

**UNIVERSIDAD DE GRANADA**

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE  
INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y  
PUERTOS**



**REVISIÓN DE LAS TEORÍAS DE CAMPO DE  
COMPRESIONES EN HORMIGÓN  
ESTRUCTURAL**

**TESIS DOCTORAL**

**ALEJANDRO MATEO HERNÁNDEZ DÍAZ**

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

2012

Editor: Editorial de la Universidad de Granada  
Autor: Alejandro Mateo Hernández Díaz  
D.L.: GR 69-2013  
ISBN: 978-84-9028-267-0

**DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE ESTRUCTURAS E  
INGENIERÍA HIDRÁULICA**

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE  
CAMINOS, CANALES Y PUERTOS**

**REVISIÓN DE LAS TEORÍAS DE CAMPO DE COMPRESIONES  
EN HORMIGÓN ESTRUCTURAL**

**ALEJANDRO MATEO HERNÁNDEZ DÍAZ**

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

**DIRECTORA DE TESIS**

**LUISA MARÍA GIL MARTÍN**

Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

**CODIRECTOR DE TESIS**

**ENRIQUE HERNÁNDEZ MONTES**

Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos



**Universidad de Granada**



Como Directores de la Tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza el trabajo ha sido realizado por el/la doctorando/a bajo nuestra dirección y se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones. Así mismo, el trabajo reúne todos los requisitos de contenido, teóricos y metodológicos para ser admitido a trámite, a su lectura y defensa pública, con el fin de obtener el referido Título de Doctor, y por lo tanto AUTORIZAMOS la presentación de la referida Tesis para su defensa y mantenimiento de acuerdo con lo previsto en el Real Decreto 99/2011, de 28 de enero,

GRANADA, 28 DE MAYO DE 2012

Director/es de la Tesis

Fdo.: LUISA MARÍA GIL MARTÍN

ENRIQUE HERNÁNDEZ MONTES

SR. COORDINADOR DEL PROGRAMA DE DOCTORADO EN ESTRUCTURAS



*Ami madre*

# Índice

Índice	I
Resumen	V
Abstract	VII
Agradecimientos	IX
<b>Capítulo 1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos	2
1.2 Metodología	2
<b>Capítulo 2. Estado de la cuestión</b>	<b>5</b>
2.1 La analogía de la celosía	5
2.2 Teoría del Campo de Compresiones	8
2.2.1 Comportamiento a compresión del hormigón fisurado	12
2.3 Teoría Modificada del Campo de Compresiones	17
2.3.1 Comportamiento del hormigón a tracción	19
2.3.2 Estudio a nivel de grieta en la TMCC	24
2.3.3 Recientes simplificaciones de diseño en la TMCC	29
2.4 Rotating-Angle Softened-Truss Model	32
2.5 Teoría Unificada del Campo de Compresiones	40
<b>Capítulo 3. Análisis de la hipótesis EPA en el diseño a cortante de elementos de hormigón armado</b>	<b>45</b>

3.1 Justificación del problema a analizar	45
3.2 Modelo de análisis	48
3.3 Transformación del modelo	51
3.4 Resultados numéricos	57
3.4.1 Influencia de la cuantía de armado longitudinal	58
3.4.2 Influencia de la cuantía de armado transversal	60
3.4.3 Influencia de la resistencia del hormigón	62
<b>Capítulo 4. Ajuste del efecto de tensorrigidez del hormigón en el modelo constitutivo del acero</b>	<b>65</b>
4.1 Justificación del problema a analizar	65
4.2 Coeficiente de ajuste del área de tensorrigidez del hormigón	67
4.3 Estudio de dos casos reales: Arbesman-Conte (1973) y Yoon (1996)	79
<b>Capítulo 5. Introducción de un parámetro de degradación en el diseño a cortante de vigas de hormigón armado</b>	<b>87</b>
5.1 Efecto de degradación del hormigón armado.	87
5.2 Marco analítico y experimental	89
5.3 Reducción del modelo de cortante	96
5.3.1 Estudio de dos casos reales: Soerensen (1974) y Cladera (2002)	100
5.4 Ajuste mediante métodos estadísticos	124
5.5 Ajuste mediante algoritmos genéticos	127



<b>Conclusiones</b>	133
<b>Anexo:</b> Reducción del modelo de cortante. Listado de figuras.	137
Figura 1: Espécimen H 75/4.	139
Figura 2: Espécimen H 75/4. Entrada y salida de la región de solubilidad del sistema.	149
Figura 3: Espécimen T-22	155
Figura 4: Espécimen T-21	161
<b>Bibliografía</b>	167



# Resumen

De entre las teorías desarrolladas para estudiar la respuesta de un elemento de hormigón estructural frente a cortante cabe destacar las denominadas teorías del campo de compresiones. Aunque estas teorías se desarrollaron años atrás, recientemente se han introducido algunas modificaciones en relación al efecto de tensorrigidez del hormigón. La Tesis plantea una revisión teórica de los modelos de campo de compresiones más importantes en el diseño a cortante de elementos de hormigón armado; dicha revisión se centra en dos aspectos clave: el primero de ellos es la denominada hipótesis EPA (también conocida como hipótesis de Wagner), según la cual la dirección del campo principal de tensiones en el hormigón coincide con la del campo principal de deformaciones. El segundo aspecto a tratar es la cuantificación del área de rigidez tensional del hormigón dentro del modelo constitutivo del acero.

La experimentación desarrollada hasta la fecha confirma la hipótesis EPA como una simplificación razonable. No obstante, esta Tesis analiza las diferencias potenciales entre los ángulos de los campos principales de tensión y deformación en el hormigón para casos de diseño concretos, y evalúa la influencia de algunos parámetros mecánicos, tales como la cuantía de armado o la resistencia del hormigón, sobre el efecto de divergencia de tales ángulos.

La segunda línea de trabajo de esta Tesis está dedicada al estudio del comportamiento del acero; las actuales normativas de hormigón estructural plantean la resistencia a cortante de un elemento de hormigón armado como la suma de la contribución del hormigón más la contribución del acero, de tal forma que ambas componentes son invariantes frente a la sollicitación a cortante. Dado que se produce una degradación del hormigón cuando aumenta el nivel de deformación de la pieza, es importante que las teorías de cortante expliquen la variación de la resistencia a cortante en función de la deformación en el hormigón. La Teoría Unificada del Campo de Compresiones (TUCC) establece que, una vez se alcanza la tensión de cedencia en grieta, las tensiones de tracción en el hormigón afectan únicamente a una determinada parte del área de

tensorrigidez; asimismo, en esta Tesis se ha probado que la solubilidad del sistema de ecuaciones de cortante propuesto por las teorías de campo de compresiones viene controlada por la cuantía del área de tensorrigidez del hormigón. Sobre la base de la TUCC, y a partir de la aplicación de un método de análisis que permita discriminar la solubilidad del modelo de cortante, se ha formulado un *parámetro de degradación* del hormigón.

El resultado final de la tesis es, en primer lugar, un conocimiento más integral de los modelos de campo de compresiones para el diseño a cortante en hormigón, y en segundo lugar, un modelo de comportamiento de la armadura más coherente con el fenómeno real de adherencia entre hormigón y acero.

# Abstract

Among the theories to analyze the shear response of a reinforced concrete member, the most important ones are the so-called Compression Field Theories. Although these theories were formulated several years ago, recently some improvements concerning the tension stiffening effect at the concrete have been introduced. The Thesis provides a theoretical review on the most influential theories concerning compression-field models for shear in R/C structures; such review focuses on two key issues: the first one is the so-called Equal Principal Angles hypothesis (EPA hypothesis, also called Wagner's assumption), which states that the direction of principal tensile stress and the direction of principal tensile strain coincide. The second one is the tension stiffening effect in the steel constitutive model.

Experimental evidence indicates that EPA assumption is a reasonable simplification. The Thesis analyzes the potential differences in the angles of principal stress and principal strain and evaluates the influence of some design parameters, such as the reinforcement ratio or the concrete strength, on the divergence of these angles.

The second working line of the Thesis is based on the steel behavior; the structural concrete codes estimate the shear strength as the sum of concrete contribution plus the steel contribution, in such a way that both components are invariant under different levels of load. Since an increment of shear strain produces a degradation of concrete, it is necessary that shear theories define the shear strength as a function of the strain at concrete. The Refined Compression Field Theory (RCFT) explains that, once yield stress is reached at crack, tensile stress in concrete affects only a given fraction of the tension stiffening area. Moreover, this Thesis proves that the solvability of the set of equations proposed by the compression field theories is controlled by the amount of tension stiffening area. From the model proposed by RCFT, and using an analytical

method for discriminating the solvability of shear model, a *degradation parameter* has been formulated.

The final results of the Thesis are, first, a more comprehensive knowledge of the compression-field models for reinforced concrete members subjected to shear, and second, a constitutive model for reinforcement closer to the real bond mechanisms between concrete and steel.

# Agradecimientos

A mi directora de Tesis, Luisa María Gil Martín, por la confianza depositada en mi persona y en la culminación de este trabajo, aun cuando el marco de circunstancias académicas y personales no eran las más propicias. Su disponibilidad y atención personal, su constancia en el trabajo y su diligencia han sido fundamentales para la consecución de los objetivos previstos.

A mi colega y amigo, Manuel D. García Román, con cuyo apoyo personal y profesional he contado en el quehacer diario de esta Tesis; sus enseñanzas y su valiosísima paciencia han sido determinantes en el desarrollo de este trabajo.

A mi jefe, Enrique Hernández Montes, por darme la oportunidad de iniciarme profesionalmente en la investigación del hormigón estructural.

A mi exprofesor y amigo, Javier González Martín, por sus acertados y oportunos consejos en los momentos más cruciales de mi etapa universitaria. Igualmente, quiero mostrar mi más sincero agradecimiento a José María Medina Hernández, de cuya mano he conocido otras facetas de la ingeniería que no se enseñan en la Escuela.

Por último, a mi familia; de forma muy especial a mi madre, motor económico de este trabajo y la persona a quien debo todo lo que soy hoy en día, y a mi padre, quien un día despertó en mí la ilusión y el interés por esta magnífica profesión.

A todos ellos, mi más sincero agradecimiento.

# Capítulo 1

## Introducción

Se puede afirmar que todavía se está buscando una teoría que explique el comportamiento del hormigón sometido a esfuerzos cortantes. La transmisión de tales esfuerzos a través del alma agrietada de una viga de hormigón armado es un proceso sumamente complejo, según el cual, primeramente aparece una familia de grietas y según se incrementa la carga aparecen nuevas grietas mientras que las iniciales se propagan y cambian de inclinación.

La formulación de una ecuación (o conjunto de ecuaciones) que determine la resistencia a cortante de una viga de hormigón armado requiere previamente del conocimiento de la inclinación de las fisuras en el hormigón. Los modelos de campos de compresiones están formulados en la mecánica del continuo<sup>1</sup> y determinan el ángulo de inclinación de las fisuras considerando las deformaciones de la armadura transversal, de la armadura longitudinal y del hormigón (relación de compatibilidad); esto último, sujeto a unas condiciones de equilibrio y a unas relaciones tensión-deformación para la armadura y el hormigón agrietado, permite determinar la respuesta carga-deformación de una sección de hormigón armado sometida a cortante.

Aunque resultados experimentales llevados a cabo sobre elementos de hormigón han puesto de manifiesto que la diferencia entre ambos ángulos es suficientemente pequeña como para poder ser despreciada [42, 43], nunca anteriormente había sido realizado un estudio cuantitativo sobre la discrepancia existente entre ambos ángulos.

Por otra parte, durante décadas se ha venido cuestionando la coherencia de las teorías del campo de compresiones, principalmente desde el punto de vista del tratamiento del acero. Como alternativa al modelo tradicional de barra “aislada” se ha propuesto el modelo de barra “embebida” en el que la adherencia entre hormigón y acero cobra especial importancia [5, 19, 23]. La implementación de modelos compactos que eviten realizar comprobaciones adicionales de equilibrio entre acero y hormigón a nivel de grieta, así como el análisis del efecto que la rigidez tensional del hormigón produce

---

<sup>1</sup> Se consideran deformaciones medias, esto es, comunes a acero y hormigón y medidas sobre una longitud suficiente que incluya varias fisuras.



sobre la respuesta tenso-deformacional del acero, han centrado gran parte de la investigación en este campo en los últimos años.

## **1.1 Objetivos**

Como cualquier otro proceso de revisión, esta Tesis pretende esclarecer aquellos aspectos más críticos de los modelos de campo de compresiones, a fin de obtener soluciones que permitan al ingeniero afrontar nuevos problemas de diseño; dada la extensión del campo de conocimiento que nos ocupa, y a tenor de lo hasta aquí expuesto, el objetivo de esta Tesis se centra en dos temas fundamentales: por un lado, el análisis de la hipótesis EPA o hipótesis de coincidencia de la dirección del campo principal de deformaciones y el campo principal de tensiones en el hormigón, y por otro, la implementación del efecto de degradación del hormigón dentro del modelo constitutivo del acero.

El anterior objetivo general se concreta en los siguientes objetivos específicos:

- a) Cuantificar numéricamente el error potencial asociado al uso de la hipótesis EPA. Analizar la sensibilidad del modelo de campo de compresiones frente a dicho error y proponer estrategias de diseño para minimizarlo.
- b) Analizar el efecto del área de tensorrigidez del hormigón sobre la consistencia (i.e., la solubilidad) del modelo constitutivo del acero, a nivel particular, y del modelo analítico de cortante, a nivel general.
- c) Sobre la base de la información recopilada en b), formular un parámetro de degradación para el hormigón sometido a cortante.

## **1.2 Metodología**

En el análisis de la hipótesis EPA se ha prescindido de campaña experimental al respecto, sirviéndonos exclusivamente del análisis teórico de las ecuaciones aportadas por las teorías de cortante actualmente en vigor. A esta cuestión se destina íntegramente el Capítulo 3 de la Tesis. El método de análisis diseñado se aplicará a un ejemplo particular de una viga de hormigón armado, y a partir de los resultados numéricos obtenidos para dicho caso y de los datos experimentales disponibles al respecto en la

literatura técnica, se emitirán un conjunto de conclusiones en relación a los objetivos específicos propuestos.

En lo que se refiere a la formulación del parámetro de degradación del hormigón, ha sido preciso analizar, con carácter previo, el problema de solubilidad del modelo de cortante. En este sentido, se ha desarrollado un análisis teórico para ajustar el valor del área de tensorrigidez del hormigón. A esta cuestión se dedica el Capítulo 4 de la Tesis. Finalmente, y sobre la base de dicho ajuste, en el Capítulo 5 se formula un parámetro de degradación para el hormigón a partir de las bases de datos experimentales de cortante actualmente existentes.



## Capítulo 2

### Estado de la cuestión

El hormigón, aun bajo cargas muy pequeñas, presenta grietas orientadas perpendicularmente a la dirección principal de tracción. Una vez que aparecen estas grietas, la resistencia a tracción del hormigón en el punto de fisuración queda anulada completamente, y a partir de ese momento los principios de la Mecánica de Medios Continuos dejan de ser aplicables.

#### 2.1 La analogía de la celosía

En 1899, Ritter explica el comportamiento interno de una viga de hormigón armado en términos de un modelo de celosía en la que los elementos a compresión (cordón superior y diagonales) están constituidos por el hormigón presente en la viga, y los elementos a tracción están constituidos por la armadura longitudinal inferior actuando como tirante y la armadura transversal actuando como montante (Figura 2.1).

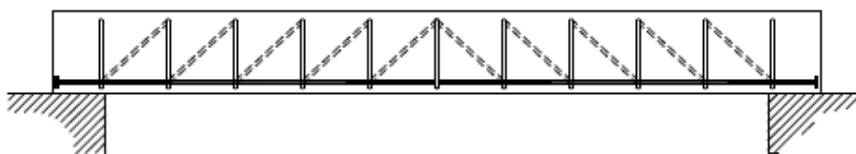


Figura 2.1: Esquema original de Ritter sobre la analogía de la celosía<sup>1</sup>.

En 1902, Mörsch [30] explica y desarrolla el modelo de la celosía con mayor nivel de detalle afirmando que, si bien los montantes de la celosía se encuentran concentrados en la armadura vertical, no ocurre lo mismo con las diagonales comprimidas, las cuales forman un continuo a lo largo de toda la masa de hormigón (Figura 2.2). Tanto Ritter como Mörsch obviaron los esfuerzos de tracción en el hormigón fisurado y asumieron la existencia de un campo de compresiones en el hormigón agrietado formando un ángulo de 45 ° con la horizontal.

---

<sup>1</sup>Adaptado de: RITTER, W. (1899) *Die Bauweise Hennebique (Construction Techniques of Hennebique)*, Schweizerische Bauzeitung, Zürich.

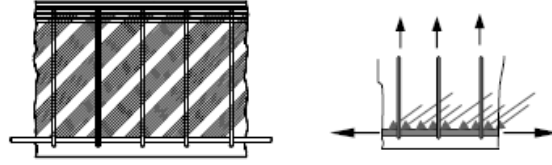


Figura 2.2: Analogía de la celosía de Mörsch. Adaptado de [30].

A continuación se plantea la analogía de la celosía con una orientación genérica  $\theta$  de las bielas de compresión [13]. Si consideramos un campo de esfuerzos cortantes uniformemente distribuido en un área efectiva de ancho  $b_w$  y profundidad  $z$ , la condición de equilibrio exige que la resultante del campo de tensiones principales de compresión en el alma de la viga sea igual a  $V/\text{sen}\theta$ , siendo  $V$  la fuerza cortante (Figura 2.3). A su vez dicha resultante es igual a  $\sigma_2 b_w z \text{cos}\theta$ , donde  $\sigma_2$  es la tensión media principal de compresión en el alma de la viga. Se cumple entonces:

$$\sigma_2 = \frac{V}{b_w z} \frac{1}{\text{sen}\theta \text{cos}\theta} = \frac{V}{b_w z} (\tan \theta + \cot \theta) \quad (2.1)$$

La componente longitudinal de la fuerza diagonal de compresión  $D$  será igual a  $V \cdot \cot \theta$ . Dicha fuerza debe ser contrarrestada por una fuerza igual de tracción  $N_v$  aplicada en la armadura longitudinal, cuyo valor viene dado por:

$$N_v = V \cot \theta \quad (2.2)$$

Asimismo, la fuerza diagonal de compresión referida a la separación entre estribos  $s$  (i.e.,  $\sigma_2 b_w s \cdot \text{sen}\theta$ ) presenta una componente vertical ( $\sigma_2 b_w s \cdot \text{sen}^2 \theta$ ), la cual debe ser equilibrada por una fuerza de tracción en los estribos,  $A_t \sigma_{st}$ , donde  $A_t$  es la sección transversal de los estribos y  $\sigma_{st}$  es la tensión de tracción los mismos. A partir de la ecuación (2.1), se obtiene:

$$\frac{A_t \sigma_{st}}{s} = \frac{V}{z} \tan \theta \quad (2.3)$$

Según el modelo de bielas a  $45^\circ$ , el cortante máximo se alcanzará cuando los cercos alcancen la tensión de cedencia, lo que corresponde a una determinada tensión de cortante  $\tau$  (siendo  $\tau = \frac{V}{b_w z}$ ), tal y como se indica a continuación:

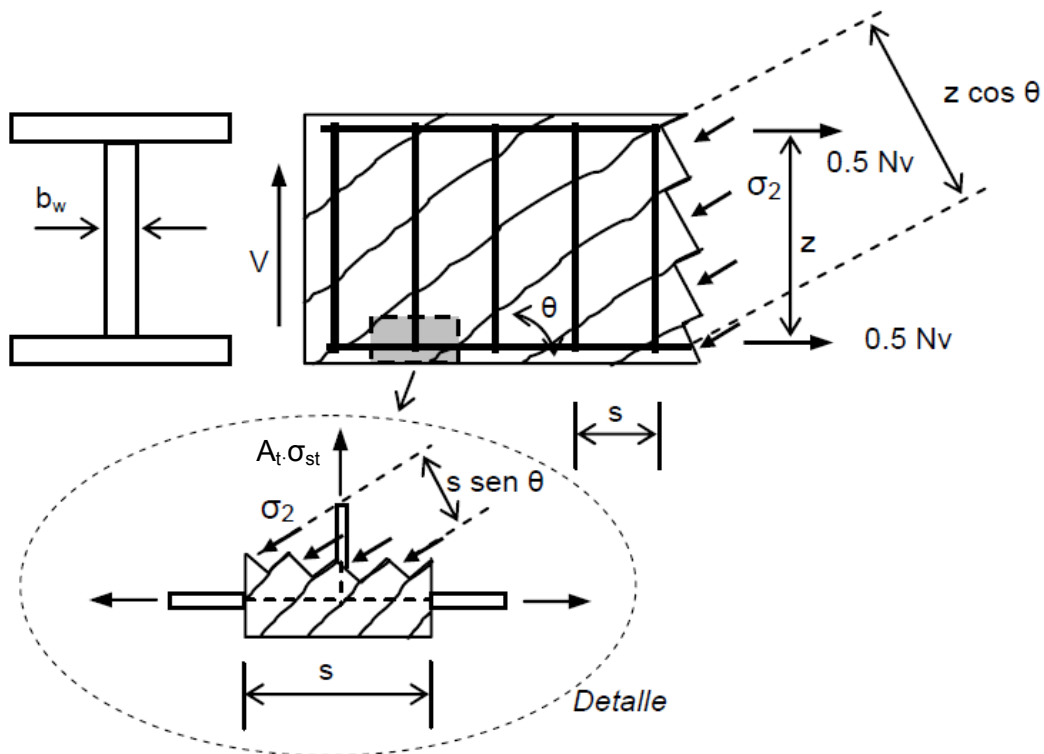


Figura 2.3: Condiciones de equilibrio para la analogía de la celosía bajo una inclinación genérica de bielas  $\theta$ . Adaptado de [13].

$$A_t f_y \frac{h}{s} = \tau b_w h \rightarrow \tau = \frac{A_t f_y}{b_w s} = \rho_t f_y \quad (2.4)$$

donde el brazo mecánico  $z$  se ha aproximado por el canto  $h$  de la viga, y donde  $f_y$  es la tensión de cedencia del acero y  $\rho_t$  es la cuantía de armadura transversal.

La idea inicial de Ritter fue posteriormente modificada ya que la aplicación estricta del método de la celosía conducía a valores de tensiones en las armaduras de cortante claramente superiores a los obtenidos en los ensayos. Esto se debe a que existen otros mecanismos que colaboran en la resistencia a cortante; en el caso de una viga sin armadura de cortante el modelo de Ritter supone que la resistencia a cortante es nula y sin embargo la experimentación al respecto ha demostrado que no es así. Por otro lado, si sólo se considera el mecanismo de la celosía el acero quedará tensado en exceso. Además, en el modelo de Ritter las bielas comprimidas forman  $45^\circ$  con la horizontal y, en general, se ha comprobado que en hormigón armado este ángulo es ligeramente inferior [20]. Se concluye, por tanto, que los modelos de celosía de Ritter y Morsch resultan excesivamente conservadores pues el cortante que resiste una viga según el modelo de la celosía es, en cualquier caso, inferior al que en realidad resiste dicha viga.

En 1922, Mörsch realizaba la siguiente afirmación en relación a la determinación del ángulo de inclinación de la biela de compresión en hormigón [31]:

*We have to comment with regards to practical application that is absolutely impossible to mathematically determine the slope of the secondary inclined cracks according to which one can design the stirrups. For practical purposes one has to make a possibly unfavorable assumption for the slope  $\theta$  and therefore, with  $\tan^2 \theta = \infty$ , we arrive at our usual calculation for stirrups which presumes  $\theta = 45^\circ$ . Originally this was derived from the initial shear cracks which actually exhibit this slope.*

Las fisuras secundarias a las que se refiere Mörsch son aquellas de menor inclinación que se forman al final de la vida de servicio de la viga. Si se tomara la inclinación de dichas fisuras como ángulo de biela de diseño se conseguiría reducir la cuantía de armadura transversal necesaria de forma sustancial. Las anteriores ecuaciones de equilibrio (2.1, 2.2 y 2.3) no son suficientes para calcular el campo de esfuerzos en una viga sometida a cortante, pues el número de variables a determinar (el esfuerzo principal de compresión  $\sigma_2$ , la tracción en la armadura longitudinal  $N_v$ , la tensión en la armadura transversal  $\sigma_{st}$ , y el ángulo de inclinación  $\theta$  de las bielas de compresión) asciende a cuatro, razón por la cual Mörsch afirmaba la imposibilidad matemática de determinar la inclinación de las bielas de compresión.

## **2.2 Teoría del Campo de Compresiones**

Antes de formular una ecuación basada en los mecanismos de biela, que permita determinar la resistencia a cortante de una viga o diseñar los estribos, resulta preciso conocer el ángulo de inclinación de las bielas,  $\theta$ . En 1929, un ingeniero alemán, H.A. Wagner, resolvió con éxito un problema similar al analizar la resistencia a cortante de perfiles armados de vigas metálicas una vez producida la cedencia del alma (Figura 2.4). A la vista de las deformaciones observadas, Wagner dedujo que el alma débil del perfil no resistía a compresión y que, por tanto, el cortante era resistido por un campo diagonal de tracciones apoyado en las alas de la viga y en los rigidizadores transversales [4].

Para determinar el ángulo de inclinación de la tracción diagonal, Wagner consideró que el ángulo de inclinación de la tensión diagonal de tracción coincidía con el ángulo de inclinación de las deformaciones principales a tracción. Así surgieron las denominadas “teorías de los campos diagonales de tracción”.

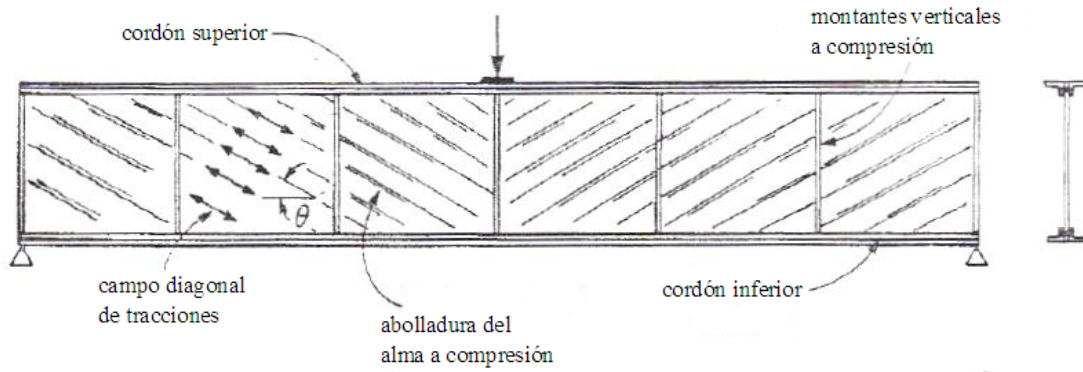


Figura 2.4: Campo diagonal de tracciones en un perfil metálico de alma débil.

Basándose en el planteamiento anterior y trasladándolo al estudio del hormigón se han formulado aproximaciones conocidas como “teorías del campo de compresiones” [29]. Éstas determinan el ángulo de inclinación de las bielas  $\theta$  considerando las deformaciones de la armadura transversal, de la armadura longitudinal y del hormigón. A partir de las teorías del campo de compresiones se puede estudiar la respuesta carga-deformación de una sección sometida a cortante; para ello se plantean las condiciones de equilibrio, las condiciones de compatibilidad y las relaciones tensión-deformación tanto para la armadura como para el hormigón agrietado.

Las teorías de los campos de deformaciones están formuladas en la mecánica del continuo, considerando deformaciones medias, esto es, comunes a acero y hormigón y medidas sobre una longitud suficiente que incluya varias fisuras (Figura 2.5a). A partir del tensor de deformación de segundo orden (Figura 2.5b), las deformaciones en las direcciones cartesianas  $x$  (longitudinal) e  $y$  (transversal) pueden ser obtenidas a partir de las deformaciones principales  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$ :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= -\varepsilon_2 \cos^2 \theta + \varepsilon_1 \sin^2 \theta \\
 \varepsilon_t &= -\varepsilon_2 \sin^2 \theta + \varepsilon_1 \cos^2 \theta \\
 \gamma/2 &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cos \theta \sin \theta
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

A partir de las dos primeras ecuaciones de (2.5), el ángulo de inclinación de grietas  $\theta$  puede ser deducido si se considera que dichas grietas están orientadas en dirección paralela a la deformación principal de compresión:

$$\tan^2 \theta = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_t - \varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_t}{\varepsilon_1 - \varepsilon_x}
 \tag{2.6}$$



El convenio de signos adoptado corresponde al definido por Collins y Mitchell [13], donde las deformaciones a tracción son positivas, tal y como se indica a continuación:

$\varepsilon_x$  es la deformación media longitudinal,

$\varepsilon_t$  es la deformación media transversal,

$\varepsilon_1$  es la deformación principal a tracción,

$\varepsilon_2$  es la deformación principal a compresión, y

$\gamma$  es la distorsión media angular de un elemento (i.e., el doble de la deformación a cortante).

La deformación  $\varepsilon_2$  está alineada en la dirección de la biela de compresión (i.e., formando un ángulo  $\theta$  con el eje longitudinal (Figura 2.5). La ecuación (2.6) se ha conocido tradicionalmente como la *ecuación de Wagner*.

Para un valor dado de  $\theta$ , la ecuación (2.6) puede ser considerada como una relación de compatibilidad entre las tres deformaciones del sistema  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_x$  y  $\varepsilon_t$ .

A partir del círculo representado en la Figura 2.5b, se puede deducir la deformación media principal a tracción  $\varepsilon_1$  en función de otras deformaciones, mediante la siguiente relación:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_t - \varepsilon_2 = \varepsilon_x + (\varepsilon_x - \varepsilon_2) \cot^2 \theta \quad (2.7)$$

Si hubiera armadura activa, se cumplirá además que

$$\varepsilon_p = \varepsilon_x + \Delta\varepsilon_p \quad (2.8)$$

donde  $\varepsilon_p$  es la deformación unitaria de la armadura activa y  $\Delta\varepsilon_p$  es la deformación impuesta por el sistema de pretensado.

El significado físico de la ecuación (2.6) reside básicamente en el hecho de que para bajas inclinaciones de grieta, la armadura transversal se encontrará altamente deformada mientras que para altas inclinaciones de grieta será la armadura longitudinal la que experimente mayores deformaciones.

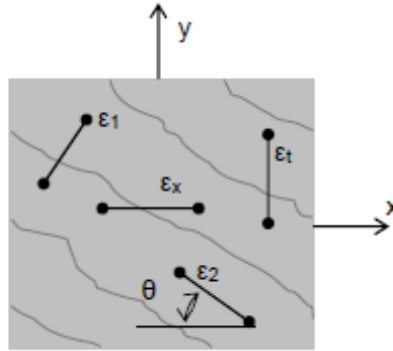


Figura 2.5a: Deformaciones medias en un elemento fisurado.

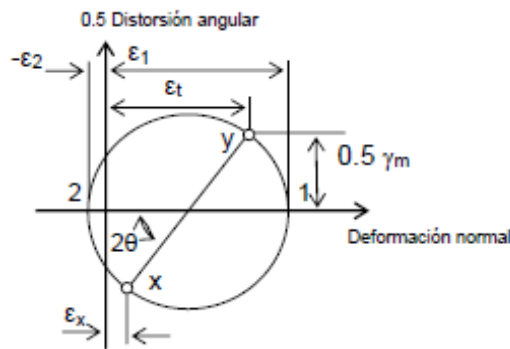


Figura 2.5b: Círculo de deformaciones medias. Adaptado de [20].

Si consideramos una viga de hormigón armado, con armadura simétrica, y sometida a cortante, se puede deducir que para una determinada sollicitación de cortante  $V$  existe un total de cinco incógnitas: la tensión media de tracción en las barras longitudinales,  $\sigma_{sx}$ ; la tensión media en los estribos,  $\sigma_{st}$ ; la tensión principal de compresión en el hormigón,  $\sigma_2$ ; y la inclinación  $\theta$  de las bielas de compresión. Para determinar estas cinco incógnitas disponemos de otras cinco ecuaciones, a saber: tres ecuaciones de equilibrio ((2.1), (2.2) y (2.3)), dos ecuaciones de compatibilidad ((2.6) y (2.7)), y las relaciones constitutivas del acero y el hormigón. Así pues, la respuesta carga-deformación de un elemento de hormigón armado sometido a cortante queda completamente definida. Este último desarrollo constituyó el primer modelo de campo de compresiones y se denominó Teoría del Campo de Compresiones [4].

El comité 445 sobre cortante y torsión perteneciente al ASCE-ACI define en su texto “Recent Approaches to Shear Design of Structural Concrete” las ecuaciones de equilibrio de la TCC en su forma simplificada:

$$\rho_t \sigma_{st} = \sigma_{cy} = \tau \tan \theta \quad (2.9)$$

$$\rho_x \sigma_{sx} = \sigma_{cx} = \tau \cot \theta \quad (2.10)$$

$$\sigma_2 = \tau (\tan \theta + \cot \theta) \quad (2.11)$$

donde  $\rho_x$  y  $\rho_t$  son las cuantías de armadura transversal y longitudinal, respectivamente, y  $\sigma_{cx}$  y  $\sigma_{cy}$  son los esfuerzos medios de compresión en el hormigón en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente.

Para esfuerzos de compresión relativamente pequeños se puede asumir que  $\varepsilon_2 = \sigma_2 / E_c$ , y en el caso de esfuerzos cortantes inferiores a aquellos que provocan la cedencia del acero, a partir de las ecuaciones (2.6), (2.9), (2.10) y (2.11) se puede deducir la siguiente expresión para el ángulo de biela a compresión,  $\theta$ :

$$\tan^4 \theta = \frac{1 + \frac{1}{n\rho_x}}{1 + \frac{1}{n\rho_t}} \quad (2.12)$$

donde  $n$  es el coeficiente de equivalencia entre acero y hormigón ( $n = E_s / E_c$ ), con  $E_c = f_c / \varepsilon_c$ , siendo  $f_c$  es la resistencia a compresión del hormigón ensayado en probeta cilíndrica y  $\varepsilon_c$  es la deformación asociada a  $f_c$ .

### 2.2.1 Comportamiento a compresión del hormigón fisurado

Las tensiones y deformaciones están relacionadas mediante los modelos tensión-deformación de los materiales. Para el hormigón a compresión el modelo habitual es aquel que reproduce el comportamiento del hormigón en el ensayo a compresión en probeta cilíndrica; en este caso, la única deformación a tracción que experimenta el hormigón es la debida al efecto Poisson. Sin embargo, el caso que nos ocupa es bien distinto dado que ahora el hormigón está solicitado a compresión en una dirección principal al mismo tiempo que está traccionado según la otra dirección principal, y además está agrietado.

La principal característica de la ley constitutiva del hormigón agrietado a compresión es la considerable disminución de la tensión pico de compresión en relación a la obtenida en el ensayo en probeta cilíndrica. Dicho fenómeno de reducción fue descubierto inicialmente por Robinson [39], quien no supo determinar el conjunto de variables que afectaban al coeficiente de disminución de la tensión pico, pues el alma de las vigas

ensayadas estaba sometida a un complejo campo de tensiones y deformaciones inducidas por la flexión y el cortante. A fin de solucionar este problema, Robinson y Demorieux [40] decidieron trabajar con paneles de hormigón sometidos a tensión biaxial, confirmando así la disminución de la resistencia a compresión del hormigón debido a la presencia de esfuerzos de tracción en la dirección perpendicular.

A fin de investigar las características tenso-deformacionales del hormigón fisurado a cortante, Vecchio y Collins [42] ensayaron una serie de paneles de hormigón armado sometidos a cortante puro en el denominado “Shear Rig” de la Universidad de Toronto (Figura 2.6), salvando adecuadamente algunas de las dificultades técnicas de experimentación hasta entonces encontradas. A partir de los resultados obtenidos, y como ya habían adelantado Robinson y Demorieux, se dedujo que la tensión principal de compresión en el hormigón  $\sigma_2$  no era función exclusiva de la deformación principal de compresión  $\varepsilon_2$ , sino que además dependía de la deformación principal a tracción coexistente (Figuras 2.7 a y b). Vecchio y Collins propusieron a tal efecto la siguiente relación:

$$\sigma_2 = f_{2\max} \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_c} \right) - \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_c} \right)^2 \right] \quad (2.13)$$

$$f_{2\max} = \frac{f_c}{0.8 + 170\varepsilon_1} \leq f_c$$

siendo  $f_{2\max}$  la resistencia máxima por aplastamiento a compresión del hormigón.

Belarbi y Hsu [6], a partir de una campaña de ensayos en condiciones similares a los anteriores y realizados en la Universidad de Houston, sugirieron la siguiente expresión para la resistencia  $f_{2\max}$ :

$$f_{2\max} = \frac{0.9f_c}{\sqrt{1 + 400\varepsilon_1}} \quad (2.14)$$

la cual, bajo condiciones de cortadura pura, depende igualmente de la deformación principal a tracción coexistente.

Asimismo, los autores de la ecuación (2.14) desarrollaron el siguiente modelo tenso-deformacional a compresión del hormigón sometido a cortante y torsión:

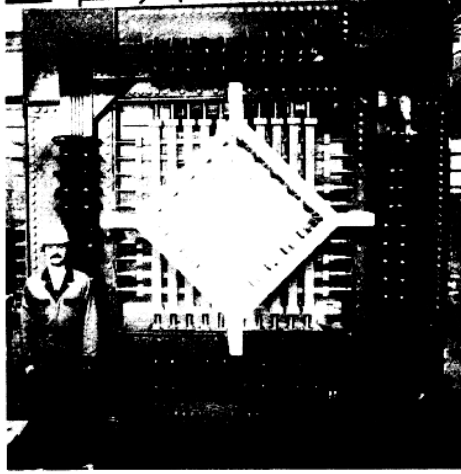


Figura 2.6: Universidad de Toronto: módulo de ensayo de paneles de hormigón [42].

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \zeta_{\sigma_0} f_c \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_2}{\zeta_{e_0} \varepsilon_c} \right) - \left( \frac{\varepsilon_2}{\zeta_{e_0} \varepsilon_c} \right)^2 \right], \quad \frac{\varepsilon_2}{\zeta_{e_0} \varepsilon_c} \leq 1 \\ \sigma_2 &= \zeta_{\sigma_0} f_c \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon_2 / \zeta_{e_0} \varepsilon_c - 1}{2 / \zeta_{e_0} - 1} \right)^2 \right], \quad \frac{\varepsilon_2}{\zeta_{e_0} \varepsilon_c} > 1 \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde para cargas “proporcionales” (i.e.,  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  se incrementan simultáneamente) se cumple:

$$\zeta_{\sigma_0} = \frac{0.9}{\sqrt{1+400\varepsilon_1}} \quad \text{y} \quad \zeta_{e_0} = \frac{1}{\sqrt{1+500\varepsilon_1}}$$

Y para cargas “secuenciales” (i.e., primero se aplica  $\varepsilon_1$  y después se incrementa  $\varepsilon_2$ ) se cumple:

$$\zeta_{\sigma_0} = \frac{0.9}{\sqrt{1+250\varepsilon_1}} \quad \text{y} \quad \zeta_{e_0} = 1$$

Ya que el alma fisurada de una viga de hormigón armado está sometida a esfuerzos cortantes crecientes, tanto la deformación principal de compresión  $\varepsilon_2$  como la deformación principal a tracción  $\varepsilon_1$  aumentan simultáneamente. La Figura 2.8a muestra como las relaciones correspondientes a las ecuaciones (2.13) y (2.15) presentan comportamientos similares para el caso en que el cociente  $\varepsilon_1/\varepsilon_2$  permanezca aproximadamente constante. Por su parte la Figura 2.8b compara dichas relaciones bajo la hipótesis menos realista de que  $\varepsilon_1$  permanezca constante, mientras  $\varepsilon_2$  aumenta; en

cualquiera de los dos casos, las ecuaciones definidas presentan comportamientos similares [4].

Mediante el uso de las condiciones de equilibrio anteriormente descritas, las condiciones de compatibilidad y las correspondientes relaciones constitutivas, es posible predecir no sólo la resistencia sino también la respuesta carga-deformación de elementos de hormigón armado sometidos a cortante. No obstante, dado que la TCC desprecia la contribución a tracción del hormigón fisurado las deformaciones son sobrestimadas, con lo que los valores de resistencia a cortante finalmente obtenidos resultan excesivamente conservadores.

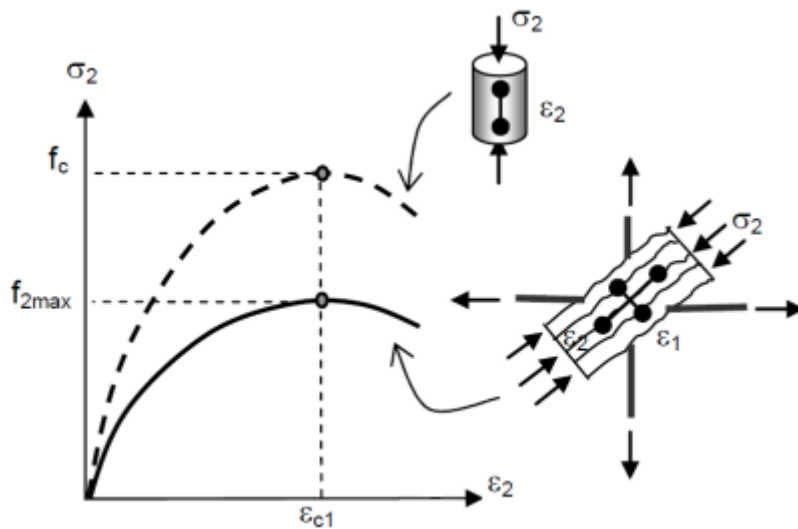


Figura 2.7a: Relación tensión-deformación para el hormigón agrietado en compresión.

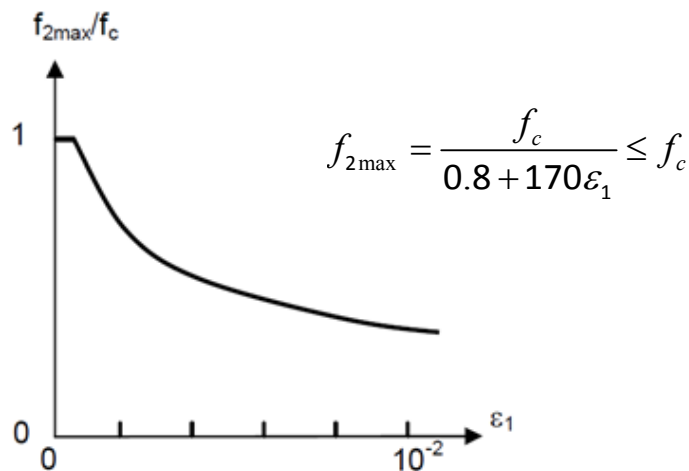


Figura 2.7b: Influencia de la deformación principal a tracción en la resistencia a compresión del hormigón [42].

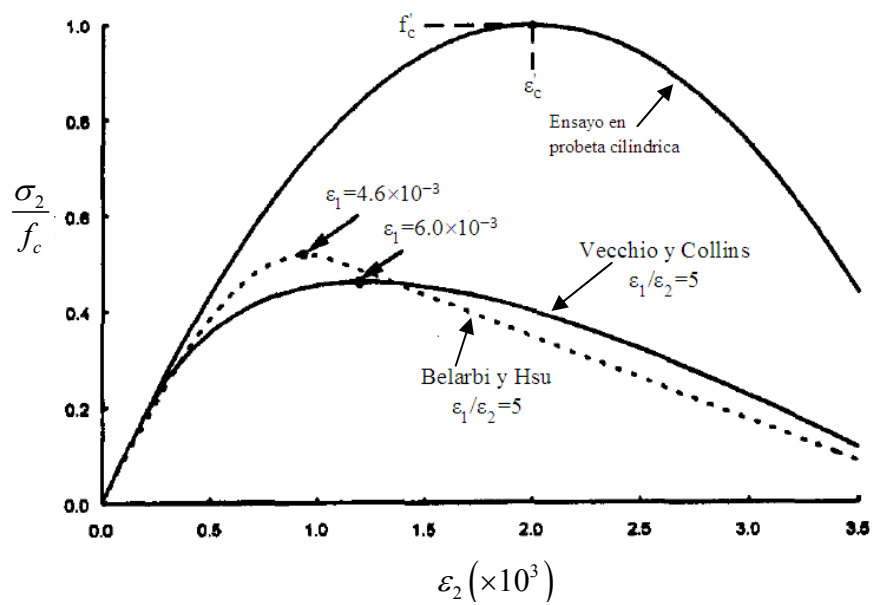


Figura 2.8a: Relación tensión-deformación a compresión del hormigón: “cargas proporcionales”.

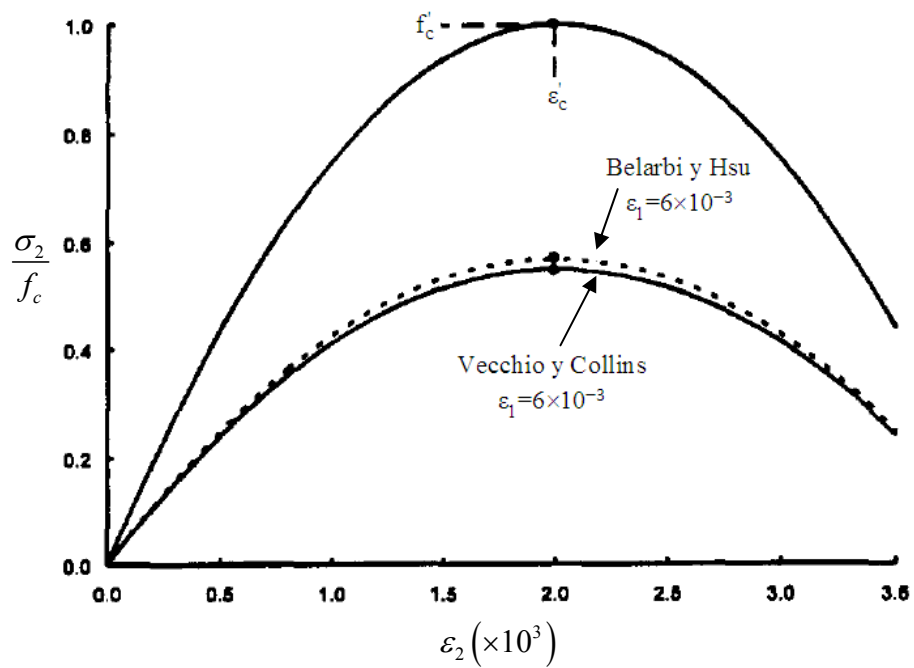


Figura 2.8b: Relación tensión-deformación a compresión del hormigón:

“cargas secuenciales” [4].

### 2.3 Teoría Modificada del Campo de Compresiones

La Figura 2.9 muestra el alma de una viga de hormigón armado antes y después de la fisuración. Antes de producirse la fisuración el cortante es resistido por tracciones y compresiones diagonales en el hormigón actuando a  $45^\circ$ , donde  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son las tensiones principales de tracción y compresión, respectivamente. Una vez que se produce la fisuración tiene lugar una reducción sustancial de la resistencia a tracción del hormigón; según la TCC, una vez el hormigón ha fisurado éste pierde totalmente su resistencia a tracción, y a partir de ese instante,  $\sigma_1 = 0$ . No obstante, el hormigón sí contribuye después de fisurado, y por consiguiente, debe considerarse una resistencia media del hormigón a tracción entre grietas. De esta forma surge la denominada Teoría Modificada del Campo de Compresiones (TMCC) [13, 42].

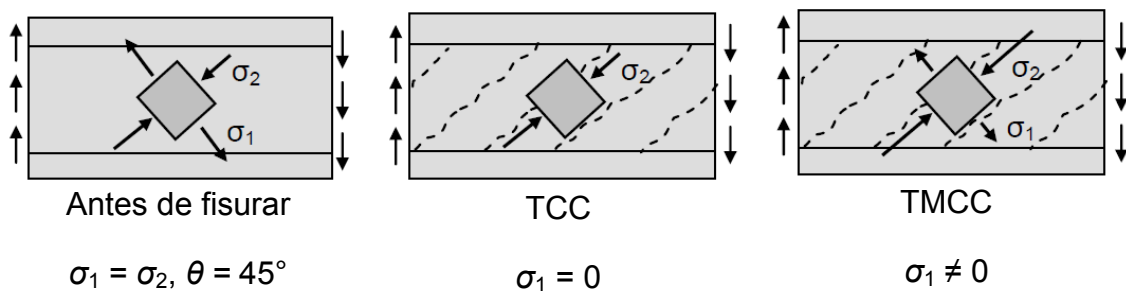


Figura 2.9: Diferencia entre la TCC y la TMCC.

La tensión principal de tracción en el hormigón fisurado varía en magnitud desde cero en la localización de la grieta hasta un valor máximo entre grietas. Dado que las ecuaciones de equilibrio son obtenidas por integración del campo de tensiones en la totalidad de la sección transversal, se puede trabajar con valores medios de los esfuerzos de tracción a la hora de formular dichas ecuaciones de equilibrio; éstas han sido deducidas para una viga simétrica de hormigón con armadura pasiva y activa [13]. A partir del tensor de tensiones medias en el hormigón (Figura 2.10), se puede deducir la siguiente relación para el esfuerzo principal de compresión,  $\sigma_2$ :

$$\sigma_2 = \frac{V}{b_w z} (\tan \theta + \cot \theta) - \sigma_1 \quad (2.16)$$



La descompensación de la proyección vertical de resultantes de las tensiones principales  $\sigma_2$  y  $\sigma_1$  debe ser equilibrada por una fuerza de tracción en la armadura transversal (Figura 2.11), tal y como se indica a continuación:

$$A_{st}\sigma_{st} = (\sigma_2 \text{sen}^2 \theta - \sigma_1 \text{cos}^2 \theta) b_w s \quad (2.17)$$

Si el esfuerzo axial que solicita la sección es nulo, la descompensación de la proyección longitudinal de las resultantes de las tensiones principales  $\sigma_2$  y  $\sigma_1$  debe ser equilibrada mediante una fuerza de tracción en la armadura longitudinal, tal y como se indica a continuación:

$$A_{sx}\sigma_{sx} + A_p\sigma_p = (\sigma_2 \text{cos}^2 \theta - \sigma_1 \text{sen}^2 \theta) b_w z \quad (2.18)$$

donde  $A_{sx}$  es el área total de la armadura longitudinal pasiva,  $A_p$  es el área total de la armadura longitudinal activa, y  $\sigma_p$  es la tensión media en la barra de pretensado.

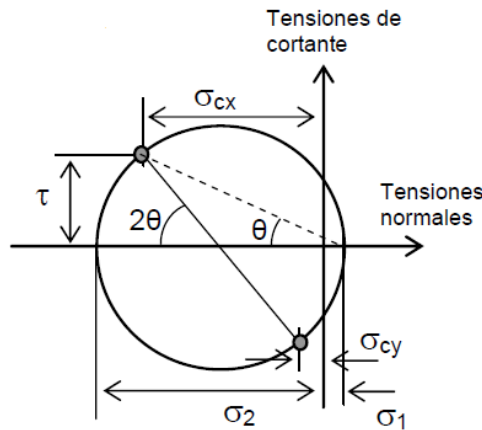


Figura 2.10: Círculo de tensiones medias del hormigón. Adaptado de [20].

Sustituyendo el valor de  $\sigma_2$  de la ecuación (2.16), la ecuación (2.18) adopta la siguiente expresión:

$$A_{sx}\sigma_{sx} + A_p\sigma_p = V \cot \theta - \sigma_1 b_w z \quad (2.19)$$

Asimismo, sustituyendo el valor de  $\sigma_2$  de la ecuación (2.16) en la ecuación (2.17), se obtiene la siguiente relación:

$$V = \sigma_1 b_w z \cot \theta + \frac{A_{st}\sigma_{st}}{s} z \cot \theta \quad (2.20)$$

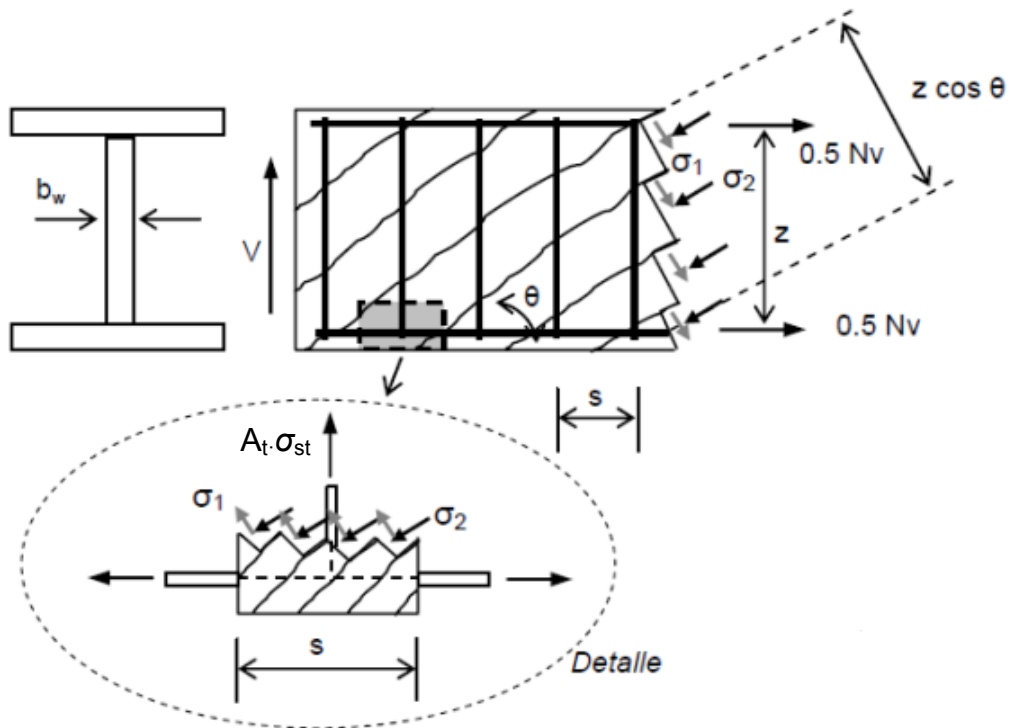


Figura 2.11: Estudio del equilibrio para la Teoría Modificada del Campo de Compresiones (TMCC) [13].

La ecuación (2.20) expresa la resistencia a cortante de un elemento de hormigón armado como la suma de la contribución del hormigón ( $V_c$ ), la cual depende de la distribución de esfuerzos de tracción en el hormigón, y la contribución del acero ( $V_s$ ), la cual depende del esfuerzo medio de tracción en los estribos. Existe analogía formal entre la formulación así obtenida y la propuesta a tal efecto por la norma ACI ( $V = V_c + V_s$ ).

En lo que a la ecuación de comportamiento del acero se refiere, tanto la TCC como la TMCC consideran modelos bilineales de tensión-deformación, tal y como se muestra a continuación [20]:

$$\sigma_{sx} = \begin{cases} E_s \varepsilon_x & , \varepsilon_x \leq \varepsilon_y \\ f_y & , \varepsilon_x > \varepsilon_y \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\sigma_{st} = \begin{cases} E_s \varepsilon_t & , \varepsilon_t \leq \varepsilon_y \\ f_y & , \varepsilon_t > \varepsilon_y \end{cases}$$

### 2.3.1 Comportamiento del hormigón a tracción

El hormigón es un material que resiste muy poco a tracción y que, por tanto, rompe bajo tensiones de tracción muy pequeñas. No obstante, para deformaciones superiores a la

correspondiente a la resistencia media de tracción del hormigón  $f_{ctm}$ , la contribución del hormigón no es despreciable. Una vez que aparece la primera grieta el hormigón deja de contribuir en la zona de la grieta pero continúa contribuyendo en la zona entre grietas. En consecuencia, la deformación total experimentada por la barra de acero embebida en hormigón, aun cuando existan numerosas grietas, será menor que la que experimentaría la misma barra aislada (Figura 2.12).

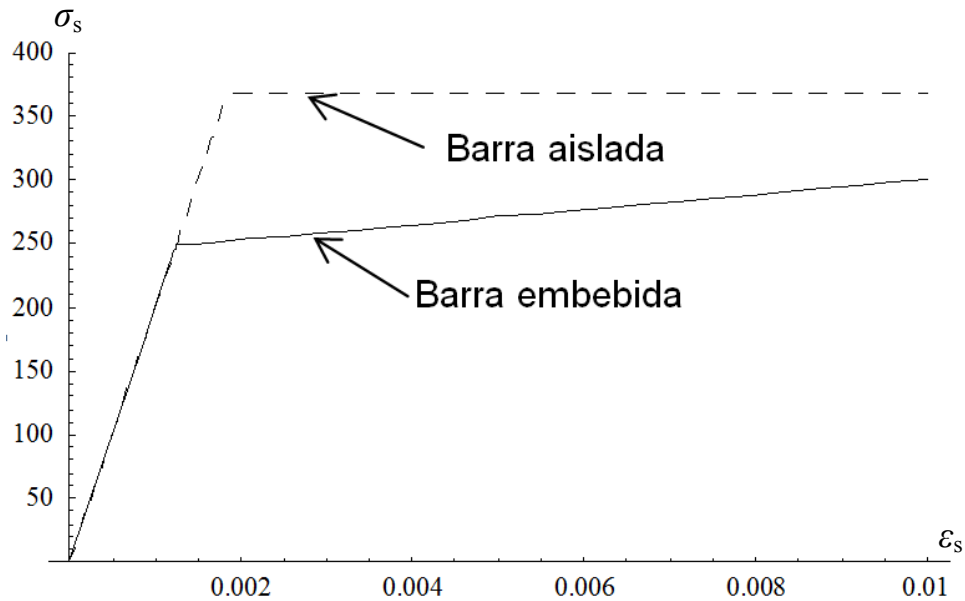


Figura 2.12: Esquema de modelo constitutivo del acero para barra “embebida” y para barra “aislada”.

Justo antes de que se forme la primera grieta la tensión del hormigón es  $f_{ctm}$ , y su deformación es  $\epsilon_{ctm}$ . Una vez formada la primera grieta, la tensión media de tracción en el hormigón disminuye, y decrecerá tanto más cuantas más grietas se produzcan (es decir, conforme aumente la deformación principal a tracción en el hormigón, Figura 2.13). Collins y Mitchell definen la siguiente relación tenso-deformacional del hormigón a tracción [4, 7]:

$$\sigma_1 = \begin{cases} E_c \epsilon_1 & , \epsilon_1 \leq \epsilon_{ctm} \\ \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{1 + \sqrt{500 \epsilon_1}} & , \epsilon_1 > \epsilon_{ctm} \end{cases} \quad (2.22)$$

Donde:

$\alpha_1$  Coeficiente en función de la adherencia acero-hormigón

- 1 para barras corrugadas
  - 0.7 para barras lisas, cables y cordones con muescas
  - 0 para barras sin adherencia
- $\alpha_2$  Coeficiente en función del tipo de carga
- 1.0 para carga rápida no cíclica
  - 0.7 para cargas duraderas o repetitivas

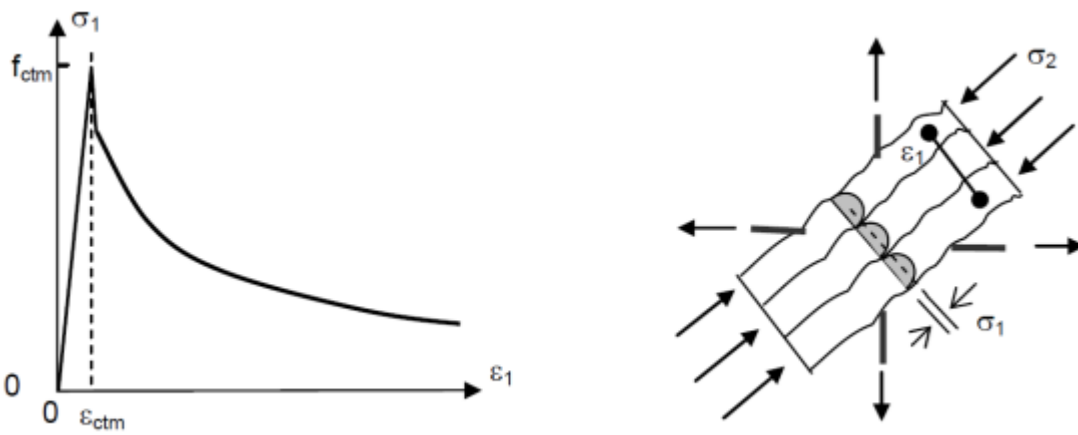


Figura 2.13: Relación tensión-deformación media para el hormigón a tracción. Adaptado de [42].

El fenómeno de la contribución a tracción del hormigón se denomina *tensorrigidez*. La tensorrigidez no afecta a toda el área de la sección transversal sometida a tracción sino sólo a una parte situada en el entorno de la barra de acero (Figura 2.14). Al área afectada se le denomina área efectiva  $A_c$  y, según establece el Código Modelo [12], equivale a la zona rectangular en torno a la barra de acero a una distancia no superior a  $7.5\varnothing$ , siendo  $\varnothing$  el diámetro de la barra en cuestión.

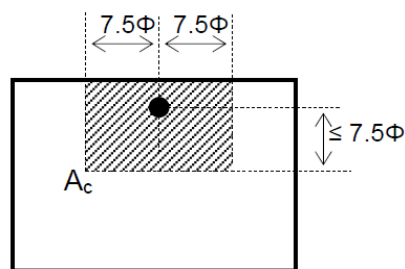


Figura 2.14: Área efectiva de hormigón a tracción.

Durante los últimos años diferentes autores han propuesto distintas expresiones para la relación tenso-deformacional del hormigón agrietado a tracción. En 1982 Vecchio y Collins propusieron una primera relación a este respecto, la cual funcionaba particularmente bien para los elementos de hormigón armado ensayados en el ‘Toronto Panel Tester’ de la Universidad de Toronto, y cuya ecuación venía dada por la siguiente expresión [7, 13]:

$$\sigma_1 = \frac{f_{ctm}}{1 + \sqrt{200\varepsilon_1}} \quad (2.23)$$

Algunos años más tarde, en 1987, Collins y Mitchell mejoraron el anterior modelo de ensayo experimental, obteniendo la ya indicada ecuación (2.22). Una tercera contribución en este sentido fue la de Belarbi y Hsu [5, 22, 33], obtenida a partir de la ecuación inicialmente propuesta por Tamai et al., y cuya expresión viene dada por (Figura 2.15):

$$\sigma_1 = \begin{cases} E_c \varepsilon_1 & , \varepsilon_1 \leq 0.00008 \\ \frac{f_{ctm}}{\left(\frac{\varepsilon_1}{0.00008}\right)^{0.4}} & , \varepsilon_1 > 0.00008 \end{cases} \quad (2.24)$$

Tal y como se puede observar, la rigidez a tracción del hormigón fisurado varía sensiblemente de un caso a otro. Según Bentz [7], la razón de la diferencia entre las distintas relaciones propuestas reside en el efecto de la adherencia hormigón-acero, y propone definir la rigidez a tracción del hormigón fisurado como una función de las características de adherencia de la armadura.

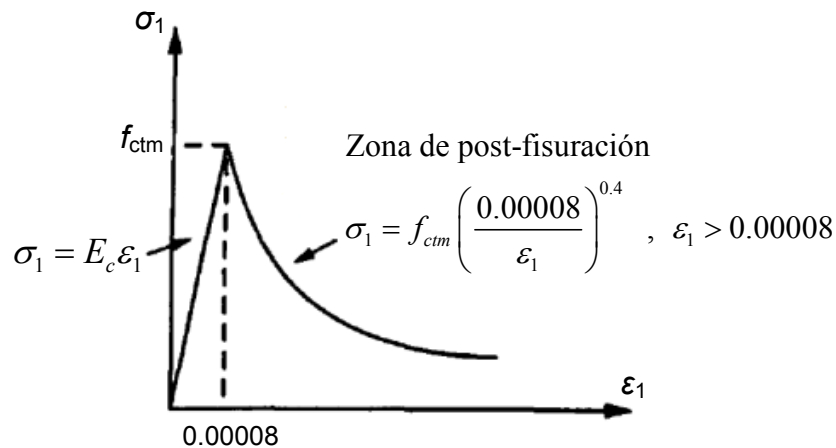


Figura 2.15: Relación tensión-deformación a tracción del hormigón, según Belarbi y Hsu [4, 22].

En aquellos puntos donde el hormigón armado está compuesto por barras de acero de bajo diámetro y muy próximas entre sí se prevén mejores características de adherencia que en aquellos otros donde la distancia entre barras de mayor diámetro es superior. Por tanto, un parámetro apropiado para medir la adherencia hormigón-acero es aquel que resulta de dividir el área efectiva de hormigón a tracción entre la suma de perímetros de todas las barras adheridas a dicha área, tal y como se indica a continuación [7]:

$$M = \frac{A_c}{\sum d_b \pi} \quad (2.25)$$

donde  $M$  es el parámetro de adherencia (mm), y  $d_b$  es el diámetro de la barra adherida al hormigón. En la Figura 2.16a se muestran las características de las secciones ensayadas en cada uno de los tres casos comentados anteriormente, y sus respectivos parámetros de adherencia.

Si se representa el coeficiente del denominador en las tres relaciones anteriores frente al parámetro de adherencia de las secciones a partir de las cuales han sido obtenidas, se puede observar que para elementos con características pobres de adherencia (i.e, altos valores de  $M$ ), la rigidez a tracción del hormigón es más baja (Figura 2.16b). Los puntos representados en la Figura 2.16b se ajustan claramente a una recta de pendiente 3.6; sin embargo, si se representan los mismos coeficientes en función de la cuantía de armado en lugar del parámetro de adherencia, la dispersión obtenida es notablemente mayor, razón por la cual Bentz propone la siguiente relación tenso-deformacional para el hormigón a tracción:

$$\sigma_1 = \begin{cases} E_c \varepsilon_1 & , \varepsilon_1 \leq \varepsilon_{ctm} \\ \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{1 + \sqrt{3.6 M \varepsilon_1}} & , \varepsilon_1 > \varepsilon_{ctm} \end{cases} \quad (2.26)$$

siendo  $M = \frac{A_c}{\sum d_b \pi}$

En el caso de elementos solicitados bi-axialmente, las propiedades de adherencia suelen ser distintas entre la armadura transversal y la longitudinal, en cuyo caso Bentz recomienda adoptar como parámetro de adherencia global del elemento el menor de los dos parámetros resultantes; así pues, la rigidez a tracción del hormigón fisurado quedará definida por la dirección con mejores propiedades de adherencia.

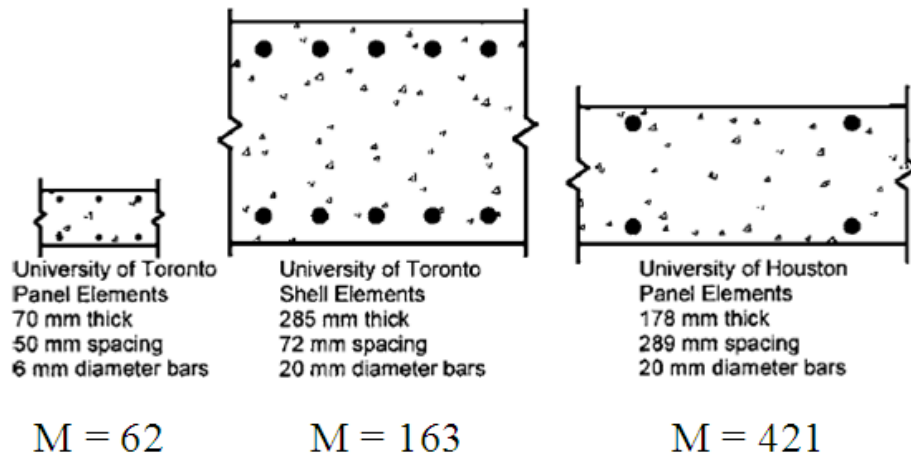


Figura 2.16a: Características de adherencia de las distintas secciones ensayadas.

