

Máster Universitario en Estructuras. UGR 2.010/11

Conservación de la simetría en el mallado topológico de estructuras tensadas

Trabajo Fin de Máster

Juan Francisco Carbonell Márquez
Tutor: Enrique Hernández Montes

Contenidos

Resumen	3
0. Objetivos.....	4
1. Introducción a las estructuras tensadas.....	5
1.1. Las estructuras tensadas a lo largo de la Historia.....	5
1.2. Principales características de las estructuras tensadas.....	9
1.3. Procedimiento de cálculo de la tensoestructura.....	11
2. La búsqueda de la forma de equilibrio: el Método de la Densidad de Fuerza.....	14
3. El mallado topológico	18
4. La pérdida de simetría.....	25
5. Propuesta de algoritmo para conservar la simetría	29
6. Ejemplos	33
7. Conclusiones	42
Referencias.....	43

Resumen

La generación de los patrones de corte resulta un paso imprescindible a la hora de realizar el diseño de una estructura tensada. Si la estructura para la cual hay que realizar los patrones es, en principio, simétrica, el diseñador tratará de mantener esta simetría en el mallado de la estructura para lograr un patronaje más simple y barato que el que se obtendría como resultado de un mallado asimétrico. Así, en el caso de una estructura cuyo soporte externo presenta simetría, la forma de la estructura tensada ideal sería también simétrica. Al usar el mallado topológico (MT) junto al método de la densidad de fuerza (MDF) para encontrar una primera forma de equilibrio de una estructura tensada con un soporte externo simétrico, se observa que la simetría en el mallado no siempre se conserva. Este problema se encuentra relacionado con el procedimiento de mallado que se introduce en la búsqueda de la forma de equilibrio. Sin embargo, el empleo de una serie de reglas simples a la hora de construir la topología para la malla permite conservar la simetría en la misma. Este artículo proporcionará un algoritmo que incluye esa serie de reglas y que será probado con varios ejemplos para ilustrar la aplicabilidad de esas prescripciones.

0. Objetivos

Hoy en día el empleo de estructuras tensadas se ha hecho muy presente proyectos arquitectónicos de diferente uso. Su gran versatilidad permite utilizarlas en eventos temporales o instalarlas durante un período largo de tiempo, en grandes luces para cubrir espacios lúdicos, turísticos o de ocio.

Dado su carácter claramente no lineal, el cálculo de este tipo de estructuras no se aborda como en el caso de otras de la arquitectura y la ingeniería común, en las que el equilibrio se plantea en el estado de reposo de las mismas, sin tener en cuenta las posibles modificaciones que las deformaciones sufridas pudieran conllevar.

Así pues, previamente a la aplicación de las cargas que la estructura ha de soportar a lo largo de su vida útil, se ha de identificar la forma de equilibrio que ésta va a poseer en reposo. Para la búsqueda de dicha forma de equilibrio existen varios procedimientos, siendo el aquí empleado el Método de la Densidad de Fuerzas (Schek, 1.974). Dicho método requiere como "inputs" un estado tensional arbitrario de la estructura y una malla de nodos y conexiones a la que aplicarle dicho estado tensional. Para obtener esta malla de nodos se empleará aquí el procedimiento de Mallado Topológico (Hernández Montes et al., 2.006).

Al tratar con una estructura cuya proyección en planta coincide con un polígono regular y, por consiguiente, simétrica, es conveniente que el mallado empleado para materializar la estructura sea también simétrico respecto a los ejes de simetría de la proyección en planta de la carpa, con el principal objetivo de obtener unos patrones de corte adecuados. Se observa que no todas las mallas de nodos y conexiones obtenidas mediante el Mallado Topológico mantienen su simetría al introducirlas en el Método de la Densidad de Fuerzas, dando como resultado formas de equilibrio asimétricas y patronajes más complejos.

Se realiza este estudio para identificar y solventar el problema de la pérdida de la simetría en las mallas para estructuras tensadas. No obstante, para la elaboración del presente estudio, se fijan los siguientes objetivos:

- Realizar una introducción a las estructuras tensadas, la evolución de su empleo y procedimientos de cálculo.
- Descripción detallada de los procedimientos de cálculos empleados en el estudio: Método de la Densidad de Fuerzas y Mallado Topológico.
- Identificación del problema de la pérdida de simetría en el Mallado Topológico en el cálculo de estructuras con forma de polígono regular en planta.
- Propuesta de un algoritmo sencillo para evaluar la simetría del Mallado topológico previamente a la búsqueda de la forma de equilibrio de la estructura.
- Desarrollo de ejemplos de apoyo para validar el algoritmo propuesto.

