e $B \in SY$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

a) O bimorfismo ϕ é monótono

b) $\phi(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i, \bigcup\limits_{j=1}^{m} B_j) = \bigcup\limits_{i=1}^{n}\bigcup\limits_{j=1}^{m} \phi(A_i, B_j)$

c) A função $\hat{\phi}$ é monótona

Demonstração.

a) Seja $(A, B) \subseteq (A', B')$. Então, uma vez que ϕ preserva supremos finitos em cada variável, $\phi(A, B') = \phi(A, B \cup B') = \phi(A, B) \cup \phi(A, B')$. Logo, $\phi(A, B) \subseteq \phi(A, B')$. Analogamente, constata-se que $\phi(A, B') \subseteq \phi(A', B')$. Portanto, $\phi(A, B) \subseteq \phi(A, B') \subseteq \phi(A', B')$.

b) O bimorfismo ϕ preserva supremos finitos em cada variável, logo

$$\phi(\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \bigcup_{j=1}^{m} B_j) = \bigcup_{i=1}^{n}\phi(A_i, \bigcup_{j=1}^{m}B_j) = \bigcup_{i=1}^{n}(\bigcup_{j=1}^{m}\phi(A_i, B_j)) = \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}\phi(A_i, B_j)$$

c) Suponha-se que $w \subseteq w'$. Seja $z \in \hat{\phi}(w)$.

$$z \in \hat{\phi}(w) \iff \exists A \times B \subseteq w : z \in \phi(A, B)$$

Mas, $w \subseteq w'$, logo $A \times B \subseteq w'$. Portanto, $\phi(A, B) \subseteq \hat{\phi}(w)$. Consequentemente $z \in \hat{\phi}(w')$.

□

Proposição 3.2.7. *Nas condições da proposição anterior, $\hat{\phi}$ é o único morfismo de* $\mathsf{DLat}_{\perp,\vee}$ *que torna o diagrama*

$$\begin{tikzcd} SX \times SY \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "\phi"'] & S(X \times Y) \arrow[d, "\hat{\phi}"] \\ SZ \arrow[r, hook] & PZ \end{tikzcd}$$

comutativo, onde $\times : SX \times SY \to S(X \times Y)$, é o bimorfismo definido por $\times(A, B) = A \times B$.

Demonstração.

a) O diagrama comuta.

Seja $(C, D) \in SX \times SY$. Por definição,

$$\hat{\phi} \circ \times(C, D) = \bigcup_{A \times B \subseteq C \times D} \phi(A, B)$$

Mas, $A \times B \subseteq C \times D \iff A \subseteq C$ e $B \subseteq D$. Portanto, uma vez que que ϕ é monótona, $\hat{\phi} \circ \times(C, D) = \phi(C, D)$.

b) A função $\hat{\phi}$ é um morfismo de $\mathsf{DLat}_{\perp,\vee}$

Em primeiro lugar,

$$\hat{\phi}(\emptyset) = \bigcup_{A \times B \subseteq \emptyset} \phi(A, B)$$

e

$$A \times B \subseteq \emptyset \iff A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset.$$

Porém, ϕ preserva supremos finitos em cada variável, logo $\phi(A, \emptyset) = \phi(\emptyset, B) = \emptyset$. Desta forma, resta provar que $\hat{\phi}(w_1 \cup w_2) = \hat{\phi}(w_1) \cup \hat{\phi}(w_2)$, para quaisquer $w_1, w_2 \in S(X \times Y)$.

- $\hat{\phi}(w_1 \cup w_2) \supseteq \hat{\phi}(w_1) \cup \hat{\phi}(w_2)$

  $\hat{\phi}$ é monótona. Logo, $\hat{\phi}(w_1 \cup w_2) \supseteq \hat{\phi}(w_1)$ e $\hat{\phi}(w_1 \cup w_2) \supseteq \hat{\phi}(w_2)$. Portanto, $\hat{\phi}(w_1 \cup w_2) \supseteq \hat{\phi}(w_1) \cup \hat{\phi}(w_2)$.