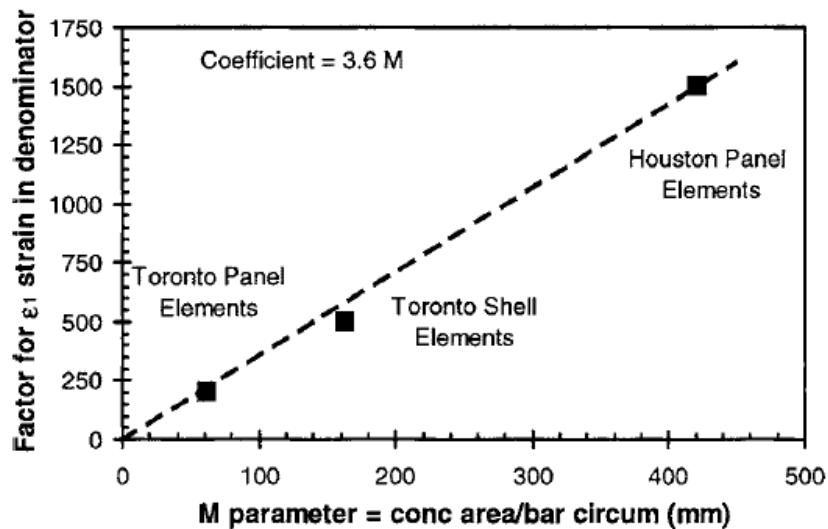


Figura 2.16b: Coeficiente de rigidez tensil vs. Parámetro de adherencia [7].

### 2.3.2 Estudio a nivel de grieta en la TMCC

Por ahora sólo se han tratado tensiones y deformaciones medias, teniendo en cuenta que éstas varían de un punto a otro, especialmente entre las grietas y las zonas entre grietas. De esta forma, en el punto de fisuración la tracción en el hormigón es nula mientras que la tensión en la armadura es máxima.

Para pequeños valores del esfuerzo cortante la tracción se transmite a través de las grietas mediante aumentos locales en la tensión de las barras de acero. Sin embargo, a ciertos niveles de cortante la tensión en la armadura del alma podría alcanzar el valor de cedencia, en cuyo caso un aumento posterior del esfuerzo cortante requeriría de la aparición de tensiones de cortante locales  $\tau_{ci}$  en el hormigón [4, 13], a fin de poder

trasmitir el incremento de tracción a través de la grieta (Figura 2.17); según el modelo bi-lineal de comportamiento del acero correspondiente a la TMCC, después que la armadura alcanza su límite elástico ya no absorbe más tensión.

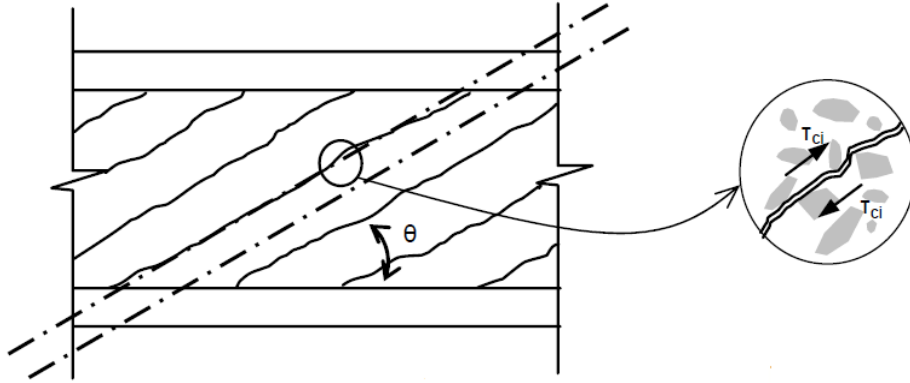


Figura 2.17: Tensiones locales en la grieta de una viga sometida a cortante [13].

La capacidad de la interfase de la grieta para transmitir dichas tensiones locales dependerá del ancho de grieta  $w$  y del tamaño de árido  $a$ . El valor máximo de  $\tau_{ci}$  viene dado por la expresión (Bhide y Collins, 1989) [4]:

$$\tau_{ci} \leq \frac{0.18\sqrt{f_c}}{0.3 + \frac{24w}{a+16}} \quad (2.27)$$

donde  $\tau_{ci}$  se mide en MPa y  $a$  y  $w$  se miden en mm. En la ecuación (2.27) no se han tenido en cuenta los efectos favorables producidos por compresiones locales en la interfase de la grieta.

Así pues, vamos a trabajar paralelamente con dos familias de tensiones equivalentes; por un lado, las tensiones medias calculadas según la formulación de la TMCC, y por otro, las tensiones locales a nivel de grieta (Figura 2.18). Las dos familias de tensiones de la Figura 2.18 deben de ser estáticamente equivalentes; por tanto, ambas componentes verticales deben ser iguales, tal y como se indica a continuación:

$$A_{st}\sigma_{st}\left(\frac{z}{s \tan \theta}\right) + \sigma_1 \frac{b_w z}{\tan \theta} = A_{st}f_y\left(\frac{z}{s \tan \theta}\right) + \tau_{ci}b_w z \quad (2.28)$$

A partir de la ecuación (2.28) se puede deducir el valor de la tracción transmitida por el hormigón a través de la grieta,  $\sigma_1$ :



$$\sigma_1 = \tau_{ci} \tan \theta + \frac{A_{st}}{sb_w} (f_y - \sigma_{st}) \quad (2.29)$$

El ancho de fisura  $w$  se puede obtener como el producto de la deformación principal a tracción por el espaciamiento medio de las grietas  $s_{m\theta}$ , según se indica a continuación:

$$w = \varepsilon_1 s_{m\theta} \quad (2.30)$$

donde:

$$s_{m\theta} = \frac{1}{\frac{\sin \theta}{s_{mx}} + \frac{\cos \theta}{s_{mv}}}$$

En la expresión anterior  $s_{mx}$  y  $s_{mv}$  son las separaciones entre grietas en las direcciones longitudinal y transversal, respectivamente (Figura 2.19)

El Código Modelo propone una formulación para estimar las separaciones entre grietas, deducida para el ancho de fisura en superficie (Figura 2.20):

$$\begin{aligned} s_{mx} &= 2 \left( c_x + \frac{s_x}{10} \right) + k_1 k_2 \frac{d_{bx}}{\rho_x} \\ s_{mv} &= 2 \left( c_v + \frac{s}{10} \right) + k_1 k_2 \frac{d_{bv}}{\rho_v} \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde  $c_x$  y  $c_v$  son las distancias del centro de gravedad de la sección bruta a la armadura longitudinal y vertical, respectivamente. Asimismo,

$$k_1 = \{0.4; \text{barras corrugadas}; 0.8; \text{barras lisas o tendones}\}$$

$$k_2 = 0.25$$

$$\rho_t = A_{st} / (b_w s)$$

$$\rho_x = (A_{sx} + A_p) / (b_w z)$$

Un último límite del valor de la resistencia a cortante viene dado por la tensión de cedencia de la armadura longitudinal. Las componentes horizontales de la familia de tensiones medias y la familia de tensiones locales deben verificar la siguiente inecuación:

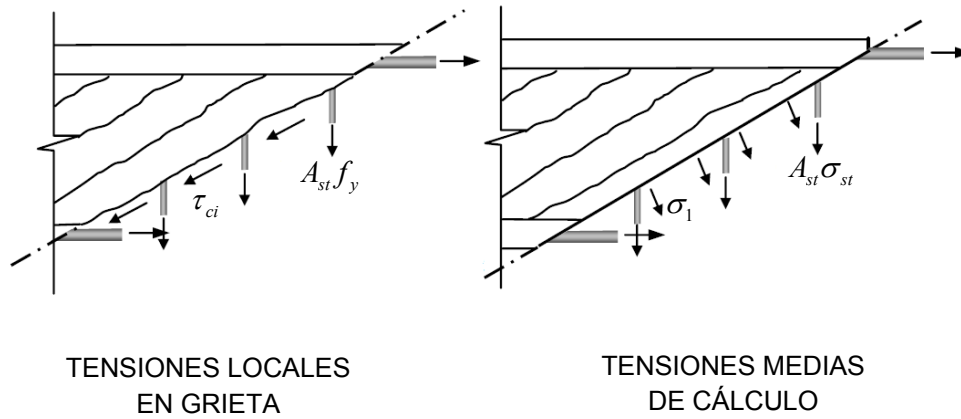


Figura 2.18: Tensiones medias y tensiones locales a nivel de grieta. Adaptado de [13].

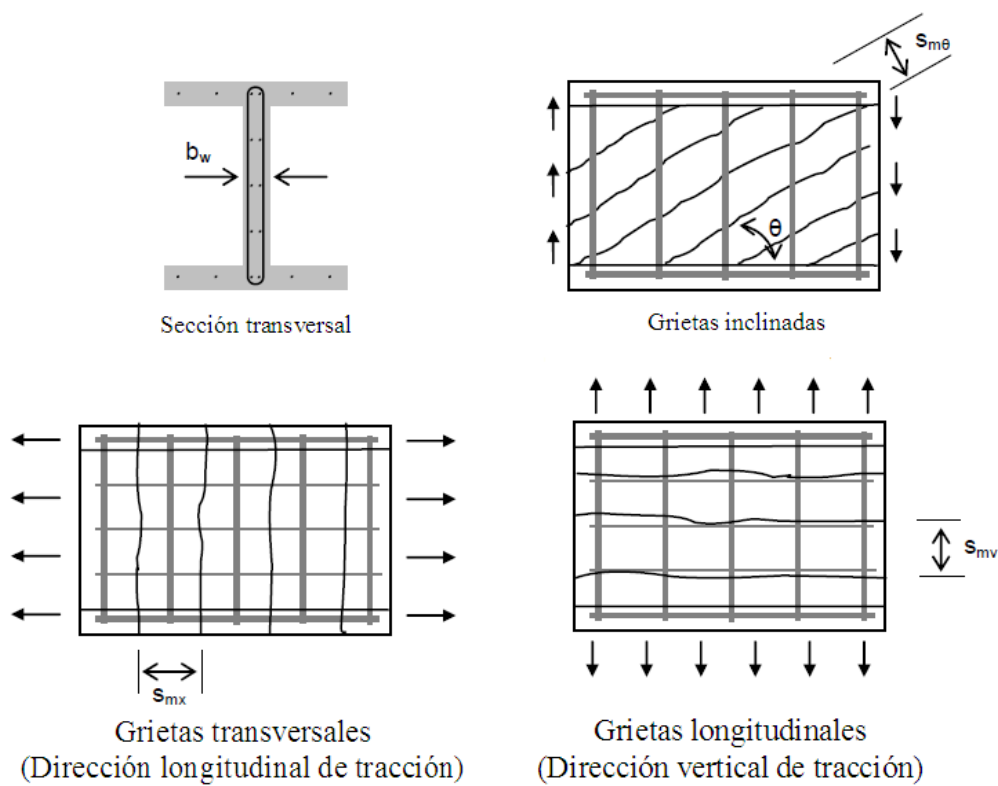


Figura 2.19: Separación entre grietas. Adaptado de [13].

$$A_{sx}f_y + A_p f_p \geq A_{sx}\sigma_{sx} + A_p f_p + \sigma_1 b_w z + \left[ \sigma_1 - \frac{A_{st}}{b_w s} (f_y - \sigma_{st}) \right] b_w z \cot^2 \theta \quad (2.32)$$

donde el límite elástico  $f_y$  de la armadura pasiva y el límite elástico  $f_p$  de la armadura activa se alcanzan a nivel de la grieta.

Las ecuaciones del estudio a nivel de grieta de la TMCC introducen tantas incógnitas nuevas como ecuaciones en el proceso de diseño a cortante, si bien sólo modifican el

comportamiento a tracción del hormigón (Figura 2.21); a partir de las ecuaciones (2.27) y (2.29), y suponiendo que la armadura transversal han alcanzado su tensión de cedencia ( $\sigma_{st} = f_y$ ), se deduce la siguiente expresión límite para  $\sigma_1$ :

$$\sigma_1 \leq \frac{0.18\sqrt{f_c} \tan \theta}{\left(0.3 + \frac{24w}{a+16}\right)} \quad (2.33)$$

Limitando el valor del esfuerzo principal de tracción en el hormigón se cuenta con la posibilidad de fallo del mecanismo denominado “aggregate interlock”, responsable de la transmisión de fuerzas a través de la grieta, y se evita la propagación de grieta a partir de un determinado nivel de tensión cortante.

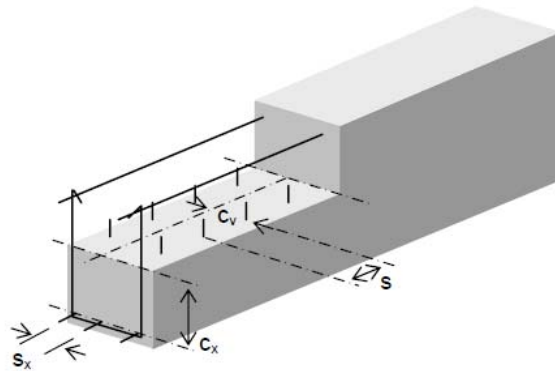


Figura 2.20: Parámetros  $s_x$ ,  $s$ ,  $c_x$ ,  $c_v$ . Adaptado de [13].

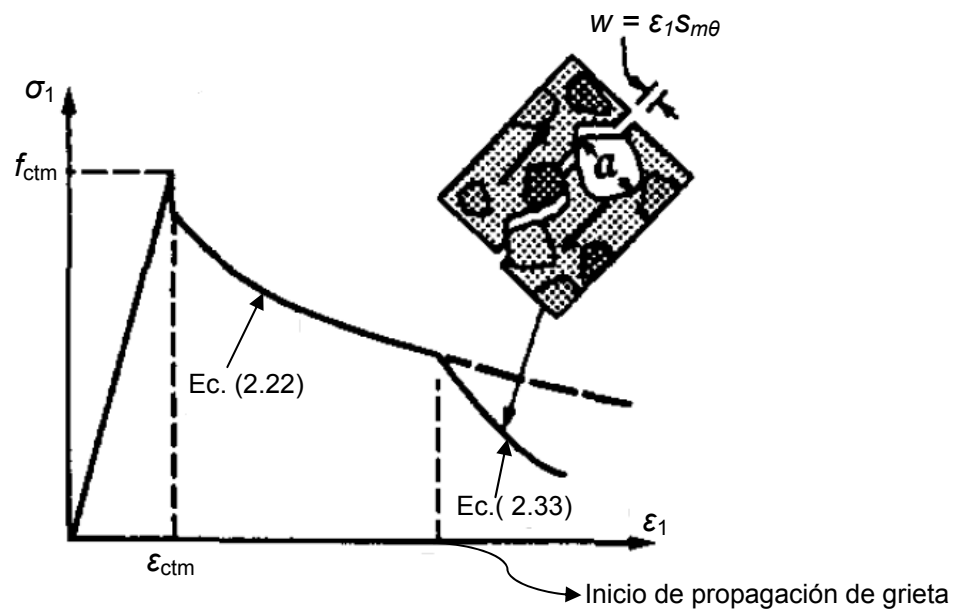


Figura 2.21: Relación tensión-deformación a tracción del hormigón corregida a nivel de grieta [4].

### 2.3.3 Recientes simplificaciones de diseño en la TMCC

Mediante la aplicación de un conjunto de simplificaciones es posible redefinir las ecuaciones básicas de la TMCC a fin de que puedan ser utilizadas en un modo más práctico en el diseño de secciones de hormigón armado sometidas a cortante combinado con axil y flector [8].

La contribución a cortante del hormigón  $V_c$  debida al campo principal de tracciones puede ser expresada como:

$$V_c = \beta \sqrt{f_c} b_w z \quad (2.34)$$

El factor  $\beta$  depende de la distribución media de tensiones de tracción en el hormigón fisurado; considerando que la resistencia media a tracción del hormigón  $f_{ctm}$  es igual a  $0.33\sqrt{f_c}$  (según [2]), y que según la ecuación (2.20) la contribución a cortante del hormigón puede ser expresada como  $V_c = \sigma_1 b_w z \cot \theta$ , a partir de la ecuación (2.34) el factor  $\beta$  queda expresado de la siguiente manera:

$$\beta = \frac{\alpha_1 \alpha_2 0.33 \cot \theta}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_1}} \quad (2.35)$$

Es preciso tener en cuenta que la transmisión de tracciones a través de la grieta dependerá del ancho de la misma, por lo que un ancho de grieta excesivo limitaría la tensión media en el hormigón y el esfuerzo tangencial en la grieta  $\tau_{ci}$  alcanzaría un valor crítico. A partir de las ecuaciones (2.33) y (2.34) es ahora posible determinar el valor límite de  $\beta$  para el cual se produciría un colapso de la estructura por propagación de la grieta bajo cortante, tal y como se indica a continuación:

$$\beta \leq \frac{0.18}{0.3 + \frac{24 \varepsilon_1 s_{m\theta}}{a + 16}} \quad (2.36)$$

Como se puede deducir de la expresión anterior, a medida que la deformación principal a tracción  $\varepsilon_1$  aumenta, la contribución a cortante  $V_c$  del hormigón disminuye.

Para elementos sin armadura transversal el parámetro  $s_{m\theta}$  será igual a  $s_x / \sin \theta$ , en cuyo caso la ecuación (2.36) puede ser expresada como [8]:

$$\beta \leq \frac{0.18}{0.3 + \frac{0.686 \varepsilon_1 s_{x\varepsilon}}{\text{sen}\theta}} \quad (2.37)$$

$$s_{x\varepsilon} = \frac{35s_x}{a + 16}$$

El máximo valor de  $\beta$ , y por consiguiente, la máxima resistencia a cortante en post-fisuración, será aquel que satisfaga simultáneamente las ecuaciones (2.35) y (2.37), por lo que resulta la siguiente expresión:

$$\text{Tan}\theta = \frac{0.568 + \frac{1.258 s_{x\varepsilon} \varepsilon_1}{\text{sen}\theta}}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_1}} \quad (2.38)$$

En el caso de elementos sin armadura transversal, se cumple la siguiente relación:

$$\sigma_2 = \sigma_1 \cot^2 \theta \quad (2.39)$$

Dado que en este tipo de elementos el campo de esfuerzos de compresión es relativamente pequeño, se puede tomar como aproximación suficiente que  $\varepsilon_2 = \sigma_2 / E_c$ , donde  $E_c = 4950 \sqrt{f_c}$  (MPa); combinando las ecuaciones (2.7) y (2.39) se obtiene la siguiente expresión:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x (1 + \cot^2 \theta) + \frac{\cot^4 \theta}{15000 (1 + \sqrt{500 \varepsilon_1})} \quad (2.40)$$

La forma en que la anterior ecuación geométrica relaciona la deformación principal a tracción  $\varepsilon_1$  y el ángulo de biela  $\theta$  para diferentes valores de  $\varepsilon_x$  se muestra en la Figura 2.22; los puntos de intersección de las curvas representadas definen los valores de  $\theta$  y  $\varepsilon_1$  que satisfacen simultáneamente las ecuaciones (2.38) y (2.40). Se puede comprobar que a medida que el espaciamiento entre grietas  $s_{x\varepsilon}$  aumenta, el valor de  $\beta$  disminuye. El hecho observado es que grandes vigas de hormigón armado sin armadura transversal colapsan para esfuerzos cortantes menores que vigas geoméricamente semejantes pero más pequeñas, lo que se conoce como *efecto tamaño* en cortante [8, 13].

Los valores de  $\beta$  para elementos sin armadura transversal dependen tanto de la deformación longitudinal  $\varepsilon_x$  como del parámetro de espaciamiento  $s_{x\varepsilon}$ ; así pues, se definen dos tipos de factores relacionados con efectos distintos: por un lado, el factor

correspondiente al efecto deformacional (“strain effect factor”) y por otro, el factor correspondiente al efecto tamaño (“size effect factor”). Ambos factores no son realmente independientes; sin embargo, en las simplificaciones de la TMCC se obvia esta interdependencia y se asume que el término  $\beta$  puede ser expresado como el producto de dichos factores, tal y como se indica a continuación [8]:

$$\beta = \left[ \frac{0.4}{1 + 1500\varepsilon_x} \right] \left[ \frac{1300}{1000 + s_{x\varepsilon}} \right] \quad (2.41)$$

La TMCC simplificada propone la siguiente expresión para el ángulo de inclinación de las bielas de compresión  $\theta$ :

$$\theta = (29 \text{ deg} + 7000\varepsilon_x) \left( 0.88 + \frac{s_{x\varepsilon}}{2500} \right) \leq 75 \text{ deg} \quad (2.42)$$

Al igual que en el caso del factor  $\beta$ , la ecuación (2.42) define el ángulo de biela como el producto de los términos correspondientes al factor de tamaño y al factor deformacional.

En el caso de elementos de hormigón con armadura longitudinal y transversal sometidos a un estado de sollicitación próximo al de colapso por cortante, la TMCC estima cambios sustanciales en las contribuciones a cortante tanto del hormigón como del acero. Generalmente, después de alcanzado el límite de cedencia de la armadura transversal, el ángulo  $\theta$  se reducirá, lo que a su vez producirá un incremento de la contribución a cortante del acero, así como una mayor tensión de tracción en la armadura longitudinal. La solución propuesta a este respecto por la TMCC simplificada consiste en considerar el valor de  $\theta$  para el cual la contribución a cortante del hormigón es máxima. Igualmente, y con un fin también simplificativo, se propone utilizar las mismas expresiones de los factores de tamaño y deformacional tanto para elementos sin armadura transversal como con ella.

La Figura 2.23 compara los valores de  $\theta$  asociados a la máxima contribución a cortante del hormigón con aquellos obtenidos a partir de la ecuación (2.42); como se puede observar, valores altos de  $\theta$  conllevan un diseño bastante conservativo pues implican menor contribución a cortante del acero. En elementos con armadura longitudinal y transversal el espaciamiento de las fisuras será generalmente inferior a 300 mm, y por tanto, se toma un valor de  $s_{x\varepsilon}$  igual a 300 mm tanto en la ecuación (2.41) como en la

2.42. Por otra parte, la Figura 2.23 compara también los valores del factor  $\beta$  estimados a partir de la TMCC con los obtenidos mediante la ecuación (2.41), y como se puede observar los resultados menos conservativos (i.e., mayor contribución a cortante del hormigón) están relacionados con deformaciones longitudinales  $\epsilon_x$  relativamente bajas.

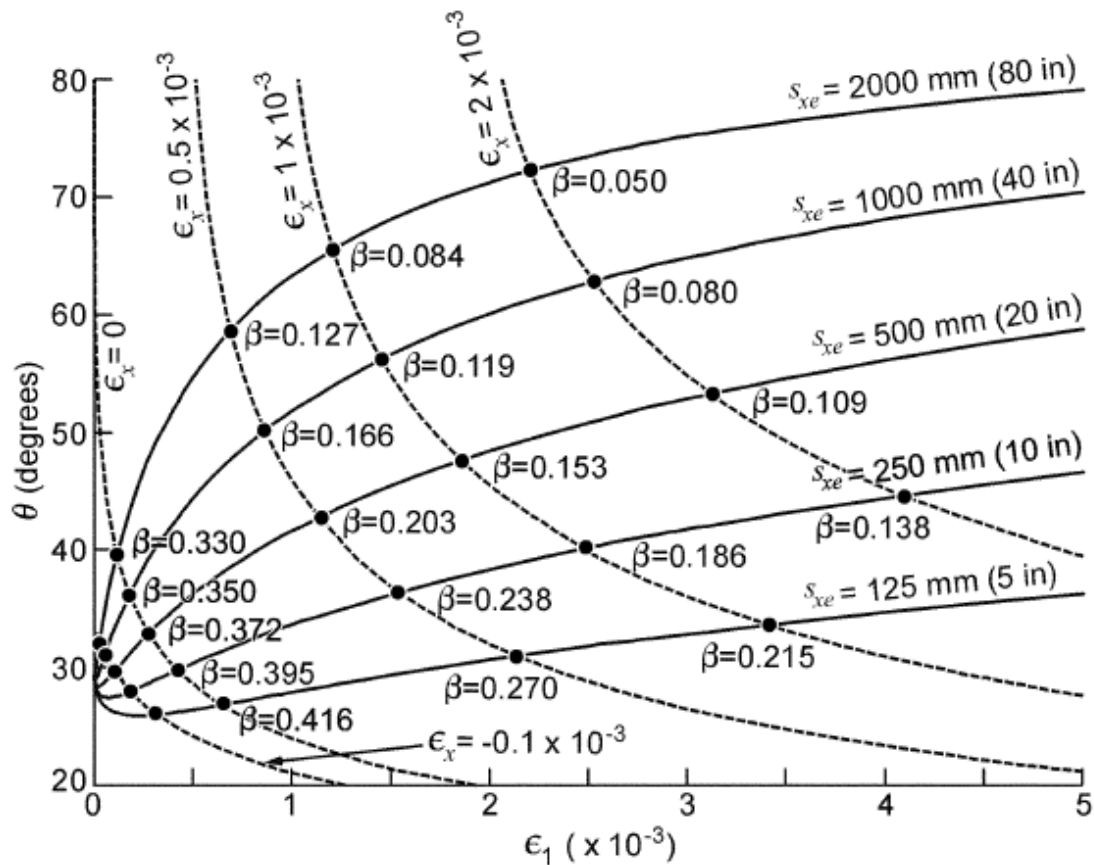


Figura 2.22: Efecto tamaño en elementos sin armadura transversal [8].

#### 2.4 Rotating-Angle Softened-Truss Model

El profesor Thomas T.C. Hsu y sus colaboradores de la Universidad de Houston (Belarbi y Hsu 1991, 1994, 1995; Pang y Hsu 1995; Hsu, 1993) desarrollaron una metodología de análisis distinta en relación a la inclusión del campo principal de tracciones del hormigón en la resistencia a cortante; este nuevo procedimiento se denominó “Rotating Angle – Softened Truss Model” (RA-STM) [4]. Al igual que la TMCC, este método asume que la inclinación de la dirección principal de tensión coincide con la de la dirección principal de deformación. Por lo general, este ángulo decrecerá a medida que la fuerza de cortante se incremente; de ahí el nombre de esta teoría alternativa.

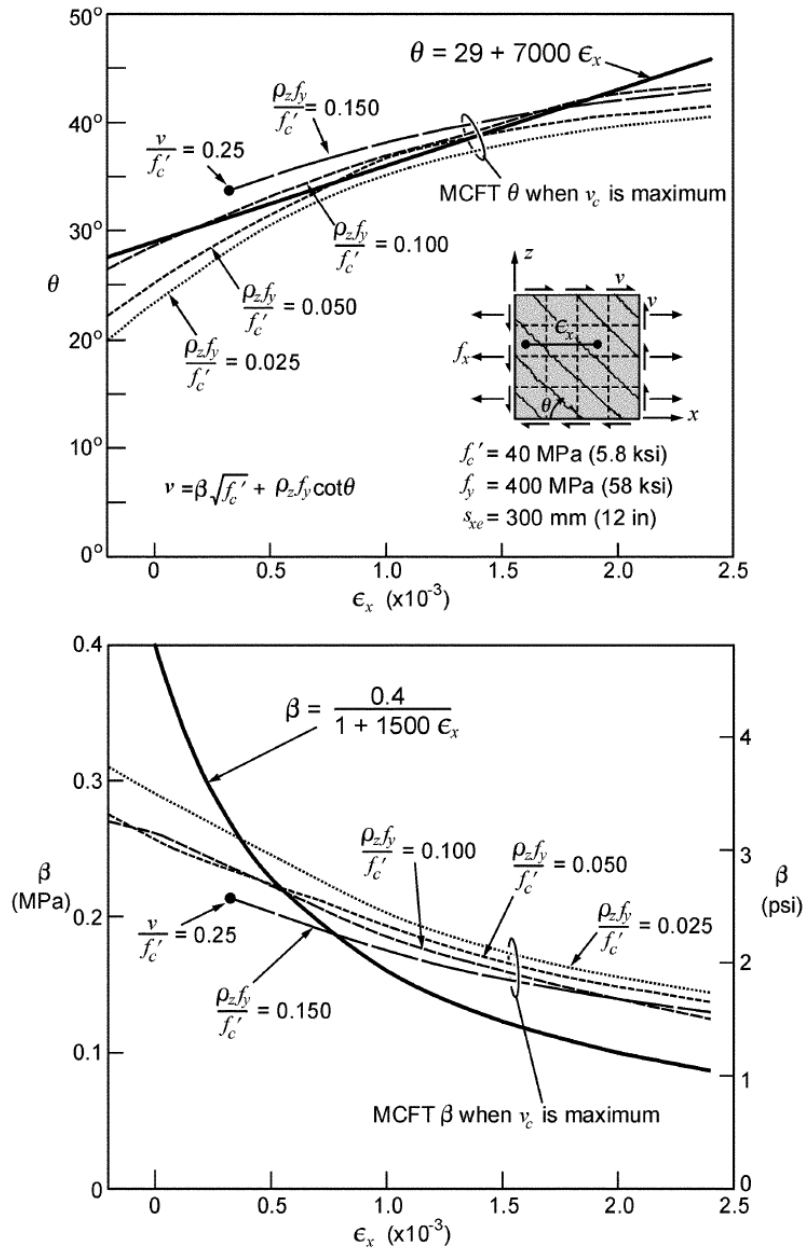


Figura 2.23: Análisis comparativo de los parámetros  $\beta$  y  $\theta$  para elementos de hormigón armados transversalmente [8].

Esta nueva teoría satisface los tres principios fundamentales de la mecánica de materiales: 1) equilibrio de esfuerzos, 2) compatibilidad de deformaciones y 3) leyes constitutivas de los materiales. Así pues, con este modelo alternativo se puede predecir no sólo la resistencia a cortante de un elemento sino también su función de respuesta *Carga vs. Deformación*. Al igual que ocurría en la TMCC, se consideran valores medios de las distribuciones de tensiones y deformaciones a fin de poder aplicar los principios de la mecánica del continuo así como las relaciones de transformación de la Teoría de la Elasticidad, plasmadas gráficamente en el círculo de Mohr.



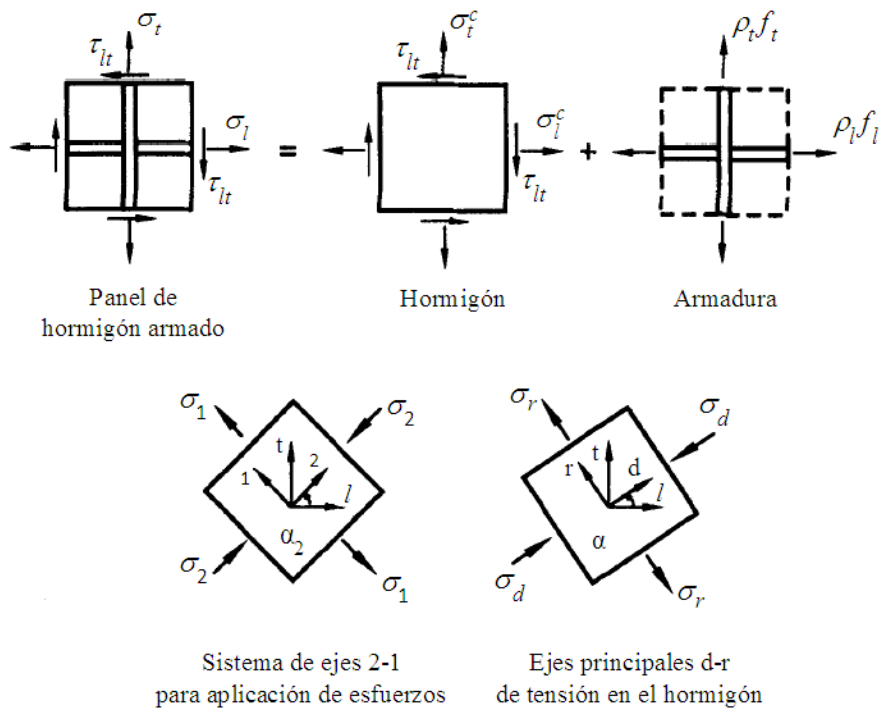


Figura 2.24a: Campos de tensiones y sistemas de ejes coordenados en un ensayo a cortante de un panel de hormigón.

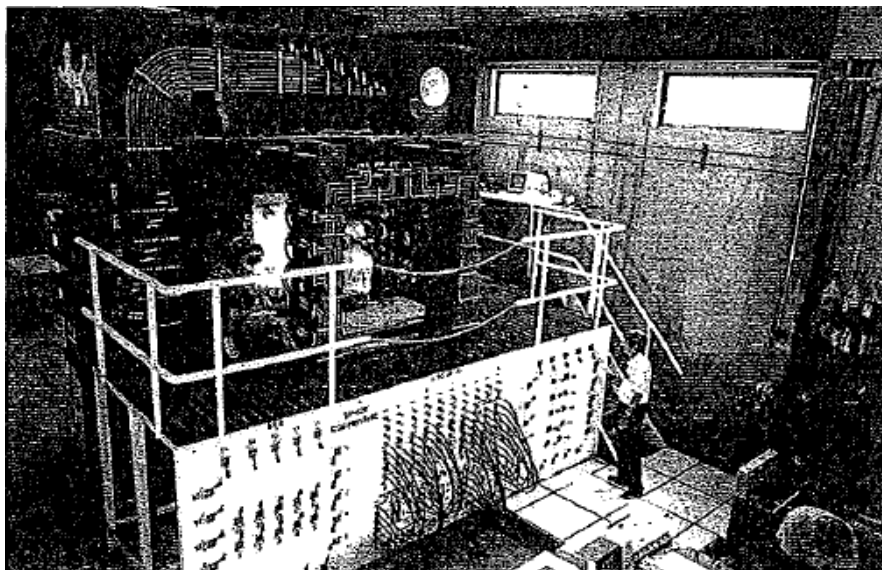


Figura 2.24b: "Universal Panel Tester" (Universidad de Houston) [33].

En la Figura 2.24a se muestra un esquema de un panel de hormigón armado sometido a esfuerzos normales y cortantes coplanarios entre sí. Las direcciones de las barras de armado longitudinal y transversal se han designado mediante los ejes  $l$  y  $t$ , respectivamente, constituyendo el sistema coordenado  $l - t$ . El conjunto de tres esfuerzos coplanarios  $\sigma_l$ ,  $\sigma_t$  y  $\tau_{lt}$  puede ser reemplazado por un par de esfuerzos principales  $\{\sigma_1$ ,

$\sigma_2$  orientados según los ejes 1 y 2 del sistema de ejes principales. El ángulo entre la dirección principal de compresión (eje 2) y la dirección del armado longitudinal se denota como  $\alpha_2$ . En el “Universal Panel Tester” (Figura 2.24b), que es como se denomina el módulo de ensayo a cortante de la Universidad de Houston, las cargas son aplicadas biaxialmente a lo largo de las direcciones principales 1 y 2 del panel, mientras las barras de armado longitudinales quedan orientadas según un ángulo  $\alpha_2$  respecto a la dirección principal de compresión; de ahí que dicho ángulo se denomine “fixed angle”. Las direcciones principales de tensión y deformación del hormigón fisurado son definidas mediante el sistema de ejes coordenados  $d - r$ . El eje  $d$ , que representa la dirección principal de compresión en el hormigón, está orientado según un ángulo  $\alpha$  respecto a la dirección de armado longitudinal. Cuando la tensión media en las armaduras longitudinal y transversal es idéntica, la dirección principal de compresión en post-fisuración (eje  $d$ ) coincide con la dirección de la compresión aplicada (eje 2), y en este caso  $\alpha = \alpha_2$ . Sin embargo, cuando los esfuerzos medios de tracción en las armaduras longitudinal y transversal son distintos, el eje  $d$  se desvía respecto el eje 2, y en ese caso  $\alpha < \alpha_2$ . Ya que el ángulo  $\alpha$  disminuye a medida que aumenta la carga aplicada, también a este último se le denomina “rotating angle”. De acuerdo a lo anteriormente expuesto, los esfuerzos principales en el hormigón fisurado se denotan como  $\sigma_d$  y  $\sigma_r$  para compresión y tracción, respectivamente.

#### 2.4.1 Ecuaciones de equilibrio, de compatibilidad y constitutivas

Las tres ecuaciones de equilibrio de la RA-STM se obtienen a partir de las ecuaciones de transformación entre el sistema coordenado  $d - r$  y el sistema coordenado  $\ell - t$ , resultando las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\sigma_\ell &= \sigma_d \cos^2 \alpha + \sigma_r \text{sen}^2 \alpha + \rho_l f_l \\ \sigma_t &= \sigma_d \text{sen}^2 \alpha + \sigma_r \cos^2 \alpha + \rho_t f_t \\ \tau_{\ell t} &= (-\sigma_d + \sigma_r) \text{sen} \alpha \cos \alpha\end{aligned}\tag{2.43}$$

donde  $\rho_l$  y  $\rho_t$  son las cuantías de acero longitudinal y transversal, y  $f_l$  y  $f_t$  son los esfuerzos medios de tracción en las armaduras longitudinal y transversal, respectivamente.

Igualmente, las tres ecuaciones de compatibilidad se obtienen a partir de las relaciones de transformación de deformaciones entre los sistemas coordenados  $d - r$  y  $\ell - t$ , tal y como se indica a continuación:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\ell &= \varepsilon_d \cos^2 \alpha + \varepsilon_r \operatorname{sen}^2 \alpha \\ \varepsilon_t &= \varepsilon_d \operatorname{sen}^2 \alpha + \varepsilon_r \cos^2 \alpha \\ \gamma_{\ell t} &= (-\varepsilon_d + \varepsilon_r) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha\end{aligned}\quad (2.44)$$

donde  $\varepsilon_d$  y  $\varepsilon_r$  son las deformaciones principales del hormigón medidas en el sistema coordenado  $d - r$ .

El anterior conjunto de seis ecuaciones requiere de tres relaciones constitutivas, a saber:

- a) Relación tensión-deformación del hormigón a compresión, donde se relaciona la tensión de compresión  $\sigma_d$  con la deformación  $\varepsilon_d$  en el sistema coordenado  $d - r$ , y cuya expresión ya ha sido indicada en la ecuación (2.15)<sup>2</sup>.
- b) Relación tensión-deformación del hormigón a tracción, donde se relaciona la tensión de tracción  $\sigma_r$  con la deformación  $\varepsilon_r$  en el sistema coordenado  $d - r$ , y cuya expresión ya ha sido indicada en la ecuación (2.24).
- c) Relación tensión-deformación de la armadura longitudinal y transversal a tracción; en este caso, la RA-STM presenta una importante novedad en relación a la TMCC, pues evita la verificación de tensiones a nivel de grieta mediante un ajuste de la relación tenso-deformacional del acero.

La gráfica tensión-deformación del acero de armar generalmente se considera elástica-perfectamente plástica, con un *techo tensional* correspondiente al nivel de cedencia del acero. Sin embargo, cuando la armadura se encuentra adherida en la práctica totalidad de su contorno a la masa de hormigón, la relación tenso-deformacional media del acero es notablemente distinta. Considérese la viga de hormigón armado de la Figura 2.25, sometida a una fuerza de tracción monótona creciente. Inicialmente, la adherencia entre el hormigón y el acero permite una transferencia casi total del esfuerzo de tracción resistido por la armadura al hormigón adherido a la misma. En el momento en que se alcanza el pico de resistencia a tracción del hormigón ( $f_{ctm}$ ), éste se agrieta; por equilibrio, en el

---

<sup>2</sup> En el presente trabajo, y a fin de utilizar una simbología unificada y coherente con el resto de teorías de campos de compresiones, se ha sustituido los subíndices ‘d’ y ‘r’ originales de la RA-STM por ‘2’ y ‘1’, respectivamente.

punto de fisuración la tensión de la armadura es máxima mientras que la del hormigón es nula. A partir de ese instante, y si la carga continúa aumentando, la armadura continuará transmitiendo tracción al hormigón hasta que éste vuelva a agrietarse nuevamente. En el instante en que la armadura alcanza su nivel de cedencia en grieta, en las zonas entre grietas la tensión de la armadura es inferior a su límite elástico, y esto es debido a la colaboración a tracción del hormigón adherido al acero (Figura 2.25). Este proceso culmina cuando la separación entre grietas consecutivas es tan pequeña que la adherencia residual entre el acero y el hormigón no resulta suficiente para seguir transmitiendo tracción al hormigón, o hasta que la armadura alcanza el nivel de cedencia en grieta.

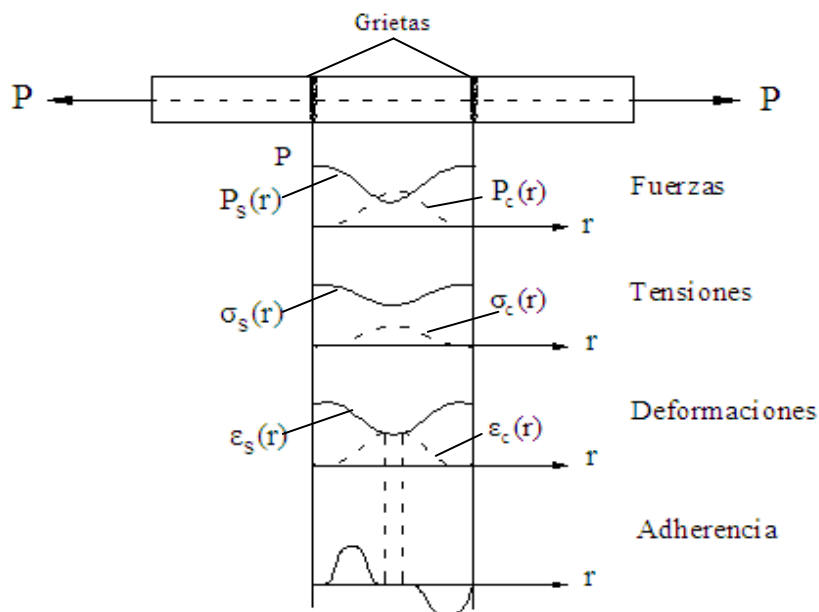


Figura 2.25: Esquema de distribución de fuerzas, esfuerzos normales, deformaciones y esfuerzos de adherencia entre dos grietas consecutivas de una viga de hormigón armado.

La RA-STM propone dos modelos de curvas tensión-deformación para el acero:

c.1) el primero de ellos consiste en una única curva obtenida a partir de la siguiente expresión analítica de Richard y Abbott [38] (Figura 2.26):

$$f_s = \frac{(E_s - E_p) \varepsilon_s}{\left[ 1 + \left[ \frac{(E_s - E_p) \varepsilon_s}{f_0} \right]^m \right]^{1/m}} \quad (2.45)$$

donde  $f_s$  es la tensión media en la armadura,  $E_p$  es el módulo plástico del acero (cuyo valor suele oscilar entre el 1.8% y el 2.5% del valor del módulo elástico del acero  $E_s$ ),  $f_0$  es la tensión de intersección entre las asíntotas correspondientes a los tramos elástico y plástico (cuyo valor es aproximadamente del 89% del límite elástico del acero), y  $m$  es el parámetro de curvatura del acuerdo que une los tramos elástico y plástico, y su valor es función de la tensión aparente de cedencia  $f_y^*$ , tal y como se indica a continuación:

$$m = \frac{0.5}{1 - \frac{f_y^*}{f_n}} \quad (2.46)$$

donde  $f_n$  es el punto de intersección de las curvas elástica y plástica, cuyo valor es aproximadamente de un 91% del límite elástico del acero, y viene dado por la siguiente ecuación:

$$f_n = f_0 \frac{E_s}{E_s - E_p} \quad (2.47)$$

La tensión aparente de cedencia  $f_y^*$  es el esfuerzo de tracción que solicita la armadura en la zona entre fisuras cuando dicha armadura alcanza en grieta la tensión de cedencia. A efectos prácticos, los autores de la RA-STM proponen la siguiente expresión simplificada para el cálculo de dicha tensión:

$$\frac{f_y^*}{f_y} = 1 - \frac{4}{\rho} \left( \frac{f_{cr}}{f_y} \right)^{1.5} \quad (2.48)$$

donde  $\rho$  es la cuantía de armadura longitudinal o transversal, según corresponda.

c.2) El segundo de ellos consiste en un modelo bilineal simplificado compuesto de dos líneas rectas con distinta pendiente; la primera recta corresponde a la región elástica y su pendiente es  $E_s$ , mientras que la segunda recta corresponde al tramo plástico y su pendiente es  $E_p$ . La formulación propuesta a este respecto por la RA-STM se indica a continuación [5, 22, 23]:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= E_s \varepsilon_s, \quad \varepsilon_s \leq \varepsilon_n \\ \sigma_s &= f_y \left[ (0.91 - 2B) + (0.02 + 0.25B) \frac{E_s}{f_y} \varepsilon_s \right], \quad \varepsilon_s > \varepsilon_n \end{aligned} \quad (2.49)$$

siendo

$$\varepsilon_n = \frac{E_s}{f_y} (0.93 - 2B), \quad B = \frac{1}{\rho} \left( \frac{f_{ctm}}{f_y} \right)^{1.5} \quad \text{y} \quad f_{ctm} = 0.3 \sqrt{f_{ck}} \quad (\text{MPa})$$

donde  $\varepsilon_n$  es el valor de deformación correspondiente a la intersección entre los dos tramos rectos dados por la ecuación (2.49), y  $f_{ck}$  es la resistencia característica a compresión del hormigón.

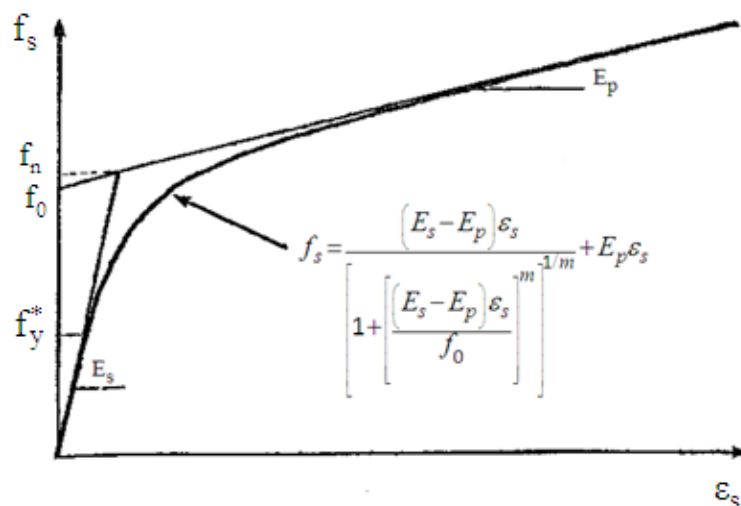


Figura 2.26: Relación tensión-deformación del acero según el modelo de Richard-Abbott (Hsu et al., 1994). Adaptado de [5].

En la Figura 2.27 se muestran las predicciones de resistencia a cortante de la TCC (CFT, en inglés), la TMCC (MCFT, en inglés) y la RA-STM correspondientes a dos series de paneles de hormigón armado. Como se puede observar, tanto la TMCC como la RA-STM arrojan resultados similares para bajas cuantías de armado transversal; sin embargo, los valores de resistencia obtenidos según la RA-STM son generalmente más bajos que los correspondientes a la TMCC para altas cuantías de armadura transversal [4].

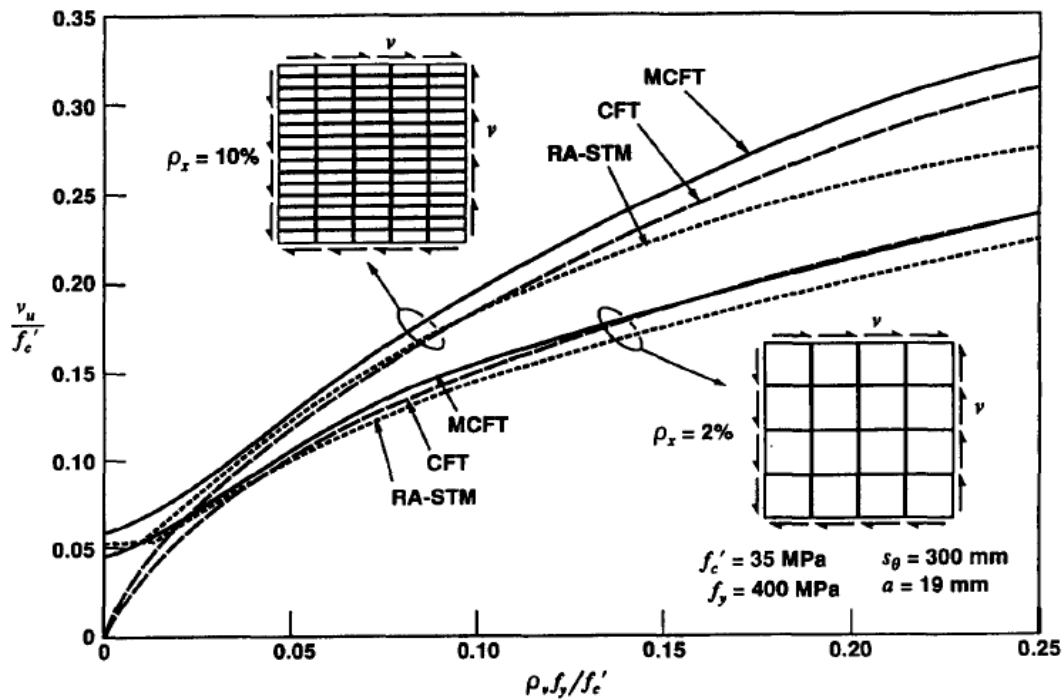


Figura 2.27: Predicción de la resistencia a cortante de dos series de paneles de hormigón armado según diferentes teorías de campos de compresiones. Adaptado de [4].

## 2.5 Teoría Unificada del Campo de Compresiones

El módulo elástico de la armadura ( $E_s$ ) permanece constante mientras la tensión de cedencia del acero no se alcance en ningún punto del elemento, y en particular, en las secciones en las que el hormigón ha fisurado. Una vez el acero alcanza su límite elástico, su módulo de deformación prácticamente se anula; como se ha visto, la TMCC adopta una formulación tenso-deformacional del acero elástica-perfectamente plástica, con un valor del módulo plástico del acero constante e igual a cero. Por su parte, la RA-STM adopta una formulación bi-lineal en la que el módulo de deformación del acero, después de alcanzado su nivel de cedencia, toma valor positivo. En el caso de la TMCC,

y debido al modelo tensión-deformación utilizado, es preciso realizar una verificación tensional en grieta.

Una relación constitutiva distinta a las enunciadas por las anteriores teorías de campo de compresiones, y basada en la formulación de la rigidez a tracción del hormigón, es la que presenta la Teoría Unificada del Campo de Compresiones [19].

La TUCC (“Refined Compression Field Theory”, en inglés) propone que los modelos de acero y de tensorrigidez del hormigón deben de estar relacionados sin ninguna formulación adicional. Siempre que el acero no entre en cedencia en la grieta, el módulo de deformación del acero será  $E_s$ . Cuando en una grieta el acero alcance su límite elástico, el módulo de deformación del acero se verá alterado. Si se establece el equilibrio entre la sección de la grieta (donde se ha producido la cedencia del acero) y una sección que represente el estado medio de tensiones (Figura 2.28) se cumplirá que:

$$\underbrace{A_s f_y}_{\text{grieta}} = \underbrace{A_s \sigma_{s,av} + A_c \sigma_{ct,av}}_{\text{sección media}} \quad (2.50)$$

donde  $A_s$  es la sección transversal de la barra de acero en cuestión y  $\sigma_{s,av}$  y  $\sigma_{ct,av}$  son las tensiones medias de tracción en la armadura y en el hormigón, respectivamente, en una sección genérica entre grietas.

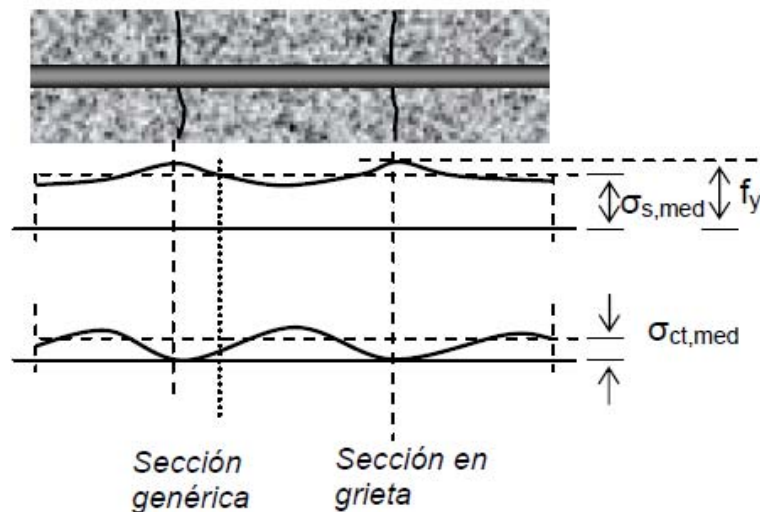


Figura 2.28: Barra sometida a tracción. El acero ha alcanzado la tensión de cedencia  $f_y$  [19, 20].



A partir de la ecuación (2.50) se puede deducir el valor medio de la tensión en la armadura embebida en hormigón:

$$\sigma_{s,av} = \begin{cases} f_y - \frac{A_c}{A_s} \sigma_{ct,av} & , \varepsilon_{ct} \geq \varepsilon_{max} \\ E_s \varepsilon_{ct} & , \varepsilon_{ct} < \varepsilon_{max} \end{cases} \quad (2.51)$$

donde  $\varepsilon_{max}$  es la deformación correspondiente a la primera cedencia en grieta, cuyo valor se puede calcular a partir de la ecuación (2.50), tal y como se indica a continuación:

$$E_s \varepsilon_y A_s = E_s \varepsilon_{max} A_s + A_c \sigma_{ct,av} \rightarrow \varepsilon_{max} = \varepsilon_y - \frac{A_c}{A_s} \frac{\frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_{max}}}}{E_s} \quad (2.52)$$

siendo  $\varepsilon_y$  la deformación correspondiente a la tensión de cedencia del acero. Al igual que la RA-STM, la TUCC propone un modelo constitutivo basado en el principio de adherencia hormigón-acero, lo que evita comprobaciones adicionales de equilibrio a nivel de grieta; la novedad de la TUCC es que, a diferencia de la RA-STM, utiliza el mismo modelo de tensorrigidez del hormigón que la TMCC (Figura 2.29).

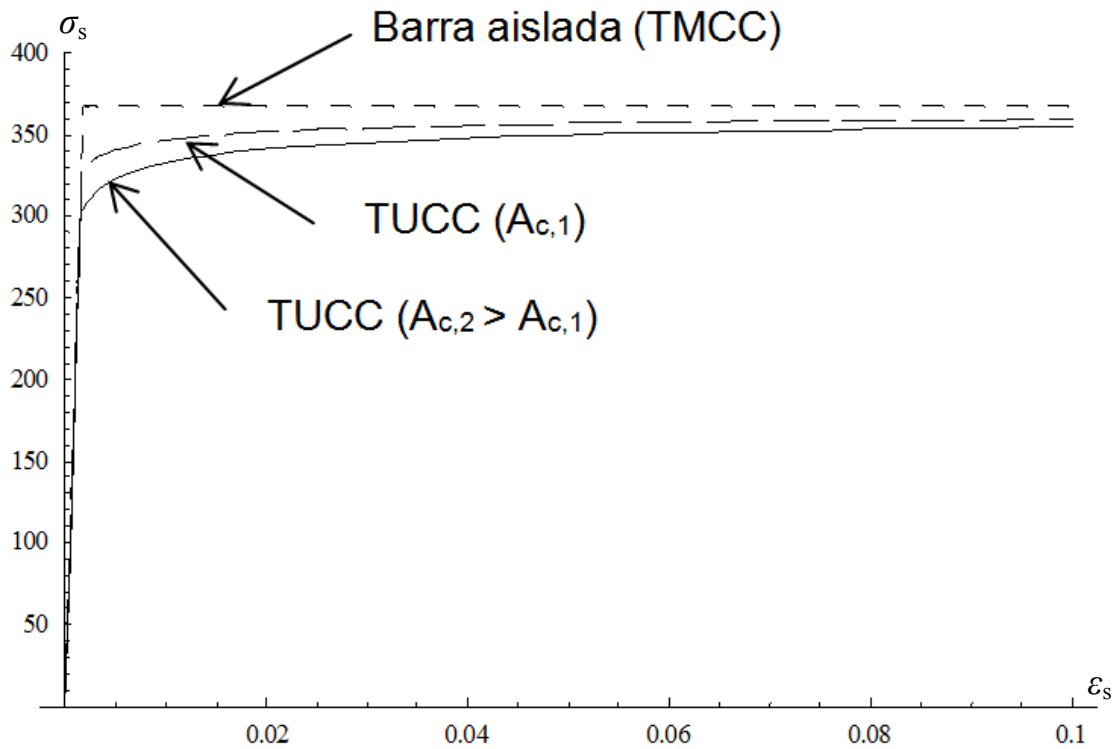


Figura 2.29: Relación tensión-deformación media del acero para diferentes valores del área efectiva de hormigón.

Tanto la tensión media en el acero ( $\sigma_{s,av}$ ) como la tensión media en el hormigón ( $\sigma_{ct,av}$ ) son función de una única y común deformación entre ambos,  $\varepsilon_{ct}$ . Así pues, a partir de la ecuación (2.51) se puede obtener una curva tensión-deformación media del acero embebido en hormigón.

Como se ha mencionado previamente, la tensorrigidez no afecta a toda el área de la sección transversal sometida tracción sino sólo a una parte situada en el entorno de la barra de acero ( $A_c$ ) cuyo valor, en fenómenos de tracción, suele adoptarse igual al área en torno a la barra a una distancia no superior a  $7.5\emptyset$ . Sin embargo, una posible hipótesis a este respecto es la de considerar dicha área como una función de la deformación hormigón-acero, o bien, de la separación entre fisuras consecutivas, teniendo en cuenta así la tendencia a la degradación que experimenta el hormigón por efecto del cortante. Sin embargo, aún es precisa una investigación más profunda en este sentido a fin de clarificar todo lo concerniente en relación a tales aspectos. A esta cuestión se dedican los Capítulos 4 y 5 de esta Tesis.



## Capítulo 3

# Análisis de la hipótesis *EPA* en el diseño a cortante de elementos de hormigón armado

### 3.1 Justificación del problema a analizar.

Las dos hipótesis fundamentales comunes a todas las teorías de campo de compresiones [5, 19 y 42] son:

- En términos medios, la deformación axial de la armadura es idéntica a la deformación del hormigón en la misma dirección. En este sentido se considera un único tensor de deformación que representa las deformaciones medias del hormigón armado.
- Los ángulos de inclinación de los esfuerzos principales coinciden con los ángulos de inclinación de las deformaciones principales [42]. Esto es lo que tradicionalmente se conoce como *hipótesis de Wagner*, y que en el marco de esta Tesis se ha denominado hipótesis *EPA* (“Equal Principal Angles”).

En 1986, los profesores Vecchio y Collins de la Universidad de Toronto afirmaban, en relación a su Teoría Modificada del Campo de Compresiones, que en elementos armados longitudinal y transversalmente las direcciones de los campos principales de tensión y deformación se desviaban aproximadamente  $10^\circ$  [42]. La Figura 3.1 muestra los resultados obtenidos por Vecchio y Collins tras el ensayo de 30 paneles cuadrados de hormigón de 89 cm de lado y 7 cm de espesor.

Por su parte, la Figura 3.2 muestra el patrón de agrietamiento observado en un panel de hormigón armado que fue sometido a tracción uniaxial combinada con cortante, y que sólo contenía armadura en la dirección de aplicación de la tracción [4]. Las primeras fisuras presentaban inclinaciones en torno a  $71^\circ$  respecto al eje horizontal. A medida que la carga aplicada iba aumentando nuevas grietas se formaban con orientaciones cada vez más próximas a la dirección de armado, mientras el ancho de dichas grietas aumentaba progresivamente. Finalmente, la rotura del elemento se alcanzó mediante una rápida propagación de las últimas fisuras producidas, las cuales en el momento del colapso

presentaban inclinaciones aproximadas de 33° respecto al eje horizontal. En este caso, la dirección principal de tensión aplicada difería hasta 20 ° respecto de la dirección principal de deformación observada (Bhide y Collins, 1989). La inclinación estimada, basada en la hipótesis EPA, quedaba a medio camino entre la dirección de deformación observada y la dirección de tensión aplicada [4].

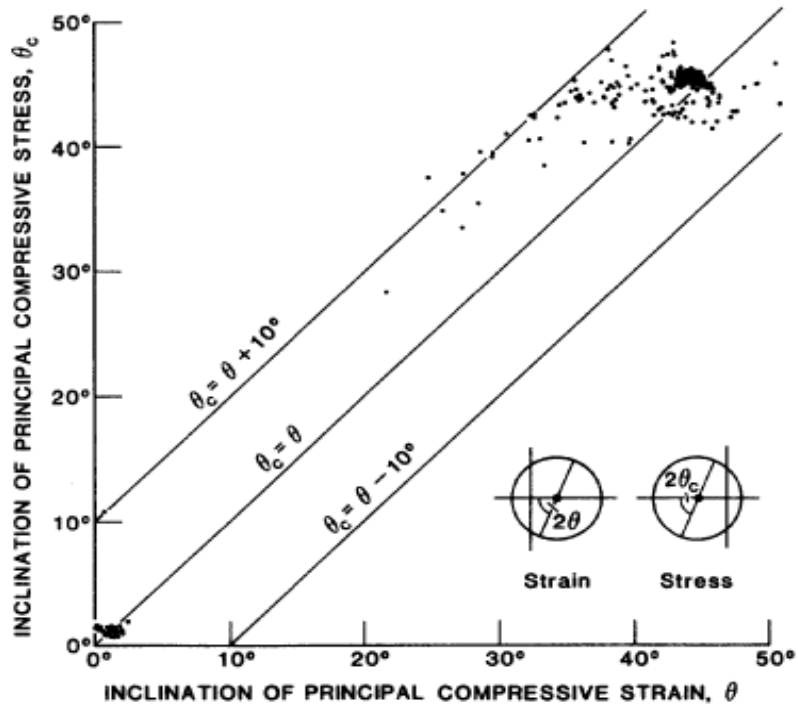


Figura 3.1: Teoría Modificada del Campo de Compresiones (Vecchio y Collins, 1986) [42].

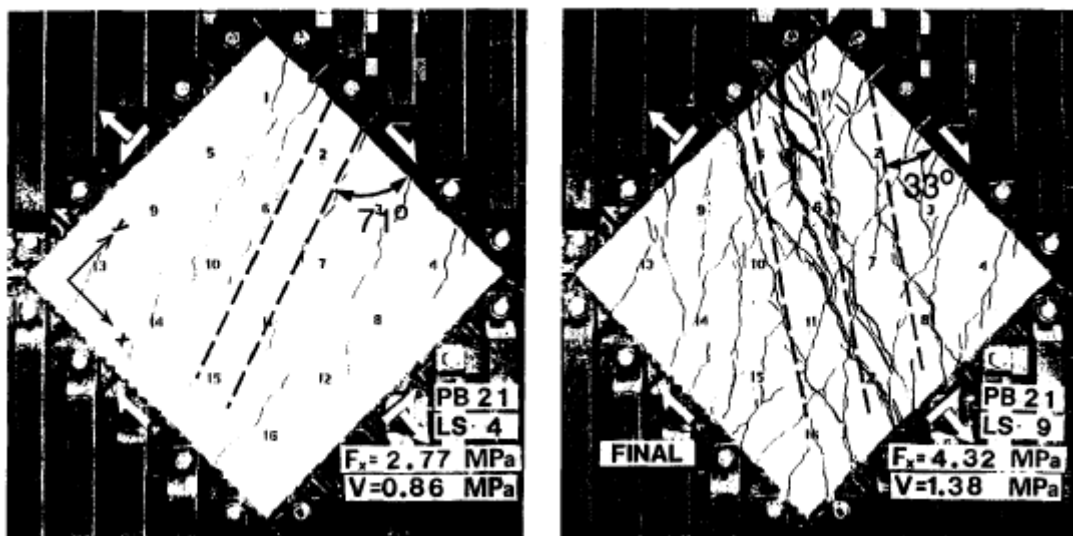


Figura 3.2: Variación de la inclinación de la fisuración por incremento de la carga aplicada en un elemento de hormigón armado [4].

Basándose en estos resultados, los precursores de las teorías de campo de compresiones en hormigón consideraron que la determinación de la inclinación de los esfuerzos principales en el hormigón a partir de la hipótesis EPA constituía una simplificación “razonable” [4, 42].

En 1996 Thomas T.C. Hsu admitía la influencia de la cuantía de armado sobre la inclinación relativa de los campos principales de tensión y deformación, realizando la siguiente afirmación en relación a su teoría RA-STM [22]:

*After initial cracking, the change in direction of the subsequent cracks are due to changes in the direction of the principal tensile stresses in the concrete, which, in turn, are dependent on the relative amount of steel in the longitudinal and transverse directions.*

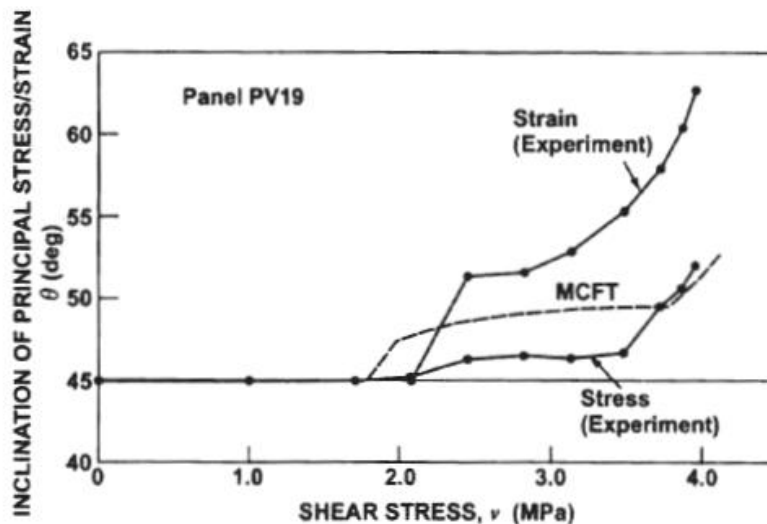


Figura 3.3: Panel V19 (Vecchio, 2000) [43].

Finalmente, en el año 2000 Vecchio indicaba que los ángulos de las tensiones y deformaciones principales no tienen por qué ser necesariamente iguales en estadios avanzados de la deformación por cortante [43]. La Figura 3.3 muestra los ángulos de los campos principales de tensión y deformación de un panel de hormigón, con una cuantía de armado longitudinal  $\rho_x = 1.8\%$  y una cuantía de armado transversal  $\rho_v = 0.7\%$ , sometido a cortante puro ( $\sigma_x; \sigma_v; \tau = 0; 0; 1$ ). La tendencia observada fue que la tasa de variación de la inclinación en la tensión principal permanecía ligeramente por debajo de la correspondiente a la deformación principal. Antes de alcanzar la fisuración ambos

campos formaban 45 ° respecto a la dirección de armado; una vez se forma la primera fisura tiene lugar un incremento brusco en la dirección de la deformación principal de tracción, acompañado de un pequeño cambio en la dirección de la tensión principal correspondiente. Conforme la tensión aplicada aumenta la tasa de variación de sendos ángulos comienza a igualarse paulatinamente, manteniendo una diferencia entre ambos casi constante en la última etapa del ensayo.

