WISKUNDE EN KULTUUR

deur

G. J. Hauptfleisch

M.SC. (PRET.), DR. TECH. WET. (DELFT)

Rede uitgespreek by die aanvaarding van die amp van Hoogleraar in die Wiskunde aan die Randse Afrikaanse Universiteit op Woensdag 7 Augustus 1968 om 8 nm.

Publikasiereeks van die
Randse Afrikaanse Universiteit
A-3
JOHANNESBURG
1968

Die Publikasies van die Randse Afrikaanse Universiteit verskyn in die volgende reekse:

A: INTREEREDES EN LESINGS,

B: NAVORSING DEUR DOSENTE EN STUDENTE.

– 70859 –

Mathematics and Culture

SUMMARY

Mathematics reflects the spirit and character of the period in which it came into being. It is the culmination of centuries of interaction between the subject and the cultures which bore it.

We are today also establishing something of the 20th Century in the mathematics we practice. Conversely, mathematics is undeniably exerting an influence on our other cultural creations and the contact points can only be defined when seen in perspective.

Geagte Meneer die Rektor en Vise-kanselier,

Hooggeagte Voorsitter en lede van die Raad,

Geagte Kollegas,

Dames en here studente,

En voorts u almal wat met u teenwoordigheid blyk gee van u belangstelling,

Dames en here,

Die wiskunde word in die abstrakte bedryf maar tog is sy oorspronge geleë in die konkrete werklikheid. Uit 'n fisiese probleemsituasie kristalliseer die wiskundige 'n abstrakte begrip wat al gou uitgroei tot 'n wiskundige teorie. By die uitbouing van hierdie teorie is die onmiddellike toepasbaarheid daarvan in die fisiese werklikheid geen oorweging nie. Op byna vreemde wyse blyk die teorie dan meteens weer 'n praktiese toepassing te hê, waardeur die toepassingsgebied gestimuleer word — en die wiskunde opnuut bevrug word. Daar is dus 'n voortdurende wisselwerking tussen en wedersydse beïnvloeding van dit wat die hand bedryf en dit wat die hoof bedink. So is die wiskunde onlosmaaklik verbind met die kultuur waarvan dit deel is. Ons vind derhalwe in die wiskunde 'n weerspieëling van die gees en karakter van die tydvak waarin dit tot stand gekom het. Meer nog: die moderne wiskunde ontleen sy wese aan die verskillende kulture wat dit bedryf het, dit beïnvloed het en daarna deurgegee het. Wie dan ook enigsins wil deurdring tot die hart van die wiskunde, kan dit alleen doen deur in die kleine die geskiedenis van die vak te beleef. Ons beoog dus om in die eerste plek na te gaan welke fasette van 'n paar antieke kulture in die wiskunde weerkaats word; in die tweede plek: hoe die wiskunde verweef is met die opbloei van die Wes-Europese kultuur en ten laaste wil ons dan die moderne benadering van die wiskunde verstaan teen die agtergrond van sy geskiedenis, wil ons in die wese van die vak die kulminasie sien van eeue se wisselwerking tussen die wiskunde en die kulture waardeur dit gedra is.

In die Egiptiese en Babiloniese kulture is groot hoogtes bereik in die boukuns, die sterrekunde en die landbou. Selfs in die moderne tyd beïndruk die tempels en piramides. Die Babiloniërs het hulle dor land besproei met 'n uitgebreide kanalesisteem uit die Tigris en die Eufraat. Uit hulle kalenders is dit ook duidelik dat hierdie beskawings oor redelik noukeurige sterrekundige kennis beskik het. Daar is egter 'n algehele afwesigheid van getuienis aangaande 'n gesistematiseerde natuurwetenskap. Die reëlmatigheid in die bewegings van die hemelliggame was baie gerieflik vir die doeleindes van korter of langer tydafbakening maar blykbaar is daar nie gevra na die struktuur waarin die hemelliggame inpas nie.