- $\hat{\phi}(w_1 \cup w_2) \subseteq \hat{\phi}(w_1) \cup \hat{\phi}(w_2)$

  Seja $C \times D \subseteq w_1 \cup w_2$, com $C \in SX$ e $D \in SY$.

$$w_1 = \bigcup_{A \times B \subseteq w_1} A \times B \text{ e } w_2 = \bigcup_{A \times B \subseteq w_2} A \times B$$

  Mas, w_1 e w_2 são compactos e $\bigcup_{A \times B \subseteq w} A \times B$ é uma cobertura de abertos para w pelo que existem conjuntos finitos $F_1 \subseteq \{A \times B : A \times B \subseteq w_1\}$ e $F_2 \subseteq \{A \times B : A \times B \subseteq w_2\}$ tais que

$$w_1 = \bigcup_{A \times B \in F_1} A \times B \text{ e } w_2 = \bigcup_{A \times B \in F_2} A \times B$$

  Portanto,

$$w_1 \cup w_2 = \bigcup_{A \times B \in F_1} A \times B \quad \cup \bigcup_{A \times B \in F_2} A \times B.$$

  Assim,

$$C \times D = C \times D \cap (w_1 \cup w_2) = \bigcup_{A \times B \in F_1} A \cap C \times B \cap D \quad \cup \bigcup_{A \times B \in F_2} A \cap C \times B \cap D$$

  Agora, tendo em conta que SX e SY são fechados para interseções finitas, defina-se para todo $a \in C$ e $b \in D$

$$C_a = \bigcap_{A \times B \in F_1 \cup F_2 : a \in A \cap C} A \cap C \quad \text{e} \quad D_b = \bigcap_{A \times B \in F_1 \cup F_2 : b \in B \cap D} B \cap D$$

  Claramente,

$$C = \bigcup_{a \in C} C_a \quad \text{e} \quad D = \bigcup_{b \in D} D_b$$

  Visto que C e D são compactos em X e Y respectivamente, existem $F_C \subseteq C$ e $F_D \subseteq D$ finitos tais que

$$C = \bigcup_{a \in F_C} C_a \quad \text{e} \quad D = \bigcup_{b \in F_D} D_b$$

Desta forma, uma vez que ϕ preserva supremos finitos em cada variável,

$$\phi(C, D) = \bigcup_{a \in F_C} \bigcup_{b \in F_D} \phi(C_a, D_b).$$

Para todo $(a, b) \in C \times D(\supseteq F_C \times F_D)$, por construção, $C_a \times C_b \subseteq w_1$ ou $C_a \times C_b \subseteq w_2$. Note-se que $(a, b) \in C \times D \subseteq w_1 \cup w_2$. Logo, $(a, b) \in A \times B \subseteq w_1$ ou $(a, b) \in A \times B \subseteq w_2$. Sem perda de generalidade, considere-se que $(a, b) \in A \times B \subseteq w_1$. Então, $a \in A \cap C \subseteq A$ e $b \in B \cap D \subseteq B$. Consequentemente, $C_a \subseteq A$ e $D_b \subseteq B$. Portanto, $C_a \times C_b \subseteq A \times B \subseteq w_1$. Assim,

$$\phi(C, D) \subseteq \bigcup_{A \times B \subseteq w_1} \phi(A, B) \quad \cup \quad \bigcup_{A \times B \subseteq w_2} \phi(A, B) = \hat{\phi}(w_1) \cup \hat{\phi}(w_2).$$

Logo, $\hat{\phi}(w_1 \cup w_2) = \bigcup_{C \times D \subseteq w_1 \cup w_2} \phi(C, D) \subseteq \hat{\phi}(w_1) \cup \hat{\phi}(w_2)$.

c) $\hat{\phi}$ é único.

Sejam $\hat{\phi}_1$, $\hat{\phi}_2$ funções satisfazendo as propriedades a) e b) e $w \in S(X \times Y)$. Por definição, obtém-se que

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_1(w) &= \hat{\phi}_1(\bigcup_{A \times B \in F} A \times B) = \bigcup_{A \times B \in F} \hat{\phi}_1(A \times B) = \bigcup_{A \times B \in F} \hat{\phi}_1 \circ \times(A, B) = \bigcup_{A \times B \in F} \hat{\phi}_2 \circ \times(A, B) \\ &= \bigcup_{A \times B \in F} \hat{\phi}_2(A \times B) = \hat{\phi}_2(\bigcup_{A \times B \in F} A \times B) = \hat{\phi}_2(w)\end{aligned}$$

□

Proposição 3.2.8. *Sejam X e Y espaços espectrais e $w \in S(X \times Y)$. Então, $\hat{\phi}(w)$ é aberto e compacto.*