1. Introducción a las estructuras tensadas

Dentro del diseño arquitectónico y de la construcción existen un tipo de estructuras materializadas a partir de membranas tensadas, donde los elementos sólo soportan tracción. Estas estructuras suelen vincularse a varios términos como “tenso formas”, “membranas arquitectónicas”, “membranas textiles tensostáticas”, “envolturas textiles”, “tensoestructuras” o “estructuras tensadas”. Sin embargo, todos los anteriores nombres convergen en el de Arquitectura Textil, denominación genérica referida a la arquitectura que hace uso de materiales tensados, ya sean membranas textiles, láminas, mallas de cables, etc. Este tipo de estructuras es un sistema de construcción ligero, usado normalmente para la ejecución de cubiertas con gran estabilidad, combinando y equilibrando la fuerza de elementos rígidos (postes, arcos, etc.) con la versatilidad, adaptabilidad y, consecuente, vistosidad de elementos flexibles (lonas y cables).

1.1. Las estructuras tensadas a lo largo de la Historia

A pesar de su carácter vanguardista, el empleo de materiales textiles en construcciones ligeras ha acompañado a la humanidad desde los primeros pueblos trashumantes como viviendas o refugios, empleando cueros tensados y luego mediante telas en las civilizaciones griegas, romanas y de oriente (Fig. 1.1).



Fig. 1.1. Tienda de pastores trashumantes

No obstante lo anterior, el origen de la tecnología de las estructuras tensadas de hoy en día se encuentra en la mecanización de los procesos de hilado y tejido de las telas

con la Revolución Industrial en el siglo XIX. La mecanización de dichos procesos permitió la creación de grandes tiendas portátiles que serían empleadas en las carpas de los circos ambulantes, abundantes a lo largo de este siglo. Tiendas como un *Chapiteau* de un circo podían llegar a tener hasta 50 metros de diámetro y estaban realizadas mediante lino o lona de cáñamo. Normalmente, el *Chapiteau* solía sostenerse cerca del centro por medio de cuatro mástiles principales, cuyos arranques se sitúan en el perímetro exterior de la pista circense. La lona de la cubierta colgaba desde estos mástiles hasta el perímetro del recinto, formado por postes colocados a intervalos frecuentes y atirantados mediante cuerdas ancladas al suelo para transmitir los esfuerzos provenientes del peso de la lona (Fig. 1.2). A pesar de su carácter ambulante, instaladas durante un periodo de tiempo relativamente corto (días o semanas), el diseño de este tipo de estructuras ya incorporaba dos de las características fundamentales de las modernas tensoestructuras que las hace difícilmente deformables: superficies con doble curvatura y estado pretensado.



Fig. 1.2. *Chapiteau* o carpa central de un circo contemporáneo.

Los primeros cálculos prácticos de tensiones y deformaciones de las tensoestructuras se deben al ingeniero ruso Vladimir Shukhov, quien construyó la primera cubierta de un edificio a partir de una membrana textil en la Shukhov Rotunda, un pabellón circular construido en 1.895 para la All-Russia Exhibition de 1.896. El resto de la cubierta de dicho pabellón, al igual que otros siete, que cubrían un área de veinticinco mil metros cuadrados, consistía en una malla metálica colgante conformando una nueva tensoestructura (Fig. 1.3).

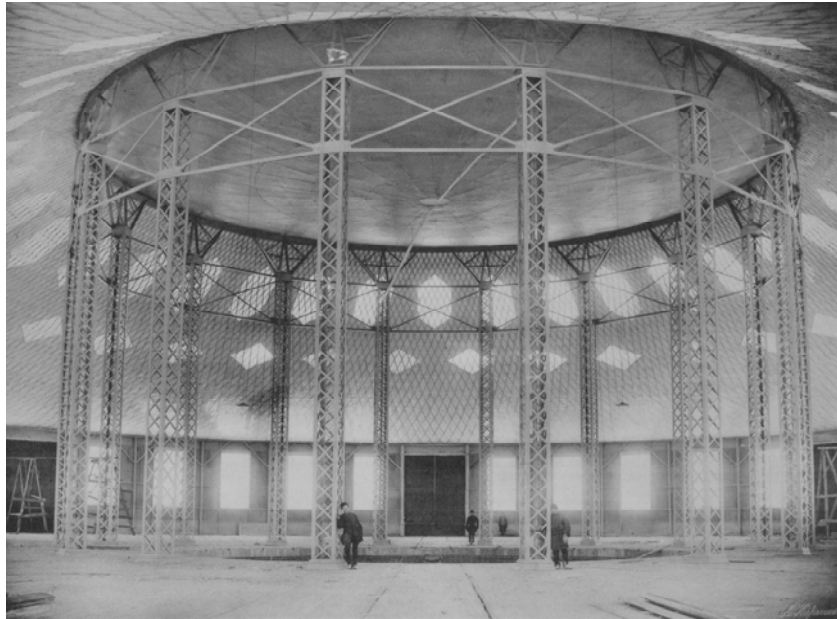


Fig. 1.3. Cubierta a partir de membrana y malla metálica del Shukhov Rotunda, en la All-Russia Exhibition de 1.986, en Nizhny Novogord (Rusia)

El siguiente hito histórico en la construcción de estructuras tensadas no se produce hasta mediados del siglo XX y coincide con el Sidney Meyer Music Bowl, diseñado por el arquitecto Barry Patten en 1.958 y oficialmente inaugurado en 1.959. La cubierta de este auditorio consiste en una carpa de 4.055 metros cuadrados constituida por una membrana cubierta con aluminio, unida a una red de cables y sujeta por dos mástiles de 21,3 metros de alto. El cordón metálico del perímetro frontal está constituido por siete cordones de 9 cm de diámetro y 173 metros de largo, anclados al terreno mediante bloques de hormigón (Fig. 1.4).