Hierdie faset van die Egiptiese en Babiloniese kulture word duidelik weerspieël in hulle wiskunde, wat empiries was en sonder samehang. Die meetkunde was 'n stuk gereedskap in die boubedryf en in die landbou, so noukeurig of onnoukeurig as wat omstandighede dit genoodsaak het. Vir die getal π (die verhouding van die omtrek van enige sirkel tot die middellyn van dieselfde sirkel) het die Egiptenare die waarde van 3.16 gebruik. In Babilonië is die ruwe benadering van 3 as na genoeg beskou, en hierdie afskatting is wyd toegepas, soos onder andere blyk uit die volgende aanhaling uit die beskrywing in die boek Konings van hoe die tempelgereedskap van Salomo vervaardig is: „Verder het hy die see gemaak van gietwerk; van rand tot rand was tien el, heeltemal rond; . . . en 'n lyn van dertig el kon dit rondom omspan".

Die 3, 4, 5-reghoekige driehoek is toegepas om 'n regte hoek te konstrueer maar eers later is die algemene daarin raakgesien en is die beroemde stelling van Pythagoras geformuleer.

In hierdie kulture het die wiskunde as selfstandige dissipline geen erkenning geniet nie. Daar is nie ingesien dat die verskillende nuttige praktiese formules spesiale gevalle van meer algemene waarhede was en in 'n noue verband met mekaar staan nie.

Die afwesigheid van 'n soeke na oorkoepelende teorieë was dan ook die kenmerk van die wiskunde van hierdie beskawings.

In skerp teenstelling hiermee staan die Griekse kultuur. Die grondslae van die filosofie, die staatkunde en die erkenning van die individu is hier te vinde. Moontlik die belangrikste faset van hierdie kultuur was die plek wat aan die rede gegee is. Die gees van hierdie tyd word soos volg in Handelinge geskets: „Nou het al die Atheners . . . vir niks anders tyd gehad as om iets nuuts te sê en te hoor nie".

Die Grieke het kennis nagestreef uit intellektuele nuuskierigheid en gesoek na 'n geheelbeeld agter die fragmentariese. Dr. F. Sassen stel dit so: „In velerlei vormen zoekt zij naar de eenheid in de veelheid, naar het algemene in het bijzondere, naar het blijvende en eeuwige in het voorbijgaande en tijdelijke". Thales het reeds ongeveer 600 v.C. gepostuleer dat die heelal 'n massa water is wat 'n lugblasie bevat. Op die bodem van hierdie lugblasie is 'n plat oppervlakte, die aarde. Die skool van Pythagoras was daarteenoor van mening dat getalle die heelal ten grondslag lê. Alle natuurverskynsels kon numeries beskryf word. Daar is o.a. ontdek dat toonhoogtes verband hou met die lengtes van die snare van 'n lier. Ook is daaroor besin dat elke heelgetal saamgestel is uit ewe en onewe heelgetalle, sodat in alle dinge die goeie en die kwade saamgebind is. Die soeker na die waarheid moes dus die getalleteorie bestudeer. Die waarheid in die wiskunde was vir hulle die absolute waarheid.

Die Grieke was egter by uitstek meetkundiges. Hulle sistematiek het bestaan uit, eerstens, die neerlê van sekere stellings wat vir almal onmiddellik aanvaarbaar sou wees en dus geen bewys vra nie. Hierdie stellings heet dan aksiomas. Een van Euclides se tien aksiomas in Playfair se weergawe is bv. die volgende: Gegee 'n lyn l en 'n punt P nie op l nie, dan kan daar deur P een en slegs een lyn getrek word in die vlak bepaal deur P en l wat ewewydig is aan l.

Vervolgens word uit hierdie aksiomas op deduktiewe wyse en streng volgens logiese beginsels afleidings gemaak. Die resultate wat so verkry is, was dan net so „waar" as die oorspronklike aksiomas hoewel hulle geldigheid nie ook so ooglopend was nie.

Die gees van soeke na 'n geheelbeeld en die sistematisering van kennis wat by die Grieke aangetref word, is op skouspelagtige wyse vasgelê in hulle wiskunde. Die Grieke het aan die moderne wiskunde sy beslag gegee en die Euclidiese meetkunde is selfs vandag 'n model van aksiomaties-deduktiewe redenering.