### 3.2 Modelo de análisis

Como ya se ha indicado en el Capítulo 2 de esta Tesis, la Teoría Modificada del Campo de Compresiones predice la resistencia a cortante de un elemento de hormigón armado, y su función de respuesta *Carga vs. Deformación*, mediante el planteamiento del siguiente sistema de ecuaciones:

- 3 ecuaciones de equilibrio<sup>1</sup>

$$\sigma_2 = \frac{V}{b_w z} (\tan \theta_e + \cot \theta_e) - \sigma_1 \quad (2.16)$$

$$A_{st} \sigma_{st} = (\sigma_2 \operatorname{sen}^2 \theta_e - \sigma_1 \cos^2 \theta_e) b_w s \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} A_{sx} \sigma_{sx} &= (\sigma_2 \cos^2 \theta_e - \sigma_1 \operatorname{sen}^2 \theta_e) b_w z = \\ &= V \cot \theta_e - \sigma_1 b_w z \end{aligned} \quad (2.18 \text{ y } 2.19)$$

- 2 ecuaciones de compatibilidad

$$\operatorname{Tan}^2 \theta_c = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_t - \varepsilon_2} \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_t - \varepsilon_2 \quad (2.7)$$

---

<sup>1</sup> En el ámbito de esta Tesis  $\theta_e$  es el ángulo del campo de esfuerzos principales de compresión (establecido por equilibrio), a diferencia del ángulo del campo principal de deformaciones que denotaremos como  $\theta_c$ .

- 2 relaciones tensión-deformación del acero, una para la armadura longitudinal y otra para la armadura transversal

$$\sigma_{sx} = \begin{cases} E_s \varepsilon_x & , \varepsilon_x \leq \varepsilon_y \\ f_y & , \varepsilon_x > \varepsilon_y \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\sigma_{st} = \begin{cases} E_s \varepsilon_t & , \varepsilon_t \leq \varepsilon_y \\ f_y & , \varepsilon_t > \varepsilon_y \end{cases}$$

siendo  $\varepsilon_y$  la deformación correspondiente al límite de cedencia del acero.

- Comportamiento del hormigón a tracción

$$\sigma_1 = \begin{cases} E_c \varepsilon_1 & , \varepsilon_1 \leq \varepsilon_{ctm} \\ \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_1}} & , \varepsilon_1 > \varepsilon_{ctm} \end{cases} \quad (2.22)$$

- Comportamiento del hormigón a compresión

$$\sigma_2 = f_{2max} \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_c} \right) - \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_c} \right)^2 \right] \quad (2.13)$$

$$f_{2max} = \frac{f_c}{0.8 + 170 \varepsilon_1} \leq f_c$$

En el sistema de 9 ecuaciones no lineales anterior hay 9 incógnitas:  $\theta$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_t$ ,  $V$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_{sx}$  y  $\sigma_{st}$ , cuando dicho sistema se resuelve para un determinado valor de la deformación  $\varepsilon_1$ . Además, deberá efectuarse la comprobación en grieta en relación al límite de cedencia de la armadura [13].

Para el desarrollo analítico del presente capítulo se van a asumir dos alteraciones en relación a la formulación planteada por la TMCC; la primera de ellas consiste en adoptar como ecuación de tensorrigidez del hormigón la propuesta por Bentz (2005) [7], que relaciona el área efectiva de hormigón a tracción ( $A_c$ ) con el parámetro de adherencia entre hormigón y acero ( $M$ ), y cuya expresión recordamos a continuación:



$$\sigma_1 = \begin{cases} E_c \varepsilon_1 & , \varepsilon_1 \leq \varepsilon_{ctm} \\ \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{1 + \sqrt{3.6 M \varepsilon_1}} & , \varepsilon_1 > \varepsilon_{ctm} \end{cases} \quad (2.26)$$

siendo  $M = \frac{A_c}{\sum d_b \pi}$

La segunda alteración consiste en adoptar como ecuación de comportamiento del acero la propuesta por la TUCC (Hernández Montes y Gil Martín, 2005) [19], basada en el modelo de rigidez tensional de Bentz, y cuya expresión recordamos a continuación:

$$\sigma_{s,av} = \begin{cases} f_y - \frac{A_c}{A_s} \sigma_{ct,av} & , \varepsilon_{ct} \geq \varepsilon_{max} \\ E_s \varepsilon_{ct} & , \varepsilon_{ct} < \varepsilon_{max} \end{cases} \quad (2.51)$$

donde  $\varepsilon_{max}$  es la deformación correspondiente a la primera cedencia del acero en grieta y se calcula a partir de la ecuación (2.52). En la anterior ecuación, y en relación al procedimiento que aquí se plantea, el área efectiva de hormigón a tracción ( $A_c$ ) se adopta igual al área rectangular en torno a la barra a una distancia no mayor de  $7.5\varnothing$  - siendo  $\varnothing$  el diámetro de la barra en cuestión-, área generalmente adoptada en fenómenos de tracción [12, 16, 17].

Paralelamente, y a modo comparativo, utilizaremos la ecuación de comportamiento del acero propuesta por la RA-STM [5, 22, 23], cuya expresión recordamos a continuación:

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \quad , \quad \varepsilon_s \leq \varepsilon_n$$

$$\sigma_s = f_y \left[ (0.91 - 2B) + (0.02 + 0.25B) \frac{E_s}{f_y} \varepsilon_s \right] \quad , \quad \varepsilon_s > \varepsilon_n$$

siendo

$$\varepsilon_n = \frac{E_s}{f_y} (0.93 - 2B) \quad , \quad B = \frac{1}{\rho} \left( \frac{f_{ctm}}{f_y} \right)^{1.5} \quad \text{y} \quad f_{ctm} = 0.3 \sqrt{f_{ck}} \quad (MPa)$$

Para la relación tenso-deformacional del acero propuesta por la RASTM, el modelo de tensorrigidez del hormigón vendrá dado por [5, 33]:

$$\sigma_1 = \begin{cases} E_c \varepsilon_1 & , \varepsilon_1 \leq 0.00008 \\ \frac{f_{ctm}}{\left( \frac{\varepsilon_1}{0.00008} \right)^{0.4}} & , \varepsilon_1 > 0.00008 \end{cases} \quad (2.24)$$

La razón de prescindir de la comprobación en grieta propuesta por la TMCC se debe al hecho de que las ecuaciones en que se basa dicho procedimiento han sido deducidas a partir de la hipótesis de Wagner, siendo ésta precisamente la hipótesis que se pretende refrendar en esta Tesis, por lo que obviaremos dicha comprobación sirviéndonos únicamente de aquellas ecuaciones de comportamiento del acero basadas en la tensorrigidez del hormigón (i.e., TUCC y RA-STM).

### 3.3 Transformación del modelo

El análisis de la hipótesis EPA requiere una transformación del modelo analítico de cortante propuesto por las teorías de campo de compresiones en los términos que a continuación se describen.

Despejando el valor de la fuerza cortante  $V$  que proporciona la ecuación (2.19), y sustituyendo en la ecuación (2.16), la tensión principal de compresión en el hormigón ( $\sigma_2$ ) puede ser expresada como:

$$\sigma_2 = \frac{(A_{sx} \sigma_{sx} + \sigma_1 b_w z) \tan \theta_e}{b_w \cdot z} (\tan \theta_e + \cot \theta_e) - \sigma_1 = \frac{\rho_x \sigma_{sx} + \sigma_1}{\cos^2 \theta_e} - \sigma_1 \quad (3.1)$$

Asimismo, la ecuación (2.17) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\sigma_2 = \frac{\rho_t \sigma_{st} + \sigma_1 \cos^2 \theta_e}{\sin^2 \theta_e} \quad (3.2)$$

A partir de las ecuaciones (3.1) y (3.2) se obtiene la siguiente expresión para el valor del ángulo del campo principal de tensiones,  $\theta_e$ :

$$\tan^2 \theta_e = \frac{\rho_t \sigma_{st} + \sigma_1}{\rho_x \sigma_{sx} + \sigma_1} \quad (3.3)$$

Sustituyendo la tensión principal  $\sigma_1$  por algunos de los modelos constitutivos del hormigón a tracción indicados al principio de este capítulo (ecuaciones (2.24) o (2.26)), y las tensiones medias en las armaduras,  $\sigma_{sx}$  y  $\sigma_{st}$ , por la expresión del modelo tenso-deformacional de acero embebido en hormigón (ecuaciones (2.49) o (2.51)), la ecuación (3.3) puede ser resuelta en términos del ángulo  $\theta_e$ . Esta transformación permite expresar

$\theta_e$  como una función de las deformaciones de las armaduras y la deformación principal a tracción del hormigón, según se indica a continuación:

$$\tan^2 \theta_e = F_e (\varepsilon_x, \varepsilon_t, \varepsilon_1) \quad (3.4)$$

La ecuación (3.4) proporciona el ángulo de tensiones principales –o ángulo de equilibrio- como función del campo de deformaciones. A efectos del procedimiento analítico que aquí se plantea se ha obviado el hecho de que la relación tensión-deformación considerada en la ecuación (3.4), tanto para el acero como para el hormigón, ha sido obtenida a partir de ensayos uniaxiales de los materiales (donde las direcciones principales de tensión y deformación son colineales).

A partir de la ecuación de compatibilidad (2.6), el ángulo del campo principal de deformaciones  $\theta_c$  también puede ser expresado como una función de las deformaciones  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_t$  y  $\varepsilon_1$ , según se indica a continuación:

$$\tan^2 \theta_c = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_t}{\varepsilon_1 - \varepsilon_x} \Rightarrow \tan^2 \theta_c = F_c (\varepsilon_x, \varepsilon_t, \varepsilon_1) \quad (3.5)$$

El modelo analítico formado por las ecuaciones (3.4) y (3.5) ha sido aplicado a un ejemplo de una sección típica de hormigón armado (Figura 3.4)

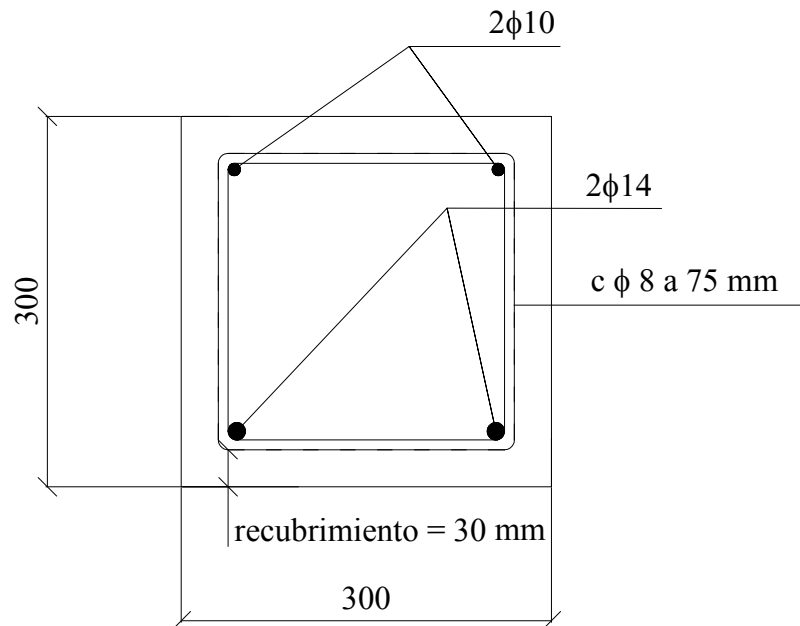


Figura 3.4: Sección tipo de viga de hormigón armado. Cotas en mm.

Los parámetros mecánicos (cuantías de armado y resistencia del hormigón) de la sección de la Figura 3.4 han sido evolucionados a través de un total de 15 especímenes, y cada espécimen se ha analizado bajo cuatro hipótesis de deformación distintas (ver Tablas 3.1 y 3.2). A lo largo de los 15 especímenes la sección de hormigón pasa de estar poco armada a estarlo fuertemente; en concreto, la cuantía de armadura longitudinal varía entre  $\rho_x=0.0068$  y  $\rho_x=0.0529$ , mientras que la cuantía de armadura transversal varía entre  $\rho_t=0.0045$  y  $\rho_t=0.0279$ . La resistencia característica del hormigón a compresión ( $f_{ck}$ ) varía entre 25 y 45 MPa, y la tensión de cedencia de la armadura es 400 MPa en todos los casos.

Por su parte, las hipótesis de deformación SH1 a SH4 han sido elegidas a fin de considerar la respuesta tanto elástica como plástica de los especímenes analizados.

Tabla 3.1: Especímenes

Espécimen	$f_{ck}$ (MPa)	ARMADURA LONGITUDINAL	$\rho_x$ (%)	ARMADURA TRANSVERSAL	$\rho_t$ (%)
S 1	25	2Ø14(T) + 2Ø10(C)	0.68	C Ø 8 a 75 mm	0.45
S 2	25	2Ø16(T) + 2Ø16(C)	1.17	C Ø 8 a 75 mm	0.45
S 3	25	4Ø16(T) + 4Ø16(C)	2.36	C Ø 10 a 75 mm	0.70
S 4	25	4Ø20(T) + 4Ø20(C)	3.72	C Ø 10 a 75 mm	0.70
S 5	25	4Ø25(T) + 5Ø20(C)	5.29	C Ø 10 a 75 mm	0.70
S 6	25	2Ø14(T) + 2Ø10(C)	0.68	C Ø 8 a 75 mm	0.45
S 7	25	2Ø14(T) + 2Ø10(C)	0.68	C Ø 10 a 75 mm	0.70
S 8	25	2Ø14(T) + 2Ø14(C)	0.91	C Ø 12 a 75 mm	1.01
S 9	25	2Ø14(T) + 2Ø14(C)	0.92	C Ø 14 a 75 mm	1.37
S 10	25	2Ø14(T) + 2Ø14(C)	0.92	C Ø 16 a 75 mm	1.79
S 11	25	2Ø14(T) + 2Ø10(C)	0.68	C Ø 8 a 75 mm	0.45
S 12	30	2Ø14(T) + 2Ø14(C)	0.90	C Ø 10 a 75 mm	0.70
S 13	35	2Ø20(T) + 2Ø20(C)	1.89	C Ø 14 a 75 mm	1.37
S 14	40	2Ø25(T) + 2Ø25(C)	3.01	C Ø 16 a 75 mm	1.79
S 15	45	2Ø32(T) + 2Ø32(C)	5.09	C Ø 20 a 75 mm	2.79

La Figura 3.5 muestra la representación gráfica de las ecuaciones (3.4) y (3.5) como función de la deformación longitudinal  $\varepsilon_x$  y bajo la hipótesis de deformación SH1 ( $\varepsilon_1 = 0.00075$  y  $\varepsilon_t = 0.0006$ ). Como se puede observar, la ecuación (3.5) presenta una asíntota vertical en  $\varepsilon_x = \varepsilon_1$ . El modelo constitutivo del acero utilizado en este caso es el propuesto

por la TUCC [19] (ecuaciones (2.51) y (2.52)), mientras que como modelo constitutivo del hormigón a tracción se ha empleado el propuesto por Bentz [7] (ver ecuación (2.26)).

Tabla 3.2. Hipótesis de deformación

Strain hypothesis	$\varepsilon_t$	$\varepsilon_l$
SH 1	0.0006	0.00075
SH 2	0.0008	0.00100
SH 3	0.0010	0.00200
SH 4	0.0020	0.00400

Las curvas de la Figura 3.5 intersectan para un valor de la deformación  $\varepsilon_x$  dentro del intervalo  $[0, \varepsilon_l]$ . Este intervalo se puede dividir en dos regiones (Figura 3.6): *Región I*, donde la dirección del campo principal de deformaciones ( $\theta_c$ ) es menor que la dirección del campo principal de tensiones, y *Región II*, donde ocurre justamente lo contrario (i.e.,  $\theta_c > \theta_e$ ). El punto de intersección de ambas funciones corresponde a la hipótesis EPA y se produce para un valor de la deformación longitudinal  $\varepsilon_x = \varepsilon_{x,EPA}$ , siendo éste el valor de la deformación longitudinal estimado por aquellas teorías de campo de compresiones que asumen la hipótesis EPA como base de su modelo de cortante.

De la Figura 3.6 se deduce igualmente que el ángulo de biela correspondiente a la hipótesis EPA ( $\theta_{EPA}$ ) permanece siempre dentro del rango  $[\theta_c, \theta_e]$ , y generalmente se asume igual a  $\theta_c$ . Las deformaciones  $\varepsilon_l$ ,  $\varepsilon_t$  y  $\varepsilon_x$  pueden ser obtenidas empíricamente, de tal forma que  $\theta_c$  pueda ser estimado a partir de la expresión (2.6). Si llamamos  $\theta'$  al ángulo obtenido de medir directamente la inclinación del campo de tensiones aplicado a un elemento de hormigón (ya sea una viga, un panel o cualquier otro tipo de elemento), encontraremos que existe una diferencia entre  $\theta'$  y  $\theta_c$ . Esta divergencia fue la que obtuvieron Vecchio y Collins en su campaña de ensayos de la TMCC [42, 43] (Figura 3.1 y 3.3); en los 30 especímenes ensayados se concluyó que dicha diferencia era siempre inferior a  $10^\circ$ .

En el marco de las teorías de campo de compresiones el ángulo  $\theta_{EPA}$  es igual, a su vez, a otros tres ángulos: el ángulo de aplicación de las cargas externas ( $\theta'$ ), el ángulo del campo principal de deformaciones ( $\theta_c$ ) y el ángulo de equilibrio ( $\theta_e$ ). Obviamente, la estimación de un ángulo de biela bajo la hipótesis EPA lleva asociado un cierto error que denominaremos  $\Delta\varepsilon_x$ , según se indica la Figura 3.6; este error representa la diferencia alcanzada entre la deformación observada empíricamente ( $\varepsilon_{x,exp}$ ) y aquella estimada a partir de la hipótesis EPA ( $\varepsilon_{x,EPA}$ ).

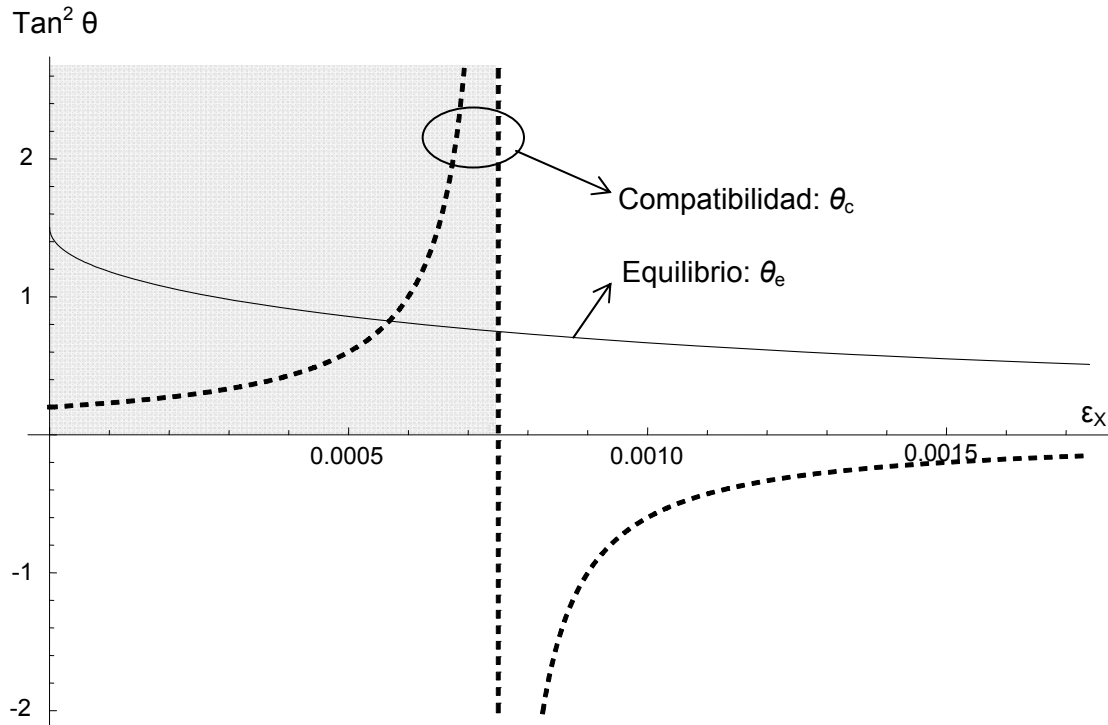


Figura 3.5: Interacción de las funciones de equilibrio ( $F_e$ ) y compatibilidad ( $F_c$ ) para una sección cuadrada de 300 mm de lado ( $f_{ck} = 25$  MPa,  $s = 75$  mm,  $z = 229.5$  mm,  $\rho_x = 0.0068$ ,  $\rho_t = 0.0045$ ,  $M = 351.57$  mm,  $\varepsilon_1 = 0.00075$ ;  $\varepsilon_t = 0.0006$ ).

A fin de poder estudiar cuantitativamente la diferencia entre la dirección del campo principal de tensiones ( $\theta_e$ ) y la del campo principal de deformaciones ( $\theta_c$ ), se ha definido la siguiente función  $\zeta$  a partir de las ecuaciones (3.4) y (3.5):

$$\zeta(\varepsilon_x, \varepsilon_t, \varepsilon_1) = \left| \theta_c(\varepsilon_x, \varepsilon_t, \varepsilon_1) - \theta_e(\varepsilon_x, \varepsilon_t, \varepsilon_1) \right| = \left| \text{ArcTan} \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_t}{\varepsilon_1 - \varepsilon_x}} \right] - \text{ArcTan} \left[ \sqrt{\frac{\rho_t \sigma_{st} + \sigma_1}{\rho_x \sigma_{sx} + \sigma_1}} \right] \right| \quad (3.6)$$

En la Figura 3.7 se ha representado la función  $\zeta$  para la sección de hormigón de la Figura 3.4; tanto para el hormigón como para el acero se han empleado los mismos modelos constitutivos adoptados en la Figura 3.5 (ecuaciones (2.26), (2.51) y (2.52)). A partir de un valor máximo de la función  $\zeta$  (i.e., una tolerancia o error máximo admisible), que denominaremos  $\zeta_{\max}$ , es posible calcular un entorno  $\delta$  de la deformación  $\varepsilon_{x,EPA}$  dentro del cual el error cometido al aplicar la hipótesis EPA es asumible (Figura 3.7). En este sentido, cuanto mayor sea la longitud de  $\delta$ , tanto mayor es el rango de valores de la deformación  $\varepsilon_x$  dentro del cual la hipótesis EPA puede ser considerada una “simplificación razonable”, tal y como indicaban Vecchio y Collins [42]. A fin de cuantificar el valor del intervalo  $\delta$ , y tomando como base las observaciones de Vecchio y Collins, en esta Tesis se ha adoptado para el término  $\zeta_{\max}$  un valor igual a  $10^\circ$ .

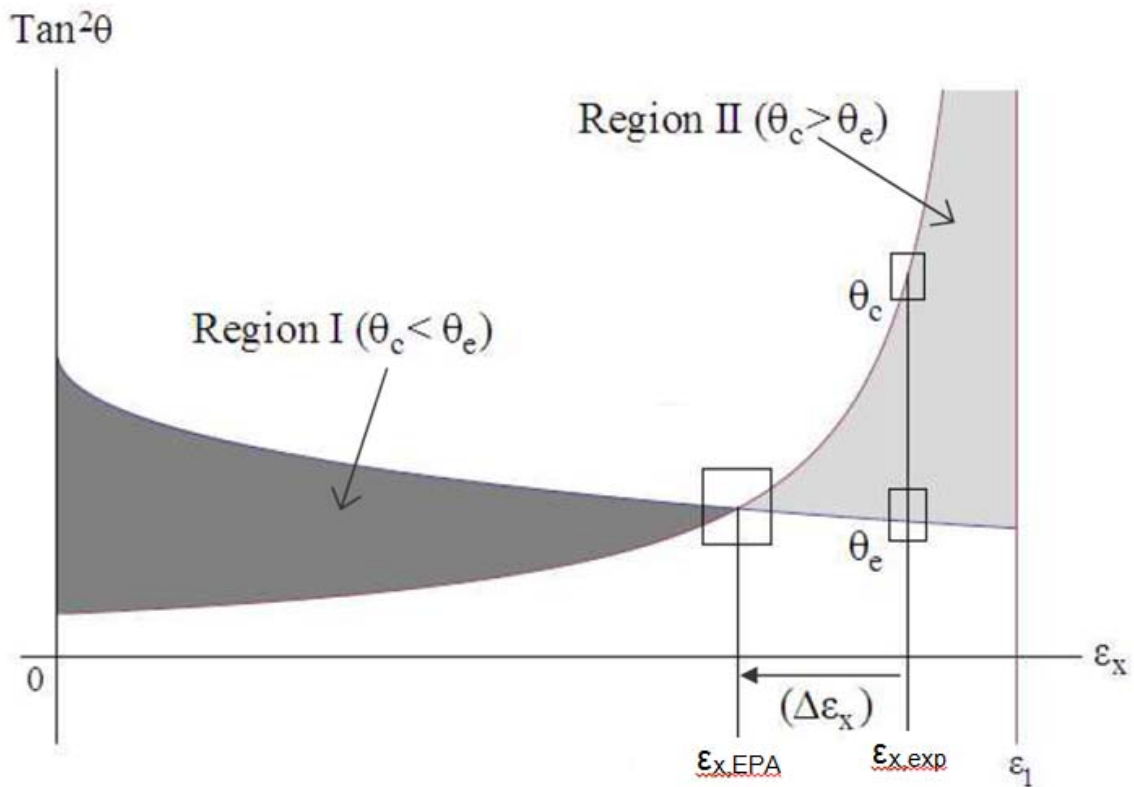


Figura 3.6: Interpretación matemática de la hipótesis EPA y error asociado  $\Delta\varepsilon_x$ .

La Figura 3.8 muestra la función  $\zeta$  correspondiente a dos cuantías de armado distintas de la sección de hormigón ilustrada en la Figura 3.3. Como se puede observar, una mayor cuantía de armadura implica una mayor longitud del intervalo  $\delta$  dentro del cual la hipótesis EPA lleva asociado un error aceptable; esto último tiene sentido mecánico ya que una mayor cuantía de armadura longitudinal implica un menor nivel de deformación

del elemento, y además va en consonancia con la afirmación de Hsu de que la divergencia de ángulos entre los campos principales de tensión y deformación se puede controlar actuando sobre las cuantías de armado [22].

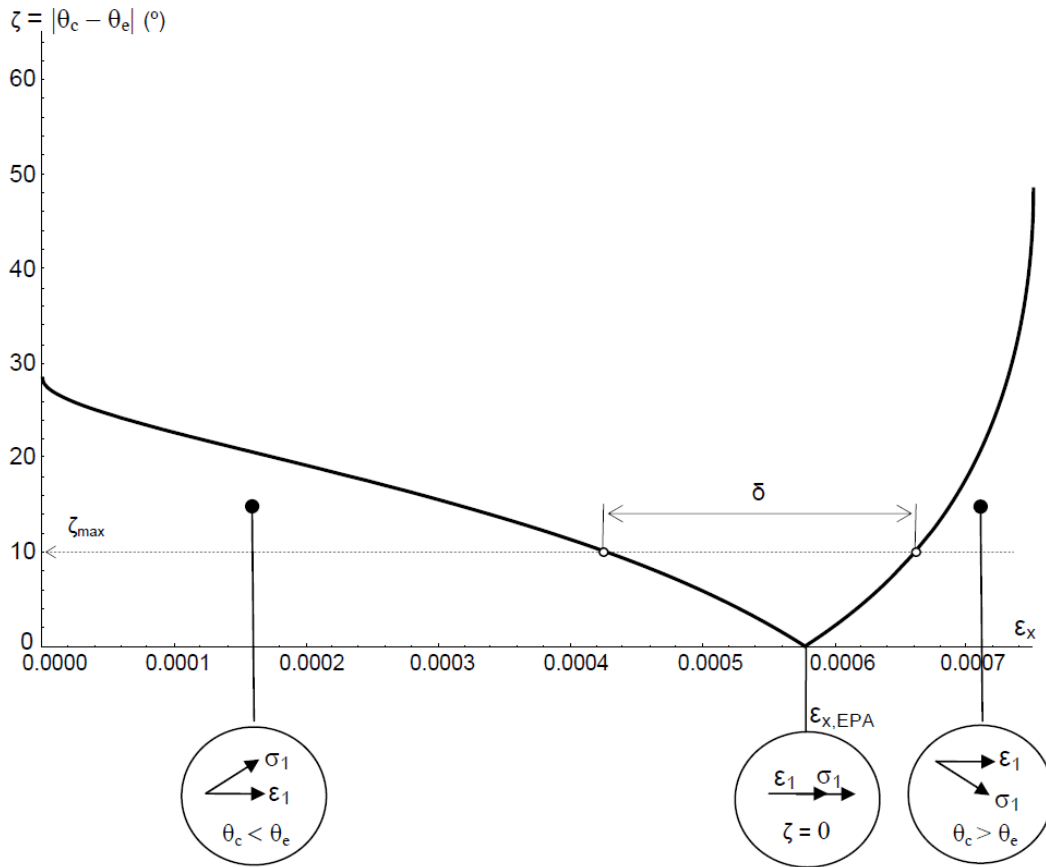


Figura 3.7: Función  $\zeta$  y parámetro  $\delta$ .

### 3.4 Resultados numéricos

De la observación de la ecuación (3.6) se deducen los siguientes parámetros de análisis de la función  $\zeta$ : la cuantía de armado longitudinal ( $\rho_x$ ), la cuantía de armado transversal ( $\rho_t$ ), y los parámetros mecánicos de acero ( $E_s$  y  $f_y$ ) y hormigón ( $E_c$  y  $f_{ctm}$ ). No obstante, en esta Tesis se han considerado únicamente los tres siguientes:  $\rho_x$ ,  $\rho_t$  y  $f_{ctm}$ , donde  $f_{ctm}$  es la resistencia media a tracción del hormigón (obtenida según [17]). Lo que aquí se pretende es evaluar la influencia que tales parámetros tienen sobre el intervalo  $\delta$ ; con este fin se ha considerado la sección de hormigón de la Figura 3.4 para diferentes valores de los tres parámetros arriba citados (ver Tabla 3.1) y bajo diferentes hipótesis de deformación (ver Tabla 3.2). Como ya se indicó en el apartado 3.2 de este capítulo, se han empleado los modelos constitutivos del acero y del hormigón propuesto por la RA-STM y la TUCC.



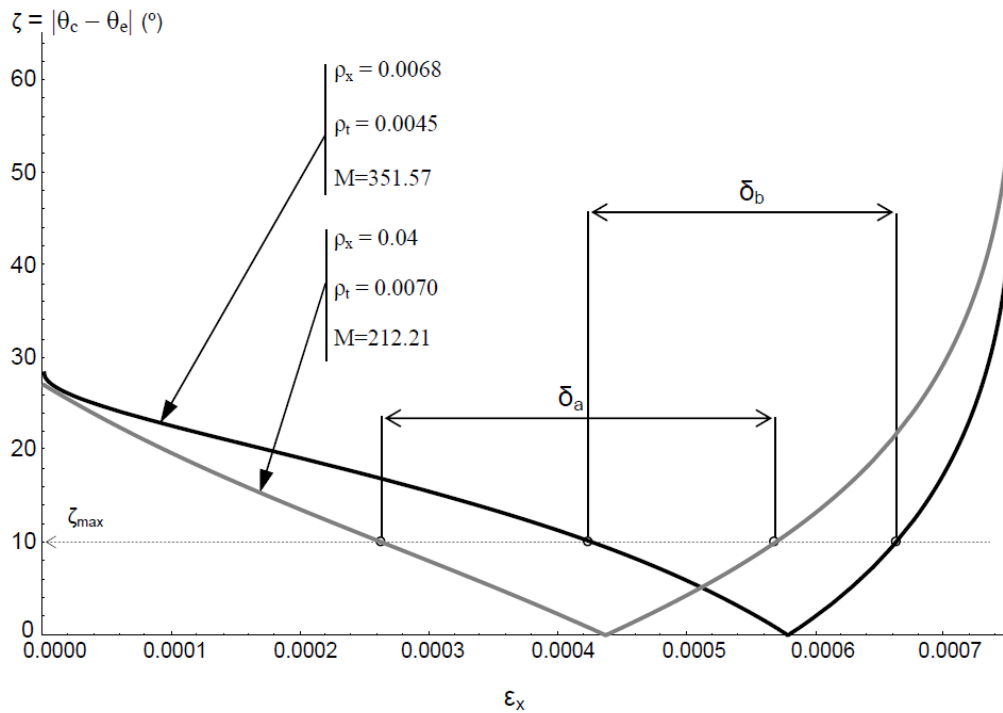


Fig. 3.8: Variación de la función  $\zeta$  con la cuantía de armadura longitudinal ( $f_{ck} = 25$  MPa,  $\varepsilon_t = 0.00075$ ;  $\varepsilon_l = 0.0006$ ).

### 3.4.1 Influencia de la cuantía de armado longitudinal

La influencia de la cuantía de armado longitudinal ( $\rho_x$ ) sobre el error asociado a la hipótesis EPA se ha estudiado a partir de los especímenes S1 a S5 contenidos en la Tabla 3.1. La Figura 3.9a representa la función  $\zeta$  para el espécimen S3 sometido a las 4 hipótesis de deformación indicadas en la Tabla 3.2. Por su parte, la Figura 3.9b representa la función  $\zeta$  para los especímenes S1 a S5 bajo la hipótesis de deformación SH1.

De los resultados presentados se deduce que para el espécimen S3, el nivel de deformación en la armadura longitudinal no modifica significativamente el valor del parámetro  $\delta$ ; por otro lado, la Figura 3.9b muestra claramente un incremento del intervalo  $\delta$  cuando la cuantía de armado longitudinal aumenta, a la par que el valor de la deformación  $\varepsilon_{xEPA}$  (i.e.  $\zeta=0$ ) disminuye.

La Figura 3.10 muestra la función  $\zeta$  para el espécimen S4 bajo la hipótesis de deformación SH3, según las dos teorías consideradas (RA-STM y TUCC); como se

puede observar, el valor del intervalo  $\delta$  es similar para sendas teorías, aunque los valores obtenidos para la función  $\zeta$  difieren ligeramente.

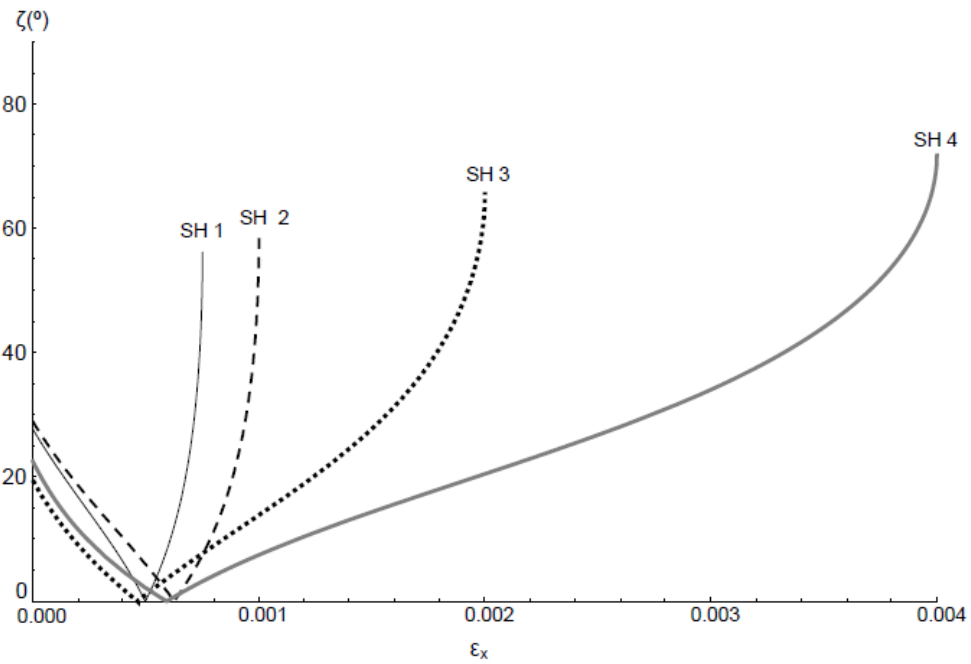


Figura 3.9a: Función  $\zeta$  correspondiente al espécimen S3, bajo diferentes hipótesis de deformación, a partir de las relaciones constitutivas propuestas por la TUCC.

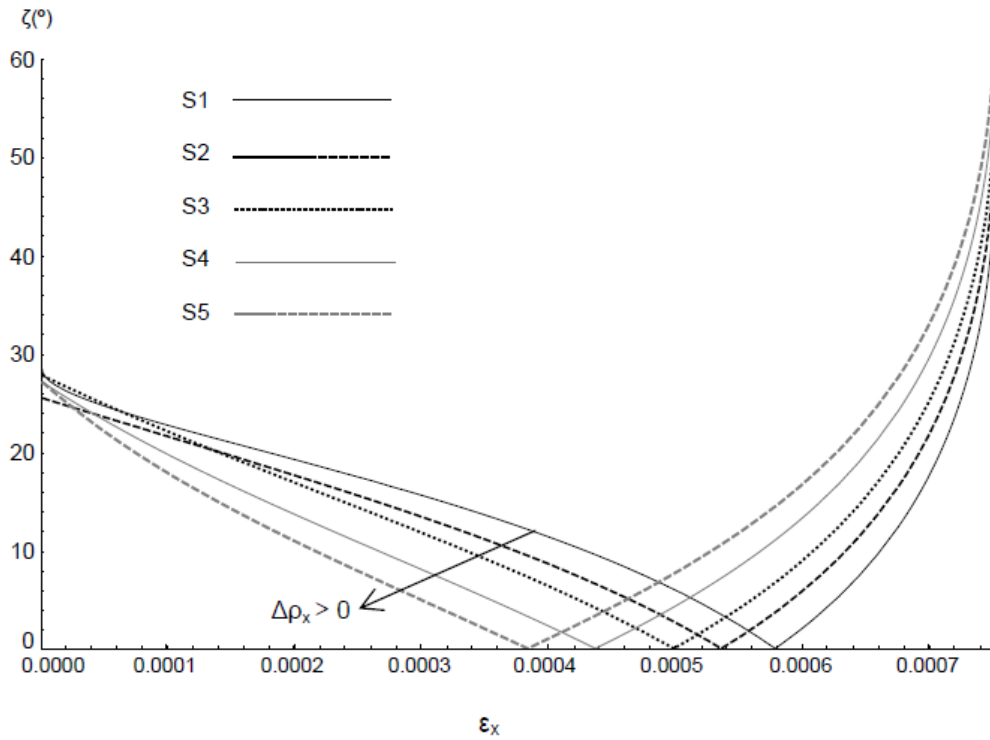


Figura 3.9b: Función  $\zeta$  correspondiente a los especímenes S1 a S5 bajo la hipótesis de deformación SH1, a partir de las relaciones constitutivas propuestas por la TUCC.

En las Figuras 3.11a y 3.11b se representa la longitud del intervalo  $\delta$  frente a la cuantía de armado según los modelos de la TUCC ( $\delta_{RT}$ ) y de la RA-STM ( $\delta_{RA}$ ); del análisis de ambas figuras se deduce que el intervalo  $\delta$  presenta pendiente positiva para pequeñas deformaciones (hipótesis SH1 y SH2), mientras que disminuye para niveles de deformación superiores (hipótesis SH3 y SH4). Este efecto está presente en ambas teorías.

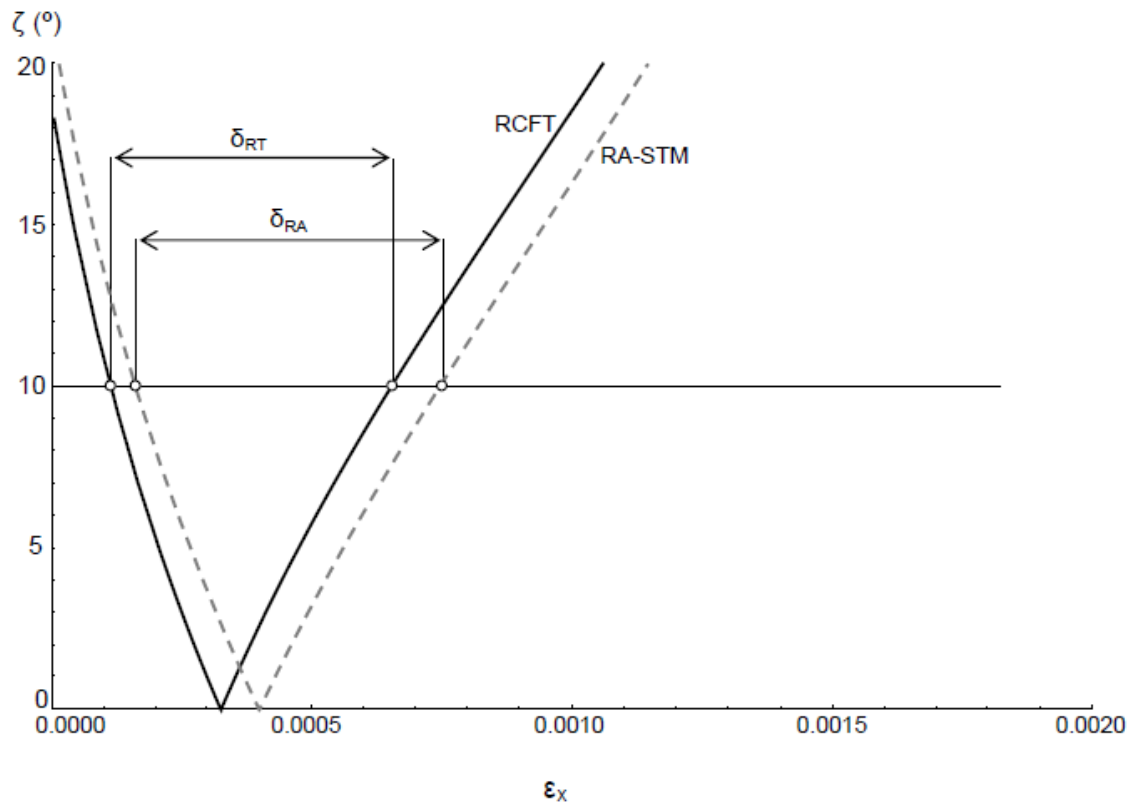


Figura 3.10: Especimen S4 bajo la hipótesis de deformación SH3. En la figura:  $\delta_{RT}=0.000538691$  y  $\delta_{RA}=0.000522138$ .

### 3.4.2 Influencia de la cuantía de armado transversal

Para el análisis del efecto de la cuantía de armado transversal sobre el intervalo  $\delta$  se han considerado los especímenes S6 a S10; en la Figura 3.12 se han representado los valores de la función  $\zeta$  bajo la hipótesis de deformación SH3. En general, de las Figuras 3.13a y 3.13b se concluye que, para todas las hipótesis de deformación (SH1 a SH4), el valor de  $\delta$  disminuye a medida que aumenta la cuantía de armado transversal.

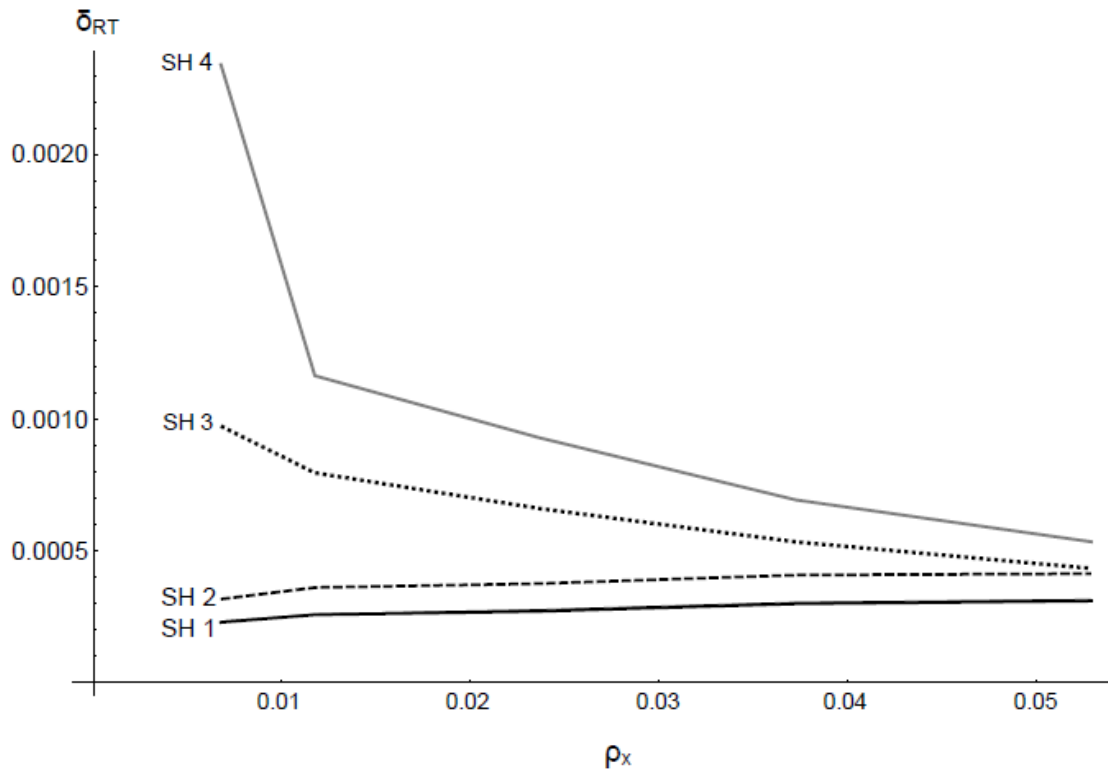


Figura 3.11a: Valores de la longitud  $\delta$  correspondientes a  $\zeta_{\max}=10^\circ$ , utilizando el modelo de la RCFT.

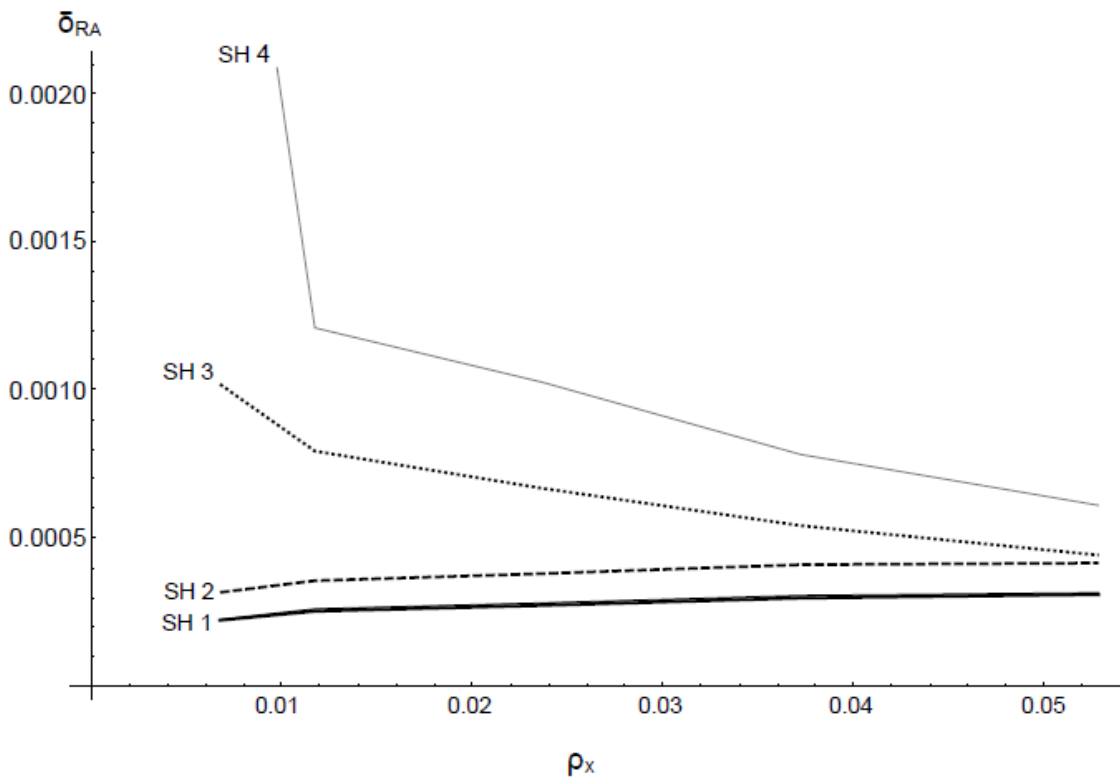


Figura 3.11b: Valores de la longitud  $\delta$  correspondientes a  $\zeta_{\max}=10^\circ$ , utilizando el modelo de la RA-STM.

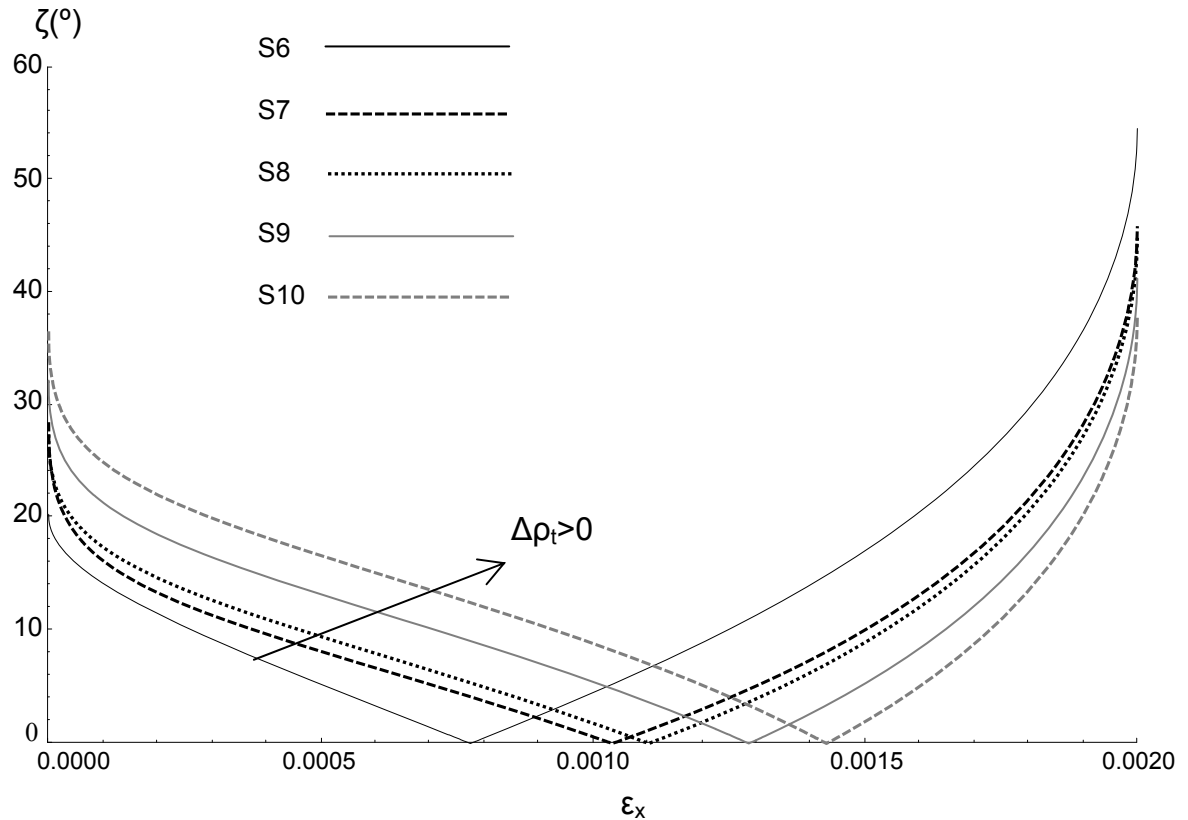


Figura 3.12: Función  $\zeta$  para los especímenes S6 a S10 bajo la hipótesis de deformación SH3.

### 3.4.3 Influencia de la resistencia del hormigón

Las Figuras 3.14a y 3.14b representan el intervalo  $\delta$  como función de la resistencia a tracción del hormigón ( $f_{ctm}$ ), a partir de los modelos constitutivos propuestos por la TUCC y la RA-STM. Al igual que ocurría con la cuantía de armado longitudinal, la longitud del intervalo  $\delta$  aumenta ligeramente con la resistencia a tracción del hormigón para niveles de deformación bajos (hipótesis SH1 y SH2), manteniéndose casi constante para la hipótesis SH3, y presentando pendiente negativa para valores altos de la deformación (SH4).

Asimismo, en las Figuras 3.14a y 3.14b se observa que para valores de la resistencia a tracción del hormigón superiores a 2.9 MPa, la resistencia a tracción del hormigón prácticamente no modifica la longitud del intervalo  $\delta$  (hipótesis SH1, SH2 y SH3).

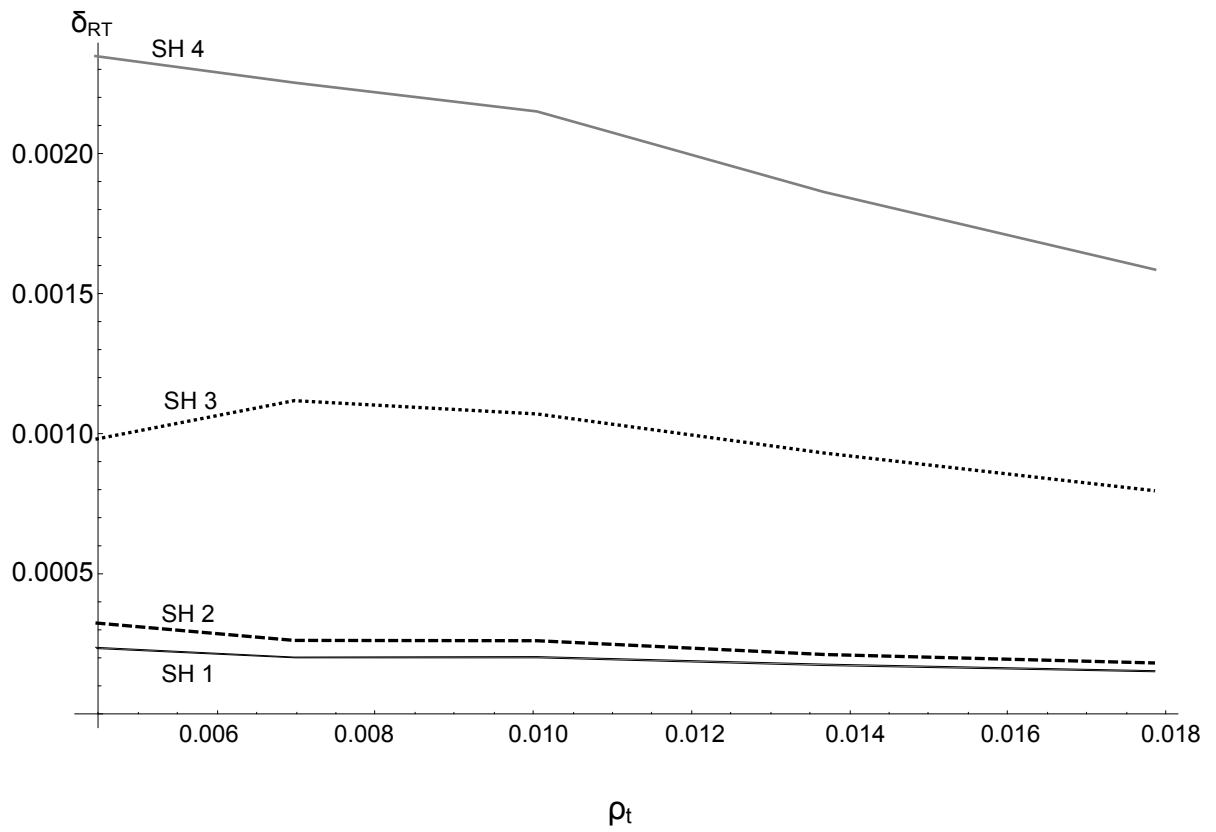


Figura 3.13a: Valores de la longitud  $\delta$  correspondientes a  $\zeta_{\max}=10^\circ$ , utilizando el modelo de la RCFT.

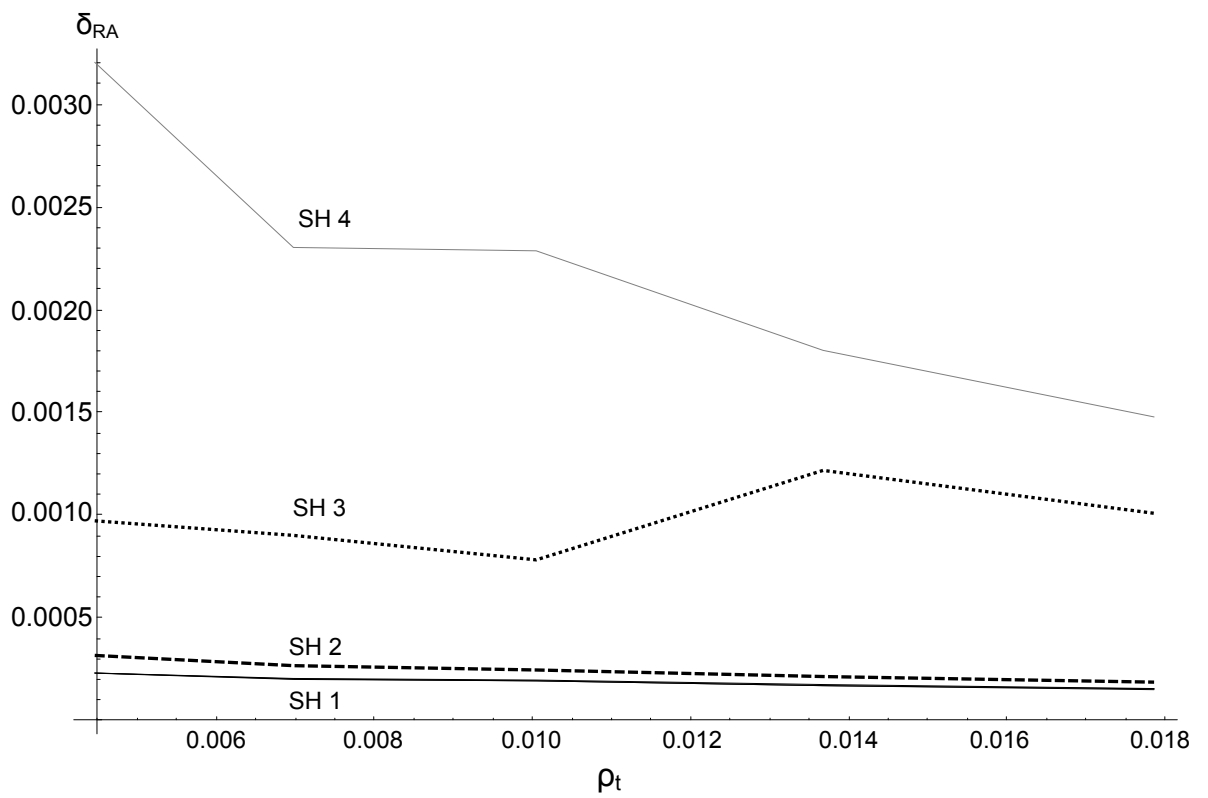


Figura 3.13b: Valores de la longitud  $\delta$  correspondientes a  $\zeta_{\max}=10^\circ$ , utilizando el modelo de la RA-STM.

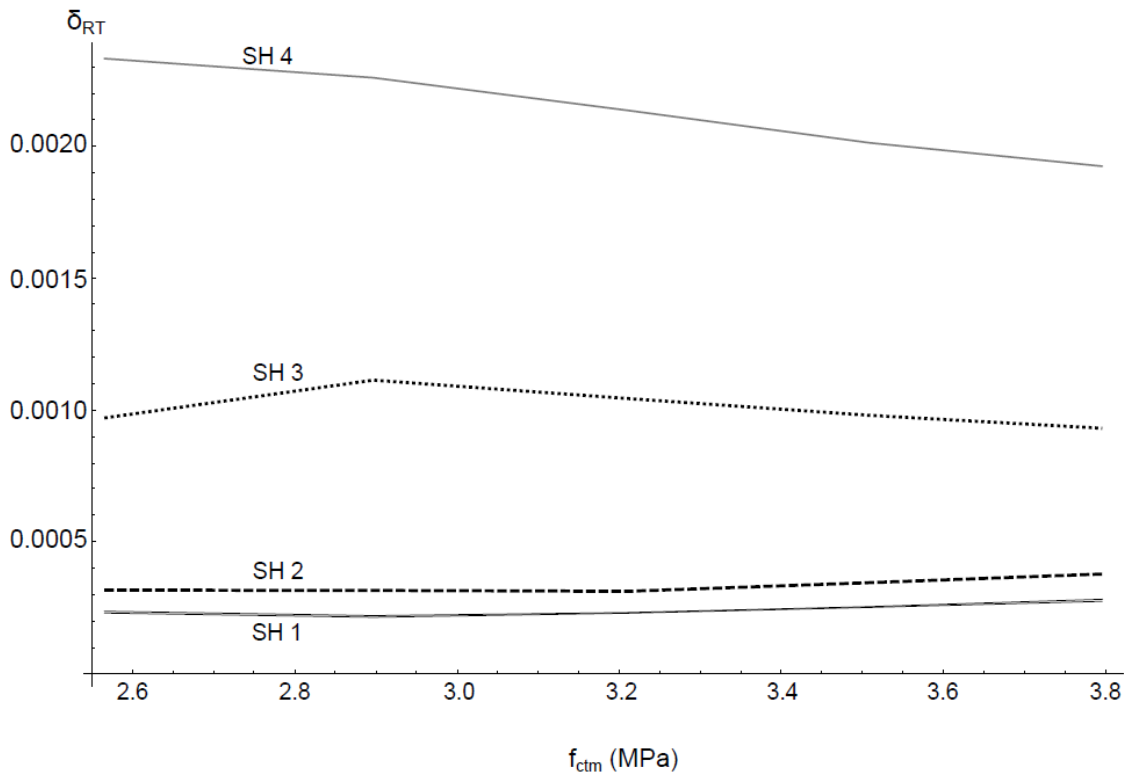


Figura 3.14a: Variación de  $\delta$  en función de la resistencia del hormigón bajo diferentes hipótesis de deformación. TUCC.

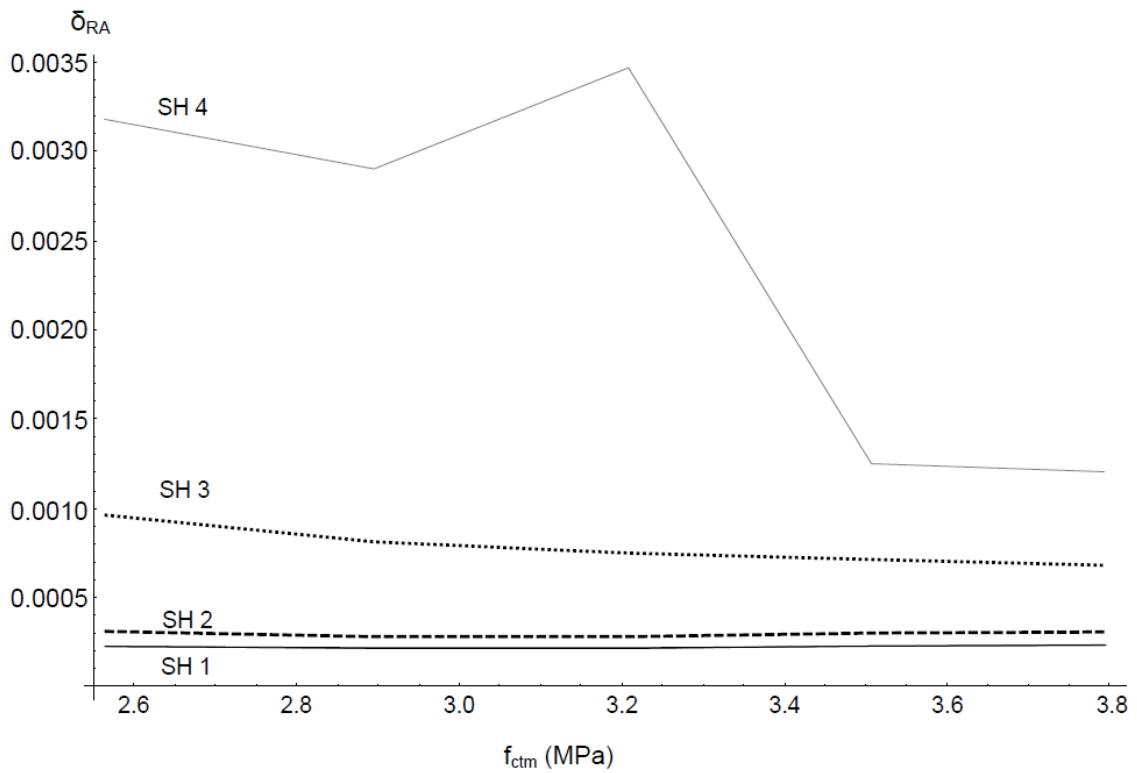


Figura 3.14b: Variación de  $\delta$  en función de la resistencia del hormigón bajo diferentes hipótesis de deformación. RA-STM.

## Capítulo 4

# Ajuste del efecto de tensorrigidez del hormigón en el modelo constitutivo del acero

### 4.1 Justificación del problema a analizar.

La expresión que proporciona la deformación aparente de cedencia  $\varepsilon_{\max}$  en el modelo de la TUCC (ecuación 2.52) no presenta solución real. En concreto, esta ausencia de solubilidad se produce para valores elevados de la cuantía  $A_c \cdot f_{ctm} / A_s$ . Esto supone un inconveniente la hora de utilizar el modelo propuesto por la TUCC que, sin embargo, puede corregirse reduciendo el valor de la anterior cuantía. En el marco de esta Tesis denominaremos  $A_c'$  a un área virtual de tensorrigidez del hormigón en torno a la barra de acero; esta área virtual es variable y no coincide necesariamente con el área efectiva ( $A_c$ ) definida en el Capítulo 2.

Considérese una barra de acero embebida en hormigón, tal y como se muestra en la Figura 4.1; se trata de una barra ubicada en la esquina de una sección típica de hormigón armado. La barra en cuestión pertenece a la armadura longitudinal superior del espécimen H75/2, correspondiente a la campaña de ensayo de vigas a cortante desarrollada por Cladera y Marí en 2002 [10]. El diámetro de la barra longitudinal es 8 mm, el diámetro de los cercos es 6mm, el recubrimiento lateral es 25 mm y el área de tensorrigidez del hormigón (i.e. área efectiva  $A_c$ , obtenida según [12]) es 9025 mm<sup>2</sup>. Si se pasan todos los términos de la ecuación (2.52) al primer miembro se obtiene la siguiente función:

$$F(\varepsilon_{\max}) = (\varepsilon_y - \varepsilon_{\max}) - \frac{\alpha_1 \alpha_2 A_c' f_{ctm}}{E_s A_s \sqrt{1 + 500 \varepsilon_{\max}}} \quad (4.1)$$

En la expresión (4.1) se ha considerado el modelo de rigidez tensional del hormigón propuesto por Collins y Mitchell (ecuación 2.22) [4, 13, 20]. Así pues, las soluciones de la ecuación (2.52) coincidirán con los ceros de la función  $F(\varepsilon_{\max})$ . En la Figura 4.2 se observa que para valores de  $A_c'$  en torno al 80 % de  $A_c$  (i.e.  $A_c' = 0.8 \cdot A_c$ ) la ecuación (2.52) presenta dos soluciones positivas en lugar de una (*problema de unicidad*),



mientras que para el caso en que  $A_c' = A_c$  la ecuación (2.52) sencillamente carece de solución (*problema de existencia*). El producto  $\alpha_1\alpha_2$  se ha considerado igual a la unidad.