Demonstração. Por definição, $\hat{\phi}(w)$ é aberto, visto que é obtido como uma união de conjuntos abertos. Além disso, como w é aberto e compacto,

$$\hat{\phi}(w) = \hat{\phi}(\bigcup_{A \times B \in F} A \times B) = \bigcup_{A \times B \in F} \hat{\phi}(A \times B) = \bigcup_{A \times B \in F} \hat{\phi} \circ \times(A, B) = \bigcup_{A \times B \in F} \phi(A, B)$$

onde F é finito. Portanto, $\hat{\phi}(w)$ é compacto. □

Em conclusão:

Teorema 3.2.9. *Sejam X e Y espaços espectrais. Então, $SX \times SY \xrightarrow{\times} S(X \times Y)$ é o produto tensorial de SX e SY em $\mathsf{DLat}_{\perp,\vee}$.*

Teorema 3.2.10. *Sejam X e Y espaços de Stone. Então, $SX \times SY \xrightarrow{\times} S(X \times Y)$ é o produto tensorial de SX e SY em $\mathsf{Bool}_{\perp,\vee}$.*

Bibliografia

[BKR07] M. M. Bonsangue, A. Kurz, and I. M. Rewitzky. Coalgebraic representations of distributive lattices with operators. *Topology Appl.*, 154(4):778–791, 2007.

[EF99] Martín Hötzel Escardó and Robert Flagg. Semantic domains, injective spaces and monads. Brookes, Stephen (ed.) et al., Mathematical foundations of programming semantics. Proceedings of the 15th conference, Tulane Univ., New Orleans, LA, April 28 - May 1, 1999. Amsterdam: Elsevier, Electronic Notes in Theoretical Computer Science. 20, electronic paper No.15 (1999)., 1999.

[EM45] Samuel Eilenberg and Saunders MacLane. General theory of natural equivalences. *Trans. Am. Math. Soc.*, 58:231–294, 1945.

[Hal62] Paul R. Halmos. *Algebraic logic.* Chelsea Publishing Co., New York, 1962.

[Hof02] Dirk Hofmann. On a generalization of the Stone-Weierstrass theorem. *Appl. Categ. Structures*, 10(6):569–592, 2002.

[JT51] Bjarni Jónsson and Alfred Tarski. Boolean algebras with operators. I. *Amer. J. Math.*, 73:891–939, 1951.

[JT52] Bjarni Jónsson and Alfred Tarski. Boolean algebras with operators. II. *Amer. J. Math.*, 74:127–162, 1952.

[KKV04] Clemens Kupke, Alexander Kurz, and Yde Venema. Stone coalgebras. *Theoret. Comput. Sci.*, 327(1-2):109–134, 2004.

[Koc95] Anders Kock. Monads for which structures are adjoint to units. *J. Pure Appl. Algebra*, 104(1):41–59, 1995.

[Kri59] Saul A. Kripke. A completeness theorem in modal logic. *J. Symb. Logic*, 24:1–14, 1959.

[Kri63] Saul A. Kripke. Semantical analysis of modal logic. I. Normal modal propositional calculi. *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, 9:67–96, 1963.

[Lew18] C.I. Lewis. *A Survey on Symbolic Logic.* University of California Press, 1918.

[Mac71] Saunders MacLane. *Categories for the working mathematician.* Springer-Verlag, New York, 1971. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.

[MS04] John MacDonald and Manuela Sobral. Aspects of monads. In *Categorical foundations*, volume 97 of *Encyclopedia Math. Appl.*, pages 213–268. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[Nac50] Leopoldo Nachbin. *Topologia e Ordem.* Univ. of Chicago Press, 1950. In Portuguese, English translation: Topology and Order, Van Nostrand, Princeton (1965).

[Pri70] H. A. Priestley. Representation of distributive lattices by means of ordered stone spaces. *Bull. London Math. Soc.*, 2:186–190, 1970.

[Pri72] H. A. Priestley. Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 24:507–530, 1972.

[PT91] Hans-E. Porst and Walter Tholen. Concrete dualities. In *Category theory at work (Bremen, 1990)*, volume 18 of *Res. Exp. Math.*, pages 111–136. Heldermann, Berlin, 1991.

[Sto36] Marshall Harvey Stone. The theory of representations for Boolean algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40(1):37–111, 1936.

[Sto38] Marshall Harvey Stone. Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, 67(1):1–25, 1938.

[SV88] Giovanni Sambin and Virginia Vaccaro. Topology and duality in modal logic. *Ann. Pure Appl. Logic*, 37(3):249–296, 1988.