Die begrip van waarheid in die wiskunde het met die loop van eeue 'n merkwaardige evolusie ondergaan. Vir die Grieke was die wiskunde 'n noukeurige beskrywing van 'n ideale fisiese werklikheid. Die eerste skok wat hierdie opvatting moes beleef, is ondervind deur die skool van Pythagoras met hulle idee van 'n heelal gebou in 'n getalleraamwerk. Die ontdekking wat hierdie teorie tot aan sy fondamente geskud het, is volgens oorlewering aan boord van 'n skip gemaak. Een van Pythagoras se volgelinge het nl. ondersoek ingestel na 'n reghoekige driehoek waarvan die reghoeksye elk lengte een het. Volgens die bekende stelling van Pythagoras is die vierkant van die lengte van die skuinssy dan 2. Dit kon maklik bewys word dat die lengte van die skuinssy dan nòg 'n heelgetal nòg 'n gewone breuk is. Hier was dus 'n eenvoudige entiteit, 'n sy van 'n driehoek, wat maklik gekonstrueer kan word en wat hom tog nie deur Pythagoras en sy getalle laat beskryf nie. Volgens die oorlewering is die ontdekker van hierdie ongelukkige feit oorboord gegooi om die vreeslike ontdekking geheim te hou!

Waar die wiskunde van die Grieke 'n merkwaardige opbloei beleef het as gevolg van uitmuntende intellektuele aktiwiteit, het toevallige politieke woelinge ook gesorg vir keerpunte in die ontwikkelingsgang van die vak. Ter sake hier is dan twee geskiedkundige feite van groot betekenis. Die eerste betref die sterk ryk wat die Arabiere rondom die Middellandse See opgebou het in die tydperk 800—1200 n.C. Hoewel hulle waardering gehad het vir die Griekse meesterstukke, was hulle eie bydrae tot die ontwikkeling van die vak minimaal. Een van die min Arabiese name wat in die wiskunde voortleef, is dié van Al-Khowarizmi, en wel in die term *algoritme*, wat metode van berekening beteken. Ten spyte van hierdie beskeie rol wat deur die geskiedenis aan die Arabiere toegeken is wat die wiskunde betref, het die kontak wat hulle met die Hindoes gemaak het, van onskatbare waarde vir die ontwikkeling van die wiskunde geblyk. 'n Uiters belangrike konsep, nl. dié van plekwaardes van getalle, het so in ons besit gekom. Volgens hierdie beginsel kan met slegs tien simbole enige heelgetal voorgestel word. Dieselfde simbool, bv. 2, kan gebruik word om 2, 20, 200, 2,000, ens. aan te dui deur alleen maar die relatiewe posisie daarvan te wysig. Hierdie eenvoudige beginsel het 'n vereenvoudiging in die getallewêreld bewerkstellig wat alleen waardeer kan word deur iemand wat ingewikkelde berekenings met Romeinse syfers moes maak. Die briljante ingewing van plekwaardes het selfs ook die vindingryke Grieke ontwyk.

Die tweede politieke woeling en een waarvan die invloed op die wiskunde onberekenbaar was, het toevallig ook 'n geweldadige karakter gehad. In die vyftiende eeu het die Turke die Oos-Romeinse Ryk beset. Voortvlugtende Grieke het oor Wes-Europa versprei en saam met hulle die denkrigtings en kennis van eeue geneem. Die Europese kunstenaars het onder hierdie invloed oor die mens en sy omgewing begin nadink en die kuns het realisties geword in teenstelling met die vroeëre mistieke geaardheid wat dit gehad het. Hierby het die wiskunde van die Grieke 'n belangrike rol gespeel deurdat die Euclidiese meetkunde byvoorbeeld die skilder in staat gestel het om perspektief op sy doeke uit te werk. Die aanskouer van so 'n doek het dan visueel dieselfde ervaring asof hy na die drie-dimensionele werklikheid kyk.

Met hierdie impuls van die wiskunde op sy bevattende kultuur begin 'n uiters interessante wisselwerking. In die skilderkuns het byvoorbeeld probleme na vore gekom wat die wiskundiges geïnteresseer het en wat so aanleiding gegee het tot die totstandkoming van projektiewe meetkunde. 'n Verdere prikkel is aan die wiskunde gegee deur die opbloei van die ekonomie en handel in Europa wat gevra het om kwantitatiewe ontleding. Na die ontdekking van buskruit het wiskundiges geïnteresseerd geraak in die teorie betreffende die vlug van 'n kanonkoeël. Met die steeds waaghalsiger wordende seereise het die navigasieprobleme die wiskundiges verder gestimuleer.