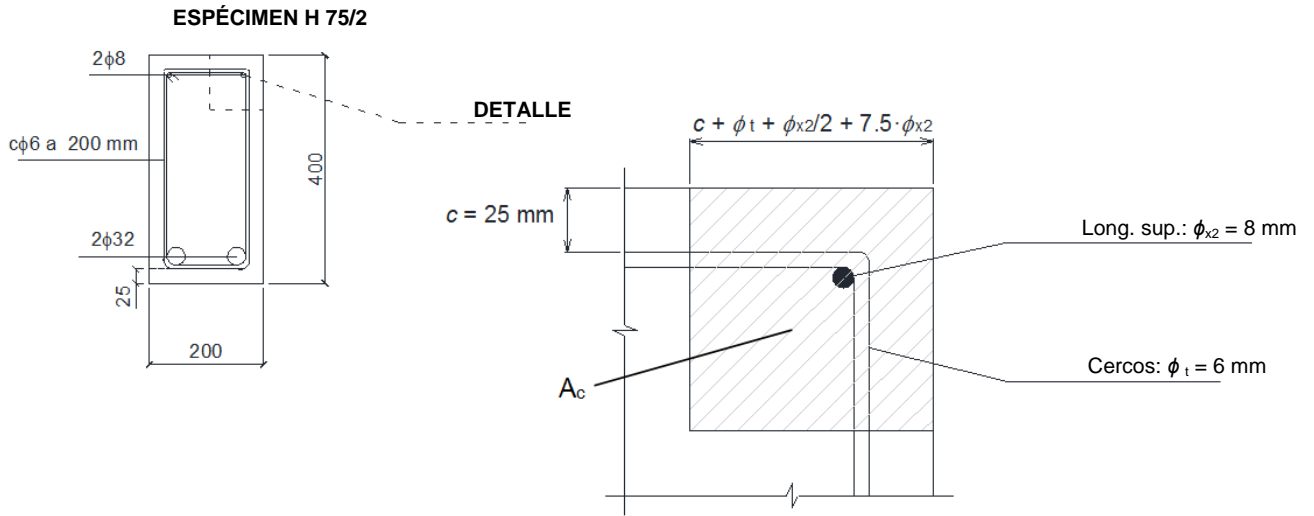


Figura 4.1: Barra de acero embebida en la esquina de una sección estándar de hormigón armado: detalle del área de tensorrigidez (obtenida según [12]). Adaptado de [10].

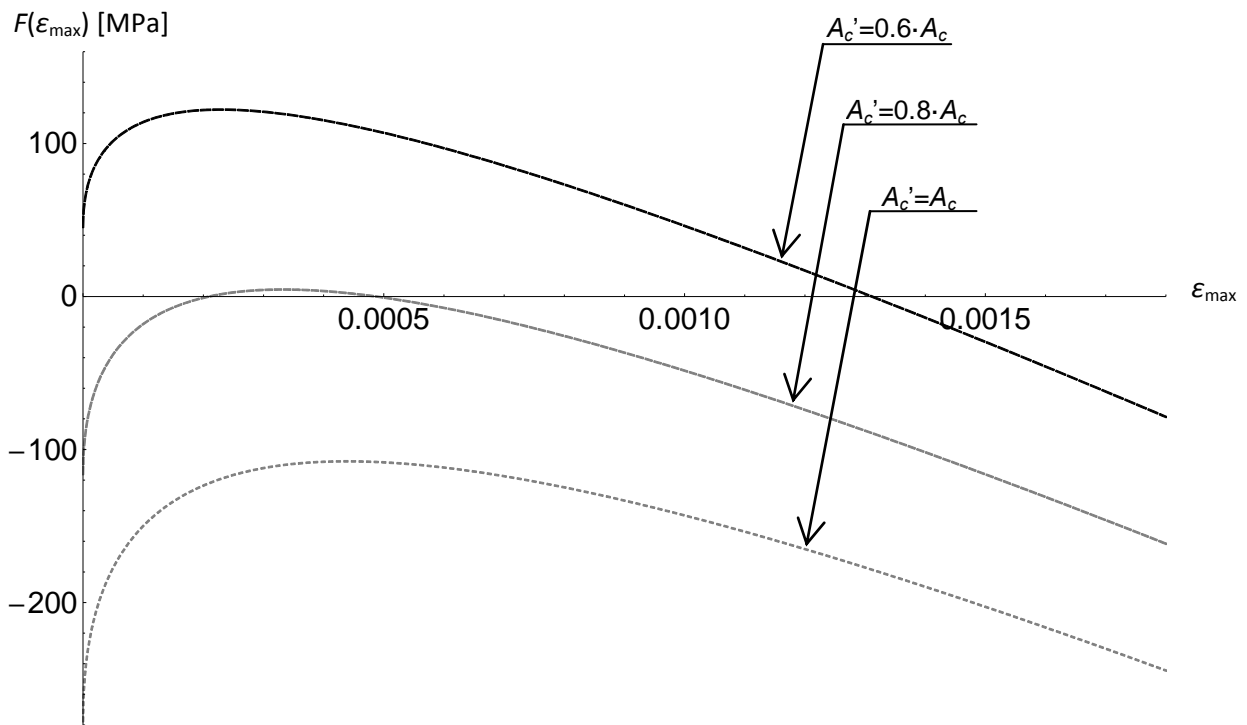


Figura 4.2: Función  $F(\epsilon_{\max})$  para diferentes valores de  $A_c'$ ; las soluciones de la ecuación (2.52) coinciden con la intersección de la función con el eje de abcisas. Parámetro de diseño:  $f_y=530\text{MPa}$ ,  $f_{ctm}=4.50\text{MPa}$ ,  $A_s=50.27\text{mm}^2$  (1Ø8),  $A_c=9025\text{mm}^2$ .

La Figura 4.3 representa igualmente la solubilidad de la ecuación (2.52) para la barra de la Figura 4.1, aunque de forma diferente. En este caso, se ha considerado variable la resistencia a tracción del hormigón ( $f_{ctm}$ ), definiéndose la siguiente función de dos variables:

$$G(f_{ctm}, \varepsilon_{max}) = (\varepsilon_y - \varepsilon_{max}) - \frac{\alpha_1 \alpha_2 A_c' f_{ctm}}{E_s A_s} = 0 \quad (4.2)$$

Los ceros de la función  $G(f_{ctm}, \varepsilon_{max})$  son los puntos  $(f_{ctm}, \varepsilon_{max})$  que satisfacen la ecuación (2.52); para el caso del espécimen H 75/2 las soluciones  $\varepsilon_{max}$  de la ecuación (2.52) corresponden a los puntos de intersección de las curvas de la Figura 4.3 con la abscisa  $f_{ctm} = 4.50$  MPa. El rango de valores de la resistencia  $f_{ctm}$  en la Figura 4.3 coincide con el establecido por el Eurocódigo 2 para la resistencia media a tracción del hormigón. Como se puede observar, para valores elevados de  $A_c'$  ( $A_c' = 0.7 \cdot A_c$  y  $A_c' = 0.8 \cdot A_c$ ) la curva de puntos  $(f_{ct}, \varepsilon_{max})$  presenta un “codo” que rompe la relación de biyección entre las variables representadas (problema de unicidad); asimismo, en el caso en que  $A_c' = A_c$  no existe solución para la abscisa de  $f_{ctm} = 4.50$  MPa (problema de existencia).

Como ya se indicó en el Capítulo 2, el Código Modelo propone un criterio para calcular el área de tensorrigidez del hormigón que sólo depende del diámetro de barra de la armadura. En el siguiente apartado se analiza, por medio de métodos algebraicos, el problema de solubilidad del modelo constitutivo del acero propuesto por la TUCC. A tal fin, en la ecuación (2.52) se sustituirá el área efectiva  $A_c$  que propone el Código Modelo por un área virtual de hormigón  $A_c'$ , cuyo valor se pretende acotar a fin de garantizar la unicidad de solución de la ecuación (2.52) bajo cualquier hipótesis de diseño.

#### 4.2 Coeficiente de ajuste del área de tensorrigidez del hormigón.

En adelante llamaremos  $\lambda'$  al cociente entre el área virtual de hormigón definida en el apartado anterior ( $A_c'$ ) y el área efectiva ( $A_c$ ) del Código Modelo.

La expresión que proporciona la deformación aparente de cedencia ( $\varepsilon_{max}$ ) en la ecuación (2.52) puede escribirse de la siguiente forma:

$$E_s (\varepsilon_y - \varepsilon_{max}) = \frac{\lambda' A_c}{A_s} \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_{max}}} \quad (4.3)$$

Sustituyendo  $\varepsilon_{max}=g^2$  en la ecuación (4.3), se obtiene la siguiente ecuación cúbica:

$$g^3 + \frac{1}{\sqrt{500}}g^2 - \varepsilon_y g + \frac{\lambda' A_c}{A_s} \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{E_s \sqrt{500}} - \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{500}} = 0 \quad (4.4)$$

El cambio de variable realizado en la ecuación (4.4) se puede deshacer tomando cualquiera de los dos signos de la raíz cuadrada, tal y como se indica a continuación:

$$\varepsilon_{max} = g^2 \leftrightarrow g = \pm \sqrt{\varepsilon_{max}}$$

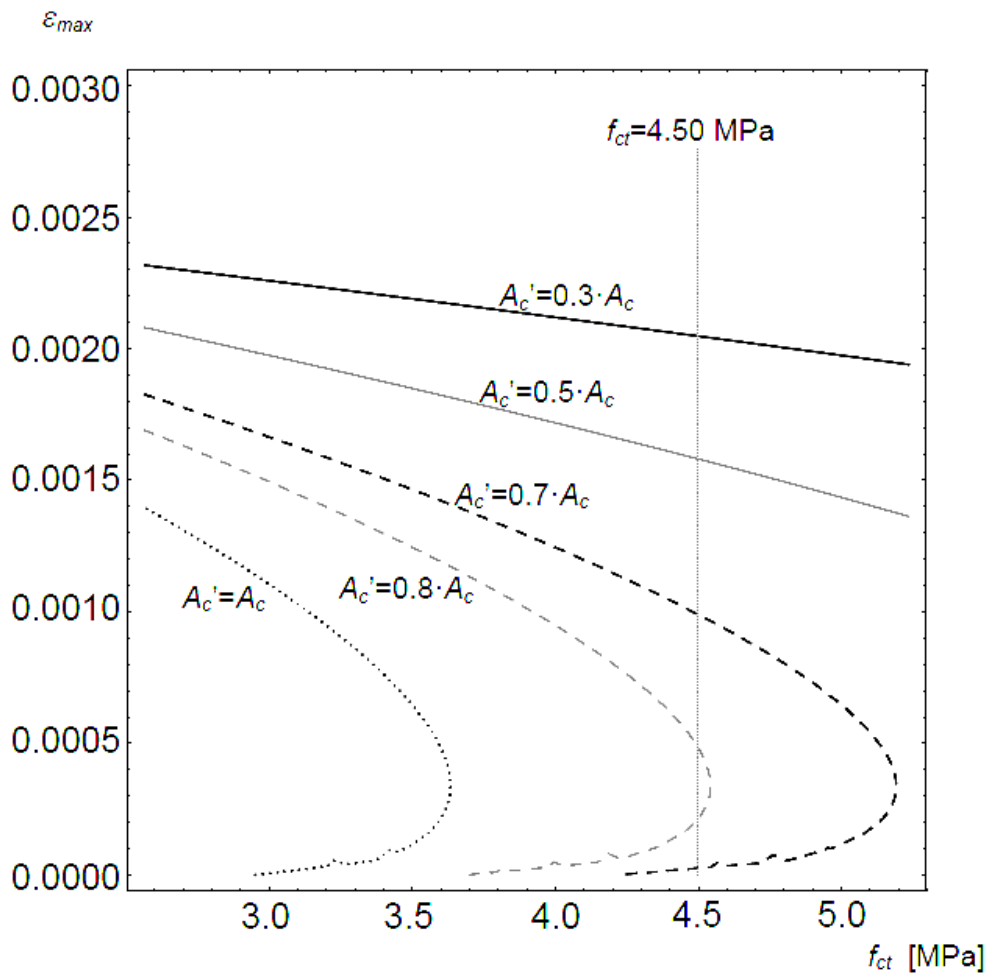


Figura 4.3: Curvas de puntos ( $f_{ct}$ ,  $\varepsilon_{max}$ ) que satisfacen la ecuación (2.52): evolución de la solubilidad para diferentes valores de  $A_c'$ . Parámetros de diseño:  $f_y=530\text{MPa}$ ,  $f_{ct}=4.50\text{MPa}$ ,  $A_s=50.27\text{mm}^2$  (1 Ø 8),  $A_c=9025\text{mm}^2$ .

Sin embargo, dado que en el denominador del segundo miembro de la ecuación (4.3) la raíz cuadrada es positiva, sólo interesan soluciones positivas de la ecuación (4.4), a fin de que dichas soluciones de la ecuación (4.4) puedan ser soluciones de la ecuación (4.3), una vez invertido el cambio de variable -relación de biyección entre los conjuntos

de soluciones de ambas ecuaciones- (Figura 4.4). La ecuación (4.3) tiene solución real positiva y es única si, y sólo si, la ecuación cúbica (4.4) tiene una única solución real positiva. En efecto, si  $\varepsilon_{max}$  es una solución real positiva de la ecuación (4.3), entonces  $g_0 = +\sqrt{\varepsilon_{max}}$  es solución real positiva de la ecuación (4.4), y por otro lado, si  $g_0$  es una solución real positiva de la ecuación (4.4), entonces  $g_0^2$  es solución de la ecuación (4.3).

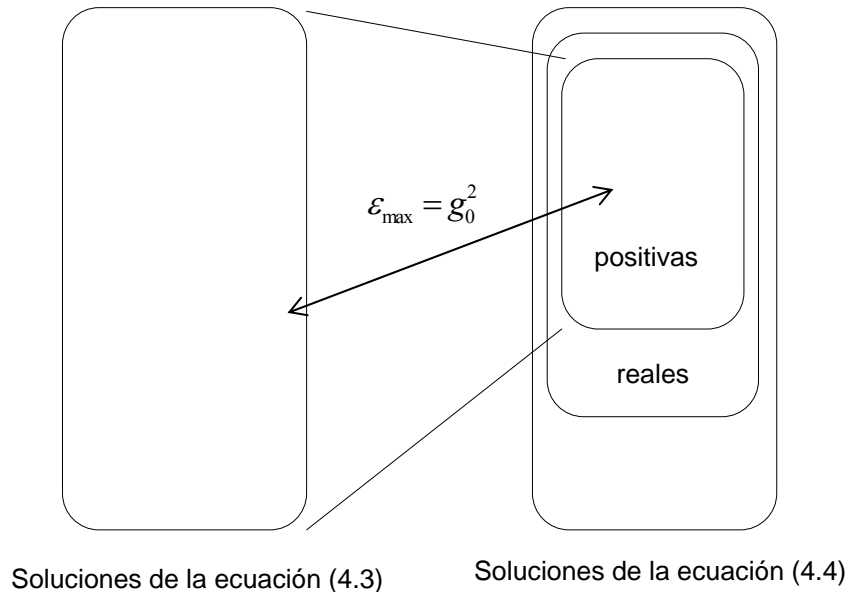


Figura 4.4: Relación de biyección entre los valores válidos de  $\varepsilon_{max}$  que verifican la ecuación (4.3) y las soluciones reales positivas de la ecuación (4.4).

El Teorema Fundamental del Álgebra [18] garantiza que un polinomio de grado  $n > 0$  con coeficientes complejos tiene al menos una raíz  $\xi$ , en principio compleja. Al dividir dicho polinomio entre  $(x - \xi)$  se obtiene un polinomio de grado  $n - 1$  con coeficientes complejos, que también tendrá al menos una raíz. Continuando con este proceso  $n$  veces, el polinomio original de grado  $n$  se puede descomponer como producto de  $n$  binomios de la forma  $x - \xi_i$ , de manera que cada  $\xi_i$  es una raíz del polinomio y aparece tantas veces como indica su multiplicidad en la referida descomposición. Por otra parte, si en particular los coeficientes del polinomio son reales, entonces por cada complejo no real que sea raíz del polinomio se tiene que también el complejo conjugado es raíz y con la misma multiplicidad.

Como la ecuación (4.4) es una ecuación polinómica de grado impar, en base a lo anterior siempre tiene al menos una solución real (ya que tiene coeficientes reales),

aunque esta solución no siempre es positiva. Si denotamos  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  a las soluciones de la ecuación (4.4), dicha ecuación se puede expresar de la siguiente forma:

$$(g - \xi_1)(g - \xi_2)(g - \xi_3) = g^3 - (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)g^2 + (\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3)g - \xi_1\xi_2\xi_3 = 0 \quad (4.5)$$

La existencia de soluciones de una ecuación cúbica genérica del tipo  $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$  viene establecida por la siguiente casuística:

CASO I ( $\Delta < 0$ ): la ecuación tiene una solución real y dos complejas conjugadas.

CASO II ( $\Delta = 0$ ): la ecuación tiene una solución múltiple.

CASO III ( $\Delta > 0$ ): la ecuación tiene tres soluciones reales distintas.

siendo  $\Delta = b^2c^2 - 4c^3 - 4b^3d - 27d^2 + 18bcd$  el discriminante de la referida ecuación cúbica genérica [18].

**CASO I ( $\Delta < 0$ ):  $\xi_1$  es una solución real y  $\xi_2, \xi_3$  son soluciones complejas conjugadas de la ecuación (4.4).**

Igualando coeficientes entre las expresiones (4.4) y (4.5), se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} i) \quad & \frac{-1}{\sqrt{500}} = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \xi_1 + 2\Re\{\xi_2\} \\ ii) \quad & -\varepsilon_y = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3 = 2\xi_1\Re\{\xi_2\} + |\xi_2|^2 \\ iii) \quad & \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{500}} - \frac{\lambda' A_c}{A_s} \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{E_s \sqrt{500}} = \xi_1 \xi_2 \xi_3 = \xi_1 |\xi_2|^2 \end{aligned}$$

A partir de *iii*) se deduce que la única solución real  $\xi_1$  es positiva si, y sólo si,

$$\frac{\varepsilon_y}{\sqrt{500}} - \frac{\lambda' A_c}{A_s} \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{E_s \sqrt{500}} > 0. \text{ Además } \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{500}} - \frac{\lambda' A_c}{A_s} \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{E_s \sqrt{500}} \text{ es siempre distinto de cero,}$$

ya que:

$$\frac{\varepsilon_y}{\sqrt{500}} - \frac{\lambda' A_c}{A_s} \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{E_s \sqrt{500}} = 0 \leftrightarrow \xi_1 = 0 \text{ ya que } |\xi_2|^2 \neq 0$$

Y por otro lado:

$$-\varepsilon_y = 2\xi_1\Re\{\xi_2\} + |\xi_2|^2 \rightarrow |\xi_2|^2 = -\varepsilon_y \text{ para } \xi_1 = 0$$

lo cual es imposible.

**CASO II ( $\Delta=0$ ): La ecuación (4.4) tiene una solución simple  $\xi_1$  y una solución doble**

**$\xi_2=\xi_3$ .**

Cuando  $\Delta=0$  la ecuación polinómica puede tener una solución triple. Sin embargo, para que la ecuación (4.4) tuviera una solución triple ( i.e,  $\xi_1=\xi_2=\xi_3$ ), dicha ecuación tendría que poderse expresar de la siguiente forma:

$$g^3 + \frac{1}{\sqrt{500}}g^2 - \varepsilon_y g + \frac{\lambda' A_c}{A_s} \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{E_s \sqrt{500}} - \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{500}} = (g - \xi_1)^3 = 0$$

Lo que equivale a escribir lo siguiente:

$$g^3 + \frac{1}{\sqrt{500}}g^2 - \varepsilon_y g + \frac{\lambda' A_c}{A_s} \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{E_s \sqrt{500}} - \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{500}} = g^3 - 3\xi_1 g^2 + 3\xi_1^2 g - \xi_1^3 = 0$$

de donde se deduce que  $3\xi_1^2 = -\varepsilon_y$ , lo cual es imposible.

Por otro lado, y como ya se ha indicado anteriormente, cuando una ecuación polinómica tiene coeficientes reales las soluciones complejas de aquélla van por parejas (i.e, una solución compleja y su conjugada), luego para este caso en que  $\Delta=0$ , y dado que el número de soluciones es tres, las soluciones son todas reales.

Igualando coeficientes entre las expresiones (4.4) y (4.5), se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} iv) \quad & \frac{-1}{\sqrt{500}} = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \xi_1 + 2\xi_2 \\ v) \quad & -\varepsilon_y = \xi_1 \xi_2 + \xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_3 = 2\xi_1 \xi_2 + \xi_2^2 \\ vi) \quad & \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{500}} - \frac{\lambda' A_c}{A_s} \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{E_s \sqrt{500}} = \xi_1 \xi_2 \xi_3 = \xi_1 \xi_2^2 \end{aligned}$$

Según iv) al menos una de las dos soluciones de la ecuación (4.4) ha de ser negativa. Por otro lado, según v), ambas soluciones no pueden ser simultáneamente negativas. Además,  $\xi_1 \neq 0$  y  $\xi_2 \neq 0$  ya que:

- Si  $\xi_1 = 0$  entonces, según v),  $-\varepsilon_y = \xi_2^2$ , lo cual es imposible.

- Si  $\xi_2 = 0$  entonces, según  $v)$ ,  $-\varepsilon_y = 0$ , lo cual es imposible a efectos de diseño ( $\varepsilon_y > 0$ ).

Al igual que en el Caso I se buscan condiciones para que exista una única solución real positiva de la ecuación (4.4), lo que se traduce en las siguientes posibilidades:

a)  $\xi_1 > 0$  y  $\xi_2 = \xi_3 < 0$

b)  $\xi_1 < 0$  y  $\xi_2 = \xi_3 > 0$

En la Figura 4.5 se muestra la gráfica de  $F(g) = (g - \xi_1)(g - \xi_2)(g - \xi_3)$  para los casos a) y b) anteriores. En ambos casos las soluciones reales de la ecuación (4.4) están perfectamente determinadas, tal y como se indica a continuación:

a)  $\xi_1 > 0$  y  $\xi_2 = \xi_3 < 0$

$$\frac{-1}{\sqrt{500}} = \xi_1 + 2\xi_2 \rightarrow \xi_1 = \frac{-1}{\sqrt{500}} - 2\xi_2$$

luego

$$-\varepsilon_y = 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 \rightarrow -\varepsilon_y = \frac{-2\xi_2}{\sqrt{500}} - 3\xi_2^2 \rightarrow \xi_2 = -\frac{1}{3\sqrt{500}} \pm \sqrt{\frac{1}{4500} + \frac{\varepsilon_y}{3}}$$

Dado que  $\xi_2 < 0$ , se tiene que

$$\xi_2 = -\frac{1}{3\sqrt{500}} - \sqrt{\frac{1}{4500} + \frac{\varepsilon_y}{3}} \rightarrow \xi_1 = -\frac{1}{3\sqrt{500}} + 2\sqrt{\frac{1}{4500} + \frac{\varepsilon_y}{3}}$$

quedando  $\{\xi_1, \xi_2\}$  perfectamente determinados -dado que  $\varepsilon_y$  es un valor de diseño a priori conocido- siempre que, según  $vi)$ , el valor de  $\lambda'$  sea:

$$\lambda' = \frac{1}{2250} \frac{A_s E_s \left( 450\varepsilon_y \sqrt{5} + 5 + \sqrt{5} \sqrt{5 + 7500\varepsilon_y + 15000\varepsilon_y} \right) \sqrt{5}}{A_c \alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}$$

b)  $\xi_1 < 0$  y  $\xi_2 = \xi_3 > 0$

Procediendo de forma análoga al caso a), pero teniendo en cuenta que en esta ocasión  $\xi_2 > 0$ , se tiene que

$$\xi_2 = -\frac{1}{3\sqrt{500}} + \sqrt{\frac{1}{4500} + \frac{\varepsilon_y}{3}} \rightarrow \xi_1 = -\frac{1}{3\sqrt{500}} - 2\sqrt{\frac{1}{4500} + \frac{\varepsilon_y}{3}}$$

quedando nuevamente  $\{\xi_1, \xi_2\}$  perfectamente determinados a partir de  $\varepsilon_y$ , siempre que el valor de  $\lambda'$  sea:

$$\lambda' = \frac{1}{2250} \frac{A_s E_s \left( 450 \varepsilon_y \sqrt{5} + 5 - \sqrt{5} \sqrt{5 + 7500 \varepsilon_y} + 15000 \varepsilon_y \right) \sqrt{5}}{A_c \alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}$$

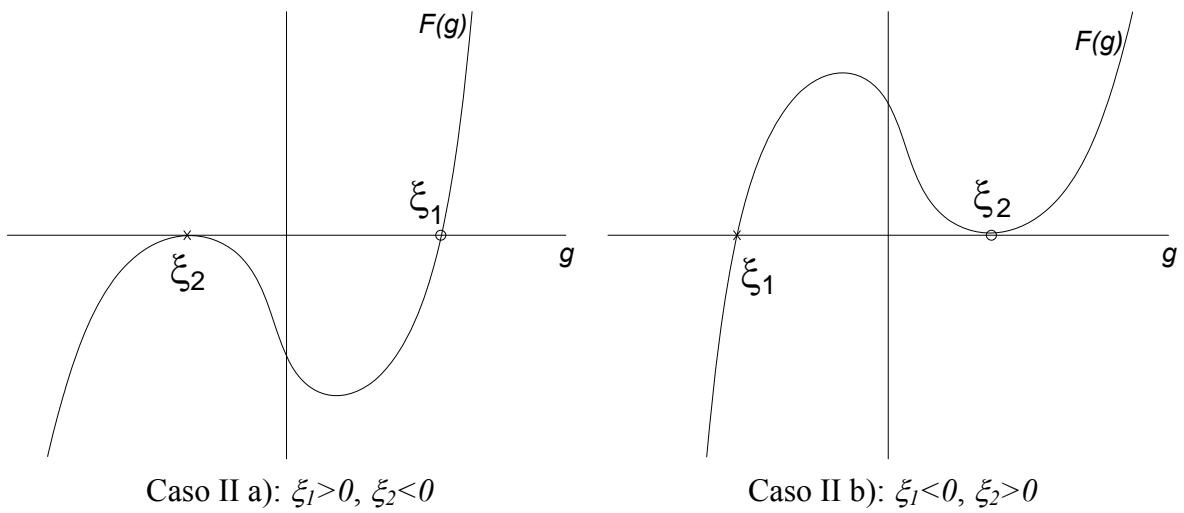


Figura 4.5: Representación esquemática de la función  $F(g)$  en los dos casos posibles en los que la ecuación  $F(g)=0$  tiene una solución real simple  $\xi_1$  y una doble  $\xi_2$ .

De todo lo anterior se desprende que  $\Delta=0$  constituye un caso límite, en el que las soluciones de la ecuación (4.4) están perfectamente determinadas, y por lo tanto también el valor de  $\varepsilon_{max}$ , siempre que el parámetro  $\lambda'$  tome alguno de los dos valores siguientes:

$$a) \lambda' = \frac{1}{2250} \frac{A_s E_s \left( 450 \varepsilon_y \sqrt{5} + 5 + \sqrt{5} \sqrt{5 + 7500 \varepsilon_y} + 15000 \varepsilon_y \right) \sqrt{5}}{A_c \alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}$$

$$b) \lambda' = \frac{1}{2250} \frac{A_s E_s \left( 450 \varepsilon_y \sqrt{5} + 5 - \sqrt{5} \sqrt{5 + 7500 \varepsilon_y} + 15000 \varepsilon_y \right) \sqrt{5}}{A_c \alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



**CASO III ( $\Delta > 0$ ): La ecuación (4.4) tiene tres soluciones reales distintas  $\xi_1, \xi_2$  y  $\xi_3$ .**

Estas tres soluciones supondremos, sin temor a pérdida de generalidad, que están ordenadas de la forma  $\xi_1 > \xi_2 > \xi_3$ .

Una vez más igualando coeficientes entre las ecuaciones (4.4) y (4.5), se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \text{vii)} \quad & \frac{-1}{\sqrt{500}} = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ \text{viii)} \quad & -\varepsilon_y = \xi_1 \xi_2 + \xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_3 \\ \text{ix)} \quad & \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{500}} - \frac{\lambda' A_c}{A_s} \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{E_s \sqrt{500}} = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \end{aligned}$$

Según *vii)* al menos una de las tres soluciones (en este caso  $\xi_3$ , dado que es la menor) es negativa.

Si  $\xi_1 = 0$ , entonces  $\xi_2$  y  $\xi_3$  son ambas negativas, y según *vii)* y *viii)* se verifica que:

$$\xi_2 + \xi_3 = -\frac{1}{\sqrt{500}} \quad \rightarrow \quad \xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{500}} - \xi_3 \quad ; \quad \xi_2 \xi_3 = -\varepsilon_y \quad \rightarrow \quad \varepsilon_y = \frac{\xi_3}{\sqrt{500}} + \xi_3^2$$

de donde se obtiene que

$$\xi_3 = -\frac{1}{2\sqrt{500}} - \sqrt{\frac{1}{2000} + \varepsilon_y} \quad ; \quad \xi_2 = -\frac{1}{2\sqrt{500}} + \sqrt{\frac{1}{2000} + \varepsilon_y}$$

es decir,  $\xi_2$  es positiva, lo que es imposible según la hipótesis de partida.

Por otra parte, si  $\xi_2 \neq 0$  puede ocurrir lo siguiente:

- a)  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son ambas positivas
- b)  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son ambas negativas
- c)  $\xi_1 > 0 > \xi_2$ .

La ecuación (4.4) tiene, por tanto, una única solución real positiva en el caso c), que

según *ix)* ocurre si, y sólo si  $\xi_1 \xi_2 \xi_3 = \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{500}} - \frac{\lambda' A_c}{A_s} \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{E_s \sqrt{500}} > 0$ .

Si  $\xi_2 = 0$ , entonces  $\xi_1$  es positiva, en cuyo caso la ecuación (4.4) tiene una única solución real positiva y se verifica que  $\xi_1 \xi_2 \xi_3 = \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{500}} - \frac{\lambda' A_c \alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{A_s E_s \sqrt{500}} = 0$ . Para este caso, los valores de  $\xi_1$  y  $\xi_3$  son los siguientes:

$$\xi_1 = -\frac{1}{2\sqrt{500}} + \sqrt{\frac{1}{2000} + \varepsilon_y} \quad ; \quad \xi_3 = -\frac{1}{2\sqrt{500}} - \sqrt{\frac{1}{2000} + \varepsilon_y} ,$$

cuyo signo coincide con la hipótesis de partida, quedando la solución de la ecuación (4.4) perfectamente determinada.

En conclusión, si denominamos  $P = \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{500}} - \frac{\lambda' A_c \alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{A_s E_s \sqrt{500}}$ , entonces la solubilidad de la ecuación (4.4) se resume en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1

	$P > 0$	$P = 0$	$P < 0$
Caso I ( $\Delta < 0$ )	Solución real positiva y única	Imposible	No existe solución real positiva.
Caso III ( $\Delta > 0$ )	Solución real positiva y única	Solución real positiva y única $g_0 = -\frac{1}{2\sqrt{500}} + \sqrt{\frac{1}{2000} + \varepsilon_y}$	No existe solución real positiva, o bien existe pero no es única.

El caso II ( $\Delta = 0$ ) constituye un caso límite y sólo para valores concretos de  $\lambda'$  la ecuación (4.4) tiene solución real positiva perfectamente determinada:

$$g_0 = -\frac{1}{3\sqrt{500}} + 2\sqrt{\frac{1}{4500} + \frac{\varepsilon_y}{3}} \quad \text{cuando } g_0 \text{ es una solución simple y}$$

$$\lambda' = \frac{1}{2250} \frac{A_s E_s (450\varepsilon_y \sqrt{5} + 5 + \sqrt{5} \sqrt{5 + 7500\varepsilon_y} + 15000\varepsilon_y) \sqrt{5}}{A_c \alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}$$

$$g_0 = -\frac{1}{3\sqrt{500}} + \sqrt{\frac{1}{4500} + \frac{\varepsilon_y}{3}} \quad \text{cuando } g_0 \text{ es una solución doble y}$$

$$\lambda' = \frac{1}{2250} \frac{A_s E_s (450\varepsilon_y \sqrt{5} + 5 - \sqrt{5} \sqrt{5 + 7500\varepsilon_y} + 15000\varepsilon_y) \sqrt{5}}{A_c \alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}$$

Por consiguiente, y con carácter general, la ecuación (4.3) tiene una única raíz real positiva para el caso en que se cumpla la siguiente condición:

$$\frac{\varepsilon_y}{\sqrt{500}} - \frac{\lambda' A_c \alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{A_s E_s \sqrt{500}} \geq 0$$

La anterior condición equivale a la desigualdad:

$$\frac{\lambda' A_c f_{ctm}}{A_s f_y} \leq \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \quad (4.6)$$

A partir de la ecuación (4.6) se puede deducir una cota superior para el valor del parámetro  $\lambda'$  a fin de que la ecuación (2.52) cumpla los requisitos fijados de existencia y unicidad de raíz real positiva, tal y como se indica a continuación:

$$\lambda'_1 = \frac{A_s f_y}{A_c \alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}} \quad (4.7)$$

donde  $\lambda'_1$  es tal que para cualquier  $\lambda' \leq \lambda'_1$  la ecuación (2.52) tiene una única solución real positiva  $\varepsilon_{max}$ . El valor de  $\lambda'_1$  constituye un valor frontera: para  $\lambda' = \lambda'_1$  la ecuación (2.52) tiene una solución positiva y una *solución nula*. Para valores de  $\lambda'$  superiores a  $\lambda'_1$ , la ecuación (2.52) pierde la unicidad de solución positiva, pasando a tener dos soluciones reales positivas (ver Figura 4.2); en tal caso, la solución correcta de la deformación  $\varepsilon_{max}$  será aquella que presente un valor más próximo al de la última solución que arrojaba la ecuación (2.52) en condiciones de unicidad positiva. Esto último es lo mismo que decir que la solución correcta para la deformación  $\varepsilon_{max}$  será la mayor de las dos obtenidas para  $\lambda' \geq \lambda'_1$ , a fin de preservar la continuidad en el valor de  $\varepsilon_{max}$  cuando se supera el valor de  $\lambda'_1$ .

En base a lo anterior, para calcular el valor de  $\varepsilon_{max}$  a partir de la ecuación (2.52) utilizando el Método de Newton – Raphson en una variable, se debe cumplir que la

aproximación inicial  $x_0$  sea mayor que  $\varepsilon_{max,0}$ , siendo  $\varepsilon_{max,0}$  el valor buscado de la deformación aparente de cedencia. Esto último garantiza que las sucesivas iteraciones del algoritmo de Newton-Raphson formen una sucesión decreciente que converjan hacia la mayor de las dos soluciones positivas de la ecuación (2.52). Dado que el valor de  $\varepsilon_{max,0}$  es a priori desconocido, una forma de garantizar dicha convergencia consiste en tomar como aproximación inicial  $x_0$  un valor igual a la deformación correspondiente al límite de cedencia del acero (i.e.,  $\varepsilon_y = f_y/E_s$ ) (Figura 4.6), ya que  $\varepsilon_y$  es el máximo valor que puede tomar  $\varepsilon_{max,0}$  ( $\varepsilon_y = \varepsilon_{max,0}$  cuando el parámetro  $\lambda'$  es nulo, es decir, cuando el modelo constitutivo del acero coincide con el modelo *bi-lineal* de la TMCC).

Cuando el valor de  $\lambda'$  crece excesivamente (i.e., para valores muy altos del área virtual  $A_c'$ ), la ecuación (2.52) deja de tener soluciones reales. El valor de  $\lambda'$  a partir del cual dicha ecuación deja de tener solución real se denominará  $\lambda'_2$ , o simplemente  $\lambda$ , y se puede calcular como el valor de  $\lambda'$  que hace que en el punto donde se anula la función  $F(\varepsilon_{max})$ , también se anule su derivada (Figura 4.7):

$$F'(\varepsilon_{max}) = -E_s + \frac{\lambda' \sqrt{125} A_c \alpha_1 \alpha_2 f_{cm}}{A_s (1 + \sqrt{500 \cdot \varepsilon_{max}})^2 \sqrt{\varepsilon_{max}}} = 0, \quad \varepsilon_{max} \geq 0 \quad (4.8)$$

A partir de la expresión anterior, el valor de  $\lambda$  viene dado por:

$$\lambda = \frac{A_s E_s}{A_c \alpha_1 \alpha_2 f_{cm}} \frac{\sqrt{(1 + 1500 \varepsilon_y)^3 - 1} + 4500 \varepsilon_y}{6750} = \lambda'_1 \frac{\sqrt{(1 + 1500 \varepsilon_y)^3 - 1} + 4500 \varepsilon_y}{6750 \varepsilon_y} \quad (4.9)$$

En la Figura 4.8 se muestra cómo varía el esquema de comportamiento del acero para diferentes valores del factor de degradación  $\lambda'$ , desde  $\lambda'=0$  hasta  $\lambda'=\lambda$ . Como ya se apuntó anteriormente, para  $\lambda'=0$  tenemos el modelo bi-lineal propuesto por la TMCC; conforme aumenta el valor del factor de degradación  $\lambda$ , la tensión del acero disminuye, como es lógico, dada la mayor contribución del hormigón en la resistencia a tracción. Así pues, el coeficiente  $\lambda$  puede ser entendido de formas diferentes:

- Es la condición de frontera de la región de solubilidad del modelo constitutivo del acero.
- Corresponde a la curva de tensión mínima del acero, dado que para  $\lambda'=\lambda$  la contribución del hormigón a tracción es la máxima posible.

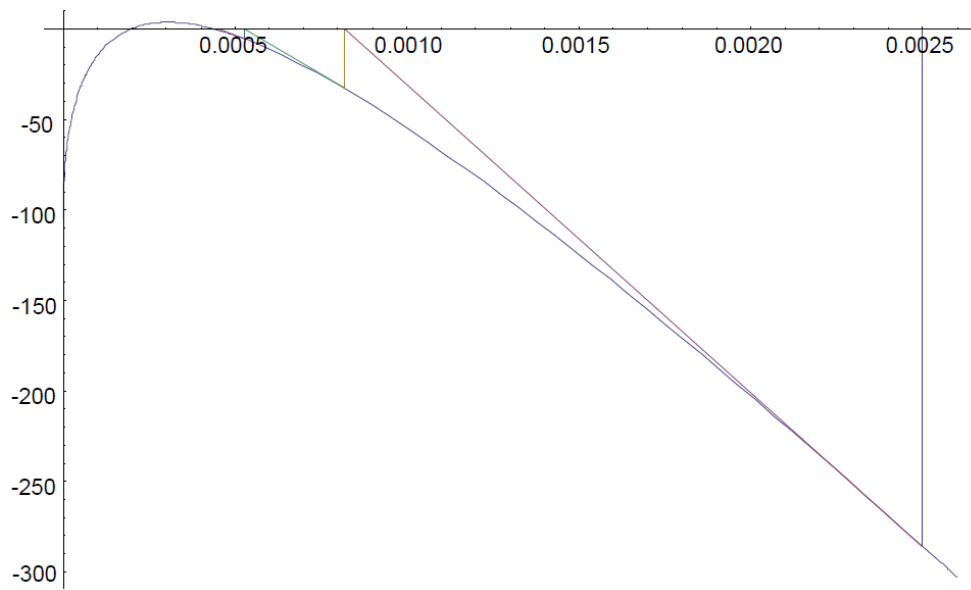


Figura 4.6: Aplicación del método de Newton-Raphson para el cálculo de la deformación aparente de cedencia  $\varepsilon_{max}$  a partir de la ecuación (2.52). Aproximación inicial:  $x_0 = f_y/E_s = 0.0025$ .

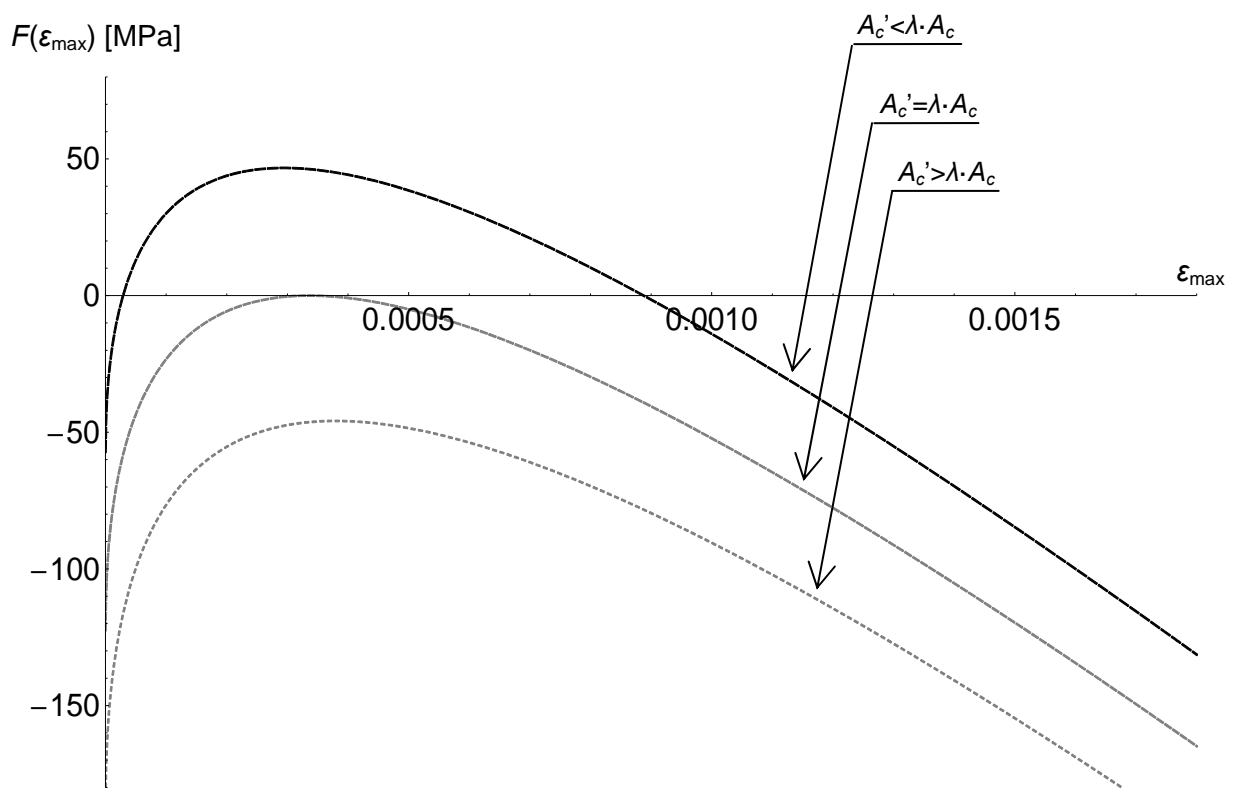


Figura 4.7: Función  $F(\varepsilon_{max})$  para diferentes valores del área virtual  $A'_c$ ; la ecuación  $F(\varepsilon_{max}) = 0$  carece de solución cuando  $A'_c/A_c$  es mayor que el valor límite de  $\lambda$ . Parámetros de diseño:  $f_y = 530 \text{ MPa}$ ,  $f_{ctm} = 4.50 \text{ MPa}$ ,  $A_s = 50.27 \text{ mm}^2$  (1 Ø 8),  $A_c = 9025 \text{ mm}^2$ .

- c. Es la condición para la que la rama plástica del modelo constitutivo del acero es estrictamente tangente a su rama elástica, y por consiguiente, representa el valor del parámetro  $\lambda'$  para el que la respuesta tensodeformativa del acero es la más regular y uniforme de todas las posibles (Figura 4.8).

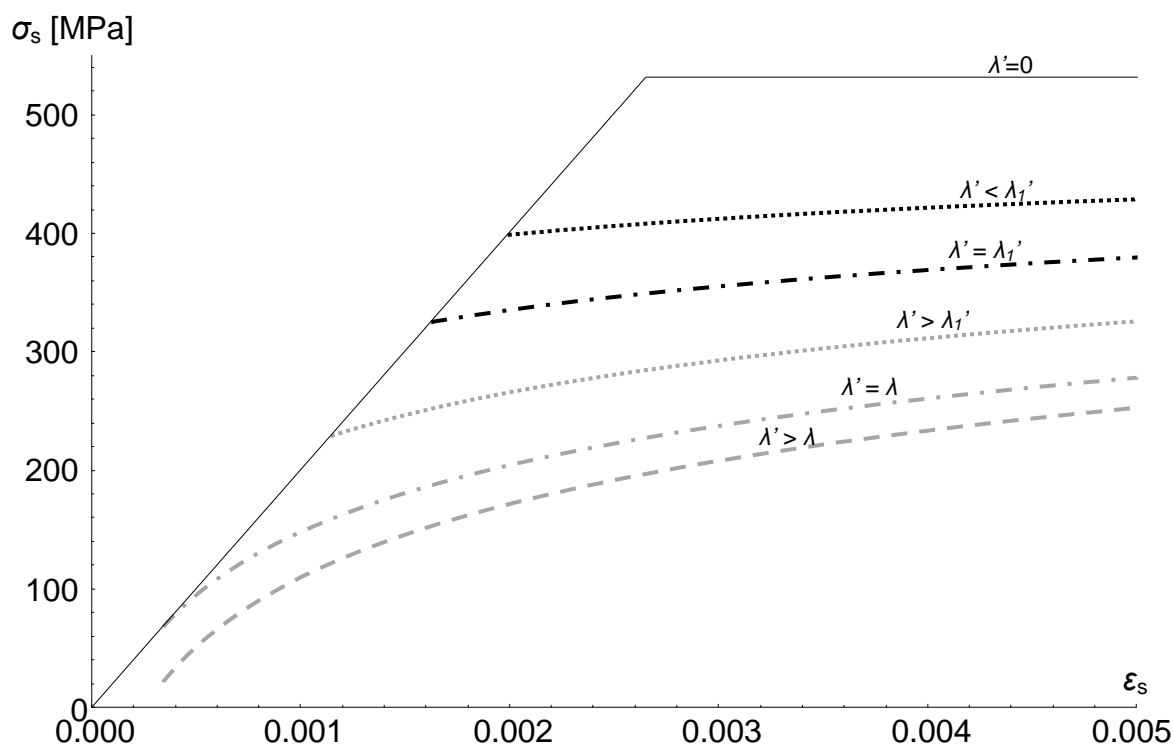


Figura 4.8: Comportamiento del acero para diferentes valores del parámetro  $\lambda'$ . Parámetros de diseño:  $f_y=530\text{MPa}$ ,  $f_{cm}=4.50\text{MPa}$ ,  $A_s=50.27\text{mm}^2$  (1 Ø 8),  $A_c=9025\text{mm}^2$ .

### 4.3 Estudio de dos casos reales: Arbesman - Conte (1973) y Yoon (1996)

A continuación se ejemplifica la utilidad práctica del coeficiente  $\lambda$  en relación al modelo constitutivo del acero mediante su aplicación a dos vigas de hormigón armado pertenecientes a campañas experimentales distintas:

#### *Viga CF1 (Arbesman y Conte, 1973)*

El modelo constitutivo del acero propuesto por la TUCC ha sido validado mediante su aplicación a un ensayo experimental ampliamente contrastado en el ámbito de las teorías de campo de compresiones: la viga CF1 del Ensayo de Arbesman y Conte [3].

Tal aplicación se realizó tomando como área efectiva de hormigón la calculada mediante el procedimiento tradicional, es decir, sin corregir ( $\lambda = 1$ ). En la Figuras 4.9 y 4.10 se muestran las dimensiones de la sección transversal de la viga ensayada, así como las áreas efectivas de hormigón de las armaduras longitudinal y transversal resultantes de aplicar el criterio de tensorrigidez del Código Modelo. Los valores de área efectiva para cada tipo de armadura se justifican a continuación:

1. Características de la sección transversal

- Recubrimiento lateral=13 mm
- Recubrimiento superior e inferior=25 mm
- Cercos de  $\varnothing$  9.5 mm cada 152 mm
- Barras longitudinales pasivas: 6 de  $\varnothing$  9.5 mm
- $f_{ct,m}$ : resistencia media a tracción del hormigón = 2 MPa
- $f_y$ : límite elástico del acero=367 MPa
- $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 1$

2. Áreas efectivas de hormigón a tracción:

- Área efectiva de hormigón para la armadura longitudinal (Figura 4.9) :

$$A_{c,x} = 4 \cdot ((13 + 9,5 + 8 \cdot 9,5) \cdot 102 + (25 + 9,5 + 8 \cdot 9,5 - 102) \cdot 76,5) + 76,5 \cdot 15 \cdot 9,5 \cdot 2 = 64591,5 \text{ mm}^2$$

- Área efectiva de hormigón para la armadura transversal (Figura 4.10):

$$A_{c,t} = 15 \cdot 9,5 \cdot 2 \cdot 76,5 = 21802,5 \text{ mm}^2$$

Luego, los factores  $\lambda'_1$  y  $\lambda$  adoptan los siguientes valores para las armaduras longitudinal y transversal:

ARMADURA LONGITUDINAL

$$\lambda'_{1x} = \frac{A_s f_y}{A_c \alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}} = \frac{4 \frac{\pi \cdot 9,5^2}{4} \cdot 367}{1 \cdot 21802,5 \cdot 2} = 1,19$$

$$\lambda_x = \lambda'_{1x} \frac{\sqrt{(1 + 1500 \varepsilon_y)^3 - 1} + 4500 \varepsilon_y}{6750 \varepsilon_y} = 1,19 \cdot \frac{\sqrt{(1 + 1500 \cdot 0,001835)^3 - 1} + 4500 \cdot 0,001835}{6750 \cdot 0,001835} = 1,42$$

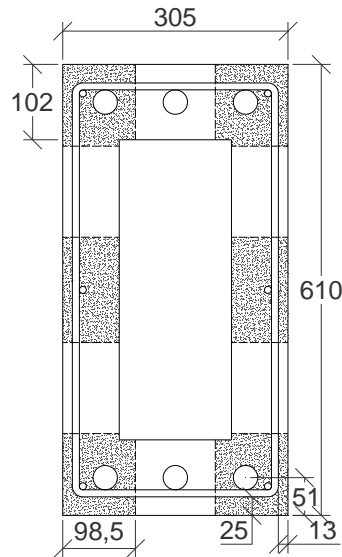


Figura 4.9: Sección transversal de la viga de ensayo CF1. Detalle de las áreas efectivas de la armadura pasiva longitudinal, según el criterio definido en el MC 1990. Cotas en mm.

### ARMADURA TRANSVERSAL

$$\lambda_{tr}' = \frac{A_s f_y}{A_c \alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}} = \frac{6 \frac{\pi \cdot 9.5^2}{4} \cdot 367}{1 \cdot 64591.5 \cdot 2} = 1.21$$

$$\lambda_{tr} = \lambda_{tr}' \frac{\sqrt{(1+1500\varepsilon_y)^3 - 1} + 4500\varepsilon_y}{6750\varepsilon_y} = 1.21 \cdot \frac{\sqrt{(1+1500 \cdot 0.001835)^3 - 1} + 4500 \cdot 0.001835}{6750 \cdot 0.001835} = 1.42$$

Como se puede observar, tanto para la armadura longitudinal como para la armadura transversal, los valores de  $\lambda$  son superiores al valor unidad, razón por la cual la sección utilizada en el Ensayo de Abersman y Conte no presenta problemas a efectos de utilización del área efectiva de hormigón calculada según el criterio del Código Modelo.

### *Viga N2-N (Yoon et al., 1996)*

A continuación se desarrolla un segundo caso práctico en el que, a diferencia del anterior, sí es preciso corregir el área de tensorrigidez del hormigón calculada de acuerdo al criterio del Código Modelo, a fin de salvaguardar la consistencia del modelo constitutivo del acero. Las características de la sección transversal analizada corresponden al espécimen N2-N, perteneciente a la campaña de ensayo desarrollada por los investigadores Young-So Yoon, William D. Cook y Denis Mitchell en el año



1996 [46]. En la Figuras 4.11 y 4.12 se muestran las dimensiones de la sección transversal de la viga ensayada, así como las áreas efectivas de hormigón de las armaduras longitudinal y transversal. Los valores de área efectiva para cada tipo de armadura se justifican a continuación:

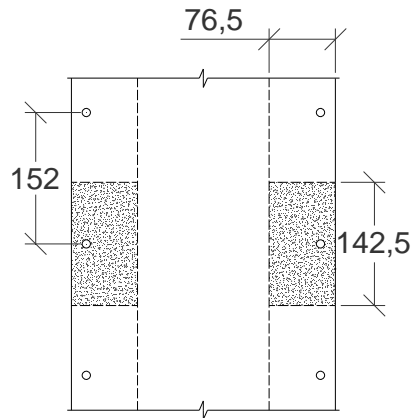


Figura 4.10: Sección longitudinal de la viga de ensayo CF1. Detalle de las áreas efectivas de la armadura pasiva transversal, según el criterio definido en el MC 1990. Cotas en mm.

#### 1. Características de la sección transversal

- Recubrimiento lateral = 40 mm
- Recubrimiento superior e inferior = 40 mm
- Cercos de  $\varnothing$  9.5 mm cada 325 mm
- Barras longitudinales pasivas inferiores: 10 de  $\varnothing$  30 mm
- Barras longitudinales pasivas superiores: 2 de  $\varnothing$  10 mm
- $f_{ctm}$ : resistencia media a tracción del hormigón = 3.16 MPa
- $f_{yx}$ : límite elástico del acero longitudinal = 400 MPa
- $f_{yt}$ : límite elástico del acero transversal = 430 MPa
- $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 1$

#### 2. Áreas efectivas de hormigón a tracción:

- Áreas efectivas de hormigón para las armaduras longitudinales inferior y superior (Figura 4.11):

$$A_{c,x1} = (r + \phi_{cerco} + e + 9\phi_{x1}) b_w = (40 + 9.5 + 31 + 9 \cdot 30) \cdot 375 = 131437.5 \text{ mm}^2$$

$$A_{c,x2} = 2 \left\{ (r + \phi_{cerco} + 8\phi_{x2})^2 \right\} = 2 \left\{ (40 + 9.5 + 8 \cdot 10)^2 \right\} = 33540.5 \text{ mm}^2$$

siendo  $e$  la separación vertical entre barras inferiores, la cual, para un canto útil  $d = 655 \text{ mm}$ , toma un valor de  $32.1 \text{ mm}$ .

- Área efectiva de hormigón para la armadura transversal (Figura 4.12):

$$A_{c,t} = 2 \cdot \left\{ 15\phi_{cerco} (r + 8\phi_{cerco}) \right\} = 2 \cdot \left\{ 15 \cdot 9.5 (40 + 8 \cdot 9.5) \right\} = 33060 \text{ mm}^2$$

Luego, los factores  $\lambda'_1$  y  $\lambda$  adoptan los siguientes valores para las armaduras longitudinal y transversal:

#### ARMADURA LONGITUDINAL INFERIOR

$$\lambda'_{1x1} = \frac{A_{sx1} f_{yx1}}{A_{cx1} \alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}} = \frac{10 \frac{\pi \cdot 30^2}{4} \cdot 400}{131437.5 \cdot 3.16} = 6.81$$

$$\lambda_{x1} = \lambda'_{1x1} \frac{\sqrt{(1 + 1500 \varepsilon_{yx})^3 - 1} + 4500 \varepsilon_{yx}}{6750 \varepsilon_{yx}} = 6.81 \cdot \frac{\sqrt{(1 + 1500 \cdot 0.002)^3 - 1} + 4500 \cdot 0.002}{6750 \cdot 0.002} = 8.07$$

#### ARMADURA LONGITUDINAL SUPERIOR

$$\lambda'_{1x2} = \frac{A_{sx1} f_{yx1}}{A_{cx1} \alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}} = \frac{2 \frac{\pi \cdot 10^2}{4} \cdot 400}{33540.5 \cdot 3.16} = 0.59$$

$$\lambda_{x2} = \lambda'_{1x2} \frac{\sqrt{(1 + 1500 \varepsilon_{yx})^3 - 1} + 4500 \varepsilon_{yx}}{6750 \varepsilon_{yx}} = 0.59 \cdot \frac{\sqrt{(1 + 1500 \cdot 0.002)^3 - 1} + 4500 \cdot 0.002}{6750 \cdot 0.002} = 0.70$$

#### ARMADURA TRANSVERSAL

$$\lambda'_{1t} = \frac{A_s f_y}{A_c \alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}} = \frac{2 \frac{\pi \cdot 9.5^2}{4} \cdot 430}{33060 \cdot 3.16} = 0.58$$

$$\lambda_t = \lambda_{t'} \frac{\sqrt{(1+1500\varepsilon_{yt})^3 - 1 + 4500\varepsilon_{yt}}}{6750\varepsilon_{yt}} = 0.58 \cdot \frac{\sqrt{(1+1500 \cdot 0.00215)^3 - 1 + 4500 \cdot 0.00215}}{6750 \cdot 0.00215} = 0.70$$

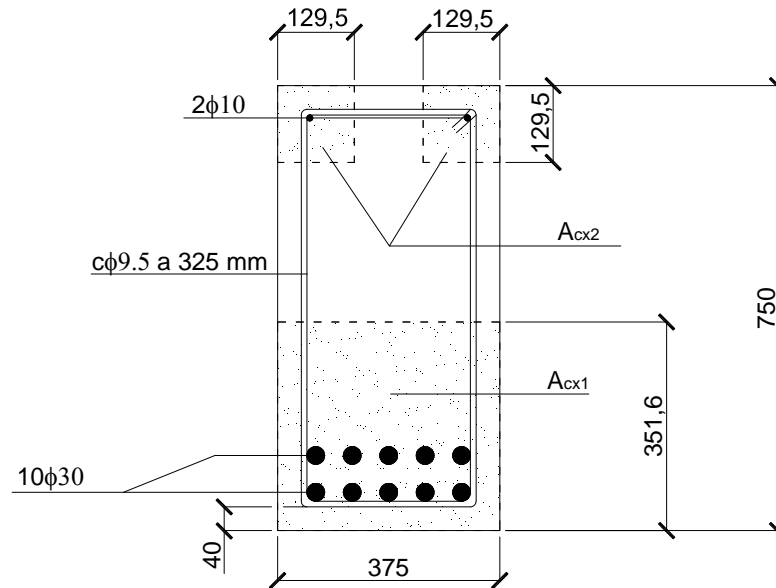


Figura 4.11: Sección transversal del espécimen N2-N. Detalle de las áreas efectivas de la armadura pasiva longitudinal, según el criterio definido en el MC 1990. Cotas en mm.

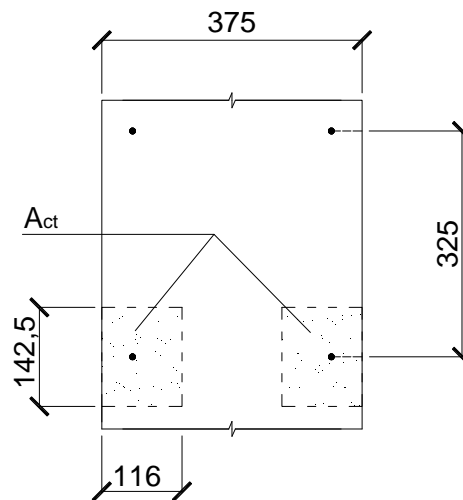


Figura 4.12: Sección longitudinal del espécimen N2-N. Detalle de las áreas efectivas de la armadura pasiva transversal, según el criterio definido en el MC 1990. Cotas en mm.

Como se puede observar, tanto para la armadura longitudinal superior como para la armadura transversal, los valores de  $\lambda$  son inferiores al valor unidad, y por consiguiente es preciso corregir el área efectiva de hormigón para estos dos tipos de armadura. Los

valores definitivos de las áreas efectivas de hormigón correspondientes a cada tipo de armadura se muestran a continuación:

$$A'_{c,x1} = A_{c,x1} = 131850 \text{ mm}^2$$

$$A'_{c,x2} = \lambda_{x2} \cdot A_{c,x2} = 33540.5 \cdot 0.70 = 23478.35 \text{ mm}^2$$

$$A'_{c,t} = \lambda_t \cdot A_{c,t} = 33060 \cdot 0.70 = 23142 \text{ mm}^2$$



## Capítulo 5

# Introducción de un parámetro de degradación en el diseño a cortante de vigas de hormigón armado

### 5.1 Efecto de degradación del hormigón armado.

El modelo constitutivo del acero propuesto por la TUCC se ajusta en gran medida al fenómeno físico, según el cual, a partir del instante en que se produce el agrietamiento del hormigón la tensión media de tracción en el hormigón ( $\sigma_{ct,av}$ ) irá en descenso para escalones superiores de carga, y en consecuencia, el acero estará cada vez más solicitado para deformaciones superiores. La base de la TUCC es el planteamiento del equilibrio a tracción considerando que una vez en la grieta se alcanza la deformación de cedencia del acero, la tensión en el acero afecta a toda el área de la barra ( $A_s$ ) mientras que la tensión de tracción en el hormigón afecta sólo a un área eficaz ( $A_{c,ef}$ ).

El Código modelo CEB-FIP 1990 [12] define la zona efectiva de hormigón sometida a tracción ( $A_c$ ) como el área rectangular en torno a la barra a una distancia no mayor de  $7.5\varnothing$  de su centro geométrico - siendo  $\varnothing$  el diámetro de la barra -. Esto implica que la zona de tensorrigidez del hormigón en torno a la barra de acero permanece constante a lo largo del proceso de deformación del elemento, al depender única y exclusivamente del diámetro de barra. Por esta razón, Gil Martín et al. [19] proponen un área eficaz ( $A_{c,ef}$ ) de hormigón a tracción que resulta de corregir el área efectiva de hormigón mediante un coeficiente, para lo cual establecen un parámetro ' $\kappa$ ' denominado *degradación del hormigón* (en adelante, parámetro  $\kappa$ ), tal que  $A_{c,ef} = \kappa A_c$ ; dicho parámetro debe ser formulado como una función de la deformación a tracción, entre otras variables, de tal manera que el área efectiva de hormigón ( $A_c$ ) no sea constante sino que varíe a medida que aumenta la degradación del hormigón, al igual que lo hace la tensión media de tracción en el hormigón y el acero. En la Figura 5.1 se ha representado, mediante un conjunto de puntos ( $\varepsilon_1, \kappa$ ) correspondientes a diferentes etapas de carga, la influencia de la deformación del hormigón sobre el área de tensorrigidez para el espécimen CF1 del ensayo de Abersman y Conte [3, 19]. Los puntos representados se han ajustado mediante una ecuación cúbica obtenida por regresión polinómica.

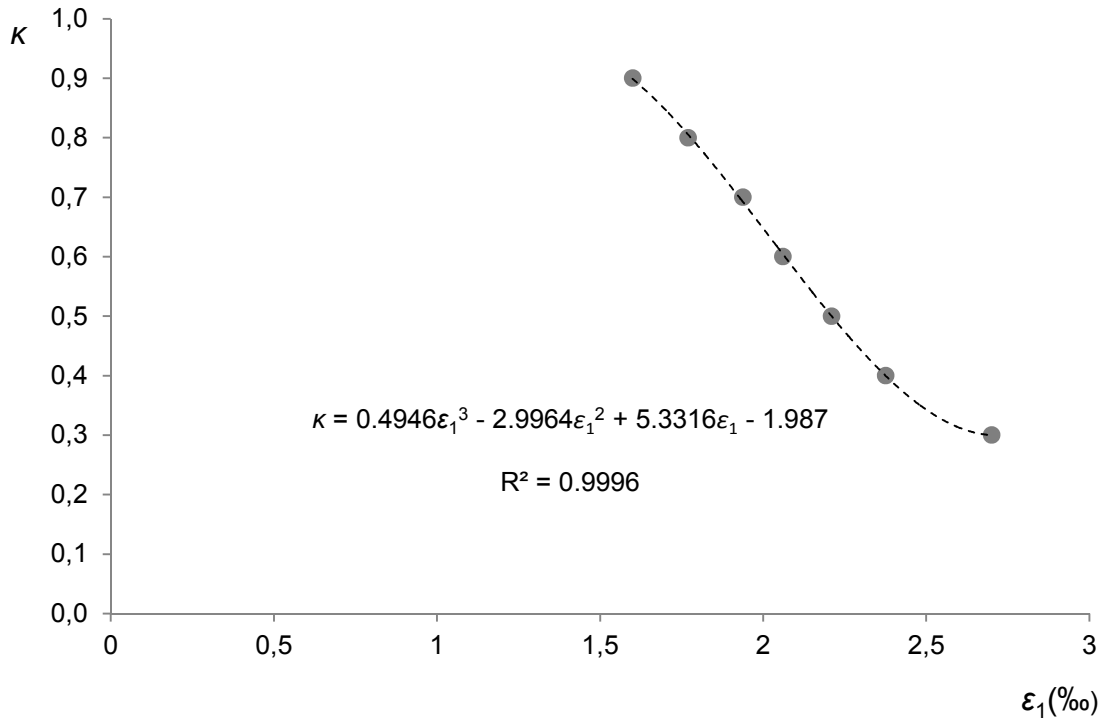


Fig.ura 5.1: Puntos  $(\kappa, \epsilon_1)$  correspondientes al ensayo a cortante de Abersman-Conte (espécimen CF1) y ajuste estadístico por medio de una regresión cúbica polinomial. Adaptado de [19].

Un segundo ejemplo experimental, igualmente interesante y más reciente en el tiempo, es el desarrollado por Wu y Gilbert [45] en relación al fenómeno de tensorrigidez en el hormigón. En este caso se consideró un área de tensorrigidez constante de  $100 \times 100$  mm (considerablemente menor que el área de tensorrigidez propuesta por el Código Modelo a tal efecto). En la Figura 5.2 se han representado los resultados experimentales obtenidos por Wu y Gilbert para el caso de un prisma de hormigón armado (sección cuadrada  $100 \times 100$  mm, resistencia del hormigón a tracción igual a 2.04 MPa, barra de acero de 16 mm y módulo elástico del hormigón de 22400 MPa) sometido a un esfuerzo de tracción uniaxial instantáneo; sobre la misma gráfica se ha representado también el modelo de rigidez tensional del hormigón propuesto por Collins y Mitchell (ecuación (2.22)) [4]. Del análisis de la Figura 5.2 se concluye que el modelo de Collins sobrevalora el efecto de tensorrigidez en el hormigón.

Así pues, y en tanto no se demuestre lo contrario, la clave para definir en mejor medida la respuesta resistente del acero pasa por la formulación del parámetro  $\kappa$ . La implementación de una nueva ecuación que relacione el parámetro  $\kappa$  con la deformación del elemento de hormigón armado puede afectar a la consistencia (i.e., la solubilidad) de las ecuaciones constitutivas del acero, dado que el área efectiva de tensorrigidez del

hormigón ( $A_c$ ) se modifica; esta cuestión ya ha sido abordada y resuelta en el Capítulo 4 de esta Tesis. No obstante, los problemas de consistencia no terminan en el modelo constitutivo del acero, sino que se extienden al resto de ecuaciones de equilibrio y compatibilidad presentadas en el Capítulo 2 y que en conjunto conforman el sistema no lineal de ecuaciones empleadas por las teorías de campo de compresiones para el diseño a cortante de elementos de hormigón armado. Es por esta razón que el ajuste experimental del parámetro  $\kappa$  requiere de un estudio previo, mediante el uso combinado de métodos algebraicos y numéricos, a partir del cual se establezcan criterios de existencia de solución; como se verá en este capítulo, y al igual que ocurría con el modelo constitutivo del acero, la consistencia general del sistema de ecuaciones a cortante de las teorías de campo de compresiones está gobernada por el efecto de tensorrigidez del hormigón.