[Zöb76] Volker Zöberlein. Doctrines on 2-categories. *Math. Z.*, 148(3):267–279, 1976.

Apêndice A

Alguns conceitos topológicos

Definição A.0.1. Seja X em espaço topológico. Um subconjunto fechado A de X é ***irredutível*** se $A \neq \varnothing$ e, para quaisquer subconjuntos fechados B, C, $A \subseteq B \cup C$ implica $A \subseteq B$ ou $A \subseteq C$.

Definição A.0.2. Um espaço topológico X é ***sóbrio*** se para todo o subconjunto A irredutível de X existe um único $x \in X$ tal que $A = \overline{\{x\}}$.

Definição A.0.3. Um espaço topológico é um ***espaço de Stone*** se é Hausdorff, compacto e o conjunto de abertos e fechados é uma base para a topologia.

Definição A.0.4. Um espaço topológico é um ***espaço espectral*** se é T_0, sóbrio e o conjunto de abertos e compactos é fechado para intersecções finitas e é uma base para a topologia.

Definição A.0.5. Sejam X e Y espaços espectrais. Uma ***função*** $f : X \to Y$ é ***espectral*** se para todo subconjunto $K \subseteq Y$ aberto e compacto, $f^{-1}K$ é aberto e compacto.

Proposição A.0.6. *Seja X um espaço topológico, $C \subseteq X$ um conjunto fechado não vazio e F um filtro em X.*

a) O conjunto C é irredutível se e só se para todos os abertos A, B,

$$(A \cap B) \cap C = \varnothing \Rightarrow A \cap C = \varnothing \text{ ou } B \cap C = \varnothing.$$

b) O conjunto C é irredutível se e só se o conjunto F'$=\{A \subseteq X : A$ é aberto e $A \cap C \neq \varnothing\}$ é um filtro primo no reticulado dos abertos de X.

c) O conjunto lim F é fechado.

Demonstração.

a) O conjunto C é irredutível $\Leftrightarrow \forall A, B$ abertos, $C \subseteq A^c \cup B^c \Rightarrow C \subseteq A^c$ ou $C \subseteq B^c \Leftrightarrow \forall$ A,B abertos, $C \cap (A \cap B) = \varnothing \Rightarrow C \cap A = \varnothing$ ou $C \cap B = \varnothing$.

b) Consequência da alínea anterior. Basta verificar que F' é base de um filtro. Assim, $(A \cap B) \cap C = \varnothing \Rightarrow A \cap C = \varnothing$ ou $B \cap C = \varnothing$ é equivalente a $A \cap C \neq \varnothing$ e $B \cap C \neq \varnothing \Rightarrow (A \cap B) \cap C \neq \varnothing$.

c) Seja $x \in \overline{lim\, F}$ e N_x uma vizinhança de x. Então, $N_x \cap lim\, F \neq \varnothing$. Assim, N_x é uma vizinhança de $x' \in lim\ F$, logo $N_x \in F$. Portanto, $x \in lim\ F$.

□

Proposição A.0.7. *Seja X um espaço espectral, $SX = \{A \subseteq X : A$ é aberto e compacto$\}$ e $F \subseteq SX$ um filtro. O filtro F é primo se e só se para todo $A, B \in SX$, $A \in F \iff A \cap lim\ F \neq \varnothing$.*

Demonstração.

$(\Rightarrow)$

Seja $F \subseteq SX$ um filtro primo e A um elemento de F tal que $A \cap lim\, F = \varnothing$. Então, para todo $a \in A$ existe $N_a \notin F$ e $N_a \in SX$. Assim, $A \subseteq \bigcup_{a \in A} N_a$. Mas, A é compacto, logo $A \subseteq N_{a_1} \cup ... \cup N_{a_n} \in SX$. Consequentemente, $N_{a_1} \cup ... \cup N_{a_n} \in F$. Contudo, F é primo, portanto conclui-se que existe $N_{a_i} \in F$, o que é uma contradição. Por outro lado, suponha-se que $A \in SX$ e $A \cap lim\ F \neq \varnothing$. Então, A é uma vizinhança de $x \in lim\, F$, logo $A \in F$.

$(\Leftarrow)$

Suponha-se que $A \cup B \in F$. Isto é $(A \cup B) \cap lim\ F \neq \varnothing$. Ou seja, $A \cap lim\ F \neq \varnothing$ ou $B \cap lim\ F \neq \varnothing$. Portanto, $A \in F$ ou $B \in F$. □