In hierdie bloeitydperk van die wiskunde, waarin dit reëlmatig geprikkel is deur snel opeenvolgende uitvindings, het Newton in Engeland en Leibniz in Duitsland gesorg vir die mees opspraakwekkende toeval in die geskiedenis van die wiskunde. Hulle het nl. onafhanklik van mekaar en onbewus van mekaar se werk, gelyktydig die kragtige wiskundige tegniek van die infinitesimaalrekene ontwerp. Met behulp van hierdie tegniek het Newton sy beroemde bewegingswette geformuleer. Hierdie werk van Newton het 'n konsep van orde in die skepping aan die lig gebring wat vantevore ondenkbaar was. Die feit dat logiese denke soveel deurdringingskrag kan hê, het onder meer aanleiding gegee tot 'n verheerliking van die menslike rede. Newton se wiskundige prestasies het dus verdere impak gegee aan die gedagterigting van die Rasionalisme. Hierdie teëstroom van beïnvloeding van die omvattende kultuur deur die wiskunde moet nie onderskat word nie.

Die wiskunde het vir die natuurwetenskappe onmisbaar geword, maar ook om estetiese redes is wiskundige kennis in die agtiende eeu deur ontwikkelde mense hoog aangeslaan. Wiskundige artikels het in vooraanstaande tydskrifte saam met letterkundige werke verskyn. Daar was klaarblyklik waardering vir wat G. H. Hardy later as tiperend van mooi wiskunde sou aanmerk, nl. die ekonomie van uiteensetting, die verrassingselement in die bewysvoering en die onontwykbaarheid van die resultaat. Bertrand Russell het die benadering van die wiskunde in hierdie tydvak deur die deursnee ontwikkelde mens so beskryf: „Mathematics, rightly viewed, possesses not only true but supreme beauty — a beauty cold and austere, like that of a sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show. The true spirit of delight, the exaltation, the sense of being more than man, which is the touchstone of the highest excellence, is to be found in mathematics as fully as in poetry".

Die negentiende eeu is gekenmerk deur 'n steeds oplaaiende golf van natuurwetenskaplike ontdekkings. Op hierdie golf is die wiskunde meegevoer en in die proses het die studieterrein steeds wyer uitgekring en het die grense steeds meer onoorsigtelik geword. Gevolglik is dit vandag nie moontlik om 'n algemeen aanvaarbare definisie te gee van wat wiskunde is nie. Desnieteenstaande het daar sedert die negentiende eeu al hoe meer besinning gekom oor die aard en die wese van die wiskunde. Een van die grootste deurbrake om die ware aard van die wiskunde te ontbloot, betref die parallel-aksioma van Euclides. Daar was nl. by wiskundiges steeds ongemaklikheid oor die begrip ewewydige reguit lyne. Ewewydige reguit lyne is gedefinieer as lyne wat mekaar nooit sal sny nie al word hulle ook hoe ver na weerskante verleng. Bedenkinge het direk na vore gekom. Dié definisie het die mens buite die sfeer van sy ondervinding gevoer en Euclides se parallel-aksioma soos deur Playfair geformuleer, het dus die eienskap van vanselfsprekend te wees, kortgekom.

Die gedagte het ontstaan dat die parallel-aksioma moontlik met behulp van die ander nege bewys kon word en dus as aksioma geskrap kon word. Pogings om hierdie bewys te lewer, was egter steeds vrugteloos. Die besef dat die parallel-aksioma inderdaad onafhanklik van die ander nege was, het by die groot wiskundige Gauss posgevat en hom laat besluit dat hy dan dié aksioma kon vervang met 'n ander en so die fondament kon lê vir 'n nuwe meetkunde. Sy idee het gestalte gekry met sy postulaat dat deur 'n punt P nie op 'n lyn l nie, *meer as een* reguit lyn getrek kan word in die vlak bepaal deur P en l en almal ewewydig aan l. Hiermee is 'n nie-Euclidiese meetkunde ontwerp waarvoor die krediet gewoonlik gaan aan Lobachefsky en Bolyai. Riemann was verantwoordelik vir nog 'n nie-Euclidiese meetkunde deur te postuleer dat deur P *geen* reguit lyn getrek kan word ewewydig aan l nie.