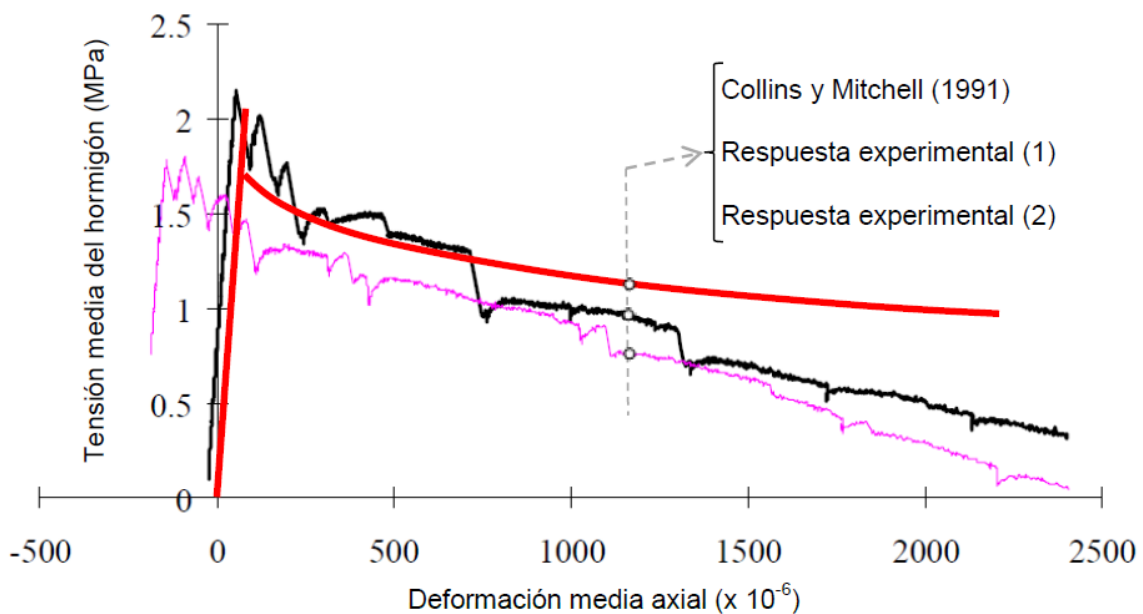


Fig.ura 5.2: Modelo de tensorrigidez del hormigón propuesto por Collins y Mitchell (1991) y respuesta experimental en barra prismática de hormigón ensayada a tracción uniaxial [45]. (1): Baja retracción previa a la puesta en carga; (2): Alta retracción previa a la puesta en carga.

## 5.2 Marco analítico y experimental.

### *Marco analítico*

Como ya se indicó en el Capítulo 3 las teorías del campo de compresiones predicen la resistencia a cortante de un elemento de hormigón armado, y su función de respuesta



*Carga vs. Deformación*, mediante el planteamiento de un sistema no lineal de ecuaciones; reescribamos a continuación dicho sistema a partir del modelo de tensorrigidez del hormigón propuesto por Collins y Mitchell (1991) y en función del área eficaz de hormigón a tracción ( $A_{c,ef}$ ) propuesta por la TUCC:

a. 3 ecuaciones de equilibrio:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = (\tan \theta + \cot \theta) \frac{V}{z \cdot b_w} \quad (5.1)$$

$$A_{st} \sigma_{st} = (\sigma_2 \sin^2 \theta - \sigma_1 \cos^2 \theta) \cdot b_w s \quad (5.2)$$

$$A_{sx1} \sigma_{sx1} + A_{sx2} \sigma_{sx2} + \sigma_1 b_w z = \frac{V}{\tan \theta} \quad (5.3)$$

b. 2 ecuaciones de compatibilidad:

$$(\varepsilon_t - \varepsilon_2) \tan^2 \theta - (\varepsilon_x - \varepsilon_1) = 0 \quad (5.4)$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_x + \varepsilon_t \quad (5.5)$$

c. 2 ecuaciones para el comportamiento del hormigón a compresión:

$$f_{2,max} = f_c \cdot \min \left\{ 1, (0.8 + 170 \varepsilon_1)^{-1} \right\} \quad (5.6)$$

$$\sigma_2 = f_{2,max} \left( 2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_c} - \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_c} \right)^2 \right) \quad (5.7)$$

d. 1 ecuación de comportamiento del hormigón a tracción<sup>1</sup>:

$$\sigma_1 = \frac{\alpha f_{ct,m}}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_1}} \quad (5.8)$$

---

<sup>1</sup> En el caso de cargas rápidas no cíclicas, se puede adoptar esta expresión como modelo constitutivo del hormigón a tracción en régimen de post-fisuración, donde  $\alpha$  se ajusta a la casuística de valores definidos para  $\alpha_1$  en el Capítulo 2. Se ha prescindido de la rama elástica del modelo constitutivo ( $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_{ct,m}$ ) al entenderse que en condiciones de agotamiento el hormigón ha alcanzado la fisuración, y por tanto,  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_{ct,m}$ .

- e. 3 relaciones tensión-deformación del acero: una para la armadura longitudinal inferior, otra para la armadura longitudinal superior, y una última para la armadura transversal.

$$\sigma_{sx1} = \begin{cases} E_s \varepsilon_x, & \varepsilon_x \leq \varepsilon_{max,x1} \\ f_{y,x1} - \frac{\kappa A_{c,x1}}{A_{s,x1}} \frac{\alpha_{x1} f_{ct,m}}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_x}}, & \varepsilon_x \geq \varepsilon_{max,x1} \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\sigma_{sx2} = \begin{cases} E_s \varepsilon_x, & \varepsilon_x \leq \varepsilon_{max,x2} \\ f_{y,x2} - \frac{\kappa A_{c,x2}}{A_{s,x2}} \frac{\alpha_{x2} f_{ct,m}}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_x}}, & \varepsilon_x \geq \varepsilon_{max,x2} \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\sigma_{st} = \begin{cases} E_s \varepsilon_t, & \varepsilon_t \leq \varepsilon_{max,t} \\ f_{y,t} - \frac{\kappa A_{c,t}}{A_{st}} \frac{\alpha_t f_{ct,m}}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_t}}, & \varepsilon_t \geq \varepsilon_{max,t} \end{cases} \quad (5.11)$$

donde

$$E_s (\varepsilon_y - \varepsilon_{max,i}) = \frac{\kappa A_{c,i}}{A_{s,i}} \frac{\alpha f_{ct,m}}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_{max,i}}}, \quad i = x1, x2, t$$

En las ecuaciones (5.9), (5.10) y (5.11) los subíndices ‘x1’, ‘x2’ y ‘t’ se refieren a los tres tipos de armadura presentes: longitudinal inferior, longitudinal superior y transversal. En el caso más general cada tipo de armadura presenta diferente límite elástico ( $f_y$ ), diferente cuantía ( $A_s$ ), diferente coeficiente de adherencia hormigón-acero ( $\alpha_i$ ) y diferente área efectiva de hormigón a tracción ( $A_c$ ), razón por lo cual la deformación aparente de cedencia ( $\varepsilon_{max}$ ) definida por la TUCC varía de un tipo de armadura a otro (i.e., en el caso más general existen tres deformaciones aparentes de cedencia:  $\varepsilon_{max,x1}$ ;  $\varepsilon_{max,x2}$ ;  $\varepsilon_{max,t}$ ). En el sistema de 11 ecuaciones no lineales anterior hay 11 incógnitas, a saber:  $\theta$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_{sx1}$ ,  $\sigma_{sx2}$ ,  $\sigma_{st}$  y  $f_{2,max}$ , si se resuelve para un determinado valor del cortante de agotamiento  $V$  y del parámetro  $\kappa$ .

Para la resolución del anterior sistema de ecuaciones se emplean normalmente métodos numéricos iterativos, como es el caso del método de Newton-Raphson en varias variables. El método de Newton-Raphson es de la familia de los llamados métodos de linealización para el cálculo de soluciones de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Un

método iterativo para aproximar una solución  $x^*$  de la ecuación  $F(x)=0$  (siendo  $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función y  $n>0$ ) se dice que es de linealización si cada nueva aproximación  $x^{i+1}$  a la solución  $x^*$  se obtiene a partir de la aproximación anterior  $x^i$  como solución de la ecuación lineal  $L_i(x)=0$ , siendo  $L_i$  el operador

$$L_i(x) = A_i \cdot (x - x^i) + F(x^i),$$

donde  $A_i$  es una matriz  $n \times n$ . Si la matriz  $A_i$  es invertible, entonces

$$x^{i+1} = x^i - A_i^{-1} \cdot F(x^i).$$

Los métodos de linealización en los que  $A_i$  es invertible para todo  $i$  se denominan métodos de tipo Newton. El método de Newton-Raphson es aquél en el que  $A_i = F'(x_i)$  es la matriz Jacobiana de  $F$  evaluada en  $x_i$ . La **convergencia local** de los métodos de tipo Newton se fundamenta en el siguiente teorema [37]:

*Si la función  $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diferenciable en la solución  $x^* \in \text{int}(D)$  de  $F(x)=0$  y la aplicación  $A : S_0 \subseteq D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  definida en un entorno abierto  $S_0$  de  $x^*$  es continua en  $x^*$  y  $A(x^*)$  es invertible, entonces existe un  $\delta > 0$  tal que la aplicación  $G(x) = x - A(x)^{-1} \cdot F(x)$  está definida en la bola  $B(x^*, \delta) \subseteq S_0$  y la matriz jacobiana de  $G$  en  $x^*$  es  $I - A(x^*)^{-1} \cdot F'(x^*)$ . Si además  $\|I - A(x^*)^{-1} \cdot F'(x^*)\| < 1$ , entonces el método iterativo dado por  $x^{i+1} = G(x^i)$  converge a la solución  $x^*$  cuando arranca con cualquier aproximación inicial  $x^0$  suficientemente cercana a  $x^*$ .*

En el caso del método de Newton-Raphson, si la matriz Jacobiana  $A(x^*) = F'(x^*)$  es no singular, entonces  $A(x^*)^{-1} \cdot F'(x^*) = I$ , con lo que se satisface la condición de convergencia local a la solución  $x^*$  en el teorema anterior.

En el Método de Newton generalizado a  $n$  variables resulta muy útil una información a priori sobre la localización de la raíz ya que, a diferencia de otros métodos iterativos, el Método de Newton es un método abierto, esto es, su convergencia no está garantizada a nivel global como ocurre en otros métodos iterativos (e.g., el método de bisección), sino que queda garantizada a *nivel local* siempre y cuando la matriz Jacobiana del sistema sea no singular en un entorno de la raíz buscada.

Tal y como se comprobará en el apartado 5.3 de este capítulo, para determinados especímenes el sistema de ecuaciones arriba definido carece de solución cuando se resuelve para un valor del cortante  $V$  igual al cortante de agotamiento experimental; esto supone un problema debido a que en muchos casos la inconsistencia del sistema puede quedar enmascarada por el problema de convergencia local antes citado. Por esta razón, en el presente trabajo se ha optado por evitar el empleo directo de los métodos tipo Newton, y en su lugar se ha combinado el método de Newton-Raphson con un método complementario de reducción algebraica. El empleo de este procedimiento alternativo conlleva básicamente dos ventajas:

1. Permite obviar el problema de convergencia local de los métodos tipo Newton para aproximaciones iniciales insuficientemente próximas a la raíz buscada.
2. Permite discriminar de forma directa la consistencia o inconsistencia del sistema de ecuaciones, así como obtener información a priori sobre la ubicación de la raíz buscada.

### *Marco experimental*

Para la realización del estudio que aquí se presenta se ha realizado una selección de un total de 81 vigas de hormigón armado ensayadas hasta su agotamiento a cortante, correspondientes a diferentes campañas experimentales y contenidas en la base de datos de cortante editada por Reineck et al. [36]. Para cada una de las vigas se midieron directamente, entre otros parámetros, los valores de cortante ( $V_{exp}$ ) y tensión en cercos ( $\sigma_{st,exp}$ ) en la sección de agotamiento. En la Tabla 5.1 se resumen los valores experimentales de cortante y tensión en cercos de los 81 especímenes.

El coeficiente  $\alpha$  de la ecuación (5.8) coincidirá con los coeficientes  $\alpha_{x1}$ ,  $\alpha_{x2}$  y  $\alpha_t$ , presentes respectivamente en las ecuaciones (5.9), (5.10) y (5.11), en el caso en que todas las armaduras presenten el mismo tipo de adherencia hormigón-acero (i.e., todas las barras son lisas, o bien todas son corrugadas); en el caso de los especímenes aquí utilizados nos encontramos con elementos cuya armadura longitudinal combina barras lisas con barras corrugadas, e incluso en algunos casos con cables lisos no tesados (como es el caso de los especímenes ensayados por Palaskas et al. [32]); en tales casos

se ha optado por calcular un valor ponderado del coeficiente  $\alpha$ , tal y como se indica a continuación:

Tabla 5.1

Fuente	Espécimen	$V_{exp}$ (KN)	$\sigma_{st,exp}$ (MPa)
Ahmad et al. (1995) [1]	NHW-3b	122,78	324,14
	NHW-4	94,03	324,14
Palaskas et al. (1981) [32]	A50	115,43	492,41
	A50A	109,69	460,00
	A75	142,20	420,00
	B50	106,97	507,59
	C50	134,11	507,59
	C75	137,98	444,00
Kong et al. (1997) [24]	S1-3	206,10	313,89
	S1-4	277,90	450,00
	S2-3	253,30	265,96
	S2-4	219,40	278,72
	S3-3	228,60	300,00
	S3-4	174,90	350,00
	S4-1	354,00	183,33
	S4-4	258,10	316,67
	S4-6	202,90	300,00
	S5-1	241,70	410,53
	S5-3	243,80	300,00
	S7-3	246,50	372,22
S7-4	273,60	375,00	
Leonhardt et al. (1962) [26]	ET2	130,94	313,92
	ET3	126,25	313,92
	ET4	98,08	313,92
Moayer et al. (1974)	P20	120,10	310,28
Petersson (1972)	V1	100,93	323,00
Soerensen (1974) [41]	T-21	130,95	228,57
	T-22	128,99	399,27
	T-23	140,76	349,24
Angelakos et al. (1999)	DB120M	284,32	483,00
Bernhardt et al. (1986) [9]	S7 A	140,72	427,00
	S8 A	125,72	427,00
Bhal (1968)	B1S	128,70	437,68
	B2S	249,57	441,45
	B3S	3693,90	441,45
	B4S	472,61	441,45
Krefeld et al. (1966) [25]	321-1	163,69	517,24
	26_1	206,83	341,38

Tabla 5.1 (cont.)

Fuente	Espécimen	$V_{exp}$ (KN)	$\sigma_{st,exp}$ (MPa)
Cladera et al. (2002) [10]	H 50/3	242,07	540,00
	H 50/4	246,34	540,00
	H 60/2	179,74	530,00
	H 60/3	258,78	530,00
	H 60/4	308,71	530,00
	H 75/2	203,94	530,00
	H 75/4	255,23	530,00
	H 100/2	225,55	530,00
	H 100/3	253,64	540,00
	H 100/4	266,53	540,00
Levi et al. (1988) [27]	RC 30 A1	676,00	480,00
	RC 30 A2	688,00	480,00
	RC 60 A1	990,00	480,00
	RC 60 A2	938,00	480,00
	RC 60 B1	1181,00	480,00
	RC 60 B2	1239,00	480,00
	RC 70 B1	1330,00	480,00
Lyngberg (1976) [28]	5A-0	435,00	674,00
	5B-0	435,00	647,00
Quast (1999) [34]	1_1	155,68	641,00
Roller (1990)	7	787,83	445,07
	10	1172,14	445,07
Rosenbusch et al. (1999)	MHB 2.5-25	98,80	267,30
	HB 2.5-50	149,49	365,91
Yoon et al. (1996) [46]	N2-N	483,00	430,00
	M2-N	689,00	430,00
Regan (1971) [35]	T3	105,00	270,00
	T4	110,00	270,00
	T6	205,00	270,00
	T7	109,00	280,00
	T8	124,00	280,00
	T9	154,00	280,00
	T13	90,00	270,00
	T15	104,00	270,00
	T17	134,00	280,00
	T19	106,00	270,00
	T20	138,00	280,00
	T26	179,00	280,00
	T32	216,00	270,00
	T34	112,00	270,00
	T35	115,00	270,00
	T37	209,00	270,00
T38	238,00	270,00	

$$\alpha = \frac{\alpha_{corr} \sum_{i=1}^{n_{corr}} \phi_i + \alpha_{lisas} \sum_{i=1}^{n_{lisas}} \phi_i}{\sum_{i=1}^{n_{corr}} \phi_i + \sum_{i=1}^{n_{lisas}} \phi_i}$$

Siendo:

$\alpha_{corr}$  = coeficiente de adherencia para barras corrugadas = 1.0

$n_{corr}$  = n° de barras corrugadas.

$\alpha_{lisas}$  = coeficiente de adherencia para barras lisas, cables y tendones = 0.7

$n_{lisas}$  = n° de barras lisas.

$\phi_i$  = diámetro de barra.

### 5.3 Reducción del modelo de cortante.

Según establece la TUCC, la deformación aparente de cedencia ( $\varepsilon_{max}$ ) del acero es el valor real positivo que ajusta la siguiente ecuación:

$$E_s (\varepsilon_y - \varepsilon_{max}) = \frac{\kappa A_c}{A_s} \frac{\alpha f_{ct,m}}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_{max}}} \quad (5.12)$$

donde el valor de  $\varepsilon_{max}$  depende del valor de  $\kappa$ . La resolución del sistema de ecuaciones de cortante parametrizado en  $V$  y  $\kappa$  implica asumir un determinado régimen de comportamiento (elástico o plástico) para cada tipo de armadura, que posteriormente deberemos verificar en base a la solución general del sistema. Denotaremos por “E” la hipótesis correspondiente al régimen elástico, y por “P” la hipótesis correspondiente al régimen plástico. Dado que en la mayoría de los especímenes analizados están presentes los tres tipos de armadura (longitudinal inferior, longitudinal superior y transversal), el conjunto de hipótesis se ha codificado mediante una terna de caracteres binarios: el primer carácter corresponde a la armadura longitudinal inferior, el segundo corresponde a la armadura longitudinal superior y el tercero a la armadura transversal. Así por ejemplo, la hipótesis “EEP” representa:  $\varepsilon_x \leq \varepsilon_{max,x1}$  (i.e.,  $\sigma_{sx1} = E_s \varepsilon_x$ ),  $\varepsilon_x \leq \varepsilon_{max,x2}$  (i.e.,  $\sigma_{sx2} = E_s \varepsilon_x$ ) y  $\varepsilon_t > \varepsilon_{max,t}$  (i.e.,  $\sigma_{st} = f_{y,t} - \kappa A_{c,t} \alpha_i f_{ct,m} / (A_{s,t} (1 + \sqrt{500 \varepsilon_t}))$ ).

Por otra parte, las hipótesis válidas a efectos de evaluar el parámetro  $\kappa$  son aquellas siete que hacen que dicho parámetro esté presente en al menos una de las ecuaciones del sistema, a saber: EEP, EPE, EPP, PEE, PEP, PPE y PPP. De todas estas, las hipótesis PEP y PEE son imposibles en el marco experimental de esta tesis pues para la totalidad de los 81 especímenes analizados se cumple la siguiente inecuación:  $\varepsilon_{max,t} < \varepsilon_{max,x2} < \varepsilon_{max,x1}$ , no siendo posible que  $\varepsilon_x \leq \varepsilon_{max,x2}$  y, simultáneamente,  $\varepsilon_x > \varepsilon_{max,x1}$ . Los valores de  $\varepsilon_{max}$  de cada espécimen se han calculado tomando  $\kappa = \min\{\lambda_{x1}, \lambda_{x2}, \lambda_t\}$  en la ecuación (5.12).

Para la reducción algebraica del sistema de ecuaciones procederemos según la siguiente secuencia de eliminación / explicitación:

1. El valor de la tensión principal de tracción  $\sigma_1$ , obtenido a partir de la ecuación (5.8), se puede sustituir en la ecuación (5.1), resultando la expresión que se indica a continuación:

$$\sigma_2 = -\frac{\alpha f_{ctm}}{1 + \sqrt{500\varepsilon_1}} + \frac{V(\text{Cot}\theta + \text{Tan}\theta)}{b_w z} \quad (5.1\text{-bis})$$

2. De las ecuaciones (5.6) y (5.7) se puede explicitar la deformación principal a compresión  $\varepsilon_2$ , tal y como se indica a continuación<sup>2</sup>:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_c \left( 1 - \sqrt{1 - \sigma_2 / f_{2,max}} \right) \quad (5.7\text{-bis})$$

Donde  $f_{2,max} = f_c \cdot \min\{1, (0.8 + 170\varepsilon_1)^{-1}\}$

3. A partir de las ecuaciones (5.4) y (5.5) se pueden explicitar las deformaciones transversal ( $\varepsilon_t$ ) y longitudinal ( $\varepsilon_x$ ) respectivamente, según se indica a continuación:

---

<sup>2</sup> La ecuación (5.7-bis) corresponde a una parábola convexa con simetría de eje vertical. A efectos de la reducción algebraica que aquí se plantea se ha escogido la rama creciente de dicha parábola, lo que implica asumir que la deformación principal de compresión ( $\varepsilon_2$ ) es siempre inferior a la deformación máxima a compresión del hormigón ( $\varepsilon_c$ ). Dicha hipótesis ha sido verificada para la totalidad de especímenes de la muestra experimental de esta Tesis.



$$\varepsilon_t = \frac{\varepsilon_2 \tan^2 \theta + \varepsilon_1}{\tan^2 \theta + 1} \quad (5.4\text{-bis})$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_t \quad (5.5\text{-bis})$$

4. Las tensiones longitudinales y transversales vienen dadas directamente por las ecuaciones constitutivas del acero para cada tipo de armadura, luego:

$$\sigma_{sx1} = \begin{cases} E_s \varepsilon_x, & \varepsilon_x \leq \varepsilon_{max,x1} \\ f_{y,x1} - \frac{\kappa A_{c,x1}}{A_{s,x1}} \frac{\alpha_{x1} f_{ct,m}}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_x}}, & \varepsilon_x \geq \varepsilon_{max,x1} \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\sigma_{sx2} = \begin{cases} E_s \varepsilon_x, & \varepsilon_x \leq \varepsilon_{max,x2} \\ f_{y,x2} - \frac{\kappa A_{c,x2}}{A_{s,x2}} \frac{\alpha_{x2} f_{ct,m}}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_x}}, & \varepsilon_x \geq \varepsilon_{max,x2} \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\sigma_{st} = \begin{cases} E_s \varepsilon_t, & \varepsilon_t \leq \varepsilon_{max,t} \\ f_{y,v} - \frac{\kappa A_{c,v}}{A_v} \frac{\alpha_t f_{ct,m}}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_t}}, & \varepsilon_t \geq \varepsilon_{max,t} \end{cases} \quad (5.11)$$

5. Una vez explicitadas las variables indicadas en los cuatro apartados anteriores sólo resta sustituir dichas variables en las ecuaciones de equilibrio (5.2) y (5.3), resultando así un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas  $\{\theta, \varepsilon_1\}$ , tal y como se indica a continuación:

$$\begin{cases} f[\theta, \varepsilon_1] = A_{sx1} \sigma_{sx1} + A_{sx2} \sigma_{sx2} + \sigma_1 b_w z - \frac{V}{\tan \theta} = 0 & (5.3\text{-bis}) \\ g[\theta, \varepsilon_1] = A_{sv} \sigma_{sv} - (\sigma_2 \sin^2 \theta - \sigma_1 \cos^2 \theta) \cdot b_w s = 0 & (5.2\text{-bis}) \end{cases}$$

A continuación se desarrollan, en base a la secuencia de eliminación antes descrita, las expresiones correspondientes a las funciones  $f$  y  $g$  de cada una de las hipótesis de comportamiento definidas al principio de este apartado. La función  $f$  corresponde al equilibrio de las armaduras longitudinales inferior y superior, mientras que la función  $g$  corresponde al equilibrio de la armadura transversal; por consiguiente, según que el régimen de comportamiento de cada

tipo de armadura sea elástico (E) o plástico (P), las funciones  $f$  y  $g$  asumirán alguna de las expresiones siguientes:

$$a) \quad f_{EE} [\theta, \varepsilon_1] = b_w z \left( \frac{\alpha f_{ctm}}{1 + \sqrt{500\varepsilon_1}} \right) - V \cot \theta + (A_{sx1} + A_{sx2}) E_s \Omega$$

Donde el subíndice “EE” indica que las armaduras longitudinales superior e inferior están en régimen elástico.

$$b) \quad f_{EP} [\theta, \varepsilon_1] = b_w z \left( \frac{\alpha f_{ctm}}{1 + \sqrt{500\varepsilon_1}} \right) - V \cot \theta + A_{sx1} E_s \Omega + A_{sx2} f_{yx2} - \frac{\kappa A_{cx2} \alpha_{x2} f_{ctm}}{1 + \sqrt{500\Omega}}$$

Donde el subíndice “EP” indica que la armadura longitudinal inferior está en régimen elástico, mientras que la armadura longitudinal superior está en régimen plástico.

$$c) \quad f_{PP} [\theta, \varepsilon_1] = b_w z \left( \frac{\alpha f_{ctm}}{1 + \sqrt{500\varepsilon_1}} \right) - V \cot \theta + A_{sx1} f_{yx1} + A_{sx2} f_{yx2} - \frac{\kappa f_{ctm}}{1 + \sqrt{500\Omega}} (A_{cx1} \alpha_{x1} + A_{cx2} \alpha_{x2})$$

Donde el subíndice “PP” indica que tanto la armadura longitudinal inferior como la armadura longitudinal superior han alcanzado el régimen plástico.

$$d) \quad g_E [\theta, \varepsilon_1] = b_w s \left( \frac{\alpha f_{ctm}}{1 + \sqrt{500\varepsilon_1}} \right) - \frac{V \cdot s}{z} \tan \theta + A_{st} E_s \Psi$$

Donde el subíndice “E” indica que la armadura transversal permanece en régimen elástico.

$$e) \quad g_P [\theta, \varepsilon_1] = b_w s \left( \frac{\alpha f_{ctm}}{1 + \sqrt{500\varepsilon_1}} \right) - \frac{V \cdot s}{z} \tan \theta + A_{st} f_{yt} - \frac{\kappa A_{ct} \alpha_t f_{ctm}}{1 + \sqrt{500\Psi}}$$

Donde el subíndice “P” indica que la armadura transversal ha alcanzado el régimen plástico.

Siendo:

$$\Omega = \frac{\varepsilon_1 \tan^2 \theta + \Gamma \varepsilon_c}{1 + \tan^2 \theta} \quad (\text{factor de comportamiento de la armadura longitudinal})$$

$$\Psi = \frac{\varepsilon_1 + \Gamma \varepsilon_c \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad (\text{factor de comportamiento de la armadura transversal})$$

con

$$\Gamma = 1 - \sqrt{1 - \frac{\frac{V(\cot\theta + \tan\theta)}{b_w z} - \frac{f_{ctm} \alpha}{1 + \sqrt{500\varepsilon_1}}}{\text{Min}\left\{f_c, \frac{f_c}{0.8 + 170\varepsilon_1}\right\}}}$$

donde  $b_w$ ,  $z$ ,  $s$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha_{x1}$ ,  $\alpha_{x2}$ ,  $\alpha_t$ ,  $A_{sx1}$ ,  $A_{sx2}$ ,  $A_{st}$ ,  $f_{yx1}$ ,  $f_{yx2}$ ,  $f_{yt}$ ,  $E_s$ ,  $A_{cx1}$ ,  $A_{cx2}$ ,  $f_c$  y  $f_{ctm}$  son datos geométricos y mecánicos de cada espécimen (conocidos a priori),  $V$  es el cortante de agotamiento experimental de cada espécimen y  $\kappa$  es el parámetro de degradación del hormigón. Por consiguiente, lo que se ha hecho es reducir el sistema inicial de 11 ecuaciones y 11 incógnitas a un sistema de 2 ecuaciones  $\{f=0, g=0\}$  y 2 incógnitas  $\{\theta, \varepsilon_1\}$  parametrizado en  $V$  y  $\kappa$ .

Una vez reducido el sistema ya es posible proceder a la representación gráfica del mismo a fin de obtener información a priori sobre la ubicación y número de las raíces de dicho sistema, pudiendo así discriminar la consistencia o inconsistencia de este último de una forma fácil e inmediata.

### 5.3.1 Estudio de dos casos reales: Soerensen (1974) y Cladera (2002).

A continuación se aplica el sistema reducido de cortante a dos casos reales pertenecientes a campañas de ensayos distintas; la primera de ellas, más cercana en el tiempo, se desarrolló en España en el año 2002 bajo la dirección de los profesores Antoni Cladera y Antoni Marí [10] del Departamento de Ingeniería de la Construcción de la Universidad Politécnica de Cataluña. La segunda, algo más antigua, fue diseñada y dirigida por Hans Chr. Sørensen [41] en el año 1974 en las instalaciones del Laboratorio de Estructuras de la Universidad Politécnica de Dinamarca, como continuación de una campaña iniciada años atrás, entre 1963 y 1965, por el profesor K. Özden.

Ambos ejemplos resultan particularmente interesantes pues, además de clarificar la aplicación práctica de los conceptos definidos en el epígrafe anterior, ponen de manifiesto la problemática numérica que en ocasiones presenta la aplicación de las teorías de campo de compresiones en relación al diseño a cortante de elementos de hormigón armado.

*CASO 1: Cladera, A., Marí, A. (2002)*

#### Espécimen H 75/4

Las características de la sección transversal de este espécimen quedan definidas por los siguientes parámetros (Figura 5.3):

$$b_w = 200 \text{ mm}$$

$$d = 351 \text{ mm}$$

$$z = 0.9 d = 315.9 \text{ mm}$$

$$s = 210 \text{ mm}$$

Las áreas totales de acero correspondientes a cada tipo de armadura se calculan a continuación:

$$A_{sx1} = 2 \frac{\pi \cdot 32^2}{4} + 1 \frac{\pi \cdot 25^2}{4} = 2099.37 \text{ mm}^2$$

$$A_{sx2} = 2 \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 100.53 \text{ mm}^2$$

$$A_{st} = 2 \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 100.53 \text{ mm}^2$$

#### *Áreas efectivas de hormigón*

Las áreas de tensorrigidez del hormigón correspondientes a cada tipo de armadura (Figuras 5.4 y 5.5) vienen dadas por:

##### 1. *Armadura longitudinal inferior*

$$A_{cx1} = (r + \varnothing_{cercos} + 8 \cdot \varnothing_{xl}) \cdot b_w = (25 + 8 + 8 \cdot 32) \cdot 200 = 57800 \text{ mm}^2$$

siendo:

$r$  = recubrimiento libre hasta contorno de cerco.

$\varnothing_{cerco}$  = diámetro de estribos.

$\varnothing_{x1}$  = diámetro de armadura longitudinal inferior.

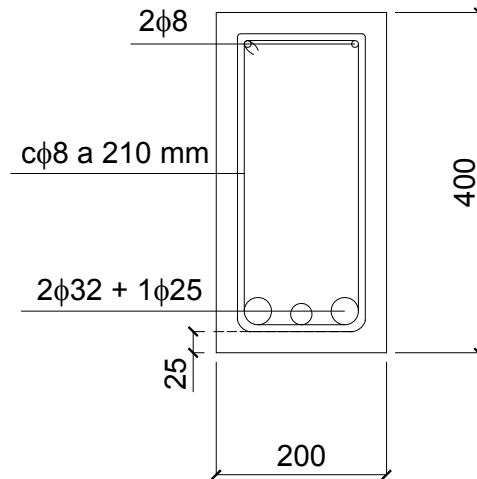


Figura 5.3: Especimen H 75/4. Cladera (2002). Sección tipo. Cotas en mm.

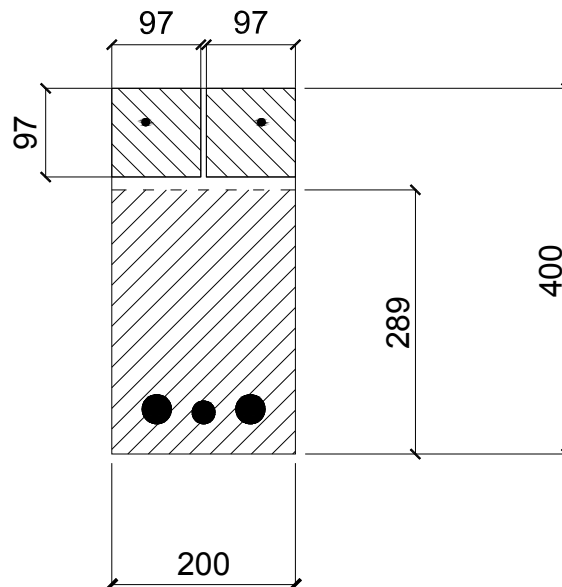


Figura 5.4: Especimen H 75/4. Cladera (2002).

Área efectiva de hormigón correspondiente a la armadura longitudinal. Cotas en mm.

## 2. Armadura longitudinal superior

$$A_{cx2} = (r + \varnothing_{cerco} + 8 \cdot \varnothing_{x2})^2 \cdot 2 = (25 + 8 + 8 \cdot 8)^2 \cdot 2 = 18818 \text{ mm}^2$$

siendo:

$\varnothing_{x2}$  = diámetro de armadura longitudinal superior

## 3. Armadura transversal

$$A_{ct} = (r + 8 \cdot \varnothing_{cerco}) \cdot 15 \cdot \varnothing_{cerco} \cdot 2 = (25 + 8 \cdot 8) \cdot 15 \cdot 8 \cdot 2 = 21360 \text{ mm}^2$$

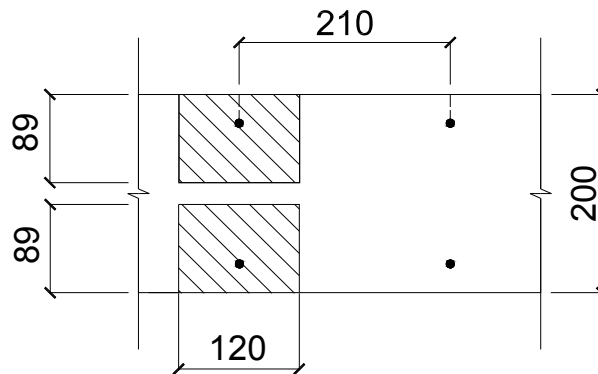


Figura 5.5: Especimen H 75/4. Cladera (2002).

Área efectiva de hormigón correspondiente a la armadura transversal. Cotas en mm.

Como se puede observar en la Figura 5.4 existe solape entre las áreas efectivas de las barras de la armadura longitudinal inferior; dado que las áreas solapadas corresponden a barras de igual diámetro, la zona de solape se reparte equitativamente entre las barras involucradas, lo que equivale a tomar como área de tensorrigidez del hormigón aquélla que engloba el conjunto de áreas efectivas del total de barras.

### Características mecánicas

Los límites de cedencia del acero correspondientes a cada tipo de armadura toman los siguientes valores:

$$f_{yx1} = 500 \text{ MPa}$$

$$f_{yx2} = 530 \text{ MPa}$$

$$f_{yt} = 530 \text{ MPa}$$

Los coeficientes de adherencia hormigón-acero correspondientes a cada tipo de armadura vienen dados por:

$\alpha_{x1} = 1$  (tipo de armadura longitudinal inferior: corrugada).

$\alpha_{x2} = 1$  (tipo de armadura longitudinal superior: corrugada).

$\alpha_t = 1$  (tipo de armadura transversal: corrugada).

Dado que los tres tipos de armadura presentan las mismas características de adherencia hormigón-acero, el coeficiente global  $\alpha$  adopta en este caso el valor unidad. Finalmente, las características resistentes del hormigón vienen definidas por:

$$f_c = 68.9 \text{ MPa}$$

$$f_{ctm} = 2.12 \cdot \ln\left(1 + \frac{f_c + 8}{10}\right) = 4.58 \text{ MPa}$$

Una vez sustituidos los parámetros antes calculados en las ecuaciones reducidas del sistema (i.e.,  $f_{EE}$ ,  $f_{EP}$ ,  $f_{PP}$ ,  $g_E$ ,  $g_P$ ) se obtiene, para cada una de las hipótesis de comportamiento ya definidas, un conjunto de dos funciones  $\{f, g\}$  en dos variables  $\{\theta, \varepsilon_I\}$  parametrizado en  $V$  y  $\kappa$ . Los conjuntos de ceros de tales funciones son susceptibles de representarse gráficamente para valores concretos del cortante  $V$  y el parámetro  $\kappa$ ; en la Figura 5.6 se muestra la solución del sistema reducido  $\{f = 0, g = 0\}$  para la hipótesis de comportamiento EEP y un valor del parámetro  $\kappa$  igual al valor máximo que hace consistente los modelos constitutivos de las tres armaduras involucradas (i.e.,  $\kappa = \kappa_{max} = \min\{\lambda_{x1}, \lambda_{x2}, \lambda_t\}$ ).

Tanto en la Figura 5.6 como en la Figura 1 del anexo, se ha tomado como **dominio de análisis** para la variable  $\varepsilon_I$  el intervalo definido por los siguientes extremos:

- a. **Extremo inferior:** la deformación  $\varepsilon_{ctm}$ ; dado que el valor del cortante  $V$  que estamos empleando para resolver el sistema es el correspondiente al instante de agotamiento del espécimen, se da por hecho que la deformación del espécimen en dicho instante será superior a  $\varepsilon_{ctm}$ .
- b. **Extremo superior:** fijar un límite superior para la deformación principal a tracción es una decisión nada trivial; los ensayos de cortante realizados en vigas de hormigón no suelen arrojar valores de la deformación  $\varepsilon_I$  superiores a  $5 \cdot 10^{-2}$ . No obstante, vamos a tomar como valor máximo de la deformación principal a tracción ( $\varepsilon_{I,max}$ ) un límite virtual que resulta de despejar la

variable  $\varepsilon_l$  de la ecuación (5.5), procediendo tal y como se indica a continuación<sup>3</sup>:

$$\varepsilon_{1,max} = \varepsilon_{x,max} + \varepsilon_{t,max} - \varepsilon_{2,min}$$

donde:

$\varepsilon_{x,max}$ : valor máximo de la deformación longitudinal e igual al mínimo de las deformaciones de cedencia de las armaduras longitudinales inferior y superior ( $\varepsilon_{y,x1}$  y  $\varepsilon_{y,x2}$ , respectivamente).

$\varepsilon_{t,max}$ : valor máximo de la deformación transversal e igual a la deformación de cedencia de la armadura transversal.

$\varepsilon_{2,min}$ : al contrario de lo que ocurre con las deformaciones longitudinal y transversal, en este caso aplicamos el valor mínimo por tratarse de un término con signo negativo en la ecuación (5.5); fijar un valor mínimo de la deformación principal de compresión es tan comprometido como fijar un máximo de la deformación principal a tracción, por lo que a fin de simplificar, y quedando del lado de la seguridad, tomaremos el cero como valor mínimo de la deformación  $\varepsilon_2$ .

Luego, el valor máximo de la deformación principal a tracción ( $\varepsilon_{1,max}$ ) viene dado por:

$$\varepsilon_{1,max} = \min\{\varepsilon_{yx1}, \varepsilon_{yx2}\} + \varepsilon_{ty}$$

Como se puede observar en la Figura 1 del anexo, a medida que aumenta el valor de  $\kappa$  se produce una evolución en la posición relativa de las curvas de ceros de las funciones  $f$  y  $g$ . En el caso que nos ocupa el sistema presenta solución (i.e., las curvas  $f=0$  y  $g=0$  presentan un punto de intersección) en tres de las cinco hipótesis evaluadas (EEP, EPP y EPE). En el ámbito del presente trabajo diremos que una hipótesis de comportamiento es *soluble* cuando las curvas de ceros de las funciones  $f$  y  $g$  presentan, al menos, un punto de intersección (i.e., el sistema de ecuaciones  $\{f[\theta, \varepsilon_l]=0 ; g[\theta, \varepsilon_l]=0\}$  presenta, al menos, una solución). En base a lo anterior, y en el marco de esta Tesis, diremos que una sección de hormigón armado es *soluble* a efectos del ajuste del parámetro  $\kappa$  cuando

---

<sup>3</sup> Obviamente, los valores de deformación que a continuación se justifican no tienen por qué alcanzarse necesariamente de forma simultánea. Sin embargo, es una forma prudente de fijar un límite superior para la deformación principal a tracción.



el sistema presenta solución en, al menos, una de las hipótesis de comportamiento evaluadas para el valor experimental del cortante de agotamiento ( $V_{exp}$ ). El hecho de que un espécimen no sea soluble implica que su diseño geométrico y mecánico es tal que su valor real de agotamiento a cortante queda fuera de la curva de respuesta resistente ( $V-\varepsilon_I$ ) proporcionada por el modelo del cortante de las teorías de campo de compresiones.

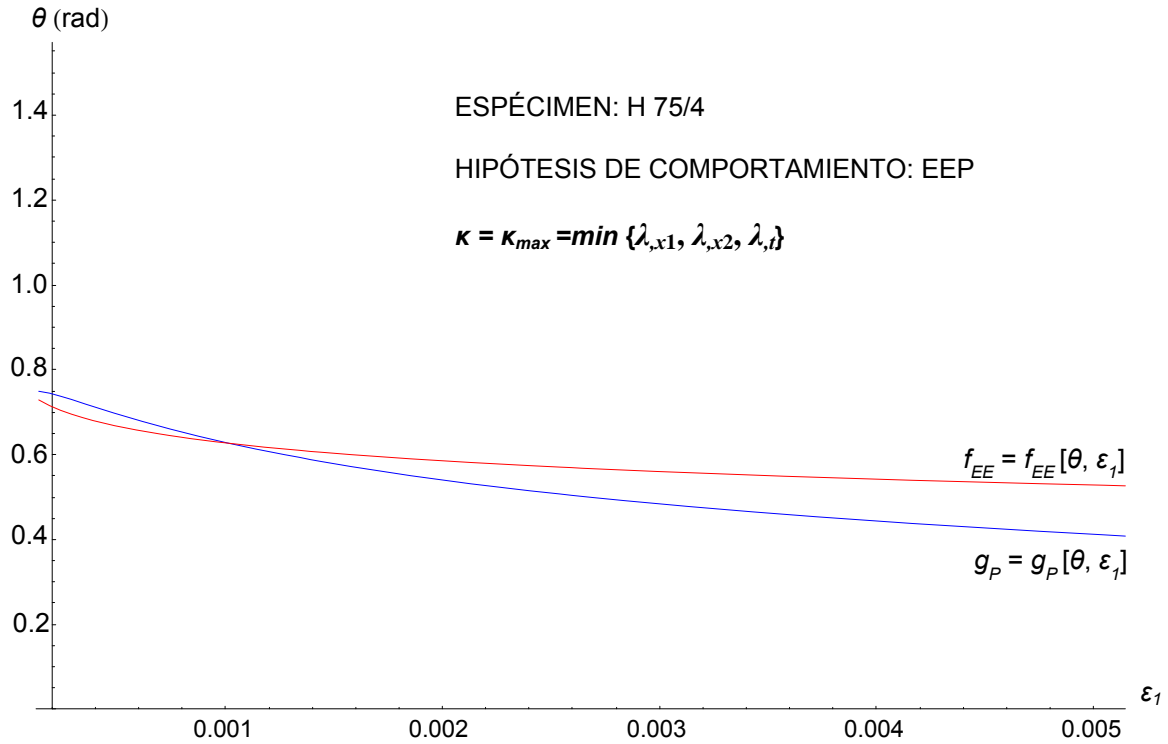


Figura 5.6: Curvas de zeros de las funciones  $f$  y  $g$  correspondientes al espécimen H75/4.  
 Parámetros:  $V = 255.23$  KN;  $\kappa = \kappa_{max} = 0.683$ ; hipótesis de comportamiento: EEP.

Otro aspecto destacable de la información gráfica recogida en la Figura 1 del anexo es la existencia para cada hipótesis de un intervalo de  $\kappa$  en el que el sistema definido por las funciones  $f$  y  $g$  es soluble; una vez más, y al igual que ocurría con el modelo constitutivo del acero, el área de tensorrigidez del hormigón controla la solubilidad del sistema. Como se puede observar en la Figura 5.7, a partir de un determinado valor del parámetro  $\kappa$  - que denominaremos  $\kappa_{inicial}$  - las funciones  $f$  y  $g$  empiezan a intersectar (Figura 5.7a) hasta un segundo valor de  $\kappa$  superior a  $\kappa_{inicial}$  y que denominaremos  $\kappa_{final}$ , a partir del cual el modelo constitutivo del acero deja de ser consistente (i.e.,  $\kappa_{final} = \kappa_{max} = \min \{ \lambda_{,x1}, \lambda_{,x2}, \lambda_{,t} \}$ ) (Figura 5.7b). Luego, el sistema definido por las funciones  $f$  y  $g$  sólo

es consistente en el intervalo  $[\kappa_{inicial}, \kappa_{final}]$ , contenido en el intervalo general de análisis  $[0, \lambda]$ .

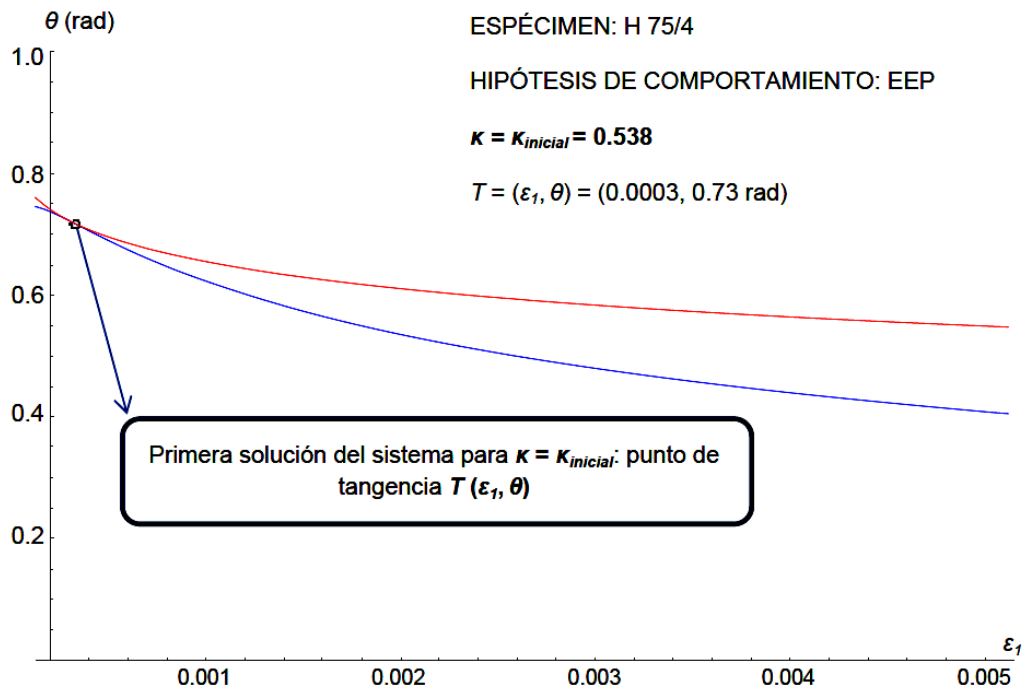


Figura 5.7a: Entrada de las curvas  $f = 0$  y  $g = 0$  en la *región de solubilidad* del espécimen H75/4. Parámetros:  $V = 255230$  N;  $\kappa = \kappa_{inicial} = 0.538$ ; hipótesis de comportamiento: EEP.

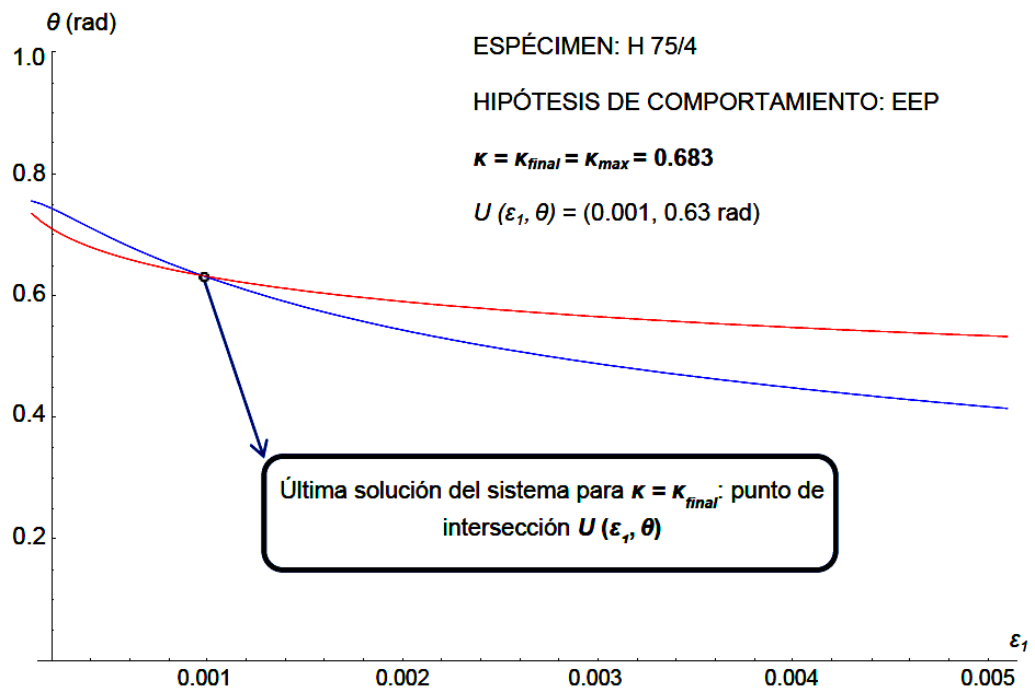


Figura 5.7b: Salida de las curvas  $f = 0$  y  $g = 0$  de la *región de solubilidad* del espécimen H75/4. Parámetros:  $V = 255230$  N;  $\kappa = \kappa_{final} = 0.683$ ; hipótesis de comportamiento: EEP.

En la Figura 2 del anexo se representa gráficamente la posición relativa de las curvas  $f = 0$  y  $g = 0$  a la entrada y salida de la región de solubilidad del sistema para la totalidad de hipótesis de comportamiento solubles; como se puede observar en la Figura 5.7a, para  $\kappa = \kappa_{inicial}$  las curvas  $f=0$  y  $g=0$  intersectan en un punto de tangencia  $T = (\varepsilon_l, \theta)$  el cual representa la primera solución del modelo de cortante para la hipótesis de comportamiento correspondiente. El sistema abandona la región de solubilidad igual que la alcanzó, es decir, con un único punto de intersección  $U = (\varepsilon_l, \theta)$  que representa la última solución del sistema. En este caso, el valor de  $\kappa_{final}$  coincide con el valor máximo que hace consistente los modelos constitutivos de las tres armaduras involucradas (i.e.,  $\kappa = \kappa_{max} = \min\{\lambda_{,x1}, \lambda_{,x2}, \lambda_{,t}\}$ ) (Figura 5.7b).

Para valores superiores a  $\kappa_{inicial}$  el sistema pierde la unicidad de solución pasando a tener dos soluciones del tipo  $(\varepsilon_l, \theta)$ . Esta cuestión se observa más claramente en la Figura 5.8 donde se ha representado para la hipótesis EEP la curva de puntos  $(\kappa, \varepsilon_l)$  que son solución del sistema dentro del intervalo  $[\kappa_{inicial}, \kappa_{final}]$ ; a esta curva la denominaremos **curva de solubilidad** del sistema. Llegados a este punto conviene hacer el siguiente inciso: la curva de solubilidad representada en la Figura 5.8 corresponde a un único valor de cortante experimental  $V_{exp}$ , y por tanto, el comportamiento de las ramas (creciente y decreciente) nada tiene que ver, en principio, con el efecto de degradación que la deformación a cortante induce sobre la resistencia del elemento. Por otra parte, y en el caso que nos ocupa, del conjunto de puntos que integran la curva de consistencia de la Figura 5.8 sólo un subconjunto del mismo verifica la hipótesis de comportamiento que se está evaluando. Como ya se ha visto, cada punto de intersección de las curvas  $f=0$  y  $g=0$  lleva asociado una terna de valores  $(\kappa; \varepsilon_l, \theta)$ ; si se “deshace” la reducción algebraica practicada al sistema general de ecuaciones (es decir, se sustituyen las incógnitas por sus valores de la solución en el mismo orden en que se explicitaron para hacer la reducción), es posible calcular, a partir de la solución  $(\varepsilon_l, \theta)$  del sistema reducido, el valor del resto de incógnitas que constituyen la solución del sistema general (i.e.,  $\varepsilon_x, \varepsilon_t, \varepsilon_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_{sx1}, \sigma_{sx2}, \sigma_{st}$  y  $f_{2,max}$ ). En nuestro caso nos interesa en particular los valores de las deformaciones longitudinal  $(\varepsilon_x)$  y transversal  $(\varepsilon_t)$  de la armadura, pues son los que nos permiten verificar la hipótesis de comportamiento evaluada. Téngase en cuenta que una variación del parámetro  $\kappa$  implica un cambio en la deformación aparente de cedencia de los tres tipos de armadura, por lo que la verificación de la hipótesis de comportamiento deberá realizarse para cada uno de los puntos que integran la curva de

consistencia del sistema. El resultado obtenido se muestra en la Figura 5.8 donde hemos indicado en color rojo aquellos puntos de la curva de solubilidad que, pese a ser solución del sistema, no verifican la hipótesis de comportamiento (*puntos inconsistentes*), mientras que en color verde hemos identificado aquellos puntos que, además de ser solución del sistema, verifican la hipótesis de comportamiento asumida (*puntos consistentes*). En el marco de esta Tesis se denominará espécimen *consistente* a aquél que presente al menos un punto consistente en algunas de las hipótesis de comportamiento evaluadas. Así pues, y a efectos del ajuste del parámetro  $\kappa$ , necesitamos especímenes que, además de ser solubles, sean consistentes.

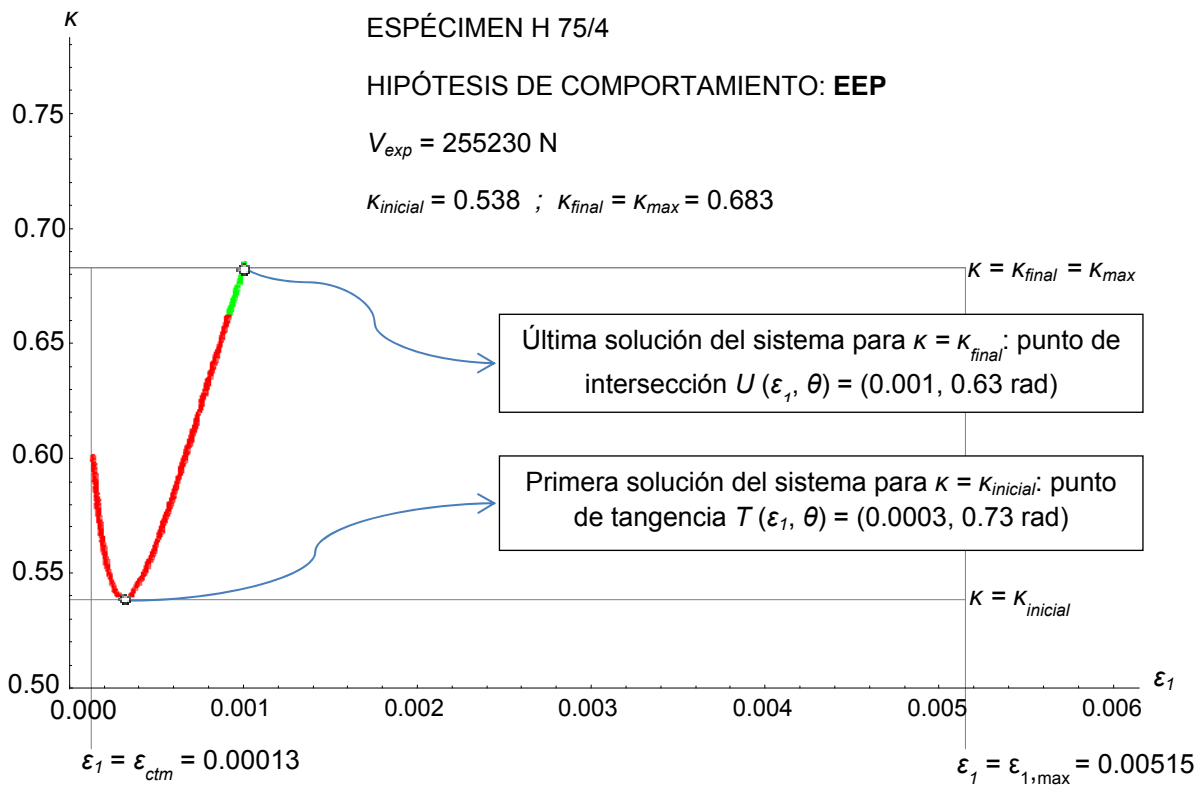


Fig.ura 5.8: Curva de solubilidad del espécimen H 75/4 correspondiente a la hipótesis EEP.

Dada la relativa complejidad de las funciones  $f$  y  $g$ , y la casuística de comportamiento definida para las armaduras, para el cálculo del intervalo  $[\kappa_{inicial}, \kappa_{final}]$  se decidió, en una primera fase de este estudio, sustituir las funciones  $f$  y  $g$  por B-splines multivariables [15] a fin de obtener aproximaciones más sencillas de estas funciones y calcular analíticamente aquellos valores de  $\kappa$  para los que el sistema tiene solución. Las expresiones así obtenidas permitirían determinar un límite analítico de consistencia para

el sistema general, de forma análoga a como se hizo en el Capítulo 4 para el modelo constitutivo del acero. Sin embargo, la generalización de la construcción de B-splines al caso de dos variables es tan compleja que se vuelve de muy difícil ejecución en la práctica. Por esta razón, y en una segunda fase de este estudio, se optó por hacer una búsqueda de los límites del intervalo  $[\kappa_{\text{inicial}}, \kappa_{\text{final}}]$  haciendo uso del método de bisección. La búsqueda por bisección es un método sencillo, de complejidad logarítmica en el orden de la búsqueda<sup>4</sup> y que sólo precisa de una función de decisión para determinar a qué lado de la aproximación continúa la búsqueda en el paso siguiente. Así pues, el problema planteado se ha resuelto de forma rápida y simple mediante la utilización combinada del método de bisección y del método de Newton-Raphson en varias variables. El método de bisección testea valores sucesivos del parámetro  $\kappa$  en base a una función de decisión referida a la consistencia y/o inconsistencia del sistema; dicha función utiliza el método de Newton-Raphson en dos variables a partir de una aproximación inicial que garantice la convergencia local de este último, tal y como ya se explicó en el apartado 5.2.

En la Tabla 5.1 se recoge el dato de la tensión experimental en cercos ( $\sigma_{st,exp}$ ) correspondiente a cada espécimen. Como se ha indicado anteriormente, deshaciendo la reducción algebraica del sistema general de ecuaciones es posible calcular el valor de la tensión en cercos ( $\sigma_{st}$ ) a fin de compararlo con el valor experimental recogido en la Tabla 5.1 y poder así determinar aquella terna  $(\kappa; \varepsilon_I, \theta)$ , de entre todas las hipótesis evaluadas, para la que la diferencia  $|\sigma_{st} - \sigma_{st,exp}|$  es mínima. Esto último es una primera forma de buscar el valor del parámetro  $\kappa$  que optimice la contribución a tracción del hormigón, y que denotaremos como  $\kappa_{opt}$ . Finalmente, y en el caso de que un espécimen presente puntos de consistencia en más de una hipótesis<sup>5</sup>, se adoptará como régimen de comportamiento del espécimen aquél correspondiente a la hipótesis en la que se registre el valor de  $\kappa_{opt}$ .

Mediante un algoritmo relativamente sencillo, diseñado con ayuda del programa Mathematica®, se ha localizado dentro del intervalo de análisis  $[\varepsilon_{ctm}, \varepsilon_{I,max}]$  el punto  $(\varepsilon_I, \kappa)$  cuyo valor asociado de la tensión en cercos ( $\sigma_{st}$ ) produce un valor mínimo de  $|\sigma_{st} -$

<sup>4</sup> Para buscar un número con una precisión de  $10^n$  en un intervalo de extremos distantes hasta  $10^N$ , el método de bisección no da más de  $c \cdot \log_2(N-n)$  pasos, siendo  $c$  una constante que no depende de  $n$  ni de  $N$ .

<sup>5</sup> El agotamiento a cortante de un espécimen puede tener lugar bajo una y sólo una hipótesis de comportamiento.

$\sigma_{st,exp}$ . Como se puede observar en la Figura 5.9, en el criterio de parada de la instrucción *While* se ha introducido una condición para que no se analicen aquellos puntos con  $\kappa = 0$  pues, aunque en el análisis precedente los hemos considerado,  $\kappa = 0$  implica la ausencia total de tensorrigidez en el hormigón y lo que precisamente buscamos es un valor del parámetro  $\kappa$  que optimice la rigidez tensional del hormigón. En la lista *Data* se han almacenado cada uno de los puntos  $(\varepsilon_l, \kappa)$  de la curvas de solubilidad del espécimen que verifican la hipótesis de comportamiento evaluada, mientras que en la lista *Sigmast* se ha almacenado el valor de la tensión  $\sigma_{st}$  asociado a cada uno de los puntos contenidos en *Data*, tal y como se indica en la Figura 5.9.

```

j = 1;
jmin = 1;

While [j ≤ Length [Sigmast] && Data [[j, 2]] = 0,
  j = jmin;
  j++;
];

jmin = j;

While [j ≤ Length [Sigmast],
  If [Abs [Sigmast [[j]]] -  $\sigma_{stexp}$ ] < Abs [Sigmast [[jmin]]] -  $\sigma_{stexp}$ ] && Data [[j, 2]] ≠ 0, jmin = j];
  j++;
];

```

Figura. 5.9: Extracto del algoritmo de búsqueda de  $\kappa_{opt}$ .

El valor de  $\kappa_{opt}$  que produce la mínima diferencia  $|\sigma_{st} - \sigma_{st,exp}|$ , una vez analizadas todas las hipótesis, se alcanza en la hipótesis EEP y presenta los siguientes resultados (Figura 5.10):

$$\kappa_{opt} = 0.661$$

$$(\varepsilon_l, \theta) = (0.0009, 0.64 \text{ rad})$$

$$\sigma_{st} = 125.51 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{st,exp} = 530 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_{st} - \sigma_{st,exp}| = 404.49 \text{ MPa}$$

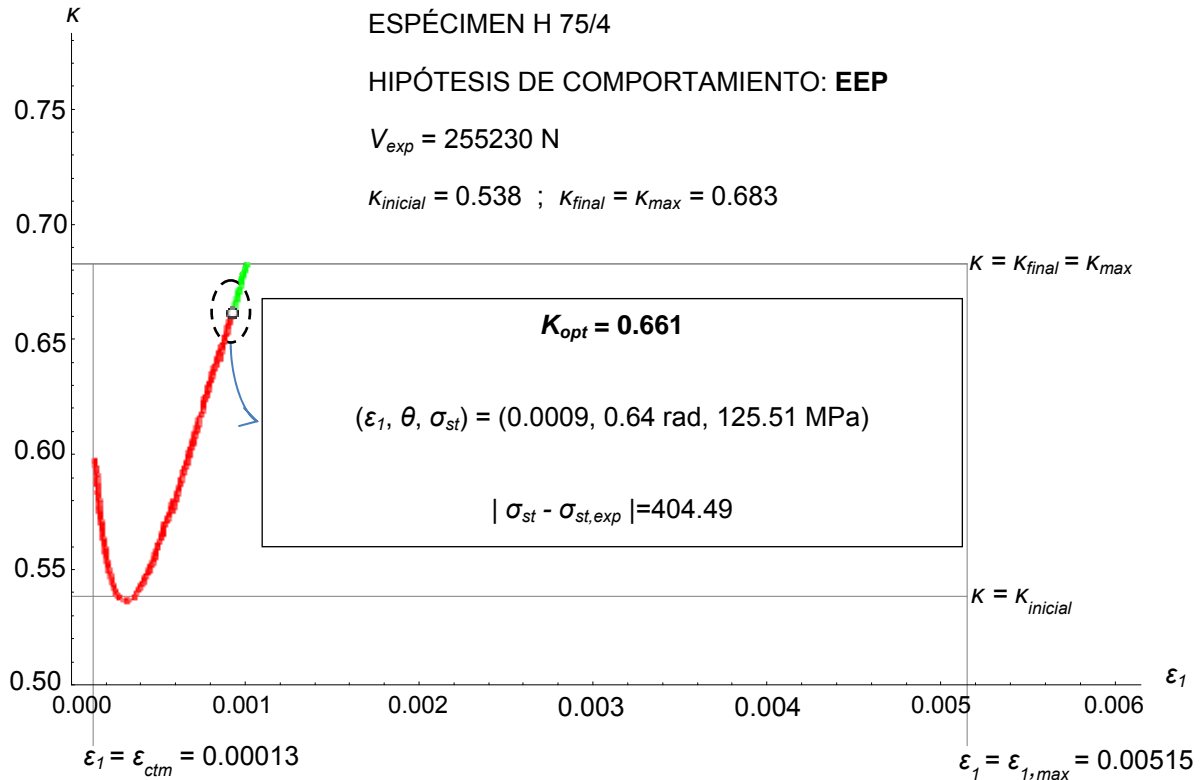


Figura 5.10: Par  $(\kappa, \varepsilon_1)$  del espécimen H75/4 para el que la rigidez tensional del hormigón es óptima.

*CASO 2: Sørensen, Hans Chr. (1974)*

Espécimen T-22

Las características de la sección transversal de este espécimen quedan definidas por los siguientes parámetros (Figura 5.11):

$b_w = 110 \text{ mm}$

$d = 298 \text{ mm}$

$z = 0.9 d = 268.2 \text{ mm}$

$s = 210 \text{ mm}$

Las áreas totales de acero correspondientes a cada tipo de armadura se calculan a continuación:

$$A_{sx1} = 4 \frac{\pi \cdot 20^2}{4} = 1256.64 \text{ mm}^2$$

$$A_{sx2} = 0 \text{ mm}^2$$

$$A_{st} = 2 \frac{\pi \cdot 7^2}{4} = 76.97 \text{ mm}^2$$

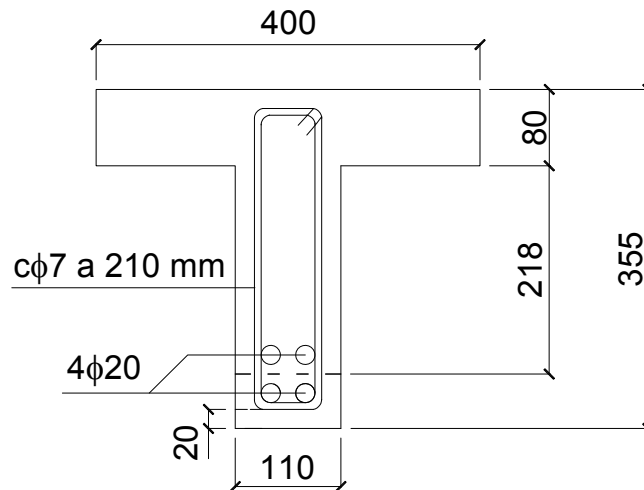


Figura 5.11: Espécimen T-22. Soerensen (1974). Sección tipo. Cotas en mm.