Die verskyning van die nie-Euclidiese meetkundes het verreikende gevolge gehad vir die wiskunde. Daar is dadelik besef dat al drie die parallel-aksiomas nie gelyktydig waar kan wees nie, en die vraag kon dus gestel word: is enigeen van die drie hoegenaamd waar? Die Grieke se benadering dat aksiomas vanselfsprekende waarhede is en dat die daaruit voortspruitende teorie 'n wiskundige beskrywing is van die fisiese werklikheid, het na tweeduisend jaar onhoudbaar geblyk. Met die toepassing van nie-Euclidiese meetkunde in die relatiwiteitsteorie is besef dat waar een meetkunde 'n sekere situasie die beste sou benader, in 'n ander geval 'n verskillende meetkunde die mees geskikte mag blyk. Daarmee is die idee van absolute waarheid in die wiskunde vir goed laat vaar. Noodwendig het nou ook die moderne opvatting oor aksiomas ontstaan. Aksiomas is nie langer meer vanselfsprekende waarhede nie maar het nou die karakter van afsprake. Die verwantskappe tussen sekere ongedefinieerde terme word by wyse van afsprake neergelê en vorm so 'n aksioma-sisteem. Uit hierdie aksiomas word 'n teorie op deduktiewe wyse opgebou, presies in die klassieke styl. Die enigste aanspraak op waarheid wat uitsprake in hierdie teorie maak, is dat dit op logies geldige wyse uit die aksiomas af te lei is. Waarheid in die wiskunde is dus relatief en wel tot die uitgangspunte of afsprake of aksiomas.

Die impak van die nie-Euclidiese meetkunde buite die sfeer van die wiskunde was eweneens verreikend. Die vraag is wyd gestel of daar nou hoegenaamd 'n absoluut ware wetenskaplike teorie opgebou kan word. Soos in die geval van die verskillende meetkundes kan in die natuurwetenskappe inderdaad verskillende teorieë opgebou word, afhangende van die uitgangspunte. In 'n gegewe situasie word daardie teorie dan as relevant beskou wat die situasie die beste benader. In die fisika, byvoorbeeld, word interferensie-verskynsels van lig verklaar deur as uitgangspunt te neem dat lig 'n golfkarakter het. Foto-elektriese verskynsels aan die ander kant word verklaar deur van die kwantum-teorie uit te gaan.

Maar selfs buite die natuurwetenskappe is die ineenstorting van die absolute waarheid in die wiskunde gevoel. Vir die soekers na waarheid was die Euclidiese meetkunde 'n model. Daar is nou ontdek dat 'n skim nagejaag is. Met die verdwyning van die absolute waarheid uit die wiskunde is die bestaan van die ideale staat, die perfekte stelsel en die volmaakte toestand bevraagteken. Die tendens het geword om dít te implementeer wat die minste probleme skep, die grootste mate van doeltreffendheid meebring, dit wat die beste werk. Die mens het 'n toleransie ontwikkel vir 'n sekere mate van onvolkomenheid.

Nieteenstaande die skokgolf van vertwyfeling wat losgelaat is deur die nie-Euclidiese meetkundes, staan hulle nogtans daar as 'n monument ter ere van die menslike rede. In die skepping van hierdie meetkundes is vanaf helder omlynde uitgangspunte voortgewerk reëlreg in stryd met wat die ervaring geleer en die intuïsie voorgeskryf het. Alleen aan die logika is rekenskap gegee en die uitgangspunte is tot hulle uiterste konsekwensies deurgevoer met fenomenale intellektuele moed en dryfkrag.

'n Verdere gevolg van die invoering van die nie-Euclidiese meetkundes was dat die wiskunde geëmansipeer geraak het van die fisiese werklikheid. As die wiskunde dan nie 'n beskrywing is van die konkrete nie, dan hoef 'n wiskundige hom nie te bekommer oor die onmiddellike toepasbaarheid en die interpretasie van sy werk nie. Hierdie nuwe vryheid het aanleiding gegee tot die studie van meer-dimensionele ruimtes en komplekse getalle. Die ironiese is dat hierdie werk later op verrassende wyse praktiese toepassings gevind het.

Soos dit eksterne faktore was wat die waarheid in die wiskunde in perspektief gestel het, so was dit eweneens faktore van buite wat aan die lig gebring het wat die ware studieobjekte van die wiskunde is. Die Skool van Pythagoras het vroeg reeds oorhoops geraak in hulle poging om die wese van die getal te deurvors. In die negentiende eeu is langsamerhand tot die besef gekom dat dit sinloos is om te vra na die wese van getal, punt, lyn, ens. Dit het duidelik geword dat hierdie entiteite ongedefinieer gelaat moet word en dat die taak van die wiskunde lê in die studie van die relasies tussen hierdie objekte, die bewerkings wat in versamelings van sodanige wiskundige objekte gedefinieer kan word en in die strukture van hierdie wiskundige sisteme.

Hierdie insig lê die moderne algebra ten grondslag. In 'n sekere sin het die penarie van die Skool van Pythagoras dus die weg gebaan vir die abstrakte algebra. In die moderne algebra is saamgetrek die moderne benadering van die aksioma en daarmee die begrip van relatiewe waarheid en die suiwere siening van die ware studieobjekte. 'n Enkele sisteem uit die moderne algebra sou dus kon illustreer wat die kulminasie is van eeue van wisselwerking tussen die wiskunde en die kulture waarin dit ingebed was.

Laat ons dan as voorbeeld die groepsisteem beskou. 'n Groep is 'n versameling G wat geslote is met betrekking tot 'n sekere binêre bewerking. Hiermee bedoel ons dat daar 'n afspraak bestaan waarvolgens met enige twee elemente a en b van G in 'n sekere volgorde geneem, 'n derde element c in G geassosieer word. Ons kan gerieflikheidshalwe sê c is die produk van a en b, hoewel die gewone vermenigvuldiging van getalle nie bedoel word nie. G hoef nl. nie 'n getalleversameling te wees nie. Die versameling G moet verder nog aan drie ander eise voldoen om as 'n groep geklassifiseer te kan word. In die eerste plek moet die genoemde bewerking assosiatief wees, d.w.s. met enige drie elemente uit G, sê a, b en c in 'n sekere vaste volgorde, word 'n eenduidige produk geassosieer. Dit moet nl. irrelevant wees of ons die produk van a en b eers bereken of b en c eerste.

In die tweede plek moet daar in G 'n linker-identiteitselement e te vinde wees, d.i. 'n element sodanig dat die produk van e en 'n willekeurige element a van G, in hierdie volgorde, steeds a is.

Tenslotte moet elke element a van G 'n linker-inverse besit, d.w.s. vir elke element a in G moet daar 'n element b in G te vinde wees sodat die produk van b en a, in hierdie volgorde, die element e is.

Nou is die afspraak dus dat as

(i) 'n versameling G geslote is met betrekking tot 'n binêre bewerking,
(ii) hierdie bewerking assosiatief is,
(iii) daar 'n linker-identiteitselement in G bestaan,
(iv) elke element van G 'n linker-inverse besit,

dan sal ons G 'n groep noem.

Ons let nou daarop dat die aard van die elemente van G glad nie ter sprake is nie. Dit kan getalle wees of mense of wat dan ook. Vir die algebraïs is G 'n abstrakte versameling sonder konkrete assosiasie. Die elemente van G is ongedefinieerde entiteite. Ook is die aard van die binêre bewerking in G volkome irrelevant, solank dit maar assosiatief is. Dit kan optelling of vermenigvuldiging van getalle wees of dit kan draaiings van 'n starre liggaam om 'n as wees of een van 'n menigte ander moontlikhede.

Hierdie vier afsprake beliggaam nou 'n sisteem van aksiomas in terme van ongedefinieerde entiteite. Dit is nie vanselfsprekende waarhede nie, dit is alleen maar afsprake. Dit is nie 'n poging tot 'n beskrywing van 'n fisiese verskynsel nie, hoewel die wortels van die konsep *groep* in die konkrete lê. Die vier groepaksiomas is nie na willekeur neergelê nie, maar is 'n abstrahering van eienskappe wat in verskillende konkrete situasies opgemerk is. In 'n sin is 'n groep dus die kristallisering van essensie.

Nou is dit merkwaardig dat, met slegs hierdie vier aksiomas as basis, op deduktiewe wyse 'n teorie opgebou is wat so uitgebreid is dat weinig algebraïste hulle in al sy vertakkings volkome tuis voel. Wat meer is, die volume groepteoretiese kennis brei steeds teen 'n verbysterende tempo uit.