### Áreas efectivas de hormigón

Las áreas de tensorrigidez del hormigón correspondientes a cada tipo de armadura (Fig. 5.12, 5.13 y 5.14) vienen dadas por:

#### 1. Armadura longitudinal

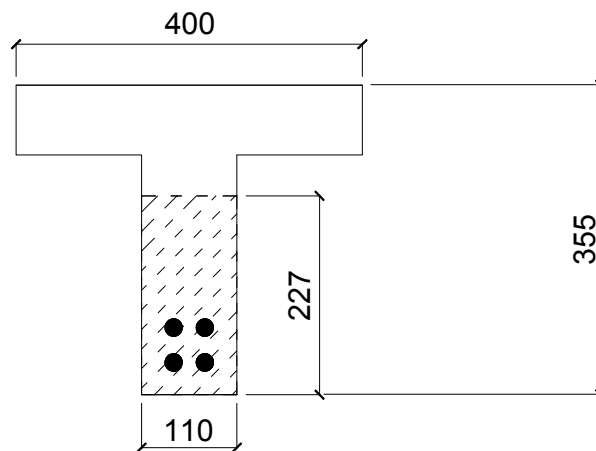


Figura 5.12: Espécimen T-22. Soerensen (1974).

Área efectiva de hormigón correspondiente a la armadura longitudinal. Cotas en mm.



$$A_{cxl} = (r + \varnothing_{cerco} + \varnothing_{xl} + e + 8 \cdot \varnothing_{xl}) \cdot b_w = (20 + 7 + 20 + 20 + 8 \cdot 20) \cdot 110 =$$

$$= 24970 \text{ mm}^2$$

siendo:

$r$  = recubrimiento libre hasta contorno de cerco.

$\varnothing_{cerco}$  = diámetro de estribos.

$\varnothing_{xl}$  = diámetro de armadura longitudinal inferior

$e$  = separación vertical entre capas de armadura (medido entre contorno de armaduras)

## 2. Armadura transversal-cabeza

$$A_{ct-cabeza} = (\text{ancho interno} + 16 \cdot \varnothing_{cerco}) \cdot 15 \cdot \varnothing_{cerco} = (56 + 16 \cdot 7) \cdot 15 \cdot 7 = 17640 \text{ mm}^2$$

siendo:

$$\text{ancho interno} = \text{ancho bruto} - 2 \cdot r - 2 \cdot \varnothing_{cerco} = 110 - 2 \cdot 20 - 2 \cdot 7 = 56 \text{ mm}$$

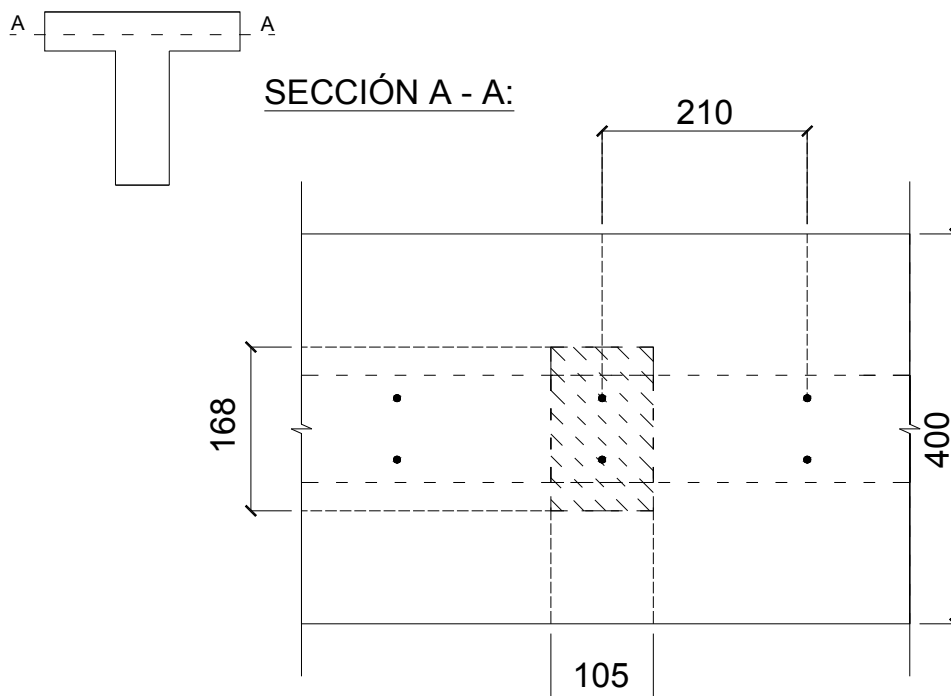


Figura 5.13: Especimen T-22. Soerensen (1974).

Área efectiva de hormigón correspondiente a la armadura transversal en cabeza. Cotas en mm.

### 3. Armadura transversal-alma

$$A_{ct-alma} = 15 \cdot \varnothing_{cerco} \cdot b_w = 15 \cdot 7 \cdot 110 = 11550 \text{ mm}^2$$

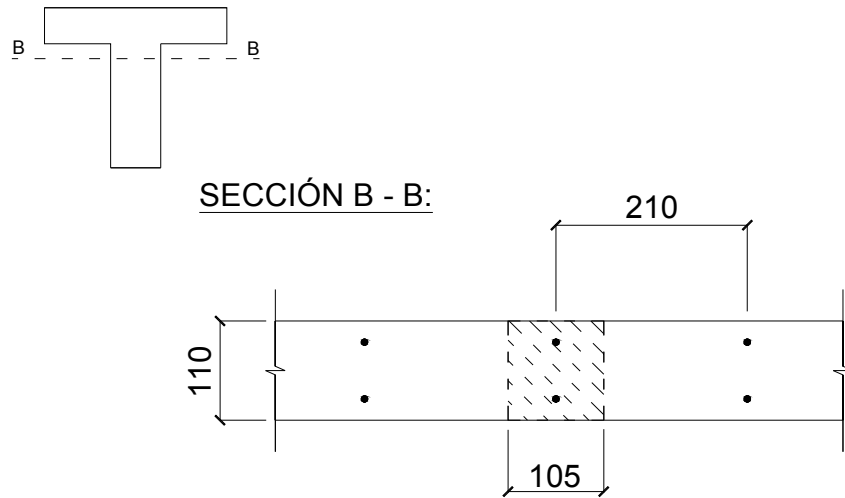


Figura 5.14: Espécimen T-22. Soerensen (1974).

Área efectiva de hormigón correspondiente a la armadura transversal en el alma. Cotas en mm.

Como se puede observar en las Figuras 5.13 y 5.14, el área efectiva de hormigón en torno a cercos es variable a lo largo del canto de la viga, ya que  $7.5 \cdot \varnothing_{cerco} > \text{recubrimiento} = 20 \text{ mm}$ . Así pues, para el cálculo del área efectiva global correspondiente a la armadura transversal hemos optado por promediar el área efectiva del alma y de la cabeza en función de la longitud de cerco, tal y como se indica a continuación:

- Longitud de cerco en vuelos ( $l_1$ ):  $\text{espesor} - (r + \varnothing_{cerco}) = 80 - (20 + 7) = 53 \text{ mm}$
- Longitud de cerco en alma ( $l_2$ ):  $(d - \text{espesor}) + e/2 + \varnothing_{x1} = (298 - 80) + 10 + 20 = 248 \text{ mm}$

Luego,

$$A_{ct-global} = \left( \frac{l_1}{l_1 + l_2} \right) A_{ct-cabeza} + \left( \frac{l_2}{l_1 + l_2} \right) A_{ct-alma} = \frac{53 \cdot 17640 + 248 \cdot 11550}{53 + 248} =$$

$$= 12622.33 \text{ mm}^2$$

### Características mecánicas

Los límites de cedencia del acero correspondientes a cada tipo de armadura toman los siguientes valores:

$$f_{yx1} = 419.87 \text{ MPa}$$

$$f_{yt} = 399.27 \text{ MPa}$$

Los coeficientes particulares de adherencia hormigón-acero correspondientes a cada tipo de armadura vienen dados por:

$$\alpha_{x1} = 1 \text{ (tipo de armadura longitudinal inferior: corrugada)}$$

$$\alpha_t = 0.7 \text{ (tipo de armadura transversal: lisa)}$$

En este caso es preciso calcular el valor del coeficiente global  $\alpha$  a partir de la ponderación de los coeficientes de adherencia ( $\alpha_{x1}$ ,  $\alpha_{x2}$  y  $\alpha_t$ ), tal y como se vio en el apartado 5.2 de este capítulo:

$$\alpha = \frac{\alpha_{corr} \sum_{i=1}^{n_{corr}} \phi_i + \alpha_{lisas} \sum_{i=1}^{n_{lisas}} \phi_i}{\sum_{i=1}^{n_{corr}} \phi_i + \sum_{i=1}^{n_{lisas}} \phi_i} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 20 + 2 \cdot 0.7 \cdot 7}{4 \cdot 20 + 2 \cdot 7} = 0.96$$

Finalmente, las características resistentes del hormigón vienen definidas por:

$$f_c = 29.54 \text{ MPa}$$

$$f_{ctm} = 0.30 f_c^{2/3} = 2.87 \text{ MPa}$$

Una vez sustituidos los parámetros antes calculados en las ecuaciones reducidas del sistema (i.e.,  $f_{EE}$ ,  $f_{EP}$ ,  $f_{PP}$ ,  $g_E$ ,  $g_P$ ) se obtiene, para cada una de las hipótesis de comportamiento ya definidas, un conjunto de dos funciones en dos variables  $\{\theta, \varepsilon_I\}$  y parametrizado en  $V$  y  $\kappa$ . Los conjuntos de ceros de tales funciones son susceptibles de representarse gráficamente, tal y como se muestra en la Figura 3 del anexo. Como se puede observar, al igual que ocurría en el espécimen H 75/4, a medida que aumenta el valor de  $\kappa$  se produce una evolución en la posición relativa de las curvas  $f=0$  y  $g=0$ ; en este caso, al carecer el espécimen en cuestión de armadura longitudinal superior sólo se evaluarán las siguientes hipótesis de comportamiento: EEP, PPP y PPE.

En la Figura 5.15a se representa para la hipótesis EEP la posición relativa de las curvas  $f=0$  y  $g=0$  a su entrada en la región de solubilidad; como se puede observar, y a diferencia de lo que ocurría en el espécimen H 75/4, el sistema es soluble desde  $\kappa = 0$ . Para  $\kappa = 0$  las curvas  $f=0$  y  $g=0$  intersectan en un punto  $U_i(\varepsilon_1, \theta)$  que representa la primera solución del sistema bajo la hipótesis considerada. Para valores superiores a  $\kappa_{inicial} = 0$  el sistema conserva la unicidad de solución; en este caso, las curvas de ceros de las funciones  $f$  y  $g$  presentan el mismo tipo de curvatura (curvatura convexa) lo que hace que intersecten siempre en un solo punto para todo el rango de evaluación  $[\kappa_{inicial}, \kappa_{final}]$ , a diferencia de lo que ocurría en el espécimen H 75/4. El sistema abandona la región de solubilidad igual que la alcanzó, es decir, con un único punto de intersección  $U_f(\varepsilon_1, \theta)$  que representa la última solución del sistema (Figura 5.15b). En la Figura 5.16 se ha representado, para la única hipótesis que es consistente, la curva de solubilidad del espécimen T-22.

El valor  $\kappa_{opt}$  que produce la mínima diferencia  $|\sigma_{st} - \sigma_{st,exp}|$  se alcanza en la única hipótesis consistente y presenta los siguientes resultados (Figura 5.17):

$$\kappa_{opt} = 0.464$$

$$(\varepsilon_1, \theta) = (0.0020, 0.51 \text{ rad})$$

$$\sigma_{st} = 317.89 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{st,exp} = 399.27 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_{st} - \sigma_{st,exp}| = 81.37 \text{ MPa}$$

En el caso del espécimen T-22 hemos obtenido un valor de  $\kappa_{opt}$  que proporciona una diferencia  $|\sigma_{st} - \sigma_{st,exp}|$  bastante inferior que en el caso del espécimen H75/4. Por otra parte, tanto en el espécimen H 75/4 como en el que ahora nos ocupa, el valor de  $\kappa_{opt}$  corresponde a la primera solución del sistema que verifica la hipótesis de comportamiento, y por esta razón se sitúa entre el final del tramo inconsistente de la curva de solubilidad – en color rojo- y el principio del tramo consistente –color verde-. Véase Figura 5.17.

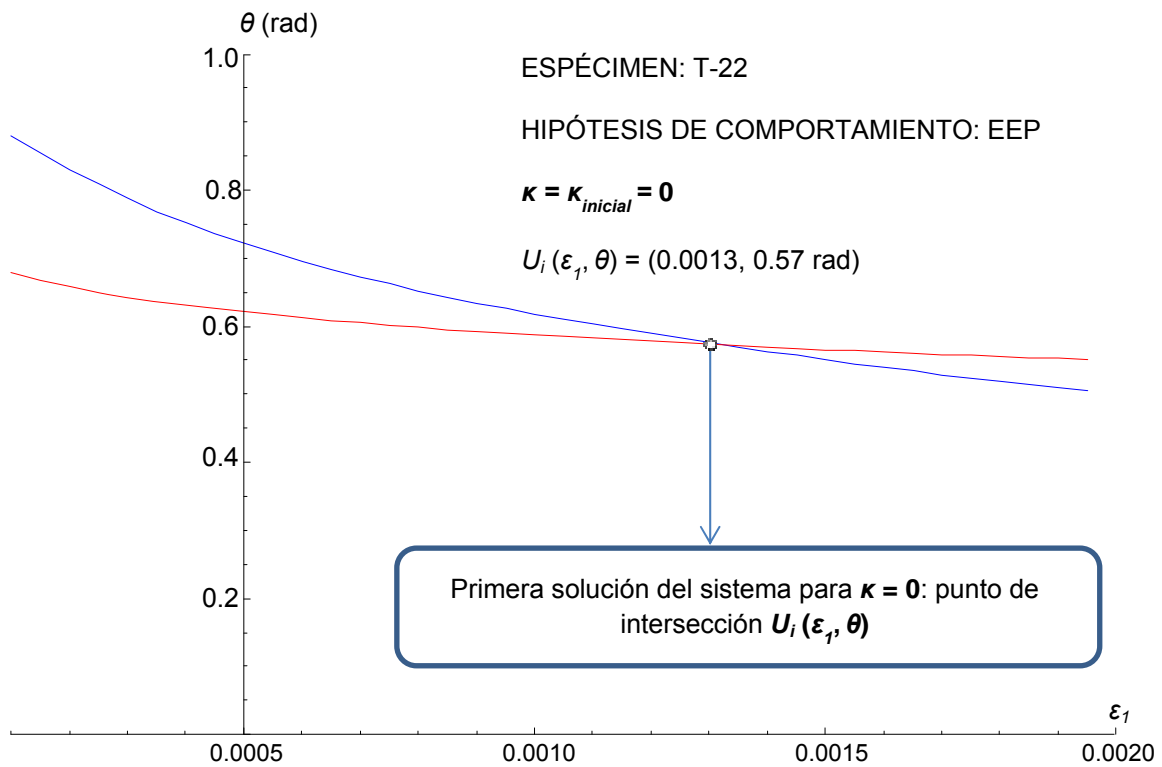


Figura 5.15a: Entrada de las curvas  $f=0$  y  $g=0$  en la *región de consistencia* del espécimen T-22. Parámetros:  $V = 128987 \text{ N}$ ;  $\kappa = \kappa_{inicial} = 0$ ; hipótesis de comportamiento: EEP.

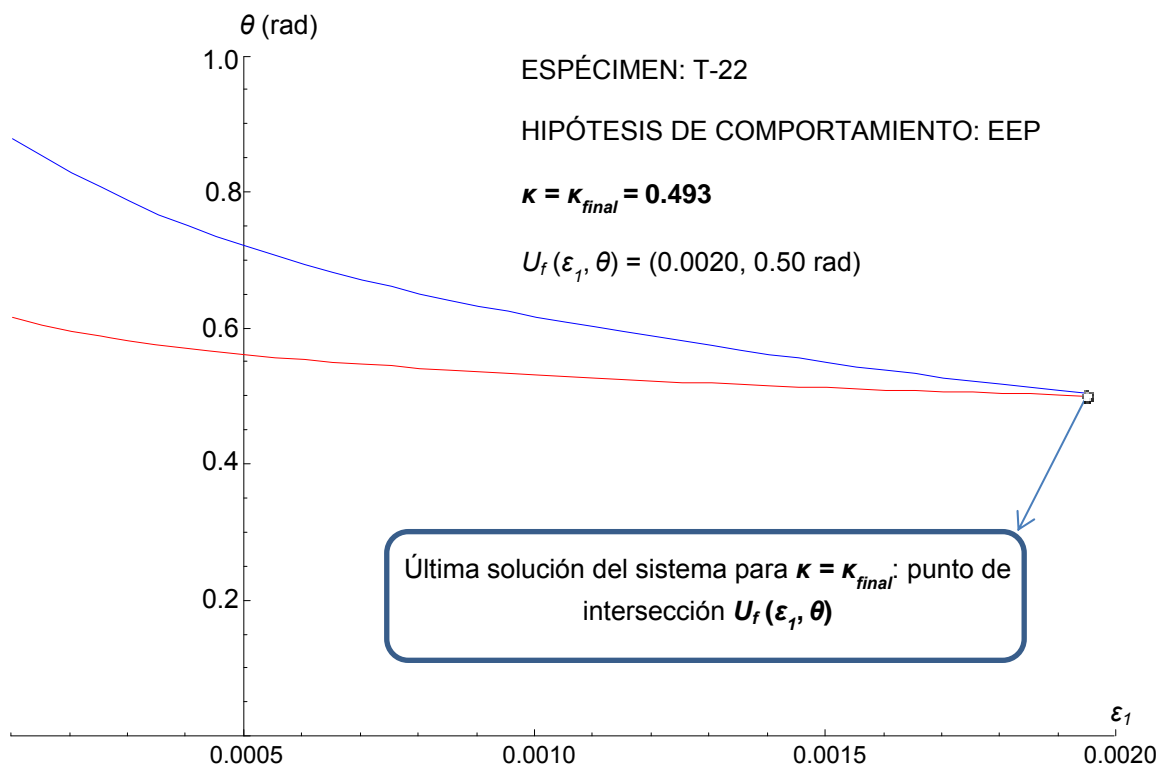


Figura 5.15b: Salida de las curvas  $f=0$  y  $g=0$  en la *región de consistencia* del espécimen T-22. Parámetros:  $V = 128987 \text{ N}$ ;  $\kappa = \kappa_{inicial} = 0.493$ ; hipótesis de comportamiento: EEP.

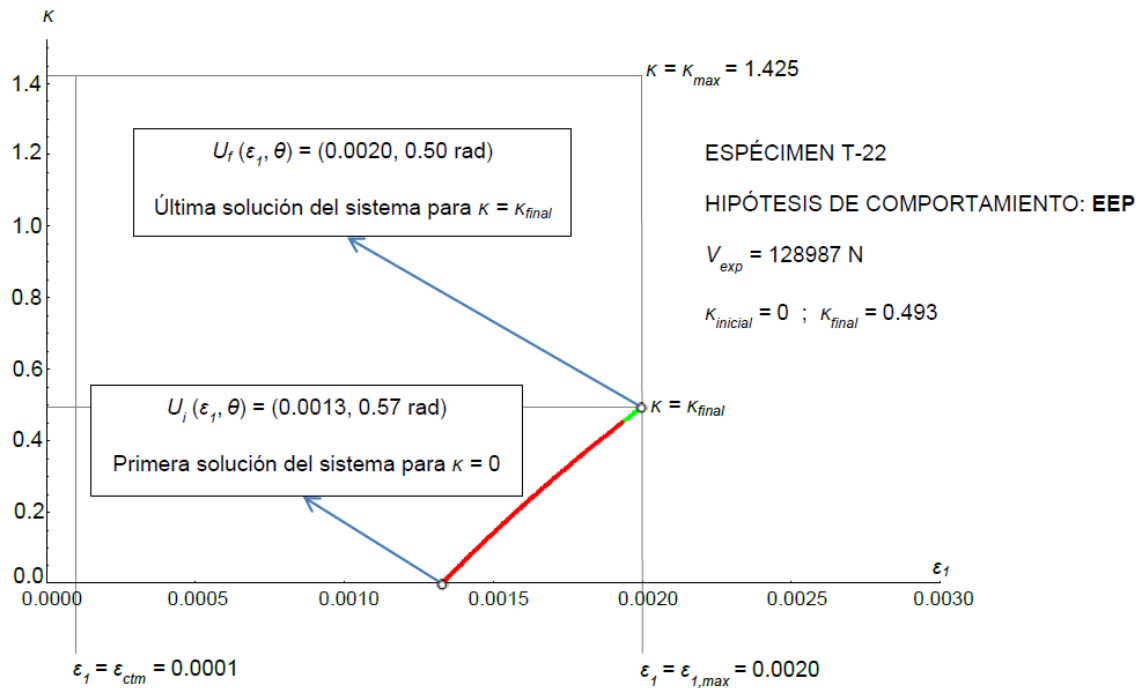


Fig. 5.16: Curva de solubilidad del espécimen T-22 correspondiente a la hipótesis EEP.

### Espécimen T-21

Las características de la sección transversal de este espécimen quedan definidas por los siguientes parámetros (Figura 5.18):

$$b_w = 110 \text{ mm}$$

$$d = 298 \text{ mm}$$

$$z = 0.9 d = 268.2 \text{ mm}$$

$$s = 175 \text{ mm}$$

Las áreas totales de acero correspondientes a cada tipo de armadura se calculan a continuación:

$$A_{sx1} = 4 \frac{\pi \cdot 20^2}{4} = 1256.64 \text{ mm}^2$$

$$A_{st} = 2 \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 100.53 \text{ mm}^2$$

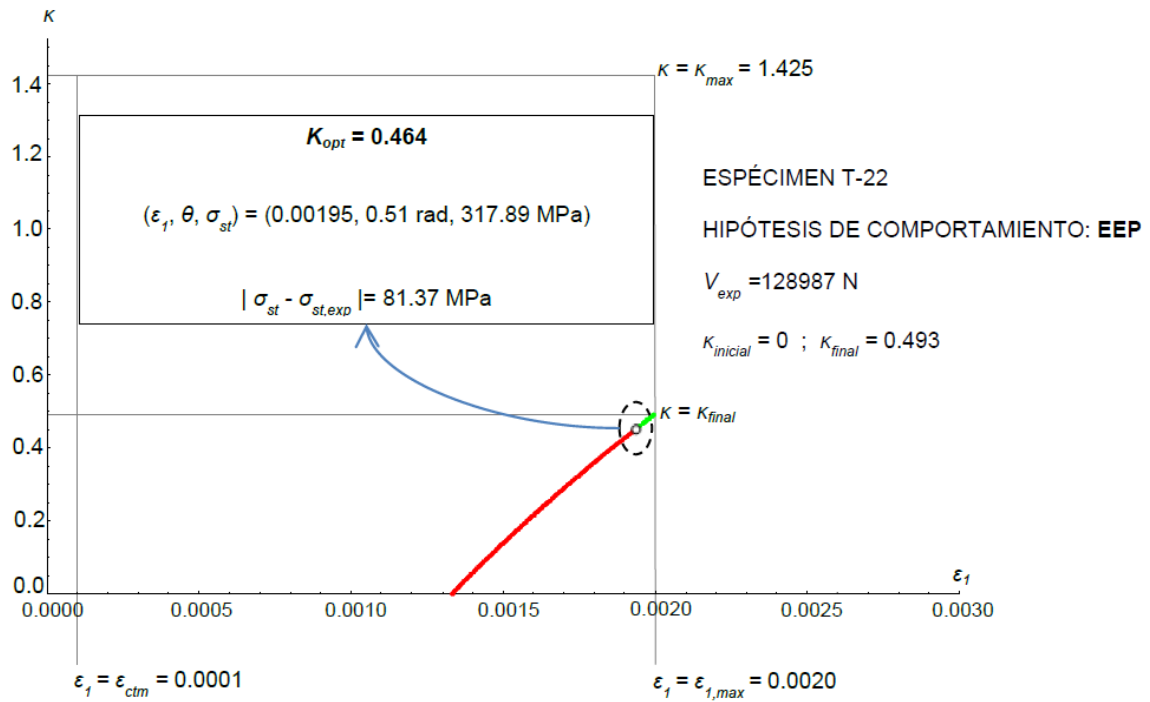


Figura 5.17: Par  $(\kappa, \varepsilon_1)$  del espécimen T-22 para el que la rigidez tensional del hormigón es óptima.

### Áreas efectivas de hormigón

Las áreas de tensorrigidez del hormigón correspondientes a cada tipo de armadura (Figuras 5.19, 5.20 y 5.21) vienen dadas por:

#### 1. Armadura longitudinal

$$A_{cx1} = (r + \varnothing_{cerco} + \varnothing_{x1} + e + 8 \cdot \varnothing_{x1}) \cdot b_w = (19 + 8 + 20 + 20 + 8 \cdot 20) \cdot 110 = 24970 \text{ mm}^2$$

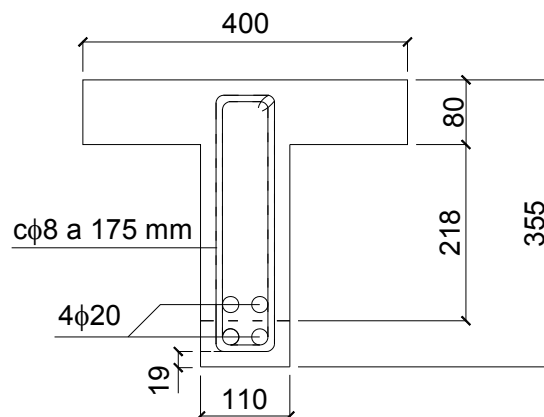


Figura 5.18: Espécimen T-21. Soerensen (1974). Sección tipo. Cotas en mm.

siendo:

$r$  = recubrimiento libre hasta contorno de cerco.

$\varnothing_{cerco}$  = diámetro de estribos.

$\varnothing_{xl}$  = diámetro de armadura longitudinal inferior

$e$  = separación vertical entre capas de armadura (medido entre contorno de armaduras)

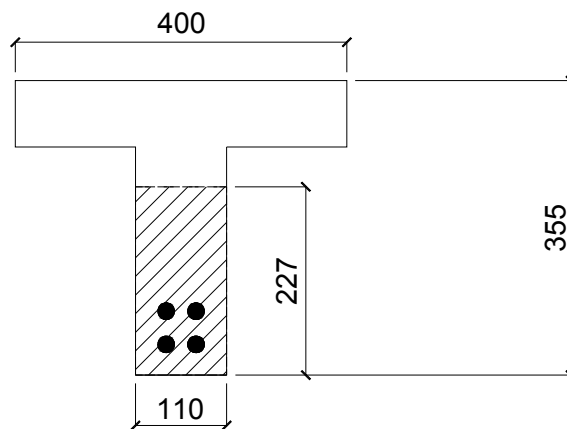


Figura 5.19: Espécimen T-21. Soerensen (1974).

Área efectiva de hormigón correspondiente a la armadura longitudinal. Cotas en mm.

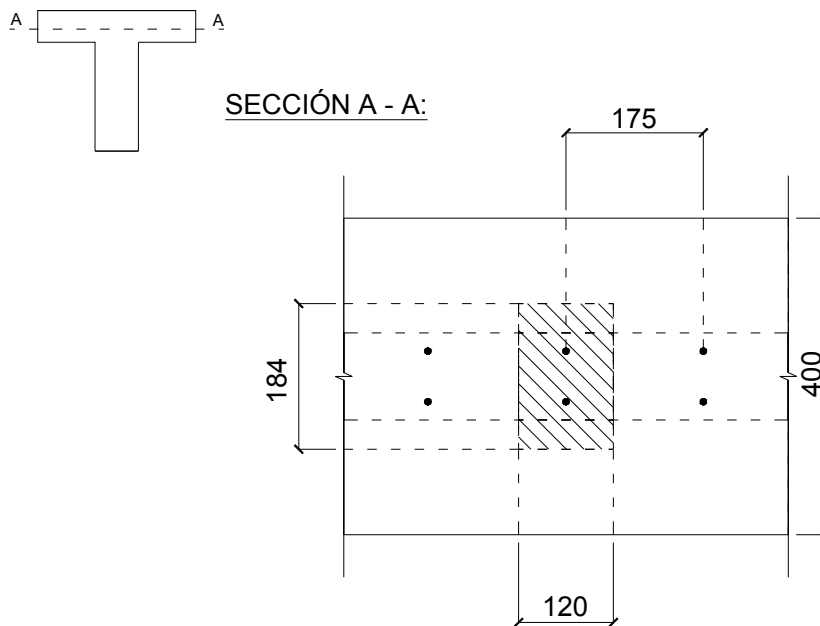


Figura 5.20: Espécimen T-21. Soerensen (1974).

Área efectiva de hormigón correspondiente a la armadura transversal en cabeza. Cotas en mm.



2. Armadura transversal-alma

$$A_{ct-alma} = 15 \cdot \varnothing_{cerco} \cdot b_w = 15 \cdot 8 \cdot 110 = 13200 \text{ mm}^2$$

3. Armadura transversal-cabeza

$$A_{ct-cabeza} = (\text{ancho interno} + 16 \cdot \varnothing_{cerco}) \cdot 15 \cdot \varnothing_{cerco} = 22080 \text{ mm}^2$$

siendo:

$$\text{ancho interno} = \text{ancho bruto} - 2 \cdot r - 2 \cdot \varnothing_{cerco} = 110 - 2 \cdot 20 - 2 \cdot 8 = 56 \text{ mm}$$

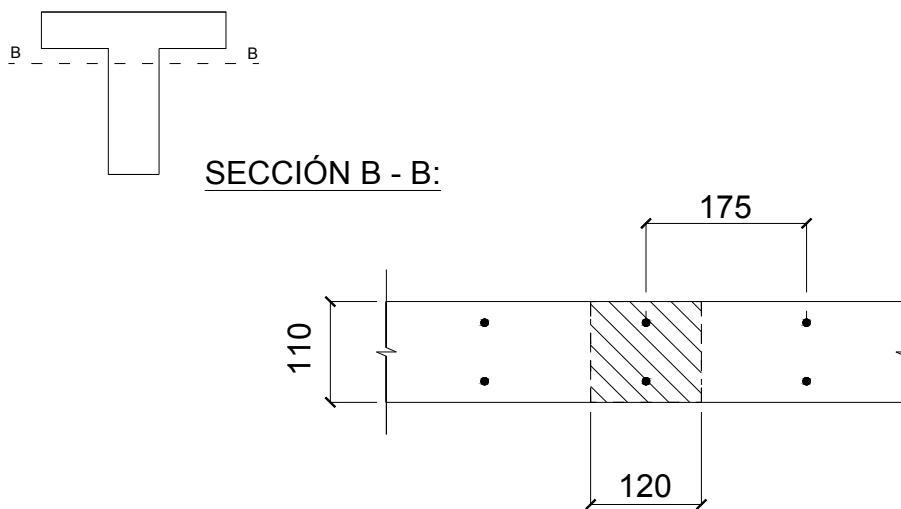


Figura 5.21: Espécimen T-21. Soerensen (1974).

Área efectiva de hormigón correspondiente a la armadura transversal en el alma. Cotas en mm.

Como se puede observar en las Figuras 5.20 y 5.21, el área efectiva de hormigón en torno a cerros es variable a lo largo del canto de la viga, ya que  $7.5 \cdot \varnothing_{cerco} > \text{recubrimiento} = 19 \text{ mm}$ . Así pues, y al igual que hicimos en el caso anterior, hemos optado por promediar el área efectiva del alma y de la cabeza en función de la longitud de cerco, tal y como se indica a continuación:

- Longitud de cerco en vuelos ( $l_1$ ):  $\text{espesor} - (r + \varnothing_{cerco}) = 80 - (19 + 8) = 53 \text{ mm}$
- Longitud de cerco en alma ( $l_2$ ):  $(d - \text{espesor}) + e/2 + \varnothing_{x1} = (298 - 80) + 10 + 20 = 248 \text{ mm}$

Luego,

$$A_{ct-global} = \left( \frac{l_1}{l_1 + l_2} \right) A_{ct-cabeza} + \left( \frac{l_2}{l_1 + l_2} \right) A_{ct-alma} = 14763.59 \text{ mm}^2$$

### *Características mecánicas*

Los límites de cedencia del acero correspondientes a cada tipo de armadura toman los siguientes valores:

$$f_{yx1} = 419.87 \text{ MPa}$$

$$f_{yt} = 228.57 \text{ MPa}$$

Los coeficientes particulares de adherencia hormigón-acero correspondientes a cada tipo de armadura vienen dados por:

$$\alpha_{xl} = 1 \text{ (tipo de armadura longitudinal inferior: corrugada)}$$

$$\alpha_t = 0.7 \text{ (tipo de armadura transversal: lisa)}$$

En este caso es preciso calcular el valor del coeficiente global  $\alpha$  a partir de la ponderación de los coeficientes particulares de adherencia ( $\alpha_{xl}$ ,  $\alpha_{x2}$  y  $\alpha_t$ ), tal y como se vio en el apartado 5.1 de este capítulo:

$$\alpha = \frac{4 \cdot 1 \cdot 20 + 2 \cdot 0.7 \cdot 7}{4 \cdot 20 + 2 \cdot 7} = 0.96$$

Finalmente, las características resistentes del hormigón vienen definidas por:

$$f_c = 30.84 \text{ MPa}$$

$$f_{ctm} = 0.30 f_c^{2/3} = 2.95 \text{ MPa}$$

Una vez calculados los parámetros geométricos y mecánicos del espécimen se sustituyen en las funciones reducidas del sistema (i.e.,  $f_{EE}$ ,  $f_{EP}$ ,  $f_{PP}$ ,  $g_E$ ,  $g_P$ ), cuyos conjuntos de ceros son susceptibles de representarse gráficamente, obteniéndose los resultados que se recogen en la Figura 4 del anexo. Como se puede observar, ninguna de

las hipótesis de comportamiento evaluadas (EEP, PPP Y PPE)<sup>6</sup> es soluble, y por tanto, el valor experimental del cortante de agotamiento ( $V_{exp}$ ) provoca la inconsistencia del sistema para la totalidad de hipótesis de comportamiento evaluadas.

Así pues, el espécimen T-21 de Soerensen (1974) es un espécimen no soluble, y por ende, no consistente. Puede ocurrir que un espécimen sea soluble, pero no sea consistente, es decir, que ninguna de las soluciones obtenidas verifique la hipótesis asumida para cada solución; tal es el caso del espécimen RC 60 B2 (Levi, 1988) [27], donde no se detectaron puntos de consistencia en ninguna de las hipótesis evaluadas.

#### 5.4 Ajuste mediante métodos estadísticos.

Del total de 81 especímenes de la Tabla 5.1, sólo 43 son consistentes. En la Tabla 5.2 se resumen el total de especímenes consistentes y los valores de  $\kappa_{opt}$  correspondientes a cada uno; los 43 especímenes consistentes de la Tabla 5.2 conforman, finalmente, la muestra útil de esta Tesis a efectos del ajuste del parámetro  $\kappa$ . Asimismo, vamos a prescindir de aquellos especímenes con  $\kappa_{opt} > 1$ , (i.e., especímenes: A50, A50A, RC30A1, RC30A2, T15, T19 y T34), ya que debe cumplirse que  $\kappa_{opt} < \kappa_{max} < 1$  (según se explicó en el Capítulo 4), a fin de no trabajar con áreas de tensorrigidez del hormigón mayores que las calculadas según el criterio del Código Modelo. Cada espécimen de la Tabla 5.2 lleva asociado un punto ( $\epsilon_1, \kappa_{opt}$ ). La representación de dichos puntos da lugar a la nube de la Figura 5.22; como se puede observar, para el ajuste estadístico de los puntos representados se ha empleado una función polinómica cúbica, y aun así, el valor obtenido para el coeficiente de correlación  $R^2$  es significativamente bajo.

La alta dispersión de la nube de puntos de la Figura 5.22 hacía impracticable un ajuste paramétrico sobre los resultados obtenidos. Del análisis minucioso de aquéllas vigas que presentaban una mayor dispersión se llegó a la conclusión que en todas ellas había una alta concentración de armadura dentro de la zona de tensorrigidez del hormigón. Esto dio pie a pensar que la degradación del hormigón a cortante podía estar controlada por otro/s parámetros mecánicos adicionales a la deformación principal a tracción ( $\epsilon_1$ ). Dado que la totalidad de vigas analizadas a excepción de una de ellas (la T35, de Regan

---

<sup>6</sup> Al igual que ocurría con el espécimen T-22, al no existir armadura longitudinal superior, sólo evaluamos las hipótesis EEP, PPP y PPE.

[35]) han agotado bajo la hipótesis EEP, tales parámetros adicionales debían de estar relacionados con la armadura transversal.

Tabla 5.2

Author	Specimen	Hypothesis	$V_u$ (KN)	$f_{yt}$ (MPa)	$k_{opt}$
Ahmad et al. (1995) [3]	NHW-3b	EEP	122,78	324,14	0,65
Palaskas et al. (1981) [18]	A50	EEP	115,43	492,41	1,12
	A75	EEP	142,20	426,90	0,63
	C50	EEP	134,11	507,59	0,94
	C75	EEP	137,98	453,10	0,87
Kong et al. (1997) [14]	S1-4	EEP	277,90	569,00	0,56
	S2-3	EEP	253,30	569,00	0,78
	S4-6	EEP	202,90	569,00	0,55
Leonhardt et al. (1962) [15]	ET2	EEP	130,94	313,92	0,16
	ET3	EEP	126,25	313,92	0,31
Moayer et al. (1974)[17]	P20	EEP	120,10	310,34	0,23
Soerensen (1974) [22]	T-22	EEP	128,99	399,27	0,46
Bernhardt et al. (1986) [6]	S7A	EEP	140,72	427,00	0,48
	S8 A	EEP	125,72	427,00	0,42
Cladera et al. (2002) [8]	H 50/3	EEP	242,07	540,00	0,64
	H 50/4	EEP	246,34	540,00	0,71
	H 60/3	EEP	258,78	530,00	0,54
	H 60/4	EEP	308,71	530,00	0,31
	H 75/4	EEP	255,23	530,00	0,66
	H 100/3	EEP	253,64	540,00	0,64
Levi et al. (1988) [16]	H 100/4	EEP	266,53	540,00	0,63
	RC 30 A1	EEP	676,00	480,00	0,93
	RC 30 A2	EEP	688,00	480,00	0,90
Rosenbusch et al. (1999) [20]	RC 60 B1	EEP	1181,00	480,00	0,41
	MHB 2.5-25	EEP	98,80	365,91	0,51
	HB 2.5-50	EEP	149,49	365,91	0,19
Regan (1971) [19]	T3	EEP	105,00	270,00	0,16
	T4	EEP	110,00	270,00	0,44
	T6	EEP	205,00	270,00	0,20
	T7	EEP	109,00	280,00	0,66
	T8	EEP	124,00	280,00	0,53
	T9	EEP	154,00	280,00	0,40
	T13	EEP	90,00	270,00	0,12
	T15	EEP	104,00	270,00	0,95
	T17	EEP	134,00	280,00	0,67
	T19	EEP	106,00	270,00	0,93
	T20	EEP	138,00	280,00	0,59
	T26	EEP	179,00	280,00	0,08
	T32	EEP	216,00	270,00	0,06
	T34	EEP	112,00	270,00	0,80
	T35	EPE	115,00	270,00	0,25
	T37	EEP	209,00	270,00	0,13
T38	EEP	238,00	270,00	0,01	

Y efectivamente, haciendo el ajuste del parámetro kappa en función de una nueva variable  $\zeta$  que resulta de dividir la deformación principal a tracción por el cuadrado de la tensión de cedencia de la armadura transversal (i.e.,  $\zeta = \epsilon_1 / f_{yt}^2$ ), la nube de puntos de la Figura 5.22 adopta la distribución representada en la Figura 5.23. En esta segunda ocasión se ha optado por un ajuste lineal; dado que el objetivo que aquí se persigue es fundamentalmente el de verificar una tendencia – la de degradación del hormigón por

efecto del cortante -, una expresión lineal ofrece una interpretación mucho más simple y útil desde el punto de vista práctico que funciones de orden cúbico o superior.

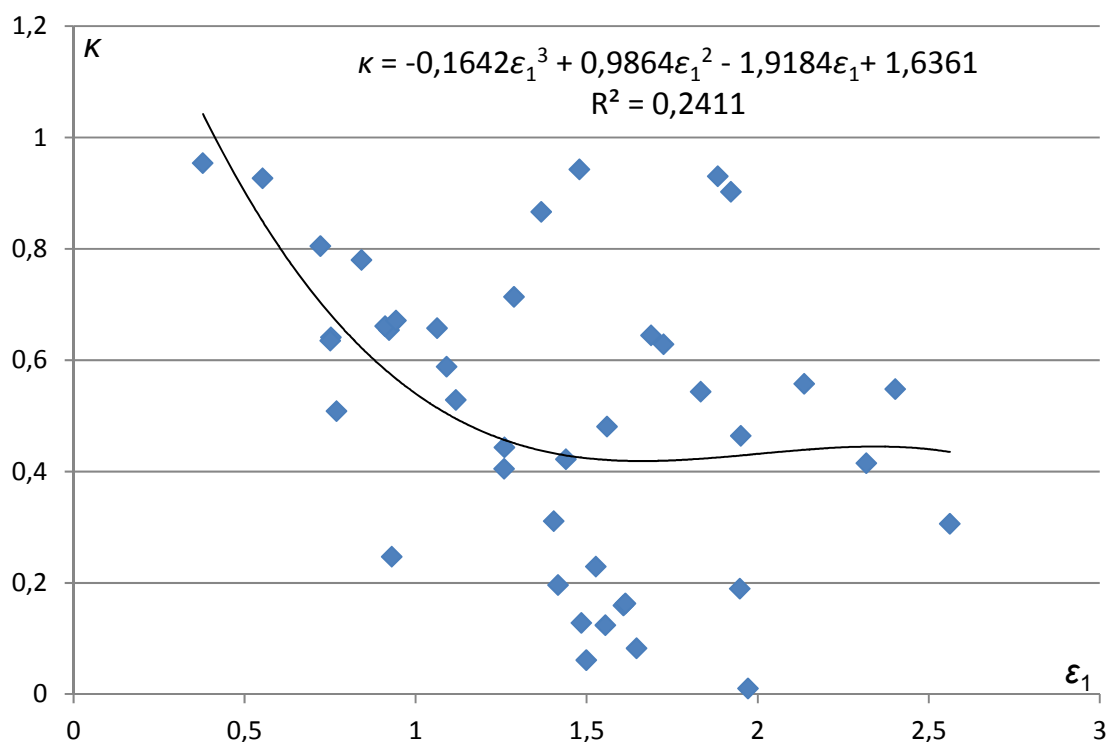


Figura 5.22: Nube inicial de puntos y curva de ajuste polinomial. Modelo de tensorrigidez: Collins y Mitchell (1991).

El cambio de la función  $\kappa = f(\xi)$  a la función  $\kappa = f(\epsilon_1)$  es inmediato; si suponemos que ambas funciones son lineales, se cumple:

$$\kappa(\xi) = a\xi + b = \frac{a}{f_{yt}^2} \epsilon_1 + d = \kappa(\epsilon_1)$$

En la Figura 5.23 la variable  $\xi$  ha sido escalada mediante un factor  $10^5$ . La ecuación de la recta de ajuste de los datos experimentales viene dado por:  $\kappa = -0.3482\xi + 0.899$  donde  $\xi = 10^5 \epsilon_1/f_{yt}^2$ ; las unidades de  $\xi$  son  $\text{MPa}^{-2}$ . A fin de que el parámetro  $\kappa$  siga siendo adimensional, el coeficiente  $a$  debe ser un coeficiente dimensional expresado en  $\text{MPa}^2$ . Como se puede observar en la Figura 5.23, existe claramente una tendencia decreciente del parámetro  $\kappa$  (i.e., del área eficaz de tensorrigidez del hormigón,  $A_{c,ef}$ ) conforme aumenta la deformación en el hormigón, tal y como presuponía la TUCC.

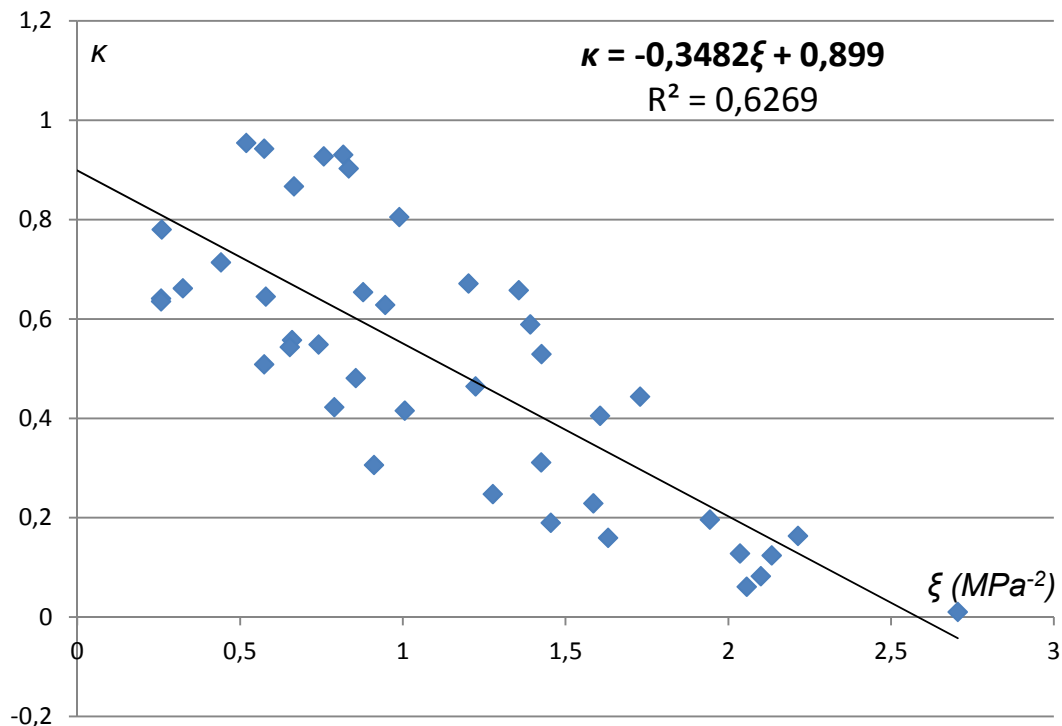


Figura 5.23: Nube final de puntos y función de ajuste lineal. Modelo de tensorrigidez: Collins y Mitchell (1991)

Pese a que los valores representados en las Figuras 5.22 y 5.23 han sido obtenidos en condiciones de agotamiento, la amplia variedad de vigas analizadas ha permitido obtener una función  $\kappa=f(\varepsilon_1)$  que se ajusta en buena medida a la historia de respuesta a cortante de una viga estándar de hormigón armado. A modo de ejemplo, se ha comparado los resultados obtenidos con la respuesta obtenida para la viga CF1 del ensayo de Abersman y Conte; en la Figura 5.24 se han representado conjuntamente las nube de puntos de la Figura 5.23 y de los valores experimentales correspondientes a la viga CF1 (A&C), y las funciones de ajuste relativas a cada masa de puntos.

### 5.5 Ajuste mediante algoritmos genéticos.

A fin de contrastar los resultados obtenidos en el apartado anterior, a continuación se realiza un ajuste del parámetro de degradación  $\kappa$  por medio de algoritmos genéticos. La versatilidad de esta herramienta numérica permite prescindir de la nube de puntos representada en la Figura 5.23 y trabajar directamente con las curvas de solubilidad de la totalidad de especímenes consistentes de la muestra.

Los algoritmos genéticos o algoritmo evolutivos constituyen procedimientos de búsqueda y optimización inspirados en los procesos naturales de reproducción de los seres vivos y de evolución de las especies [11]. Son métodos generales de optimización que desde su primer desarrollo en los años '70 del siglo XX hasta la actualidad han sido aplicados con éxito a numerosos problemas complejos.

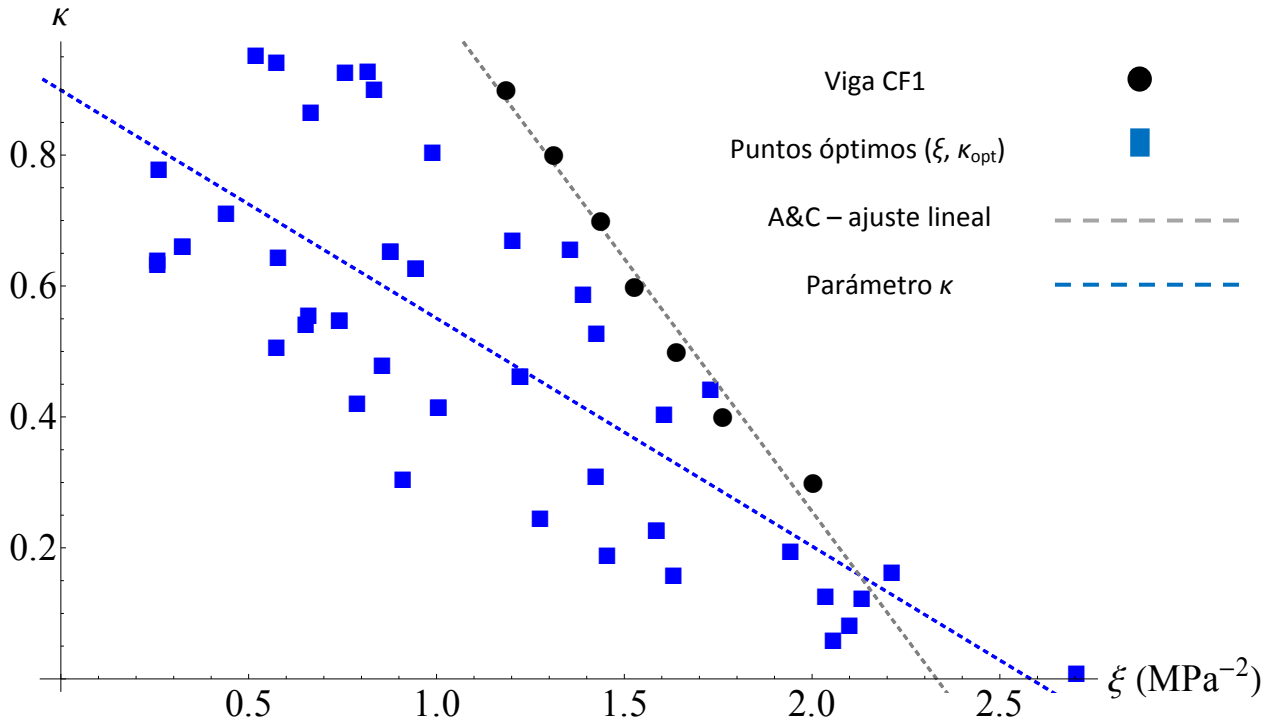


Figura 5.24: Modelo de degradación propuesto.

Para el caso que nos ocupa se ha elegido la familia de funciones lineales  $\{\kappa(\xi) = a\xi + b; a, b \in \mathbb{R}\}$ . A partir de una población inicial de funciones de la anterior familia, y utilizando un indicador que mida la idoneidad de cada individuo a fin de que su información genética pase a la generación siguiente, el algoritmo genético es capaz de evolucionar dicha población hasta obtener uno o varios individuos óptimos después de un número suficiente de generaciones.

El número de individuos que forman la población no varía de una generación a otra, luego se mantiene el tamaño de la población inicial. Este número se ha establecido en  $n=100$  individuos, siguiendo las estimaciones de DeJong y de Grefenstette (cf. [14]). La población inicial, o *generación cero*, debe contener individuos (funciones) cuya secuencia genética favorezca la obtención del óptimo global por el algoritmo genético, o cuanto menos logre que el mayor número posible de individuos haga consistente el

sistema. Para ello, una buena parte de la población inicial se construye por adición de cadenas genéticas obtenidas mediante la generación aleatoria de bits (0 y 1), mientras que el resto de la población se cubre mediante la introducción manual de cierto número de cadenas generadas a partir de funciones  $\kappa(\zeta)$  cuyas gráficas intersecten el mayor número posible de tramos de consistencia de cada espécimen.

La principal ventaja del algoritmo genético respecto los métodos estadísticos estriba en que, al trabajar directamente con las curvas de solubilidad –tramo consistente- de cada espécimen, la búsqueda del parámetro de degradación del hormigón no se ciñe exclusivamente a los puntos óptimos  $\kappa_{opt}$  de cada espécimen, sino que se extiende a un entorno de los mismos (Figura 5.25).

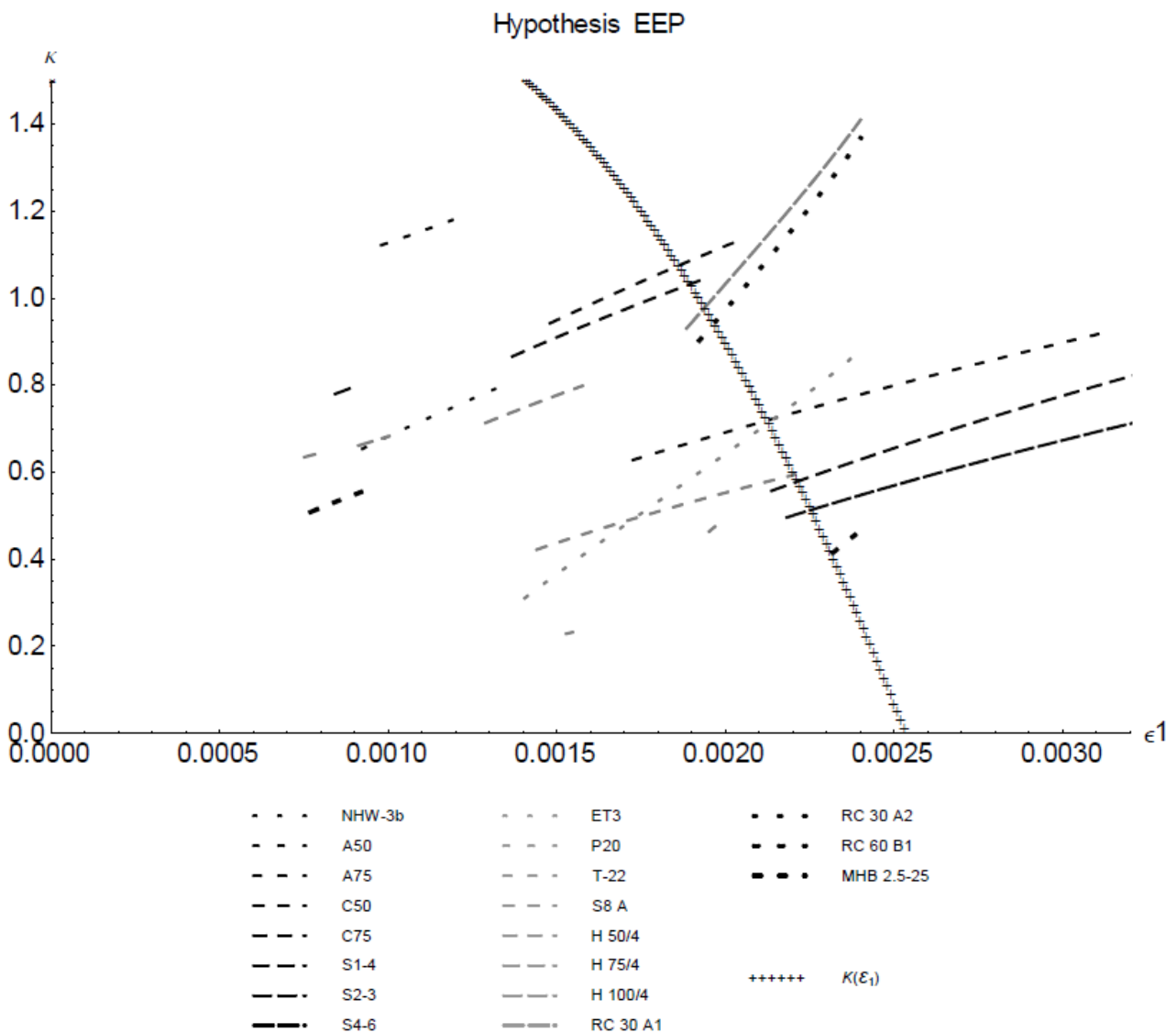


Figura 5.25: Gráfica de la función cúbica  $\kappa(\epsilon_1)$  con coeficientes  $a = -0.027 \times 10^9$ ,  $b = -0.42 \times 10^6$ ,  $c = 0.647 \times 10^3$  y  $d = 1.5$ , y tramos de consistencia de las curvas de solubilidad de algunos especímenes.



Los cálculos del algoritmo genético se han efectuado utilizando una máquina de altas prestaciones, con procesadores AMD Opteron 64 de doble núcleo en un clúster con nodos unidos mediante red Gigabit. Para estos cálculos fueron asignados 9 núcleos y una cantidad de memoria de 4Gb. El tiempo medio de cálculo de las 200 generaciones ha sido de aproximadamente de 140 horas.

El algoritmo genético ha sido implementado usando el lenguaje de programación del sistema de cálculo Mathematica®. Las probabilidades de mutación y crossover se han fijado en 0.5 y 0.8 respectivamente. En la generación 100, y con el objeto de explorar en mayor medida el espacio de búsqueda, el algoritmo ha eliminado el 90% de la población preservando previamente los individuos más óptimos. Luego ha completado la población generando nuevos individuos de forma aleatoria hasta obtener el tamaño inicial de 100 individuos. Durante el ajuste del test se ha comprobado que 20 bits son suficientes para codificar de forma precisa cada coeficiente.

Como consecuencia de la alta idoneidad de algunas funciones de la población inicial y la relativa dispersión de los puntos representados en la Figura 5.23, la curva de idoneidad media de la población aumenta muy lentamente. La Figura 5.26 muestra la evolución de las idoneidades media y máxima después de 200 generaciones de una ejecución del algoritmo. Aunque se aprecia un crecimiento en la idoneidad media de la población, la idoneidad máxima apenas aumenta (17.71%). Es preciso advertir que el aspecto más importante a tener en cuenta no es la idoneidad poblacional finalmente alcanzada, sino la evolución de la misma a través del conjunto de generaciones ejecutadas. La ejecución de un algoritmo genético está sujeta a una alta aleatoriedad, ya presente en la construcción de la población inicial a partir de cadenas generadas al azar, y que continúa en cada generación al aplicar los distintos operadores genéticos: selección, crossover en un punto aleatorio y mutación de genes elegidos aleatoriamente en individuos elegidos también aleatoriamente. Por esa razón, es casi imposible que dos ejecuciones del algoritmo den el mismo resultado, aun en el caso en que el número de generaciones y de individuos, así como las probabilidades de mutación y crossover, sean las mismas. No obstante, cuando no hay óptimos locales, el algoritmo siempre aproxima en mayor o menor medida el óptimo global, y en cualquier caso, contamos con las idoneidades media y máxima de la población final para comparar los resultados y decidir cuál de ellos debe ser tenido en cuenta.

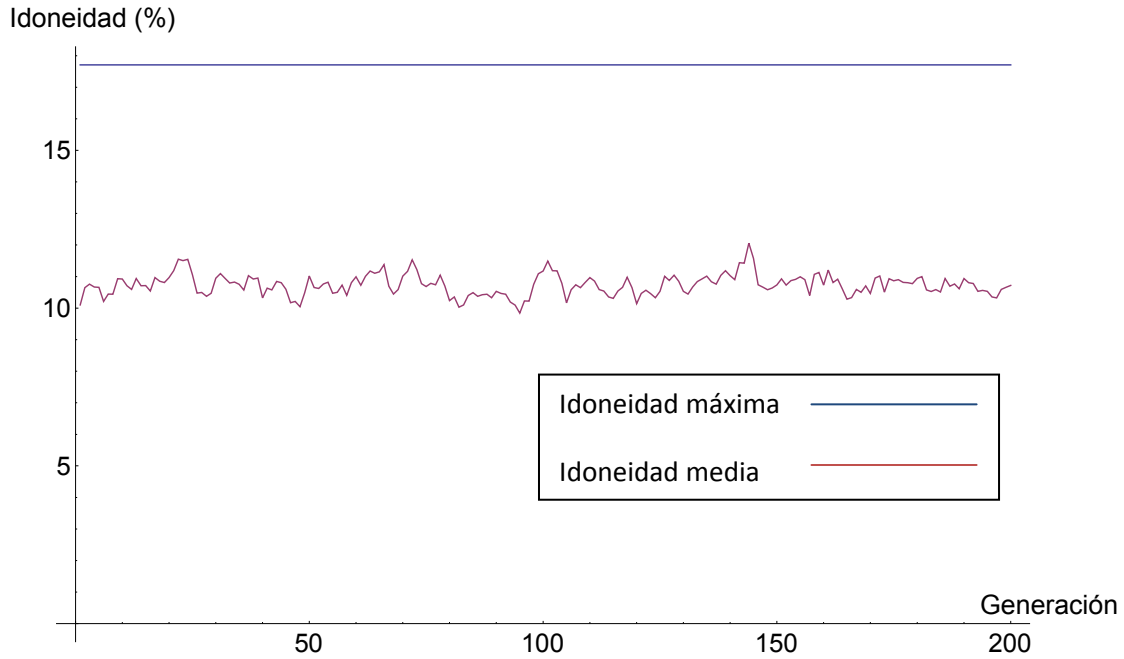


Figura 5.26: Evolución de las idoneidades media y máxima después de 200 generaciones.

La función con idoneidad más alta calculada después de 200 generaciones es la que tiene por coeficientes  $a=-0.454248$  y  $b=0.927803$ . En la Figura 5.27 se muestra la representación gráfica de esta función junto con el ajuste realizado a la nube de puntos óptimos  $(\xi, \kappa_{opt})$  representado en la Figura 5.23.

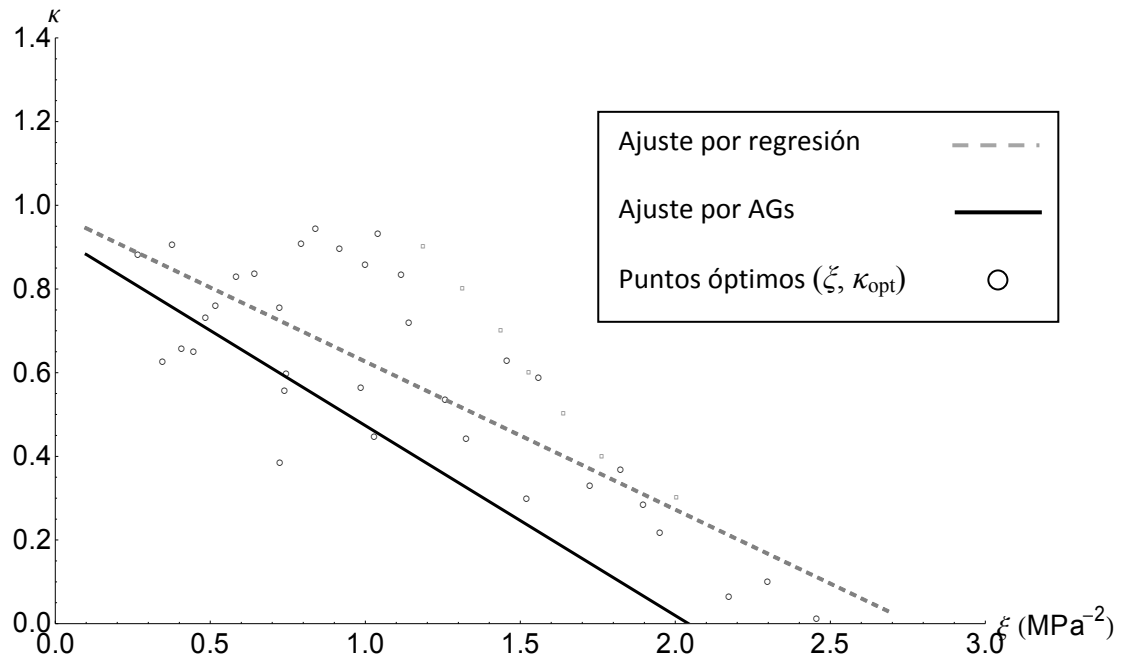


Figura 5.27: Nube final de puntos óptimos  $(\xi, \kappa_{opt})$ , función de ajuste por regresión lineal y función de idoneidad máxima obtenida después de 200 generaciones.



# Conclusiones

Sobre la base de los objetivos establecidos en el Capítulo 1, y partir de los resultados obtenidos en los Capítulos 3, 4 y 5, el proceso de revisión que plantea la presente Tesis arroja las siguientes conclusiones finales:

- I. El análisis de la hipótesis EPA en el diseño a cortante de elementos de hormigón armado –esto es, el estudio de la divergencia entre la dirección del campo principal de deformaciones y el campo principal de tensiones en el hormigón– requiere del planteamiento de un método de análisis en el que, al contrario de lo que se aplica en las teorías del campo de compresiones, se independicen los modelos de compatibilidad y equilibrio a fin de poder evaluar los factores que controlan este fenómeno.
- II. Se puede afirmar que el fenómeno de disparidad entre los ángulos del campo principal de tensiones y el campo principal de deformaciones puede ser controlado desde el diseño del propio elemento de hormigón armado. Con este fin se ha definido una nueva variable denominada  $\delta$  que representa el rango de deformaciones longitudinales donde la aplicación de la hipótesis EPA conlleva un error aceptable (a mayor valor de  $\delta$ , mayor es el error máximo admisible).
- III. Para todos los casos analizados la influencia de la cuantía de armado longitudinal sobre el error asociado a la hipótesis EPA es particularmente notable; el diseño de elementos de hormigón fuertemente armados longitudinalmente reduce de forma muy significativa el error de diseño antes citado. Por su parte, la resistencia del hormigón apenas influye sobre el citado efecto de disparidad mientras que la cuantía de armado transversal presenta una especial importancia sólo a partir de niveles altos de deformación del elemento.
- IV. El criterio propuesto por el Código Modelo para el cálculo del área de tensorrigidez del hormigón produce, bajo determinadas hipótesis de diseño, la inconsistencia del modelo constitutivo del acero bajo determinadas hipótesis de diseño. Además, dicho criterio sólo depende de la cuantía de acero embebida en el hormigón. En la presente Tesis se ha corregido dicho criterio mediante un coeficiente denominado  $\lambda$  que, por otra parte, proporciona un área de tensorrigidez del hormigón más coherente con el fenómeno real de adherencia

entre hormigón y acero, al considerar parámetros mecánicos adicionales de la sección de hormigón armado tales como la resistencia del hormigón o la tensión de cedencia del acero.

- V. El coeficiente  $\lambda$  presenta una expresión relativamente sencilla y fácil de usar que además garantiza la existencia y unicidad real positiva de la deformación aparente de cedencia del acero sin necesidad de alterar las características geométricas o mecánicas de la sección de hormigón. Ello resulta de gran interés ya que permite al usuario del modelo trabajar con la totalidad de valores de diseño aceptados por normativa.
- VI. Sobre la base del modelo analítico de cortante propuesto por la Teoría Unificada del Campo de Compresiones, se ha probado que el área efectiva de tensorrigidez del hormigón no es un valor constante, sino que varía a medida que aumenta la degradación del aquél por efecto de la deformación.
- VII. Los problemas de consistencia del modelo analítico de cortante no terminan en el modelo constitutivo del acero sino que se extienden al resto de ecuaciones de equilibrio y compatibilidad. La implementación del efecto de degradación del hormigón en los modelos de campo de compresiones requiere previamente un análisis de la solubilidad del sistema general de ecuaciones. Al igual que ocurría con el modelo constitutivo del acero, dicho análisis es posible en términos del área de rigidez tensional del hormigón.
- VIII. A partir del estudio exhaustivo de diferentes campañas experimentales, donde numerosas vigas de características geométricas y mecánicas dispares han sido agotadas a cortante, se ha formulado un parámetro de degradación  $\kappa$  que afecta directamente al área de rigidez tensional del hormigón en forma tal que esta última disminuya conforme aumenta la deformación a cortante del hormigón.
- IX. La incorporación del efecto de degradación del hormigón en el modelo constitutivo del acero representa un importante avance en el ámbito de los modelos de campo de compresiones, probando la tendencia a la degradación del hormigón por efecto del cortante, y sirve de base para el desarrollo de futuros trabajos dentro de este campo de conocimiento.