As ons die aksiomas van 'n groep versigtig nagaan, dan let ons op dat afgespreek is dat daar *'n* linker-identiteitselement sal bestaan, d.w.s. *minstens een*. Dit lyk dus asof daar geen beswaar kan wees teen 'n groep met etlike verskillende linker-identiteitselemente nie en selfs ook nie teen groepe met een of meer regter-identiteitselemente nie. Eweneens skyn dit ook in orde te wees, d.w.s. binne die raamwerk van ons afsprake, dat 'n gegewe element van 'n groep ook meerdere linker-inverses kan besit en selfs ook een of meer regter-inverses. Maar nou is dit juis elementêre stellings in die groepeteorie dat elke linker-identiteitselement *ook* 'n regter-identiteitselement van die groep is en dat daar in elke groep presies een identiteitselement bestaan wat sowel 'n linker- as regter-identiteitselement is. Ook is elke linker-inverse van 'n element a van G tewens 'n regter-inverse en elke a van G besit dus presies een sogenaamde inverse.

Hoewel hierdie bewerings nie so skerp in die aksiomas gemaak is nie, kan nietemin maklik bewys word dat die vier aksiomas as geheel gelees *dit wel impliseer*. Die groepteoretikus se taak is juis om na te vors welke verdere implikasies in hierdie vier aksiomas opgesluit lê. Dit is nie ondenkbaar dat sommige implikasies nooit ontdek sal word nie.

Die indruk mag nou geskep word dat die wiskunde weggegroei het van die fisiese werklikheid en, soos 'n sekere student dit gestel het, dat dit bloot hersensgimnastiek geword het. Tog bly die wiskunde steeds met albei voete op vaste aarde, soos die steeds uitdyende toepassingsgebied van die groepeteorie byvoorbeeld illustreer. Selfs wiskunde wat vroeër as kuriositeite beskou is, soos die nie-Euclidiese meetkundes, het later geblyk van onmisbare praktiese nut te wees.

Hoe verskillend van aard situasies kan wees waarin die abstrakte groepeteorie gestalte kan kry, blyk uit die volgende twee eenvoudige voorbeelde. Beskou die getalle 0, 1 en 2. Kom

ons definieer 'n binêre bewerking in hierdie versameling van drie elemente soos volg: as twee van hierdie getalle gegee is, word hulle eerstens bymekaar getel op die gewone wyse, daarna deur 3 gedeel en die resultaat is dan die res wat so gevind word. Ons noem hierdie bewerking optelling modulo 3. Byvoorbeeld: $2 + 2 = 4$ en deling van 4 deur 3 laat 'n res van 1 sodat in hierdie algebra geld $2 + 2 = 1$, 'n resultaat wat nie wyd waardeer word nie! By nadere ondersoek blyk die getalle 0, 1 en 2 tesame met optelling modulo 3 'n groep te wees. Die geslotenheid volg daaruit dat by deling deur 3 die enigste getalle wat as reste kan optree, juis 0, 1 en 2 is. Die assosiatiewe wet geld klaarblyklik. 0 is die unieke identiteitselement, 1 en 2 is mekaar se inverses en 0 is sy eie inverse.

As tweede voorbeeld beskou ons 'n gelyksydige driehoek met hoekpunte A, B en C. Die elemente van ons versameling is kloksgewyse rotasies kleiner as 'n volledige omwenteling van hierdie driehoek om sy swaartepunt in die vlak waarin hy lê en wel sodanig dat 'n hoekpunt weer op 'n hoekpunt teregkom. Dit is direk duidelik dat daar presies drie moontlike rotasies is wat aan hierdie vereistes voldoen, nl. 'n rotasie deur nul grade, waarby die driehoek eenvoudig onversteurd bly, 'n rotasie deur $120°$ waaronder A op B sal val en 'n rotasie deur $240°$ waaronder A op C sal val. Die bewerking wat ons in hierdie versameling invoer, is die volgende: twee gegewe rotasies word na mekaar uitgevoer. Die stand van die driehoek wat so bereik word, kon ewe goed verkry gewees het deur een van die drie genoemde rotasies kleiner as 'n volledige omwenteling. *Hierdie* rotasie is dan die produk van die gegewe twee rotasies. Weer eens het ons 'n groepsisteem met drie elemente.

Hoewel die aard van die elemente en die bewerking in hierdie twee voorbeelde so verskil, is dit ook inderdaad die enigste verskille en is die strukture van die twee groepe identies en maak die groepeteorie geen onderskeid tussen hulle nie. Abstrakte stellings in die groepeteorie word ware bewerings as hulle vertaal word in terme van 'n spesifieke groepmodel. Die stelling dat elke groep presies een identiteitselement besit, beteken dat in die eerste voorbeeld die *getal* 0 en in die tweede voorbeeld 'n *rotasie deur* 0 *grade* die onderskeie eenduidige identiteitselemente is. Dat elke element presies een inverse besit, blyk ook waar te wees in die genoemde twee voorbeelde.

Die ekonomie van die abstrakte algebra tref dadelik. As 'n waarnemer sou ontdek dat sy situasie 'n model is van die groepaksiomas, beskik hy in die groepetoerie dadelik oor 'n enorme hoeveelheid gegewens betreffende sy situasie. Hy moet alleen maar die abstrakte resultate vertaal in sy konkrete terme. Juis deur sy teorie abstrak op te bou, ongebonde aan 'n spesifieke fisiese model, maak die algebraïs sy werk toeganklik en van nut op 'n wye gebied.

Die groepteoretikus se studieobjek is dus die struktuur van die groep, die relasies tussen die elemente van die groep en nie die aard van die elemente nie. Sy uitgangspunt is vier eenvoudige afsprake en sy metode deduktief. Waarheid in die groepeteorie is vir hom relatief. 'n Uitspraak is waar as dit uit die aksiomas bewys kan word en dit het nie 'n universele karakter nie. Hierdie siening van die vak is die logiese konsekwensie van die interaksie tussen die wiskunde en die kulture waarin die wiskunde deur die eeue gedra is.

Soos die wiskunde nog nooit bo en buite en los van die ander kultuurbedrywighede van die mens gestaan het nie, so is dit tans ook 'n integrale deel van ons kultuur. Die wiskunde ondergaan in ons dag ook invloede wat deur later geslagte geëvalueer sal word. Die koms van die rekenoutomaat oefen reeds 'n sterk invloed uit op die wiskunde. Die wiskunde is organies en lewenskragtig en geensins 'n starre afgeslote dissipline nie. Soos die Egiptenare en Babiloniërs, die Grieke en die Hindoes, is ons vandag ook besig om iets van die twintigste eeu vas te lê in die wiskunde wat ons bedryf. Omgekeerd oefen die wiskunde onteenseglik 'n invloed uit op ons ander kultuurskeppinge en sal die aanrakingspunte, eers in perspektief gesien, omlyn kan word.

Hooggeagte Voorsitter en lede van die Raad, vir die voorreg om aan hierdie besondere Universiteit verbonde te wees, moet ek u bedank. Ek sal steeds daarna streef om die vertroue wat u in my gestel het, waardig te bly.

Geagte meneer die Rektor, ek reken dit tot een van die kosbaarste geleenthede in my loopbaan om onder u leiding hier te kan werk. Ek sien vooruit na die verdere realisering van die opwindende akademiese perspektiewe wat u hier gestel het. Graag sê ek by hierdie geleentheid my algehele lojaliteit toe aan u en aan die Randse Afrikaanse Universiteit.

Geagte kollegas, in die afgelope jaar dat ons hier saam werk, het u my met die grootste mate van welwillendheid bejeën. Ek wil u bedank vir die hartlike gees van samewerking

wat ons gesamentlike arbeid hier gekenmerk het. Graag stel ek my volledig diensbaar in u uitgelese geselskap.

Seer geagte kollega Van der Walt, waar ek reeds geruime tyd van u vriendskap kon geniet, daar is dit nou ook my voorreg om in dieselfde departement met u te staan. Ek sien enersyds vooruit na vrugbare jare in die opbou van die departement Wiskunde saam met u en in 'n gelyke mate na die verryking wat u vakkundigheid vir my as persoon en vir die Universiteit in die geheel bring.

Dames en here studente, dit sal my heerlike taak wees om aan u vorming mee te werk. Ek sien dit as 'n uitdaging om nie alleen die formele wiskundige kennis by u tuis te bring nie maar om ook by u te kweek 'n waardering vir die skoonheid van die denke wat volgens die klassieke spreuk skoner is as die skoonheid van die aanskouing.

Ek dank u vir u aandag.