# Conclusions

On the basis of the objectives defined in Chapter 1, and from the results obtained in Chapters 3, 4 and 5, the next conclusions are obtained:

- I. The analysis of EPA hypothesis in the shear design of reinforced concrete members (i.e., the problem of divergence between the direction of principal strain fields and the direction of principal stress fields in concrete) requires an analytical method in which, contrary to what is applied in the compression field theories, equilibrium and compatibility relationships are independent.
- II. Non-coincident directions of principal angles of stress and strain may be controlled by means of the reinforced concrete design parameters. To this aim, a new variable called  $\delta$  is defined;  $\delta$  defines the range of longitudinal strain where the EPA assumption is acceptable, and is obtained by limiting the divergence in principal angles of stress and strain to a tolerable value (larger values of  $\delta$  imply greater tolerance).
- III. The longitudinal reinforcement ratio exerts the greatest influence on the error associated with the EPA assumption. When designing reinforced concrete members with high longitudinal reinforcement ratios, the error associated with the EPA assumption decreases. Concrete strength has small influence on the value  $\delta$ , while the transverse reinforcement ratio has significant influence only for high levels of strain.
- IV. The value of tension stiffening area ( $A_c$ ) proposed by MC 90 makes inconsistent the steel constitutive model under some design hypotheses. Moreover, the technical codes propose an expression for the tension stiffening area which only depends on the amount of steel embedded in concrete. In this Thesis the tension stiffening area is fixed using a coefficient called  $\lambda$ ; using this coefficient other design parameters which also affect concrete tension stiffening (such as yielding stress of steel, the tensile strength of concrete or the bond parameter between steel and concrete) may be considered.

- V. The range of values of the stiffened area of concrete around the steel reinforcement, for which an apparent yield strain exists, can be easily obtained. The main advantage of coefficient  $\lambda$  is that it guarantees a stress-strain steel relationship without changing the cross section characteristics and for the full range of design parameters indicated by the technical codes.
- VI. From the shear model proposed by the Refined Compression Field Theory, this Thesis proves that the effective tension stiffening area involved in the response of RC members subjected to shear is not a constant value as it is commonly considered, but it changes as concrete degrades.
- VII. The problems of consistency at analytical shear model not end in the steel constitutive model, but they extend to the equilibrium and compatibility equations. The introduction of the concrete degradation effect in the compression field models requires an analytical method about the solvability of the general system of equations. Just as with the steel constitutive model, the solvability of this system of equations may be analyzed in terms of the tension stiffening area.
- VIII. From the analysis of the response at failure of several shear test specimens available in the literature, a degradation parameter  $\kappa$  has been formulated. This parameter is applied to affect the tension stiffening area, in such a way that the effective area of concrete stiffened by tension is reduced as the value of the shear strain increases.
- IX. This preliminary numerical analysis seems promising and proves the tendency of concrete to degrade. However, additional experimental test data are required in order to deduce a more accurate expression that models the concrete tension stiffening area as a function of the level of strain at RC members.

**Anexo:**

**REDUCCIÓN DEL MODELO DE CORTANTE**

**- LISTADO DE FIGURAS -**

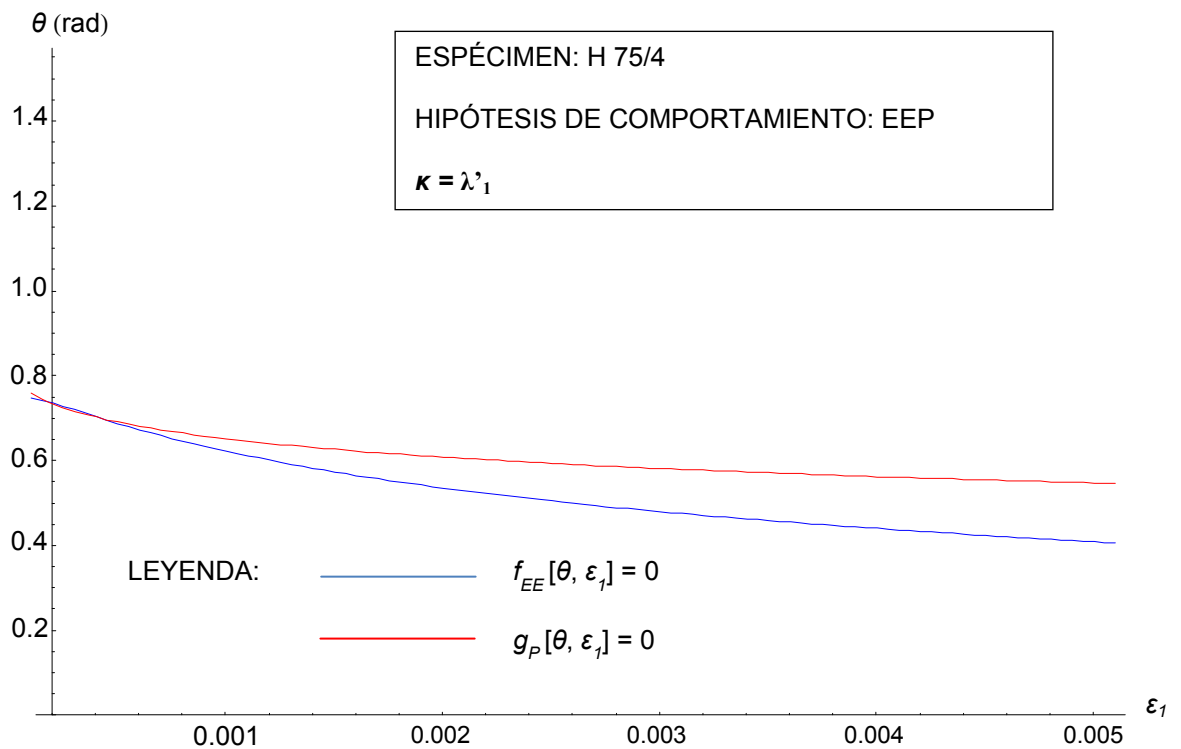
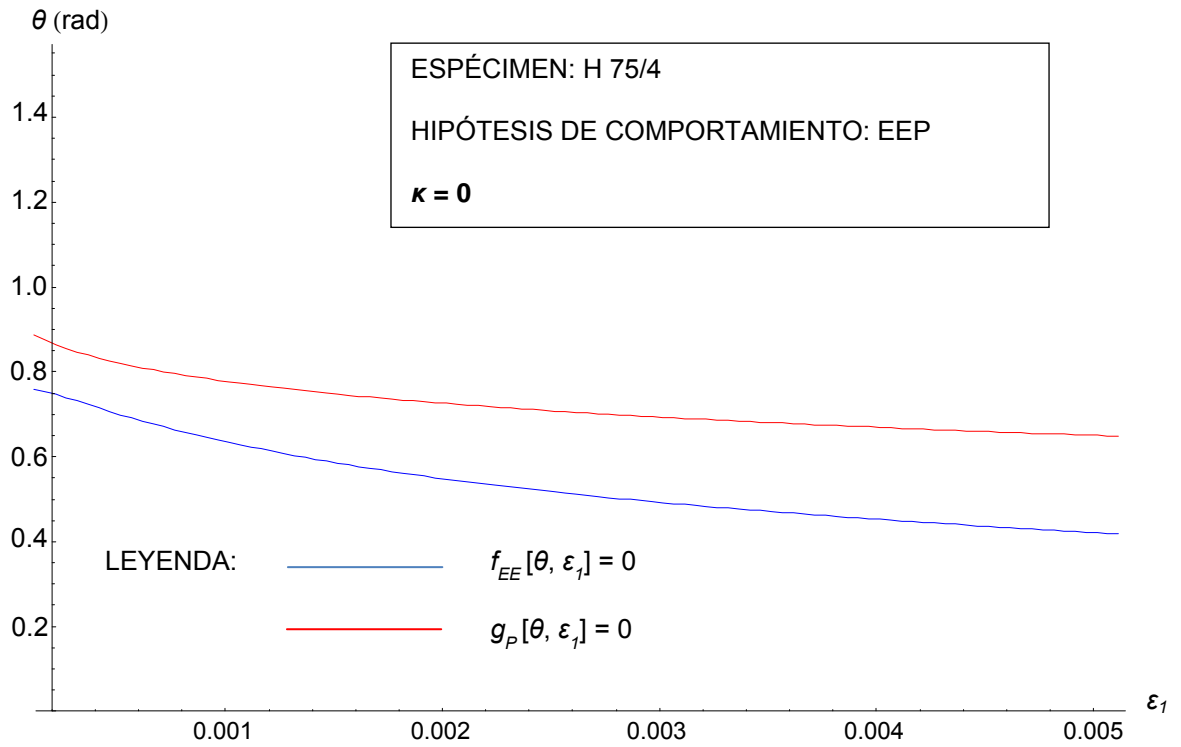


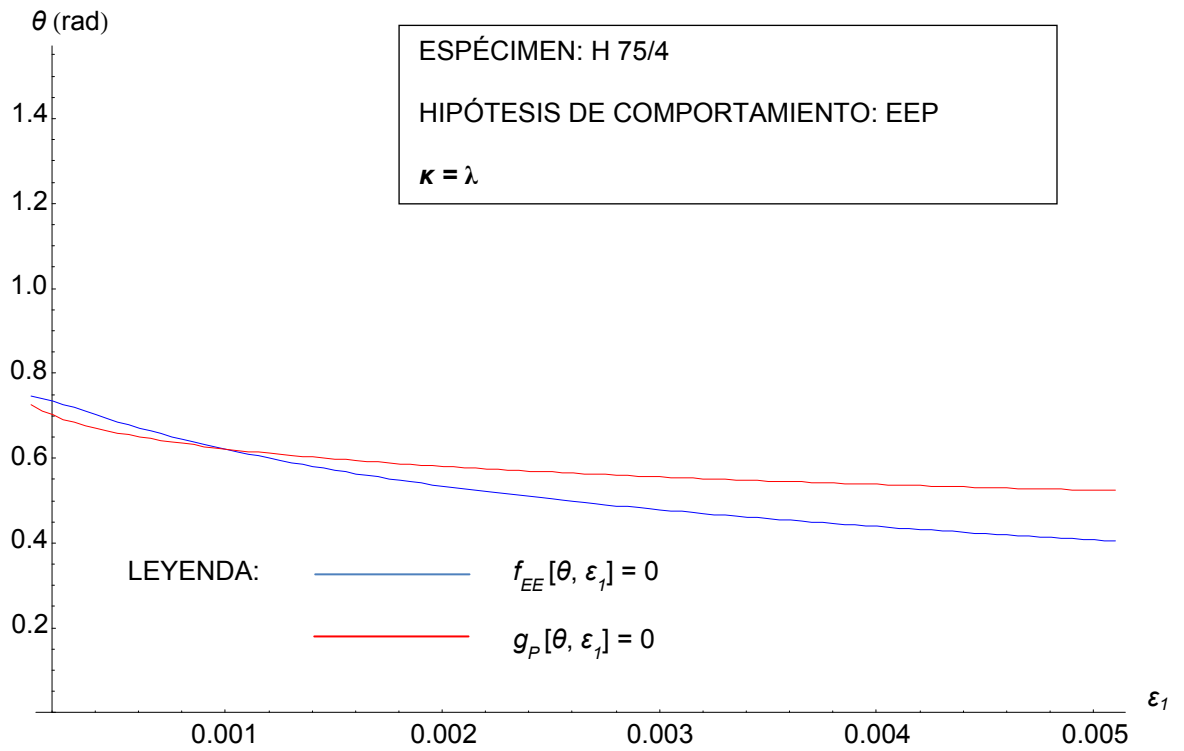


***FIGURA 1: ESPÉCIMEN H 75/4 (Cladera, 2002)***

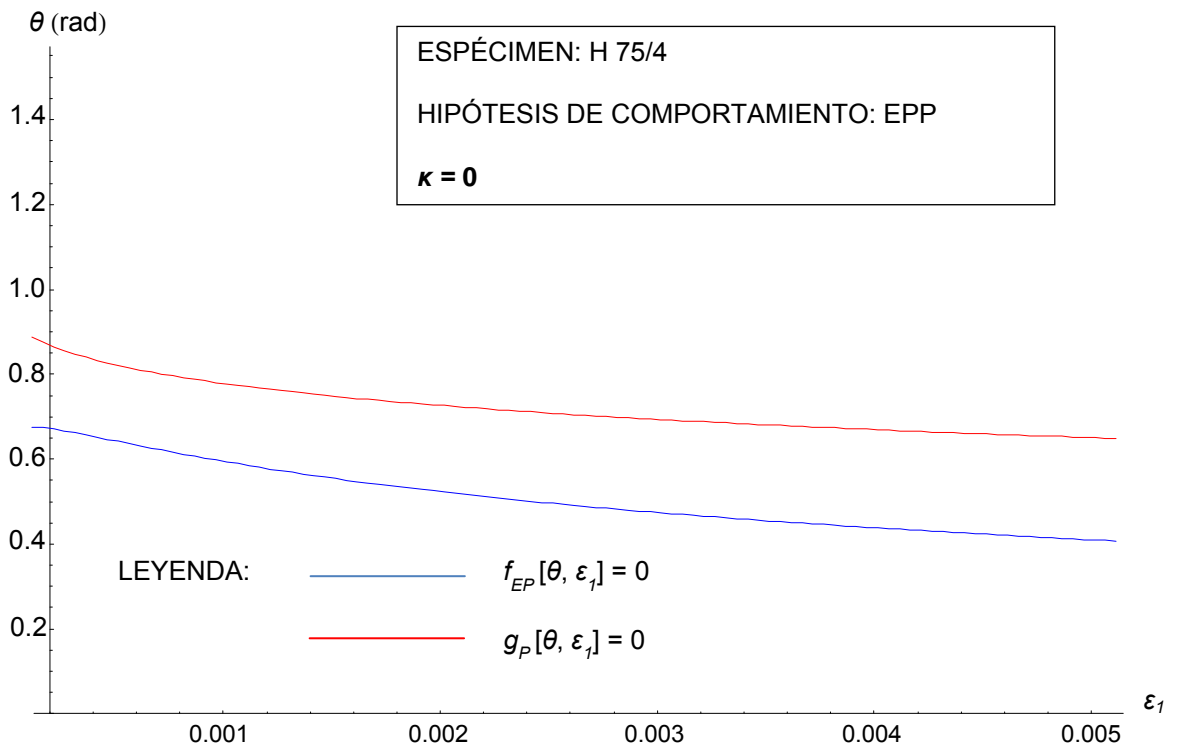
**FIGURA 1: ESPÉCIMEN H 75/4 ( $\lambda'_1 = 0.554562$ ;  $\lambda = 0.68273$ )**

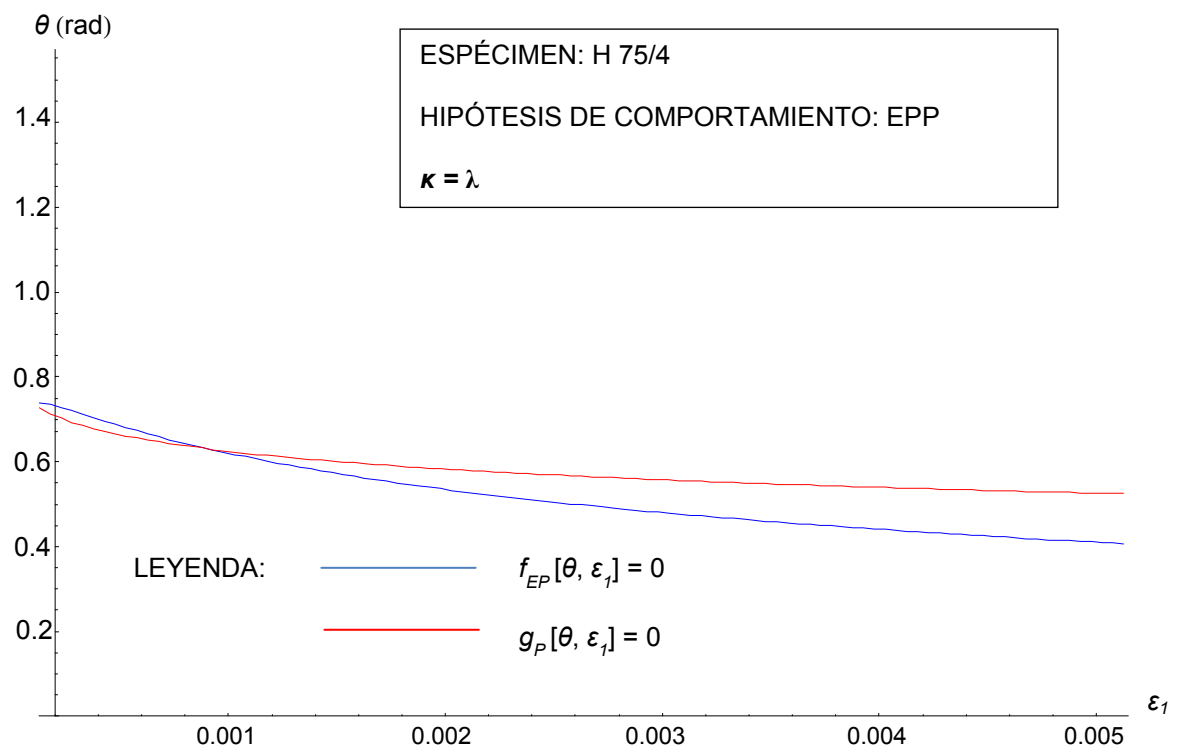
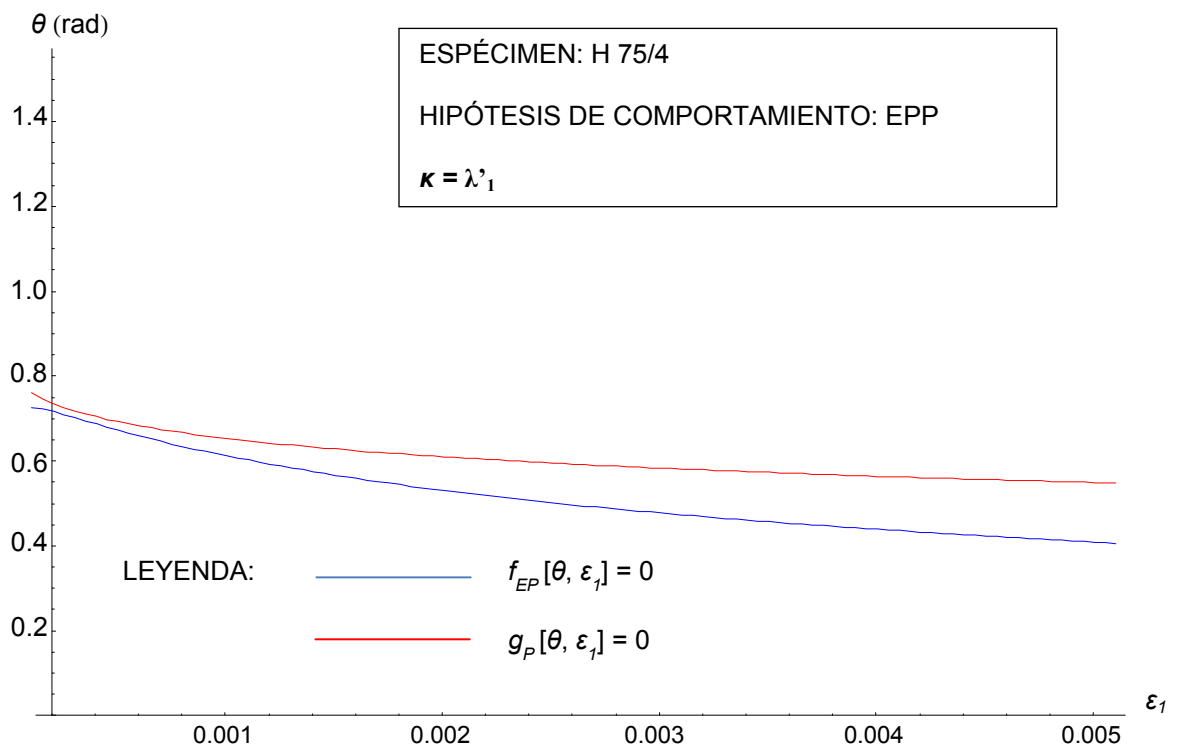
**HIPÓTESIS DE COMPORTAMIENTO: EEP**



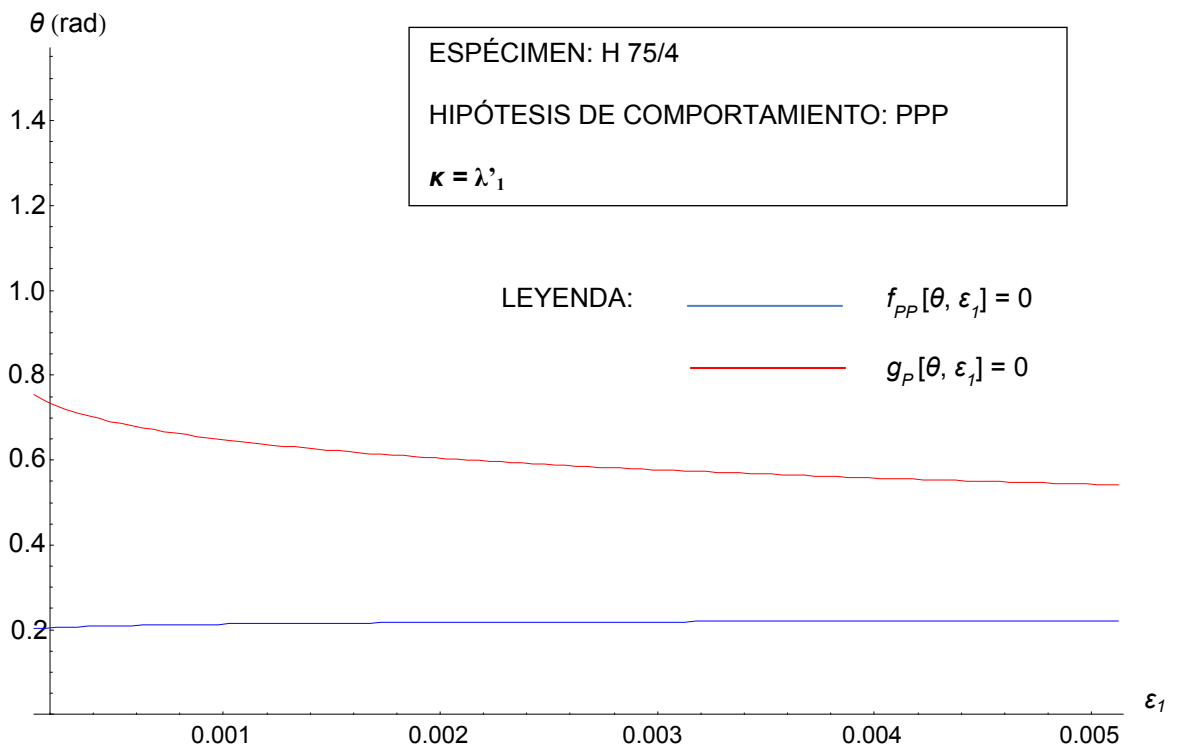
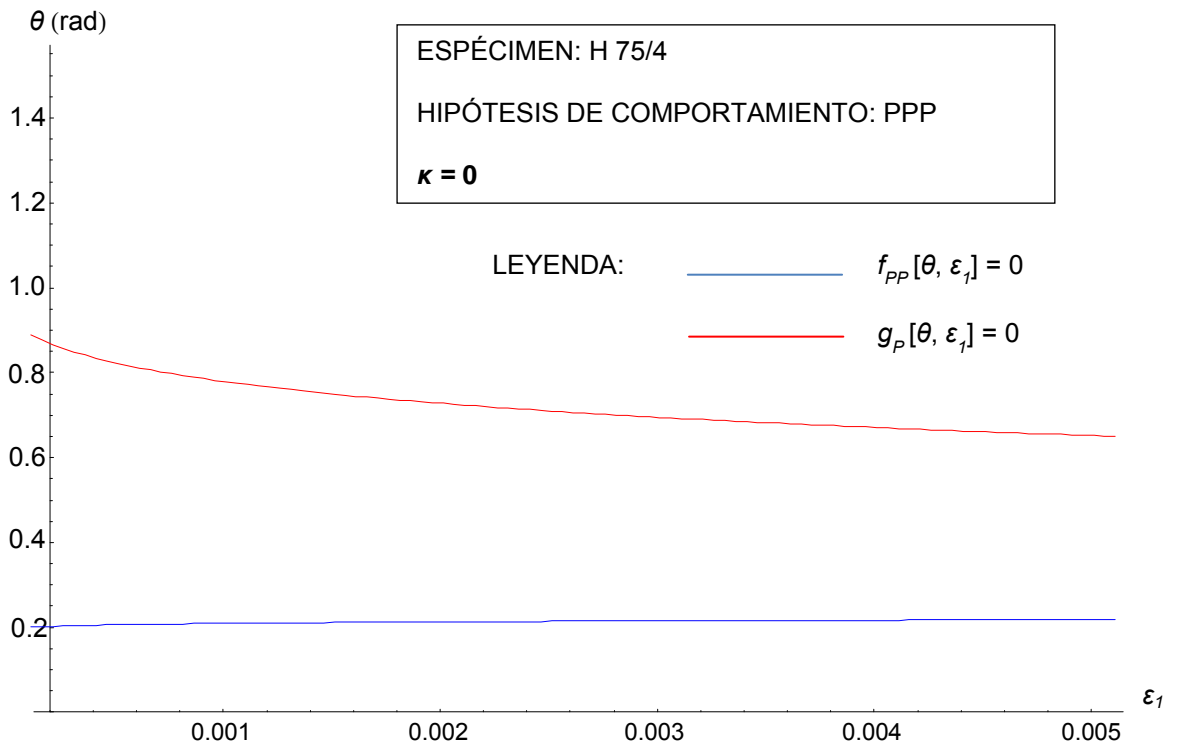


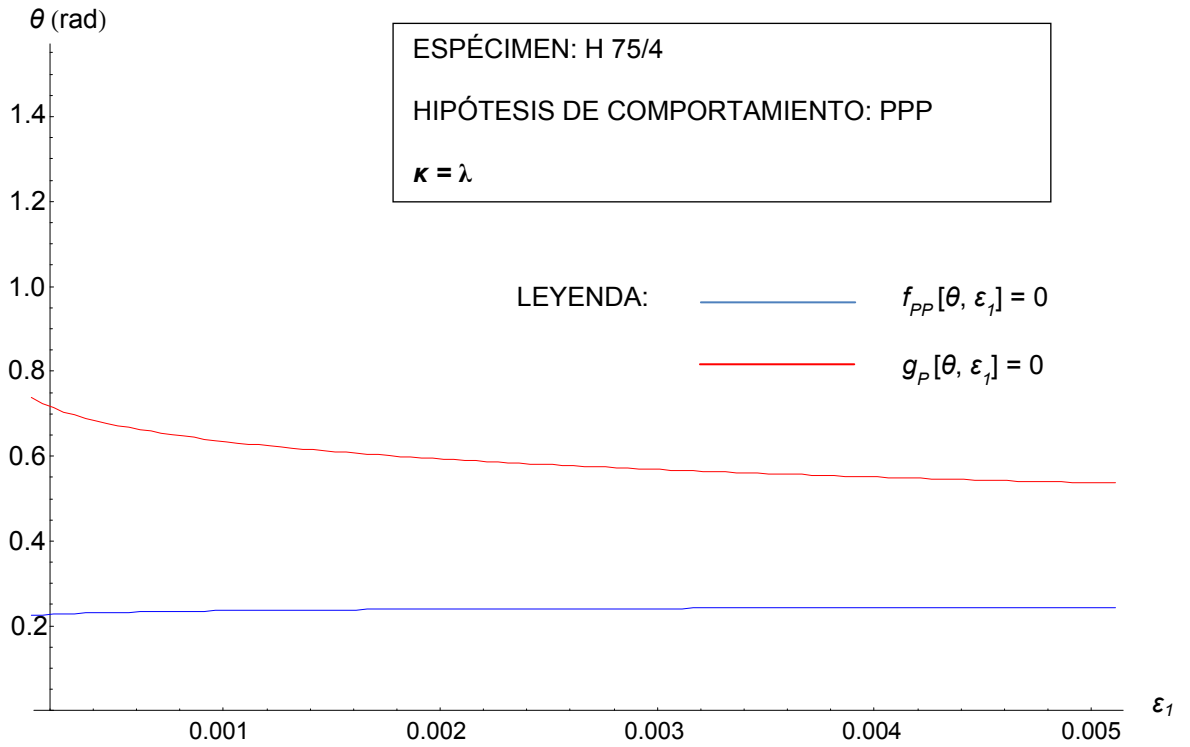
**HIPÓTESIS DE COMPORTAMIENTO: EPP**



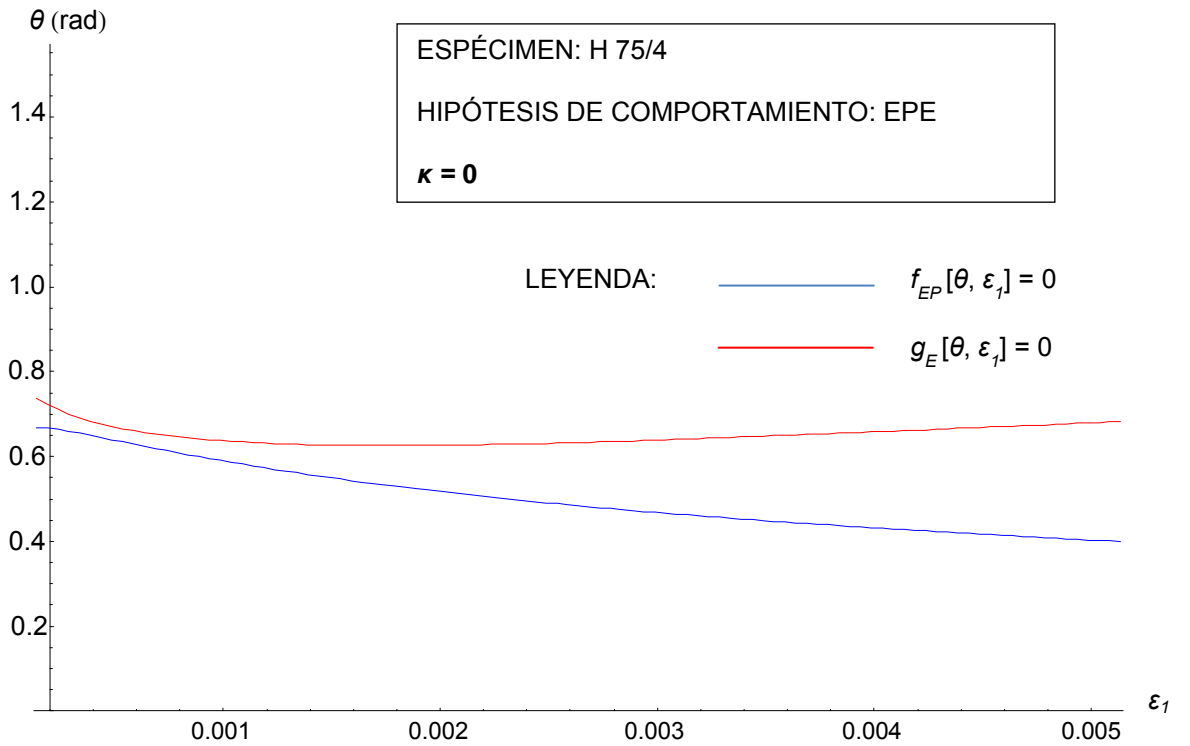


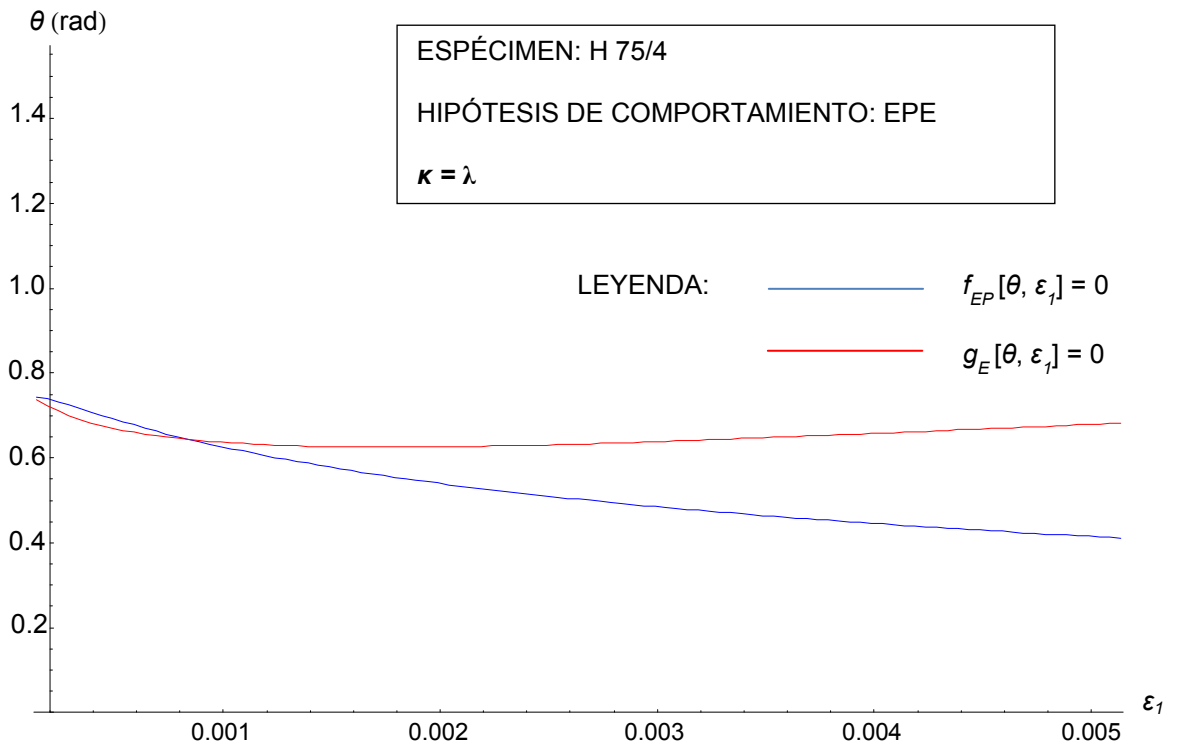
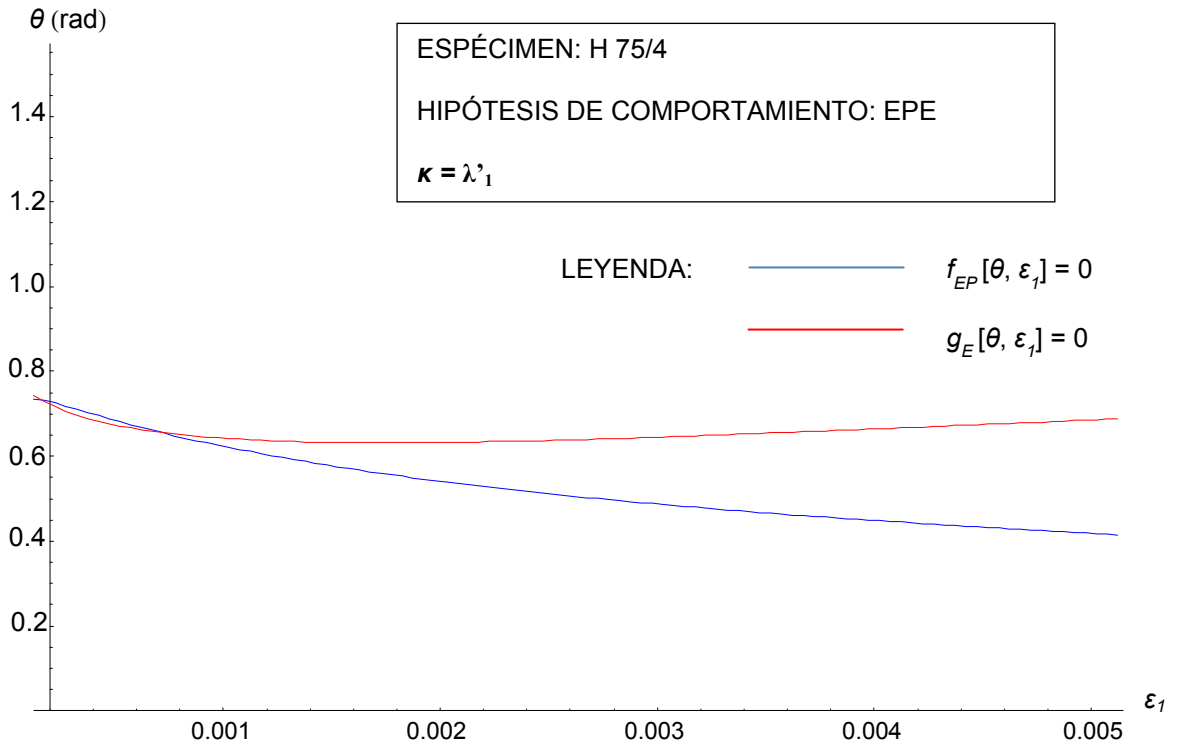
## HIPÓTESIS DE COMPORTAMIENTO: PPP





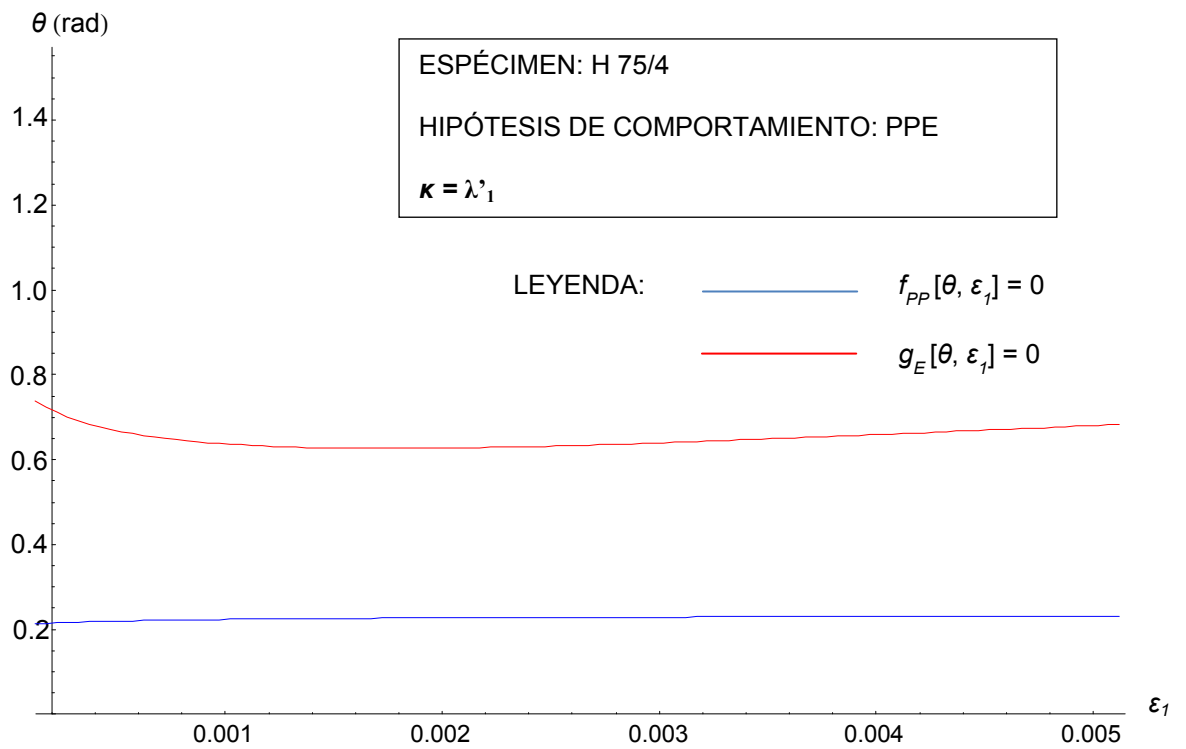
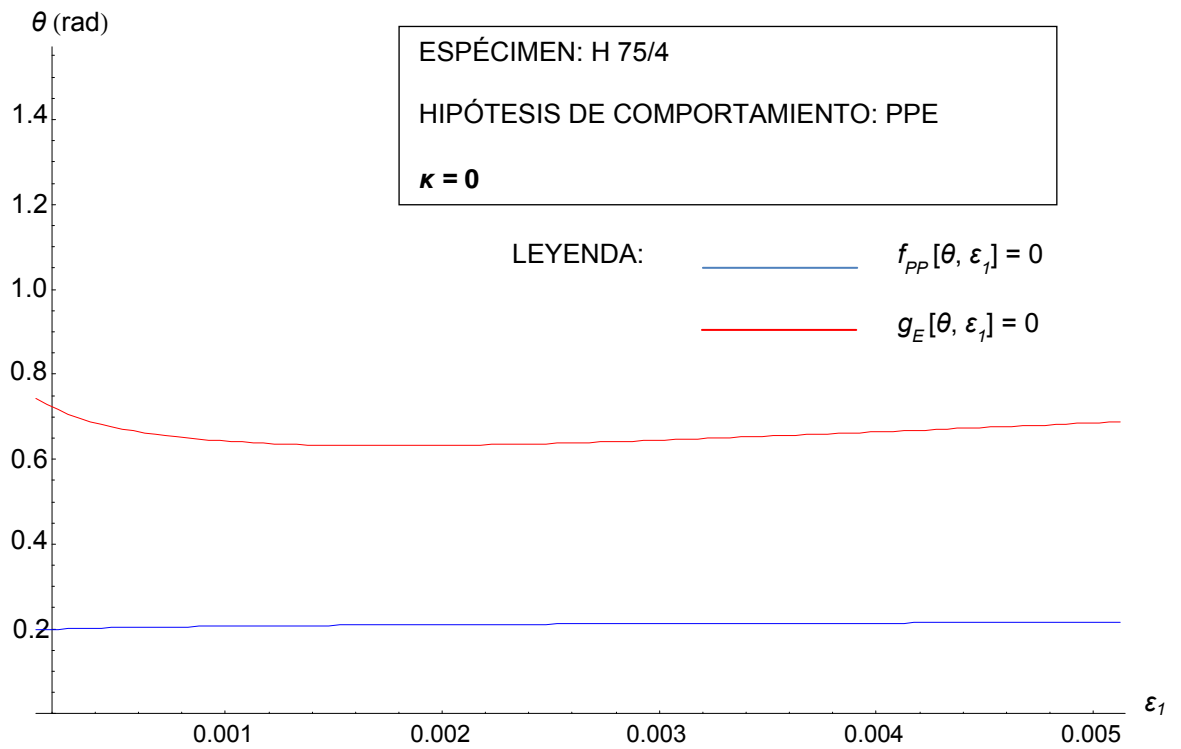
**HIPÓTESIS DE COMPORTAMIENTO: EPE**

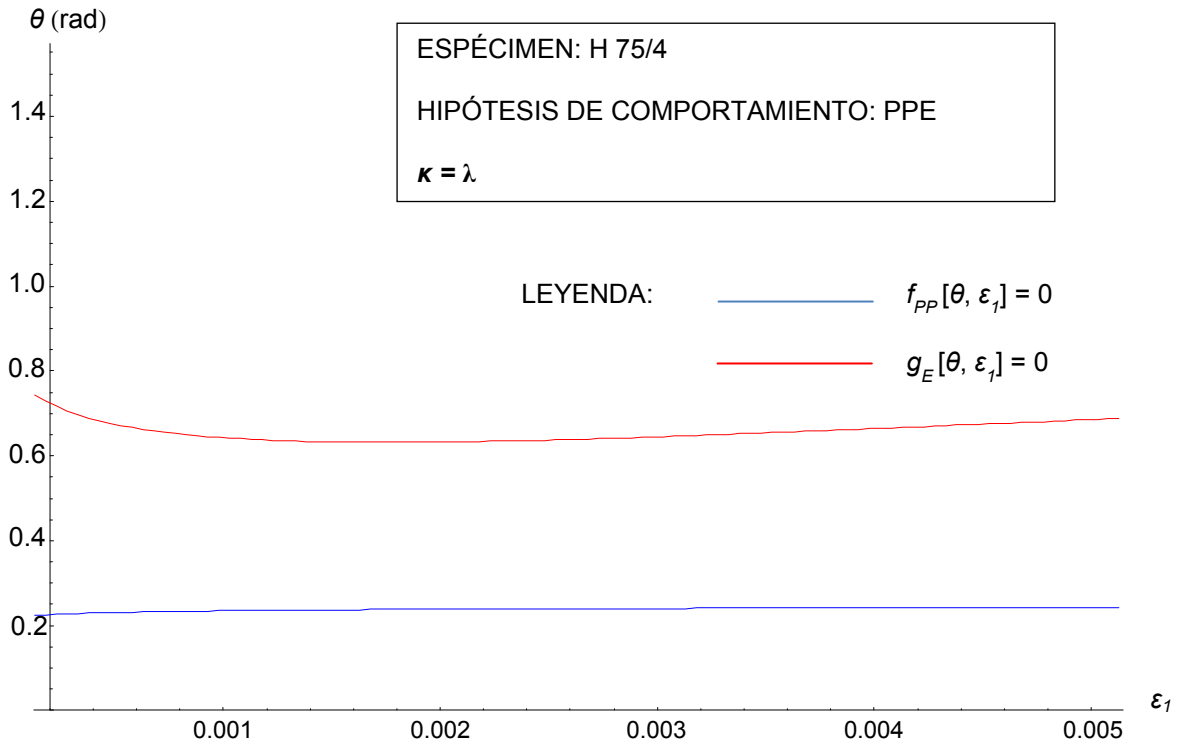






## HIPÓTESIS DE COMPORTAMIENTO: PPE





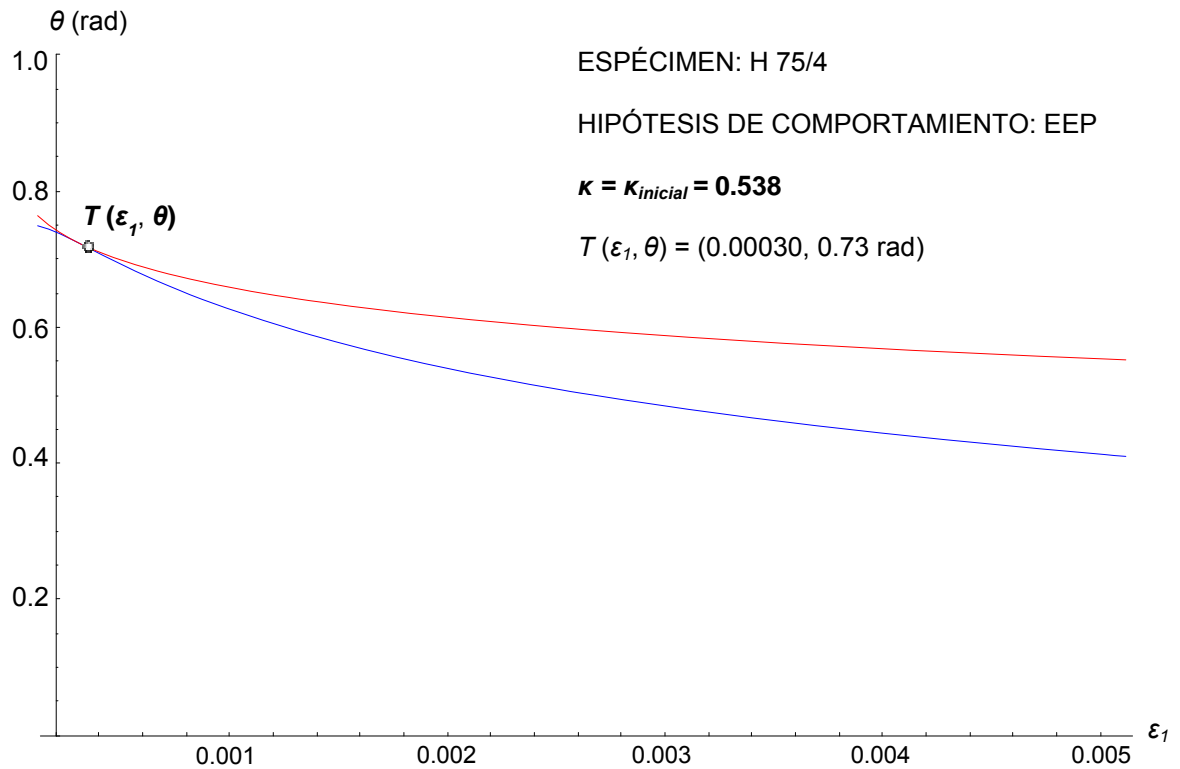


***FIGURA 2: ESPÉCIMEN H 75/4 (Cladera, 2002)***

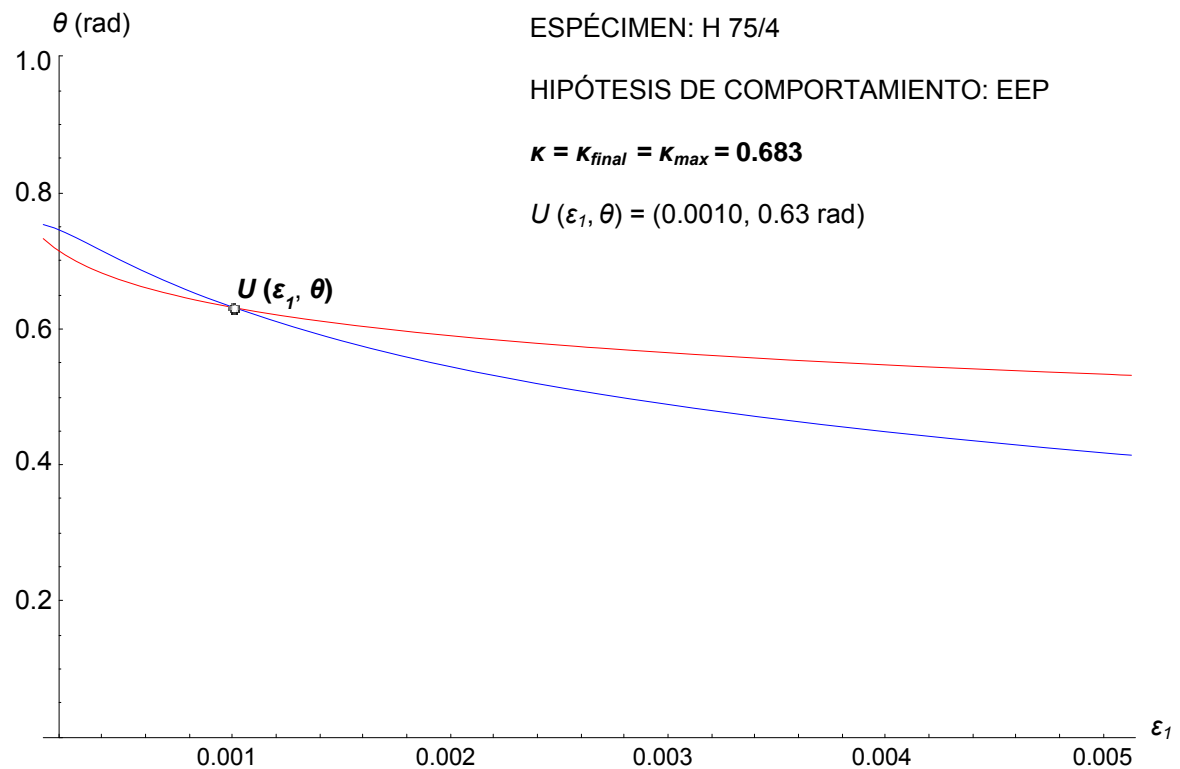
**“ENTRADA Y SALIDA DE LA REGIÓN DE  
SOLUBILIDAD DEL SISTEMA”**

## HIPÓTESIS DE COMPORTAMIENTO: EEP

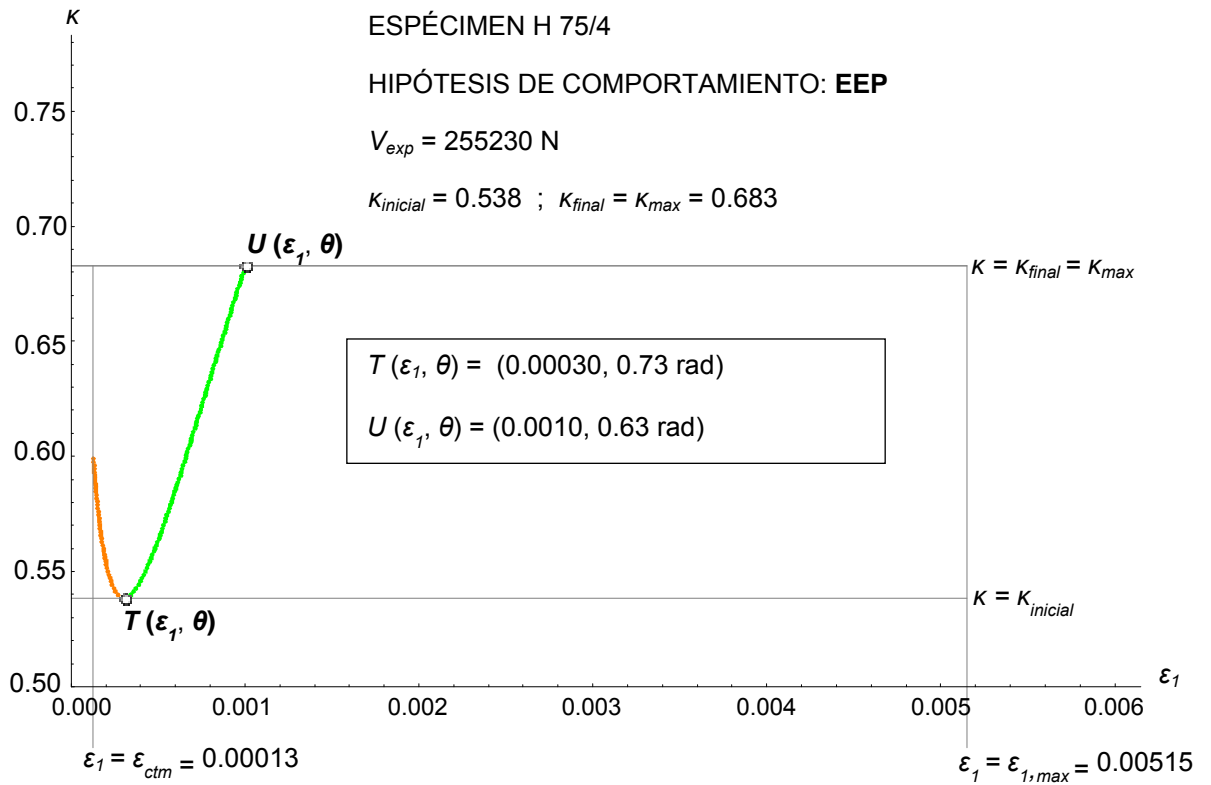
*Inicio de la región de solubilidad*



*Final de la región de solubilidad*

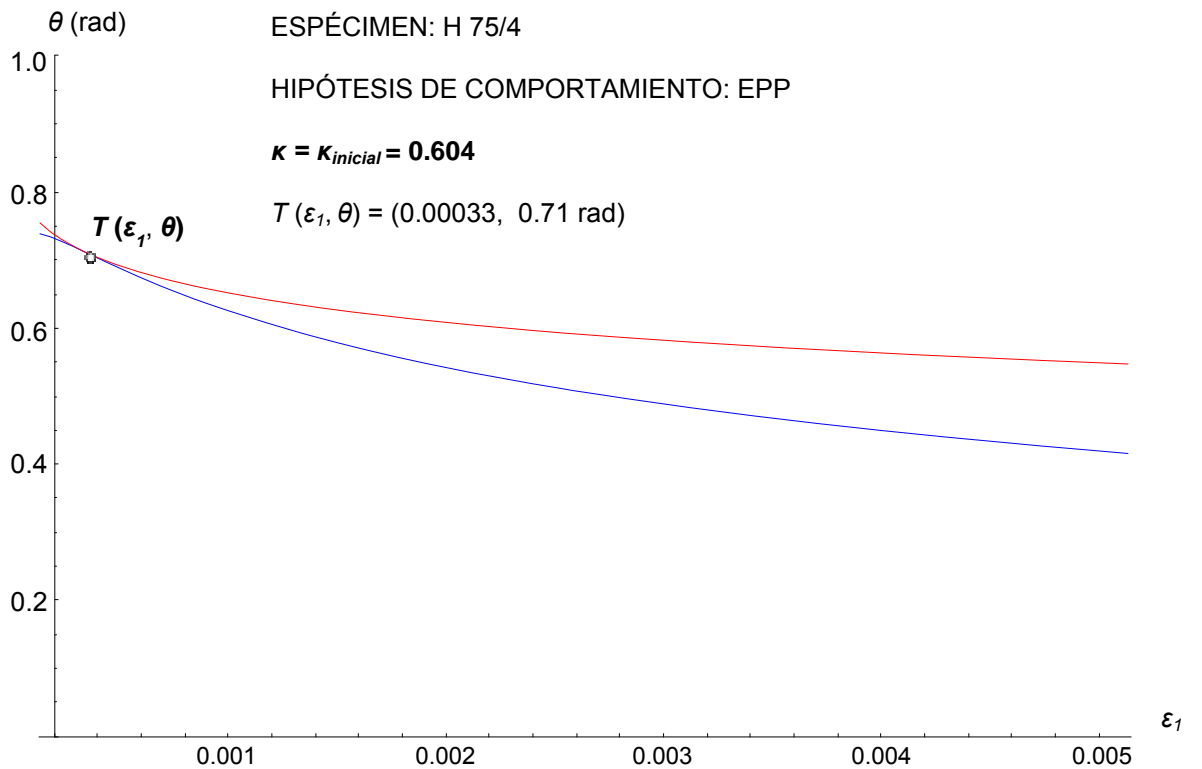


Curva de solubilidad

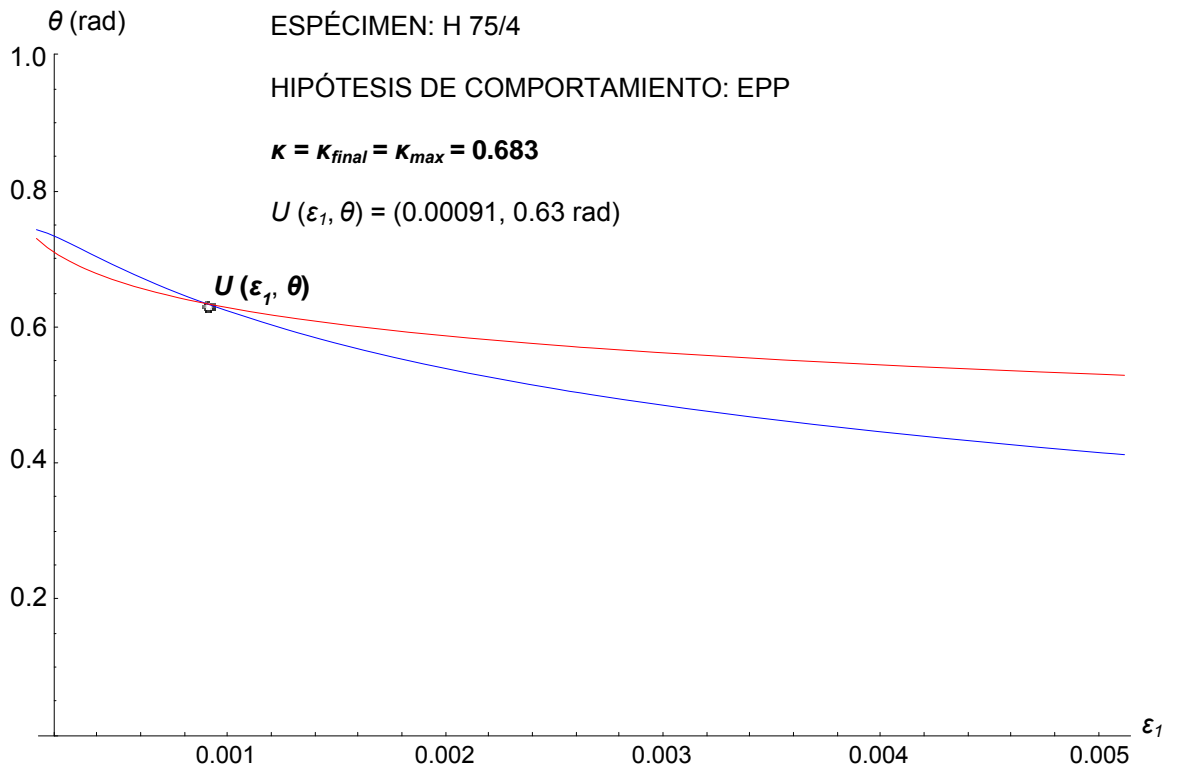


HIPÓTESIS DE COMPORTAMIENTO: **EPP**

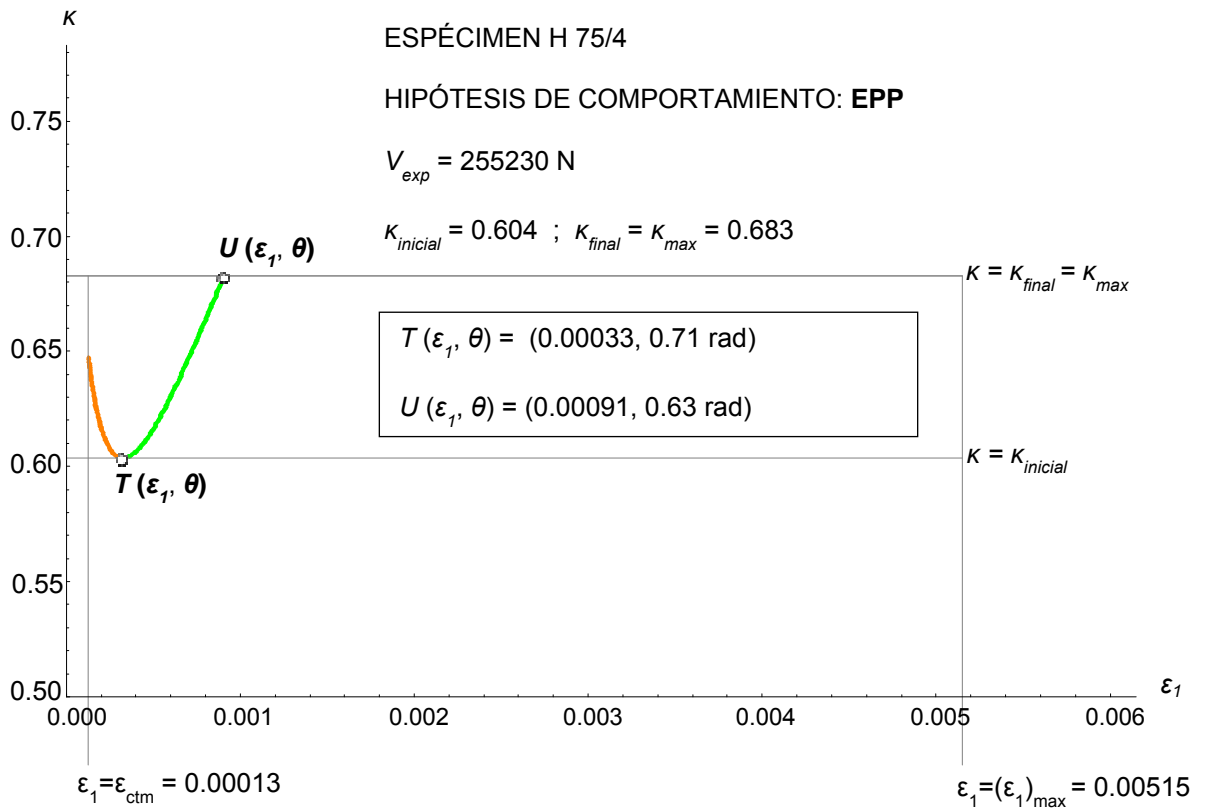
Inicio de la región de solubilidad



Final de la región de solubilidad

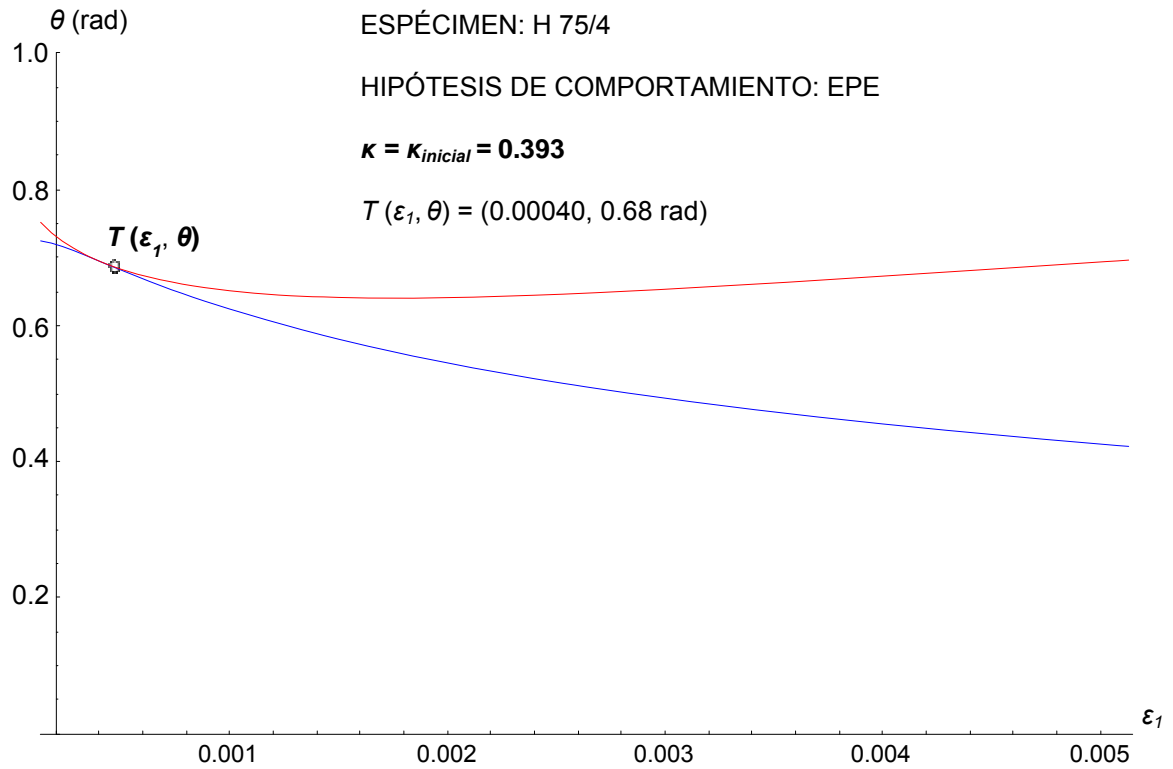


Curva de solubilidad

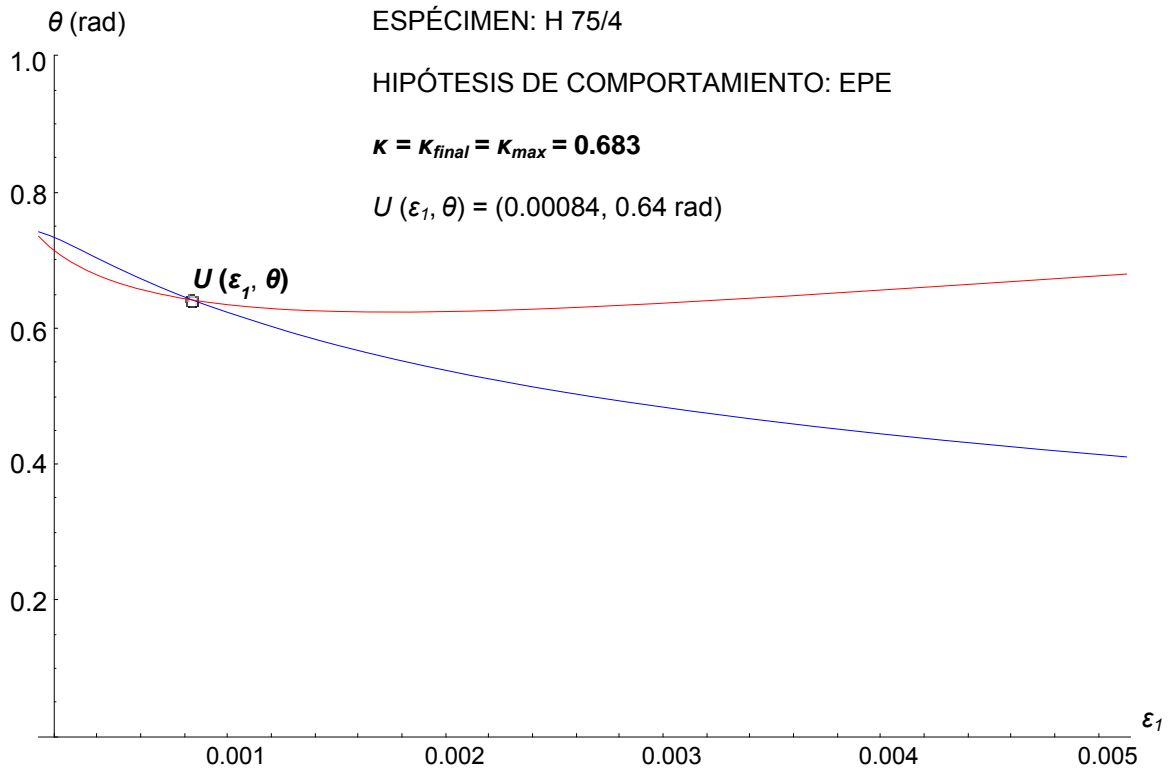


## HIPÓTESIS DE COMPORTAMIENTO: EPE

*Inicio de la región de solubilidad*

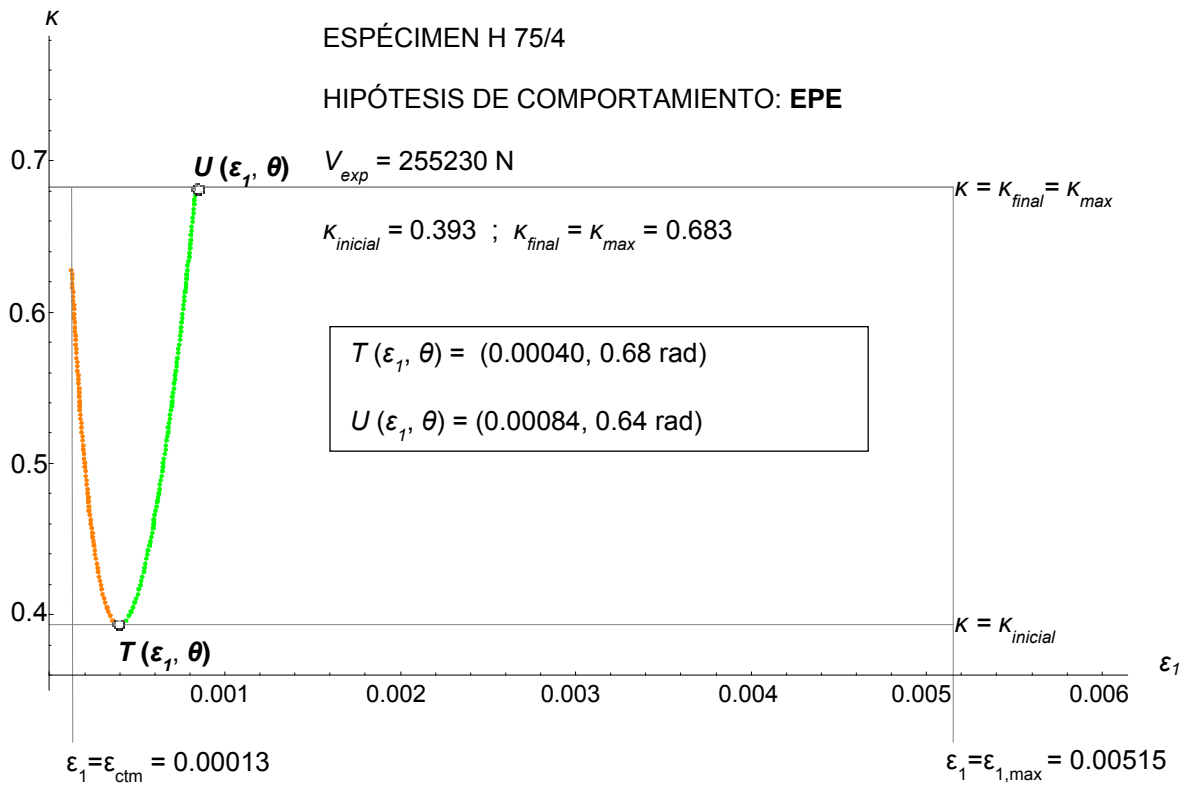


*Final de la región de solubilidad*





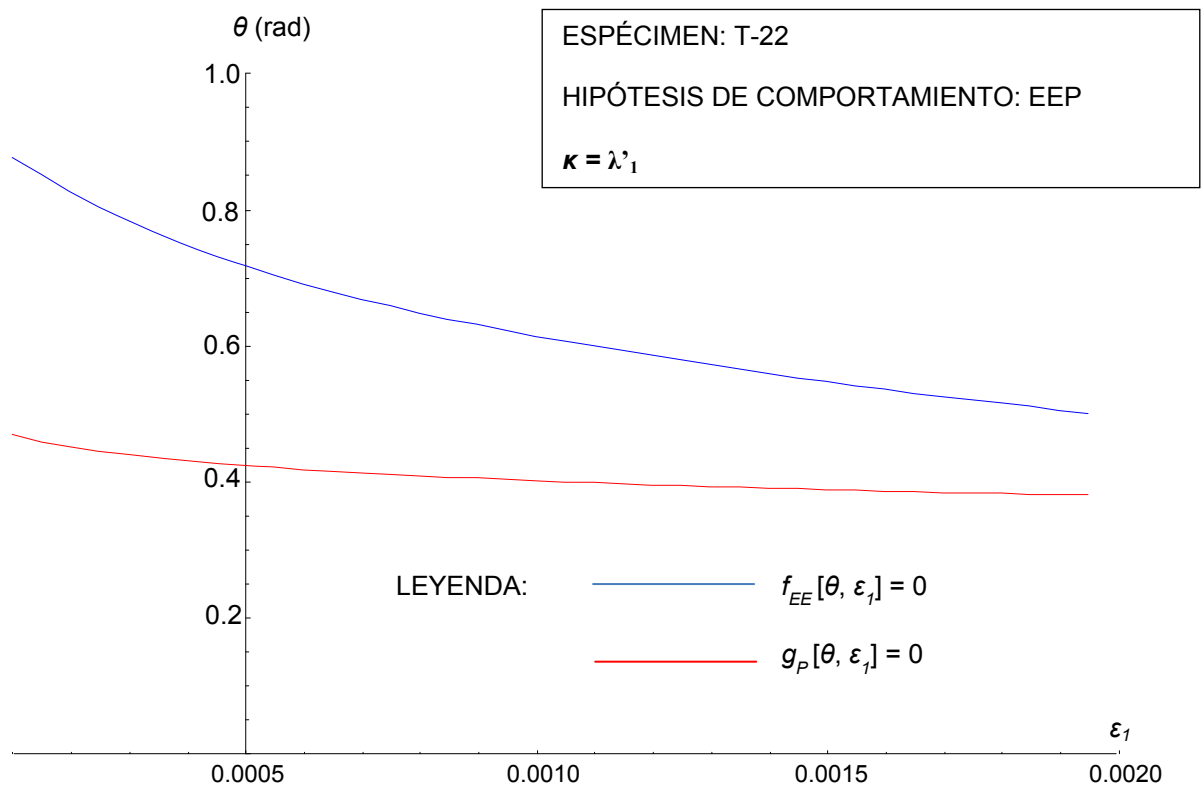
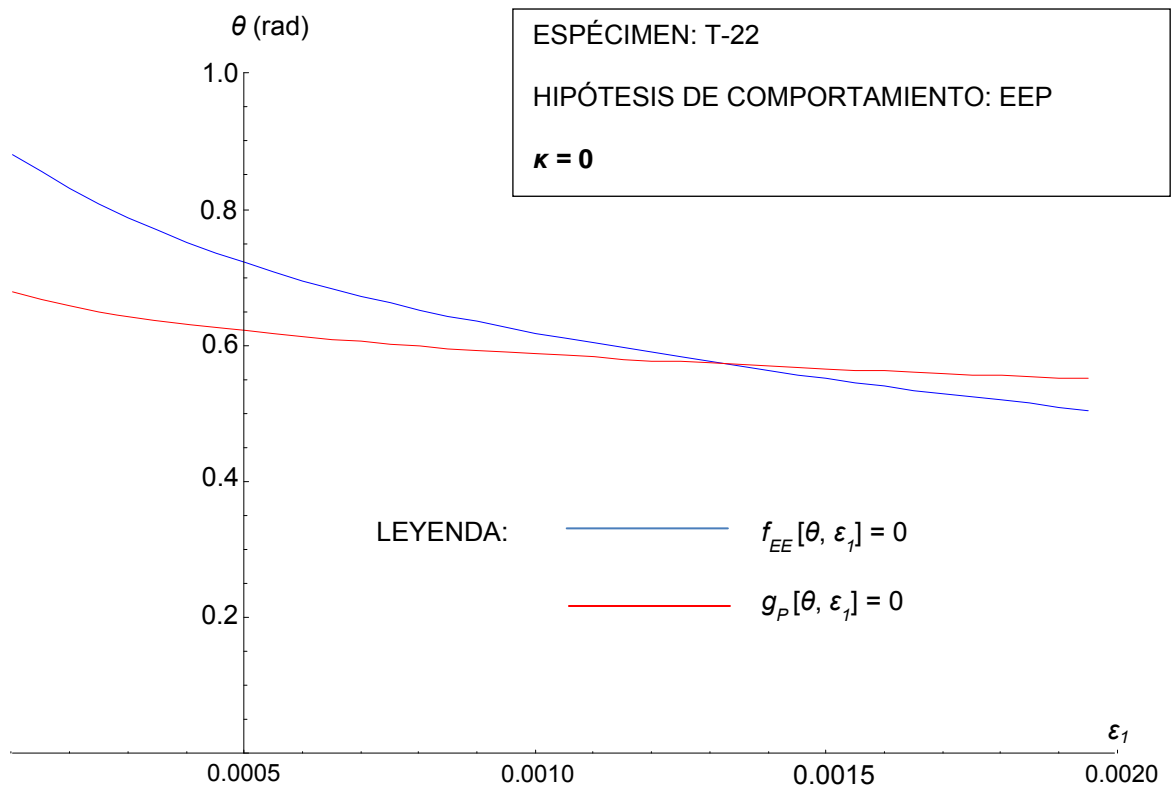
Curva de solubilidad

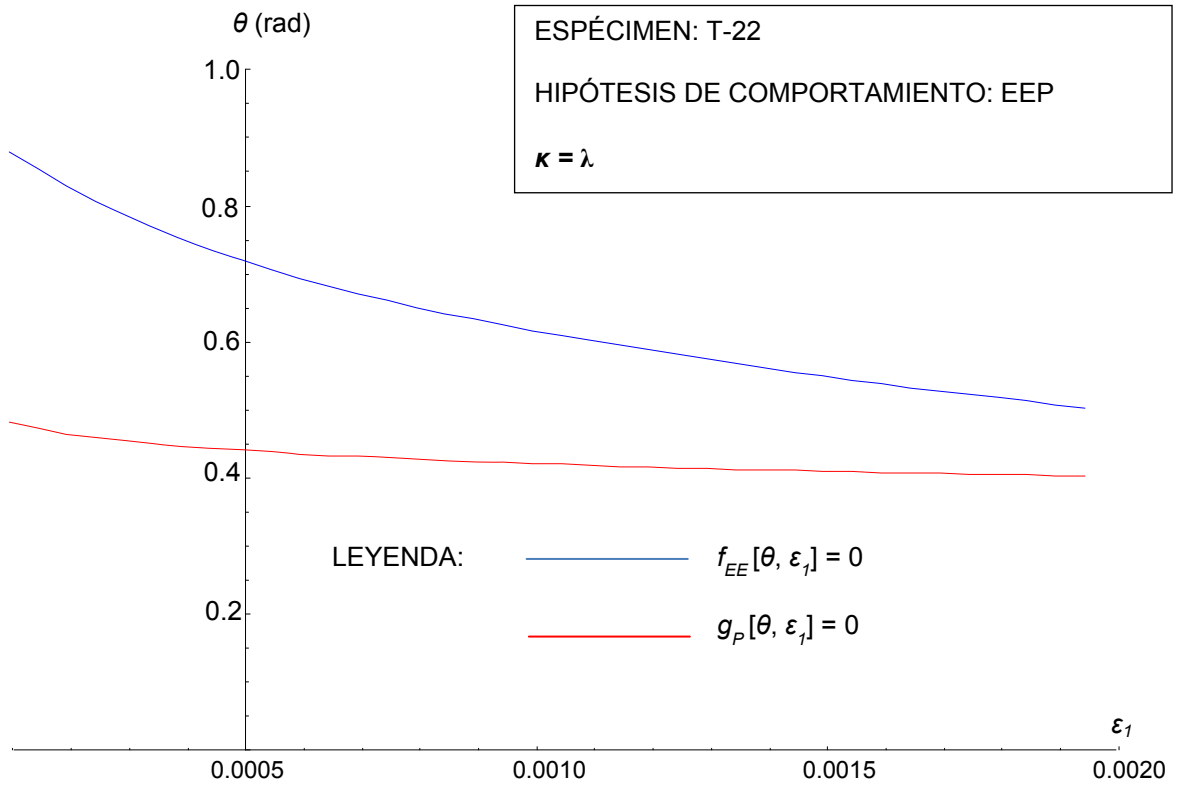


***FIGURA 3: ESPÉCIMEN T-22 (Soerensen, 1974)***

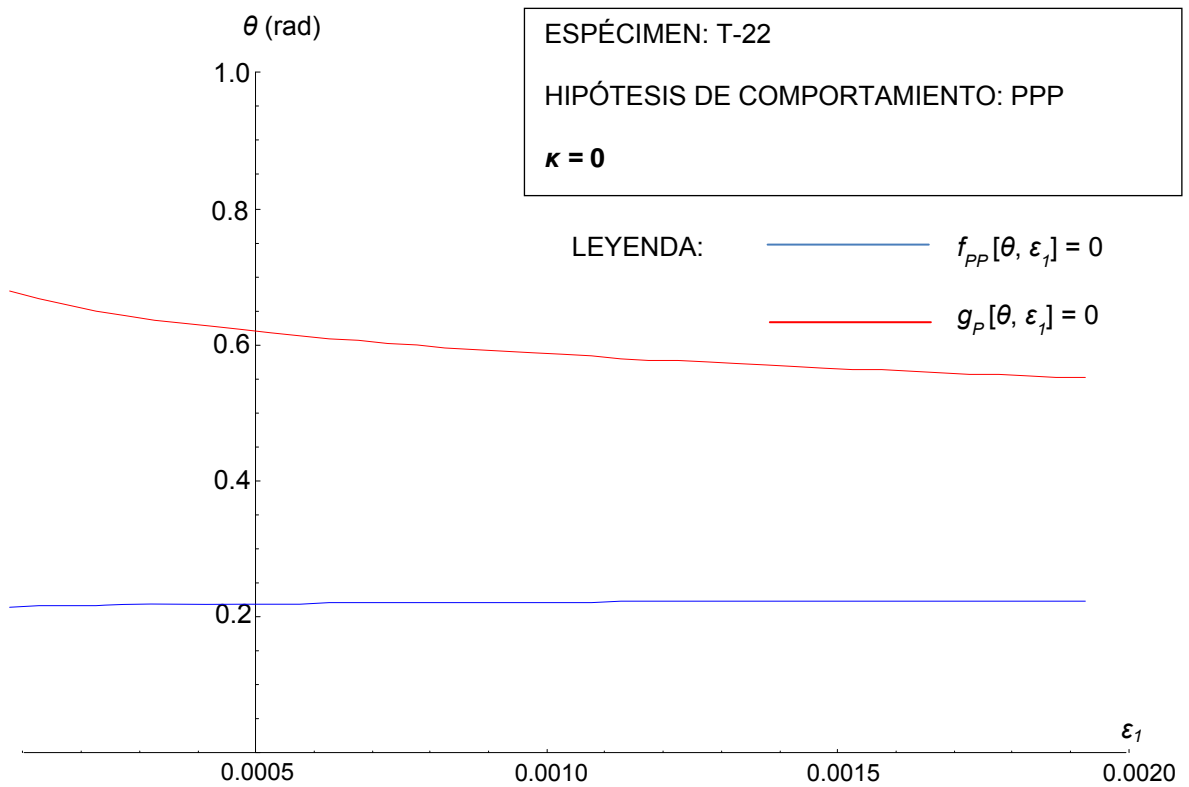
**FIGURA 3: ESPÉCIMEN T-22** ( $\lambda'_1=1.2026$ ;  $\kappa_{lim,II}= 1.42498$  )

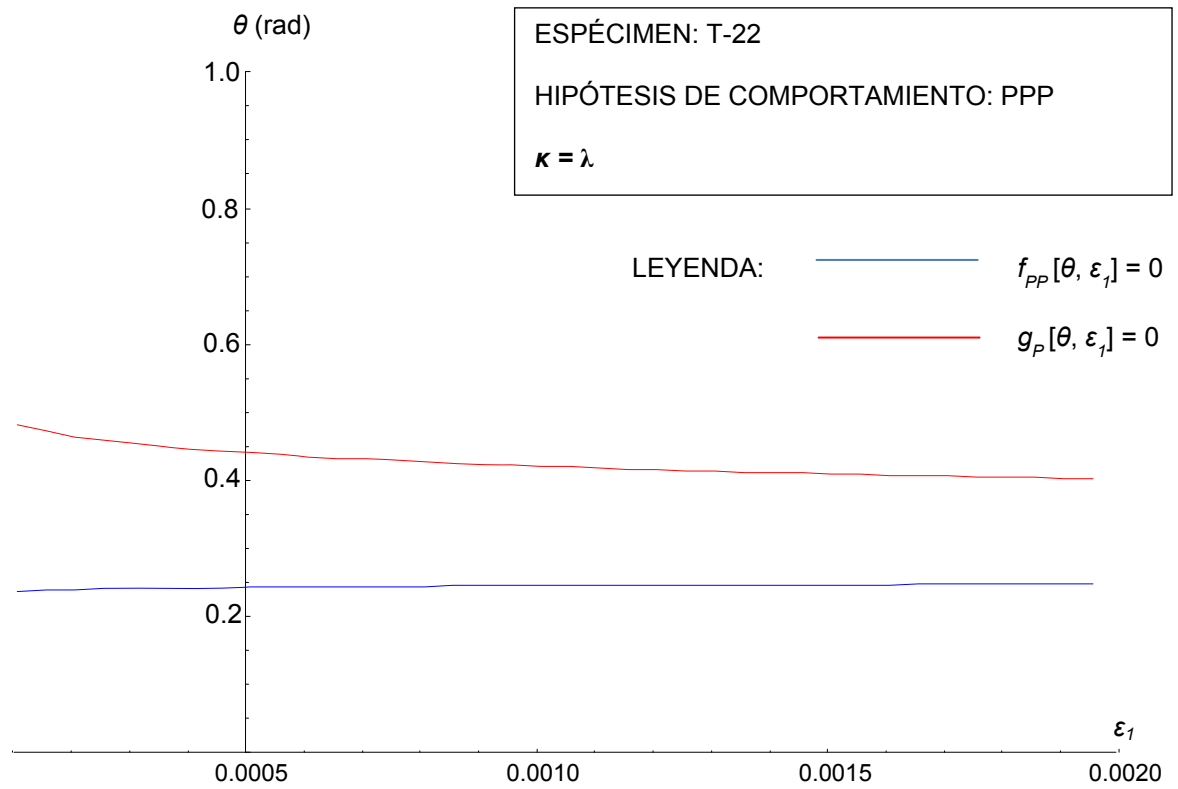
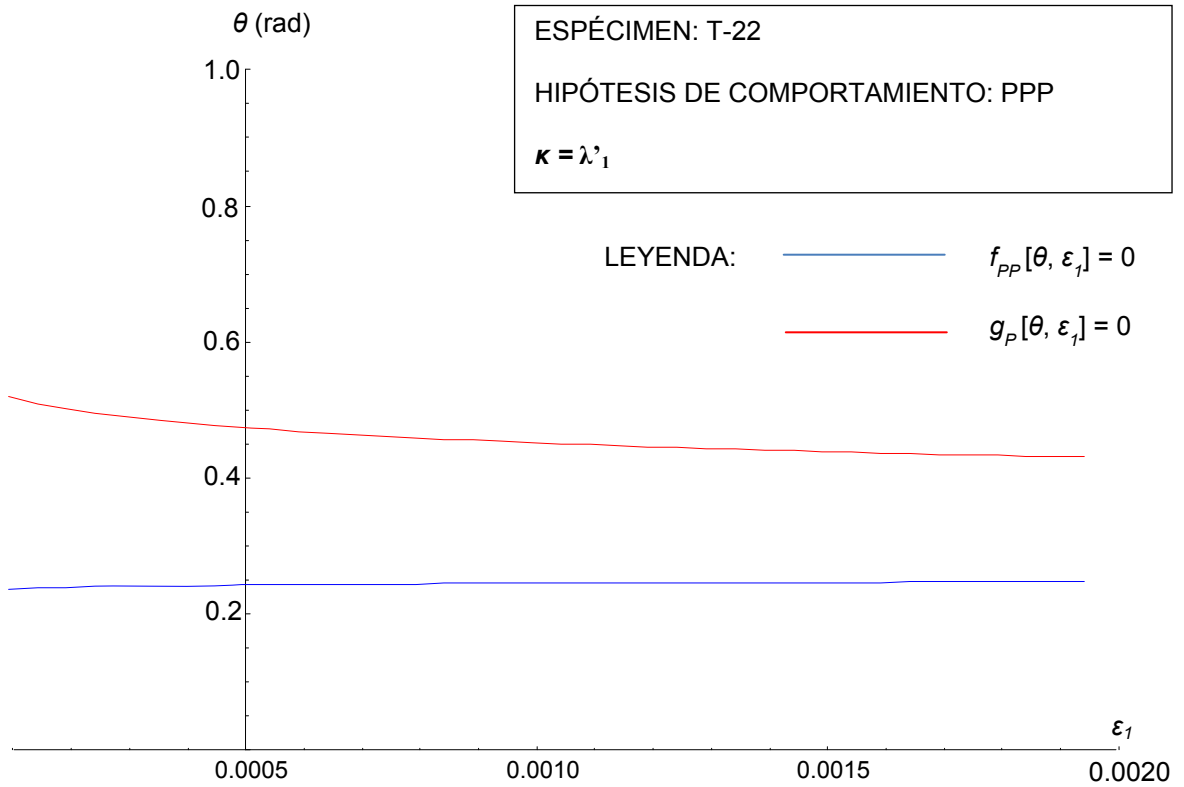
**HIPÓTESIS DE COMPORTAMIENTO: EEP**



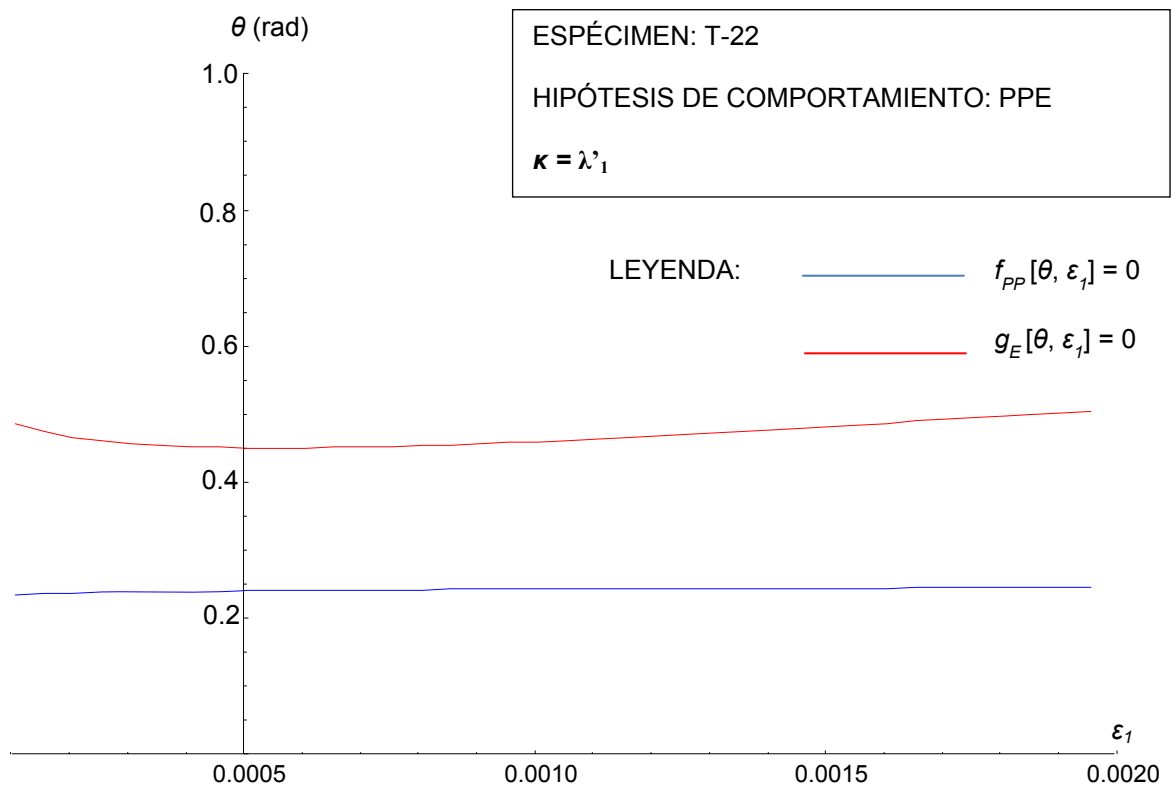
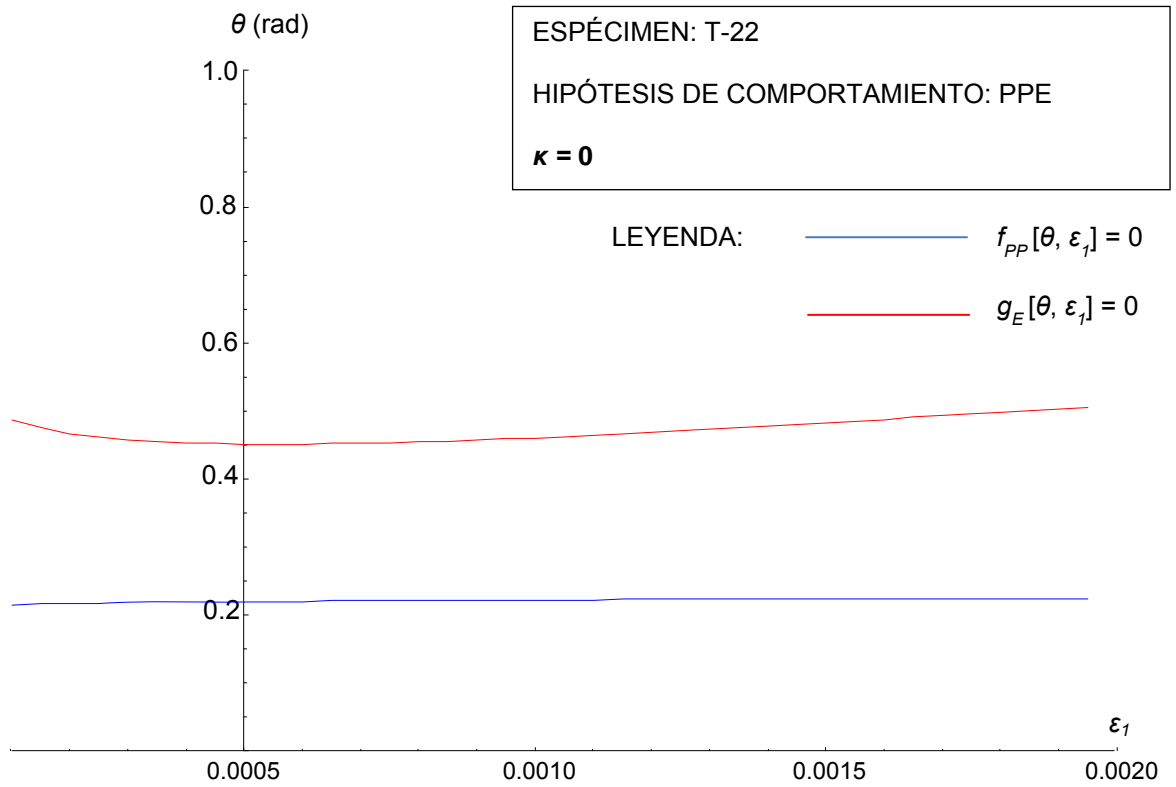


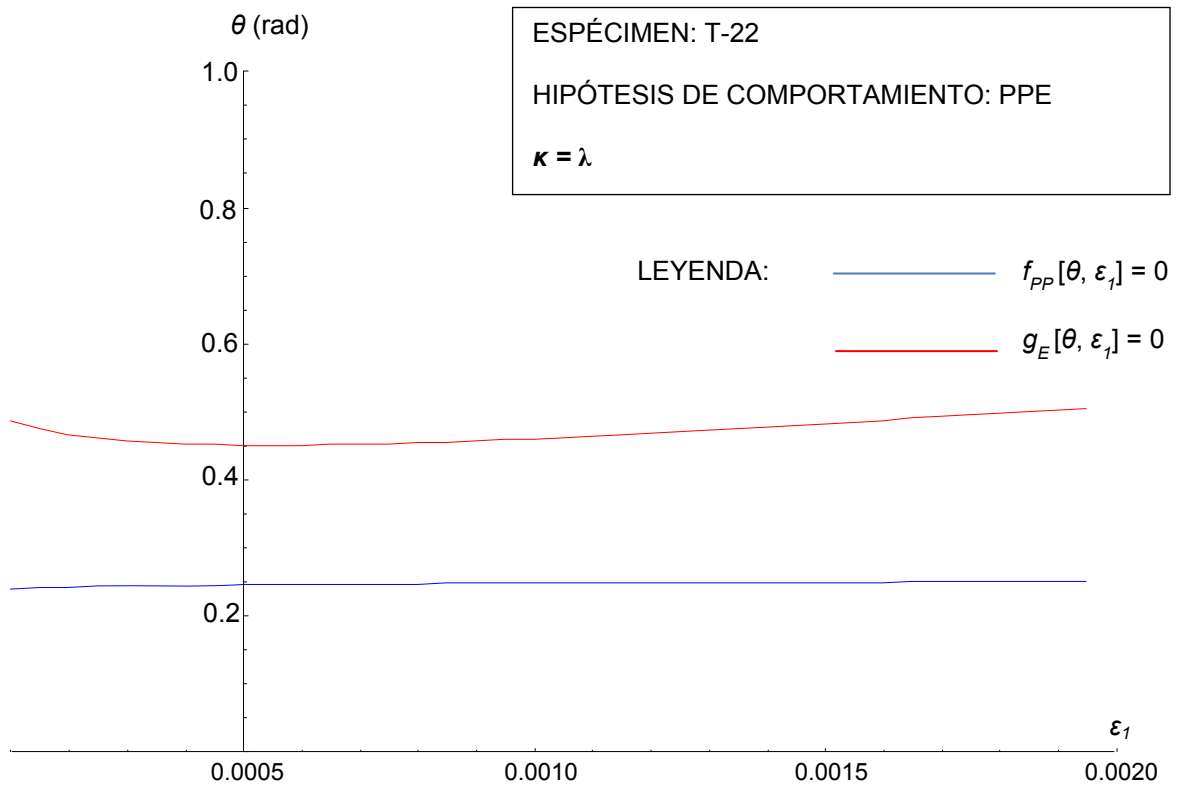
**HIPÓTESIS DE COMPORTAMIENTO: PPP**





# HIPÓTESIS DE COMPORTAMIENTO: PPE



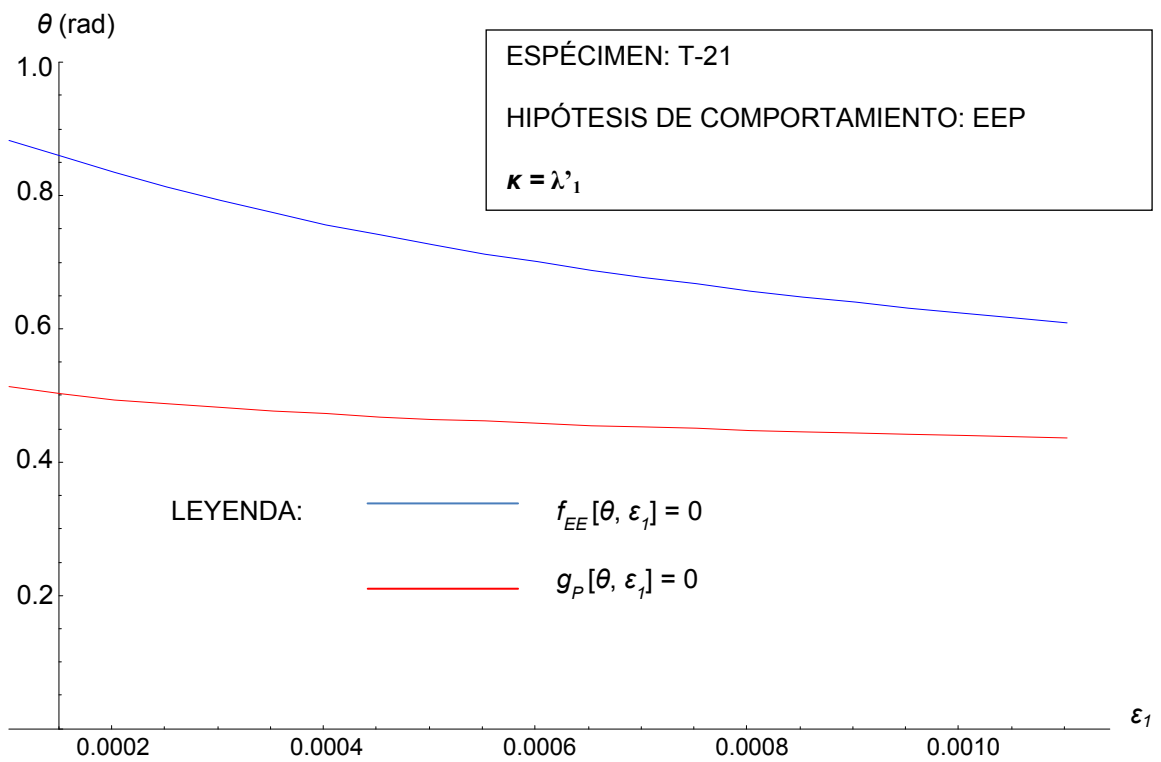
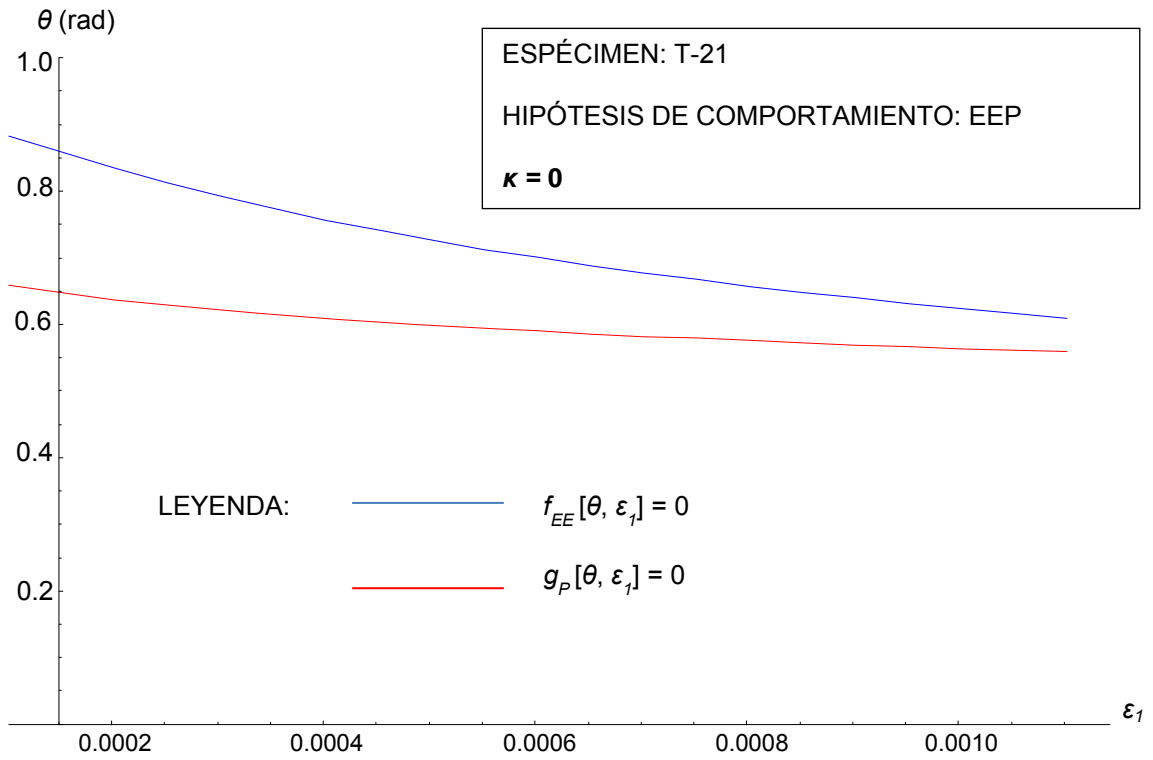


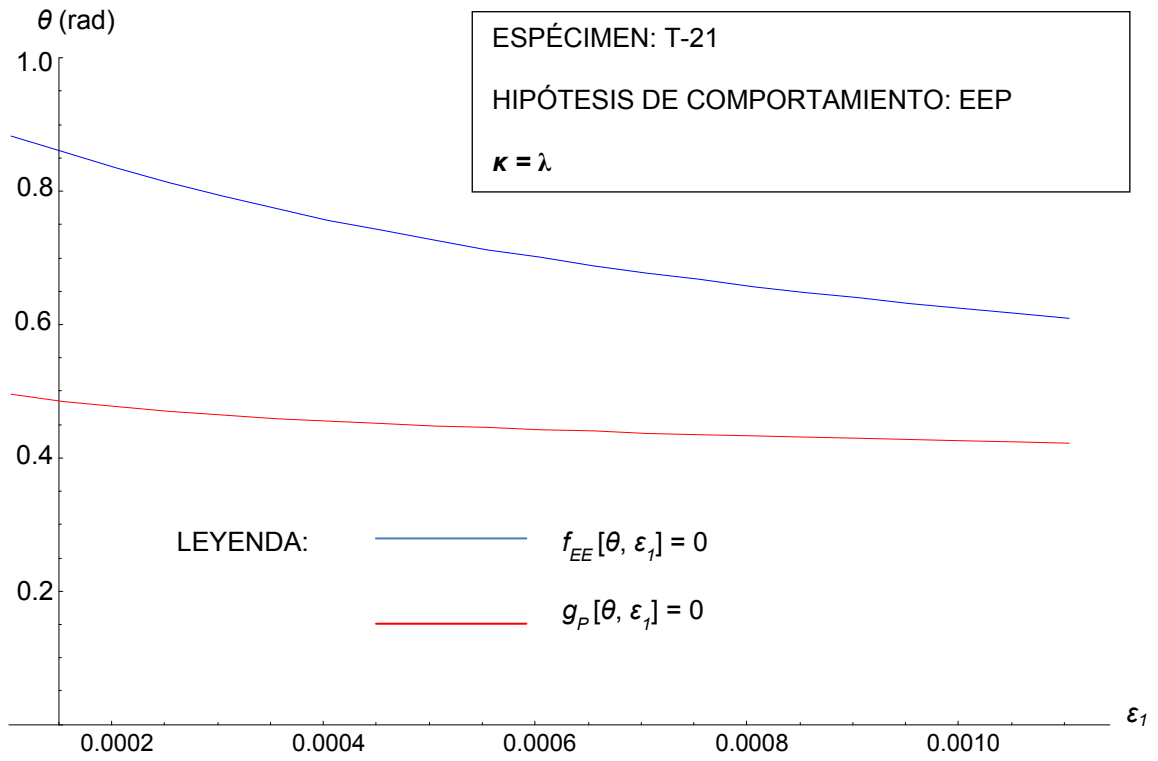
***FIGURA 4: ESPÉCIMEN T-21 (Soerensen, 1974)***



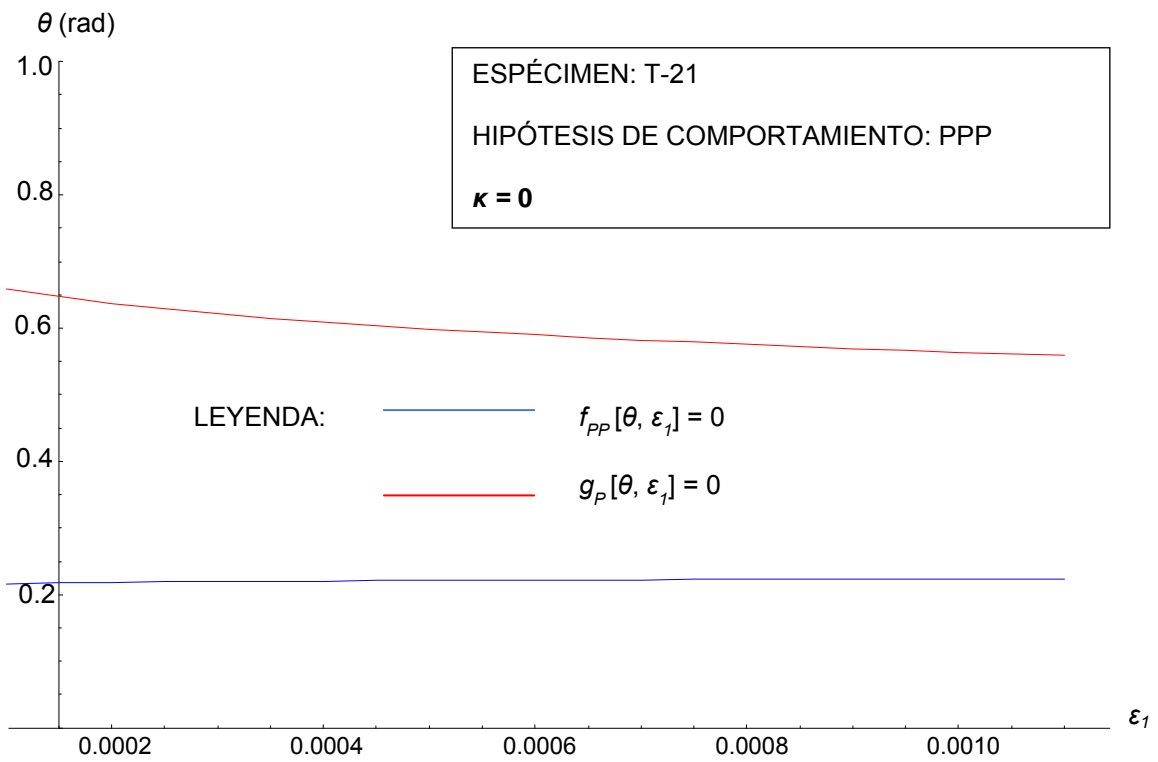
**FIGURA 4: ESPÉCIMEN T-21** ( $\lambda'_1 = 0.747103$ ;  $\lambda = 0.834302$ )

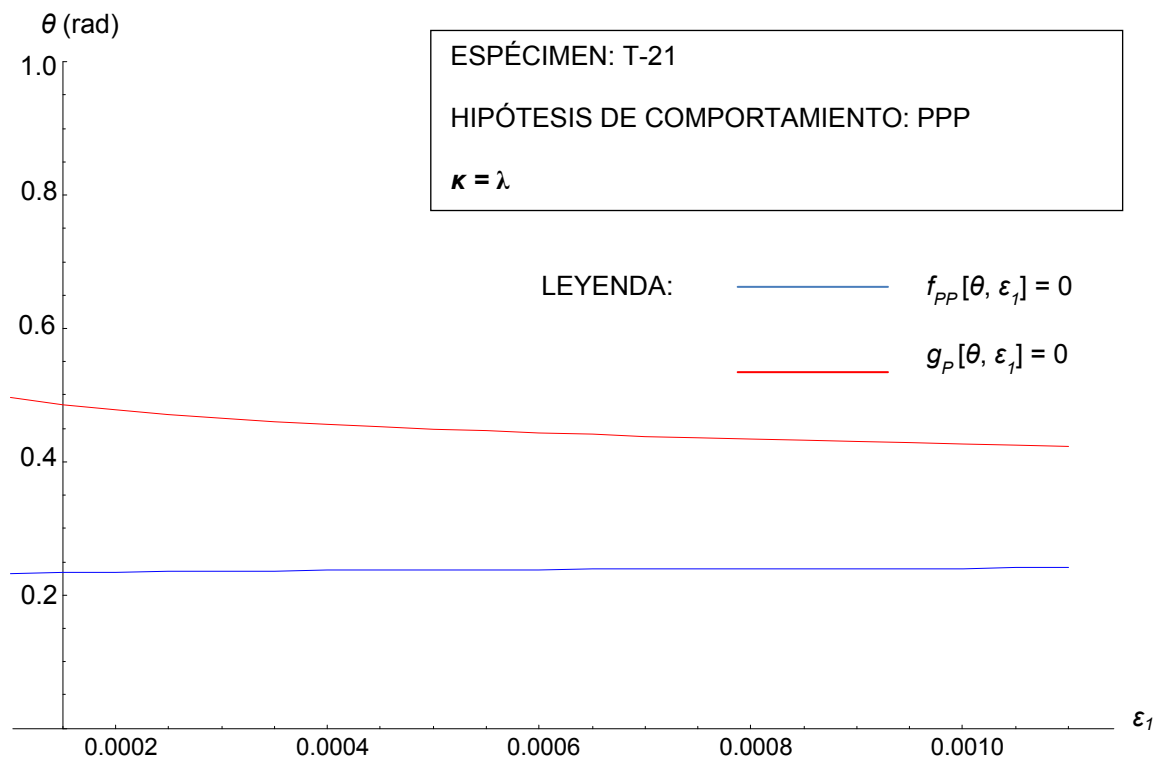
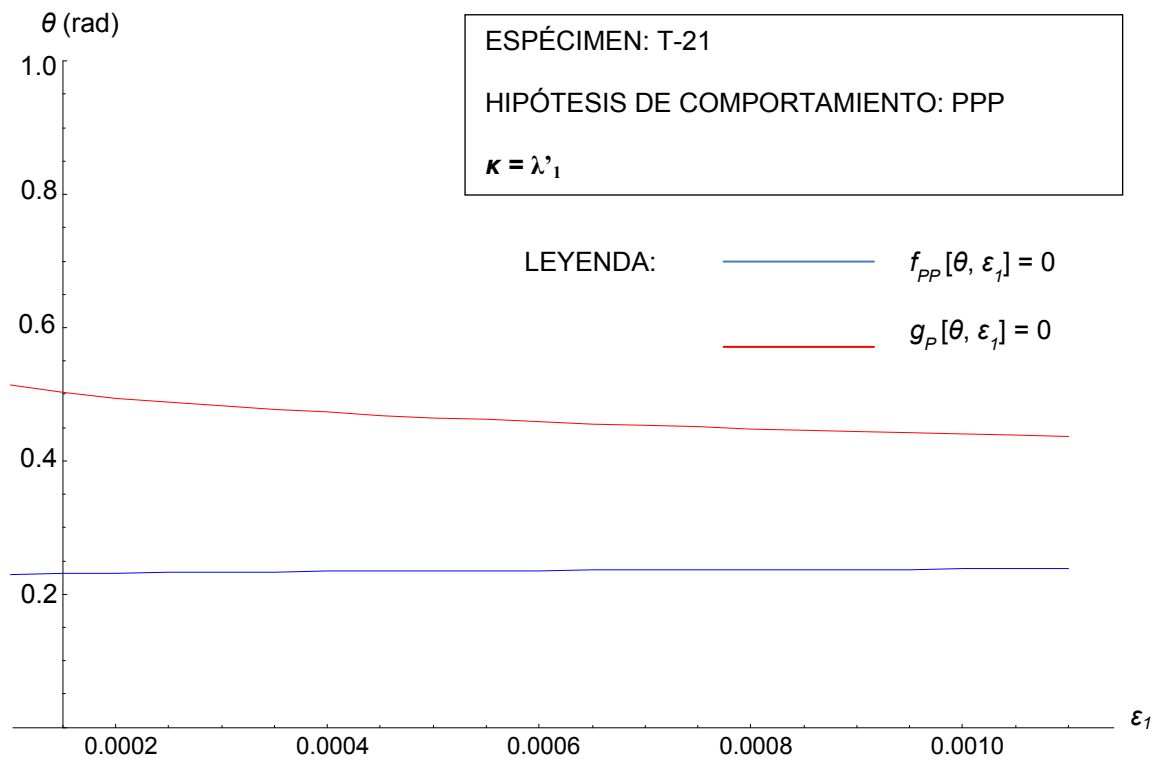
**HIPÓTESIS DE COMPORTAMIENTO: EEP**



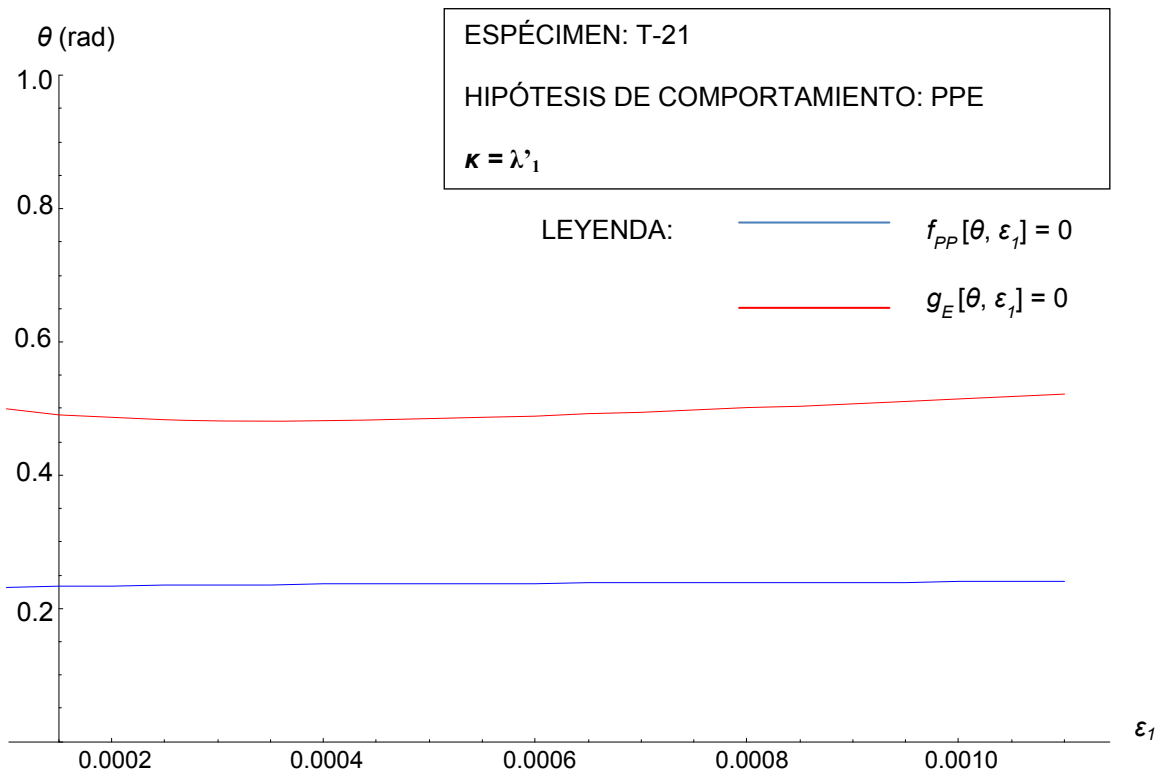
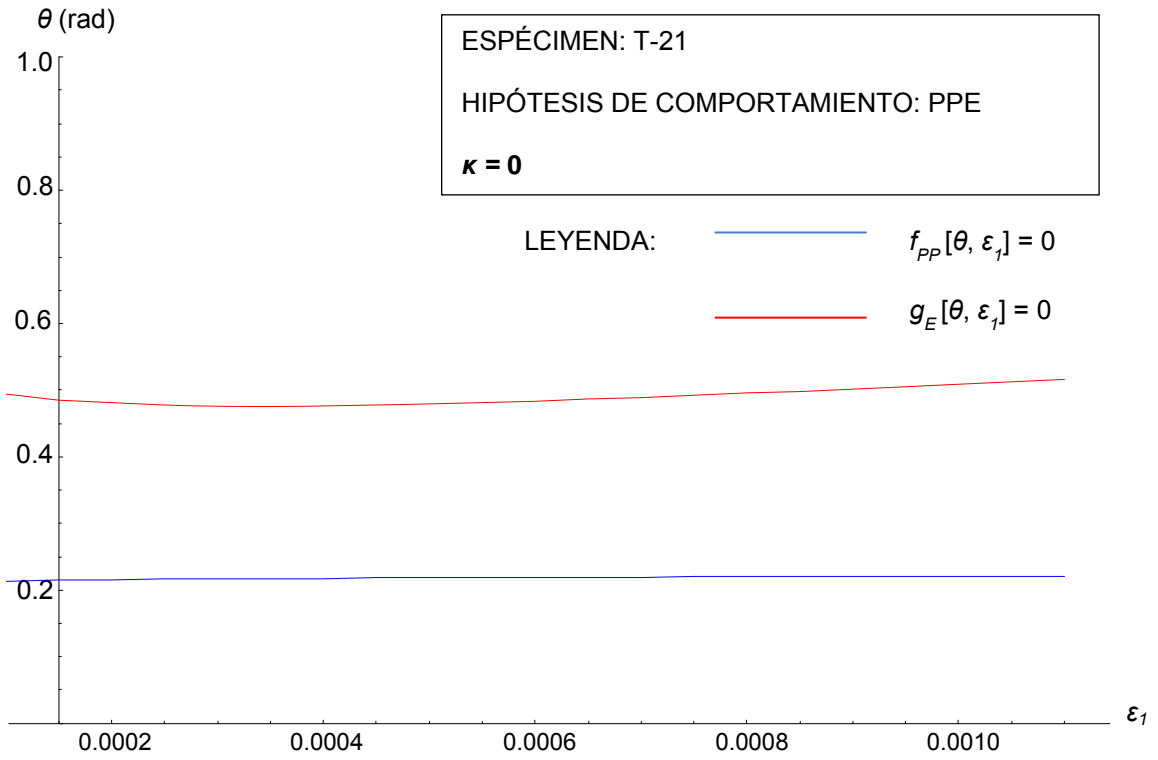


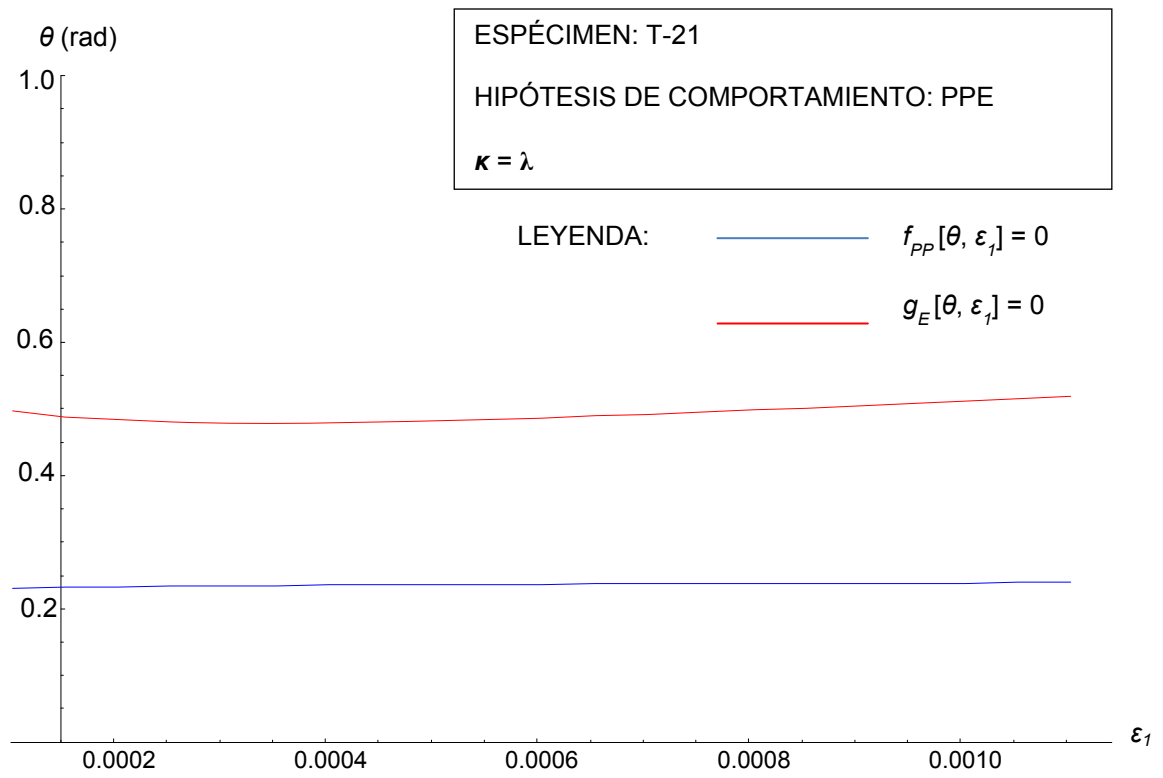
**HIPÓTESIS DE COMPORTAMIENTO: PPP**





**HIPÓTESIS DE COMPORTAMIENTO: PPE**





# Bibliografía

- [1] Ahmad, S.H., Park, F., El-Dash, K., *Web reinforcement effects on shear capacity of reinforced high – strength concrete beams*, Magazine of Concrete Research, 1995, 47, No. 172, Sept., pp. 227-233.
- [2] ACI (American Concrete Institute). *ACI Building Code Requirements for Structural Concrete*, ACI 318-05.
- [3] Arbesman, B., Conte, D.F. (1973) *The Design and Testing to Failure of a Prestressed Concrete Beam Loaded in Flexure and Shear*, BAsC thesis, Department of Civil Engineering, University of Toronto.
- [4] ASCE-ACI Committe 445 on Shear and Torsion (1998) *Recent Approaches to Shear Design of Structural Concrete*, Journal of Structural Engineering, pp. 1375- 1417.
- [5] Belarbi, A., and Hsu, T.T.C. (1994) *Constitutive laws of concrete in tension and reinforcing bars stiffened by concrete*, ACI Structural Journal., Vol. 91, No. 4, pp. 465-474.
- [6] Belardi, A., y Hsu, T.T.C. (1995) *Constitutive laws of softened concrete in biaxial tension - compression*, ACI Structural Journal., Vol. 92, No. 5, pp. 562-573.
- [7] Bentz, E. (2005) *Explaining the Riddle of Tension Stiffening Models for Shear Panel Experiments*, ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 131, No. 9, pp. 1422-1425.
- [8] Bentz, E., Vecchio, F.J. y Collins, M.P. (2006) *Simplified modified compression field theory for calculating shear of reinforced concrete elements*, ACI Structural Journal, Vol. 103, No. 4, pp. 614-624
- [9] Bernhardt, C.J., Fynboe, C.C. (1986) *High Strength Concrete Beams*, Cement and Concrete Research Institute, The Norwegian Institute of Technology.

- [10] Cladera Bohigas, A., Marí Bernat, A. (2002) *Shear Design of Reinforced High-Strength Concrete Beams*, Universidad Politécnica de Cataluña (Dpto. de Ingeniería de la Construcción), Barcelona.
- [11] Coley, D.A., (1999) *An Introduction to Genetic Algorithms for Scientists and Engineers*, World Scientific Publishing, Singapore.
- [12] *Código modelo CEB-FIP 1990 para hormigón estructural*. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Grupo Español del Hormigón y Asociación Técnica Española del Pretensado.
- [13] Collins, M.P., Mitchell D., (1991). *Prestressed Concrete Structures*. Prentice Hall, Nueva Jersey.
- [14] Davis, L., (1991) *Handbook of Genetic Algorithms*, Van Nostrand Reinhold, New York.
- [15] De Boor, C., DeVore, R. (1983) *Approximation by Smooth Multivariate Splines*, Trans. Am. Math. Soc. 276 (2), pp. 775-788.
- [16] *EHE - 08 Instrucción de Hormigón Estructural*. Ministerio de Fomento. Gobierno de España.
- [17] Eurocode 2: *Design of concrete structures- Part 1: General rules and rules for buildings* prEN 1992-1-1 (July 2002). European Committee for Standardization. Brussels.
- [18] Escofier, J-P. (2001) *Galois Theory*, Springer-Verlag, New York.
- [19] Gil-Martín, L.M., Hernández-Montes, E., Aschheim, M., Pantazopoulou, S. *Refinements to Compression Field Theory, with Application to Wall-Type Structures*. American Concrete Institute, ACI Special Publication (265 SP), pp. 123-142.

- [20] Hernández Montes, E., Gil Martín, L.M. (2007): *Hormigón Armado y Pretensado. Concreto Reforzado y Preesforzado*. Grupo de investigación TEP-190 Ingeniería e Infraestructuras, Universidad de Granada, Granada.
- [21] Hsu, T. T. C., 1993, *Unified Theory of Reinforced Concrete*, CRC Press, Boca Raton, FL.
- [22] Hsu, T.C. (1996) *Toward a unified nomenclature for reinforced concrete theory*, Journal of Structural Engineering, Vol. 122, No. 3, pp. 275-283
- [23] Hsu, T.T.C. (1998): *Unified Approach to Shear Analysis and Design*, Cement and Concrete Composites, 20, p. 419-435
- [24] Kong, P Y L, Rangan, B V, *Reinforced High Strength Concrete (HSC) Beams in Shear*, Australian Civil/ Structural Engineering Transactions, 1997, Vol. CE 39, No. 1, pp. 43-50.
- [25] Krefeld, W. J., Thurston, C.W. (1966) *Studies of the Shear and Diagonal Tension Strength Simply Supported Reinforced Concrete Beams*, Journal of the American Concrete Institute, V. 63, Nr. 4, pp. 451-476.
- [26] Leonhardt, F., Wlather, R. (1962) *Schubversuche an einfeldrigen Stahlbetonbalken mit und ohne Schubbewehrung zur Ermittlung der Schubtragfähigkeit und der oberen Schubspannungsgrenze*, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 151, Berlin.
- [27] Levi, F., Marro, P. (1988) *Shear tests up to failure of beams made with normal and high strength concrete*, Special Discussion Session: Design Aspects of High Strength Concrete, Dubrovnik, pp. 13-23.
- [28] Lyngberg, B. S. (1976) *Ultimate Shear Resistance of Partially Prestressed Reinforced Concrete I-Beams*, ACI Journal Proceedings, V. 73, Nr. 4, pp. 214-222
- [29] Mitchell, D., and Collins, M. P., 1974, "Diagonal Compression Field Theory: A Rational Model for Structural Concrete in Pure Torsion," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 71, No. 8, Aug., pp. 396-408.



- [30] Mörsch, E. (1909), *Concrete Steel Construction*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- [31] Mörsch E. (1922). *Der Eisenbetonbau-Seine Theorie und Anwendung*. 5<sup>th</sup> Ed. Wittwer. Stuttgart. Vol 1. Part 2.
- [32] Palaskas, M.N., Attiogbe E.K., Darwin, D., *Shear Strenghtof Lightly Reinforced T – Beams*, ACI Journal, 1981, Title. No. 78-39, pp. 447-455.
- [33] Pang, X.B. y Hsu, T.C. (1995) *Behavior of reinforced concrete membrane elements in shear*, ACI Structural Journal, Vol. 92, No. 6, pp. 665-679
- [34] Quast, U. (1999), *Zum Einfluß von Längszugspannungen auf das Schubtragverhalten von Stahlbetonbbalken*, Bautechnik, V. 76, Heft 8, pp. 646-650.
- [35] Regan, P., *Shear in Reinforced Concrete – an experimental study*, PhD Thesis, Civil Engineering Dept., Imperial College.
- [36] Reineck, K. - H., Kuchma, D. A., Fitik, B. (2011) *Formelsammlung für die Datenerhebungsdatei der Stahlbetonbalken mit Bügel (vsw-RC\_DS) unter Einzellasten*
- [37] Rheinboldt, W.C. (1974) *Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations*, SIAM Reg. Conf. Series in Appl. Math. 14.
- [38] Richard, R.M., Abbott, B.J. (1975): *Versatile Elastic-Plastic Stress-Strain Formula*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 101, No. EM4, pp. 511-515
- [39] Robinson, J.R. (1961): *Essais a l'Effort Tranchant de Poutres a Ame Mince en Beton Arme*, Annales des Ponts et Chaussées, V.131, No.2, Paris, pp. 225-255
- [40] Robinson, J.R., Demorieux, J.M. (1968): *Essai de Traction-Compression sur Modeles d'Armes de Poutre en Beton Arme – Part I*, Institut de Recherches Appliquees du Beton Arme, Paris

[41] Soerensen, H.C. (1974) *Shear Tests on 12 Reinforced Concrete T- Beams*, Rapport Nr. R 60

[42] Vecchio, F.J., and Collins, M.P. (1986) *The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear*, ACI Journal, Vol. 83, No. 2, pp. 219-231.

[43] Vecchio, F.J. (2000) *Disturbed Stress Field Model for Reinforced Concrete: Formulation*, Journal of Structural Engineering, Vol. 126, No. 9, pp. 1070-1077

[44] Wood, A. (1999) *An Introduction to Numerical Mathematics*, Addison-Wesley.

[45] Wu, H. Q., and Gilbert, R. I. (2008) *An experimental study of tension stiffening in reinforced concrete members under short-term and long-term loads*, UNICIV Report No. R-449 -. ISBN: 85841-416-3

[46] Yoon, Y-S., Cook, W.D., Mitchell, D. (1996) *Minimum Shear Reinforcement in Normal, Medium, and High-Strength Concrete Beams*, ACI Structural Journal, V. 93, Nr. 5, pp. 1-9.