Fig. 1.4. Sidney Meyer Music Bowl, de Barry Patten, 1.959

A pesar de las anteriores obras expuestas, la primera de las obras de propiamente de arquitectura textil suele atribuirse al arquitecto alemán Frei Otto. Dicha estructura no es otra que la del Pabellón Alemán para la Exposición Universal de Montreal de 1.967, obra que constituyó un verdadero hito tanto arquitectónica como estructuralmente (Fig. 1.5).



Fig. 1.5. Pabellón Alemán, Exposición Universal de Montreal; Frei Otto, Rolf Gutbrod y Fritz Leonhardt, 1.967

La estructura de la cubierta del pabellón consistía en 10.000 metros cuadrados de tela de poliéster cubierta de PVC soportada por ocho mástiles de entre 14 y 38 metros, para cubrir un total de 8.000 metros cuadrados de superficie. El conjunto en planta poseía un ancho máximo de 105 metros y un largo máximo de 130 metros. Aunque se pensó inicialmente para ser desmantelada tras la finalización de la Exposición y poder ser montada en otro lugar, el mantenimiento de la estructura se abandonó en el invierno de 1.972/73, algo que permitió realizar un interesante, aunque involuntario, test de carga: las intensas nevadas provocaron que la carga máxima permisible para la cubierta, aproximadamente 1 KN/m^2 , fueran superadas hasta dos o tres veces. Como consecuencia, la estructura sólo sufrió una serie de pequeños daños localizados que podrían haber sido reparados sin mucha complejidad, pero fue finalmente demolida (Ishii, 1.999).

Aparte de la anteriormente citada estructura, la obra quizá más popular del arquitecto alemán Frei Otto es el Estadio Olímpico de Múnich para las Olimpiadas de 1.972 (Fig. 1.6). Este estadio ha servido como inspiración a numerosas construcciones deportivas que hoy en día hacen uso de las tensoestructuras para conseguir cubiertas singulares y

de gran impacto visual. Además, el desarrollo informático experimentado a partir de dichas fechas ha permitido la amplia proliferación de este tipo de estructuras a otros ámbitos más comunes de la arquitectura como terminales de transporte, centros comerciales e incluso viviendas privadas.



Fig. 1.6. Estadio Olímpico de Múnich, Behnisch, Otto y Leonhardt, 1.972

1.2. Principales características de las estructuras tensadas

Tal y como se ha mencionado anteriormente, las estructuras tensadas son empleadas muy comúnmente en la actualidad. El motivo principal que potencia el uso de las tensoestructuras se encuentra en la facilidad para proporcionar amplios cerramientos con un mínimo de elementos de soporte. A parte de ello, ofrecen un amplio rango de soluciones con una muy buena imagen estética frente a un mismo problema, la mayor parte de ellas sencillas y rápidas de materializar.

Estas estructuras bien podrían asociarse a la arquitectura sostenible. Las amplias prestaciones que ofrecen este tipo de estructuras se deben principalmente a su bajo peso propio, que permite obtener amplias cubiertas extraordinariamente ligeras; al coeficiente de transmisión de luz, que proporciona un buen aprovechamiento de la iluminación natural, desechando el vidrio y abaratando costes de construcción, y, por último, su rapidez de puesta en obra basada en el montaje de elementos prefabricados desmontables y reciclables. Además, los materiales empleados (termoplásticos como

PES-PVC¹ o PVDF², o termoestables como el ETFE³ o el PTFE⁴) son eficaces en zonas templadas, tropicales y áridas frente a las exposiciones solares.

Además de su gran impacto visual y las demás características anteriormente referidas, el principal motivo que diferencia a las estructuras tensadas del resto de estructuras rígidas convencionales es su forma y su comportamiento físico, aspectos que determinarán también los procedimientos de cálculo a emplear en el diseño de este tipo de estructuras. Así pues, los aspectos principales a considerar a la hora de diseñar una estructura textil son la forma que va a adoptar la superficie y el nivel de pretensado.

Las formas de las estructuras tensadas comúnmente construidas responden a una geometría de superficie anticlástica, es decir, tienen curvatura gaussiana negativa. La curvatura anticlástica ofrece las características más singulares de este tipo de estructuras: su flexibilidad en las formas y el carácter orgánico de su apariencia. Algunos de los tipos más simples de estas superficies son el paraboloides de revolución o el paraboloides hiperbólico (Fig. 1.7). Sin embargo, estas formas simples pueden combinarse entre sí y ser deformadas puntualmente para dar lugar a formas más complejas y vistosas.

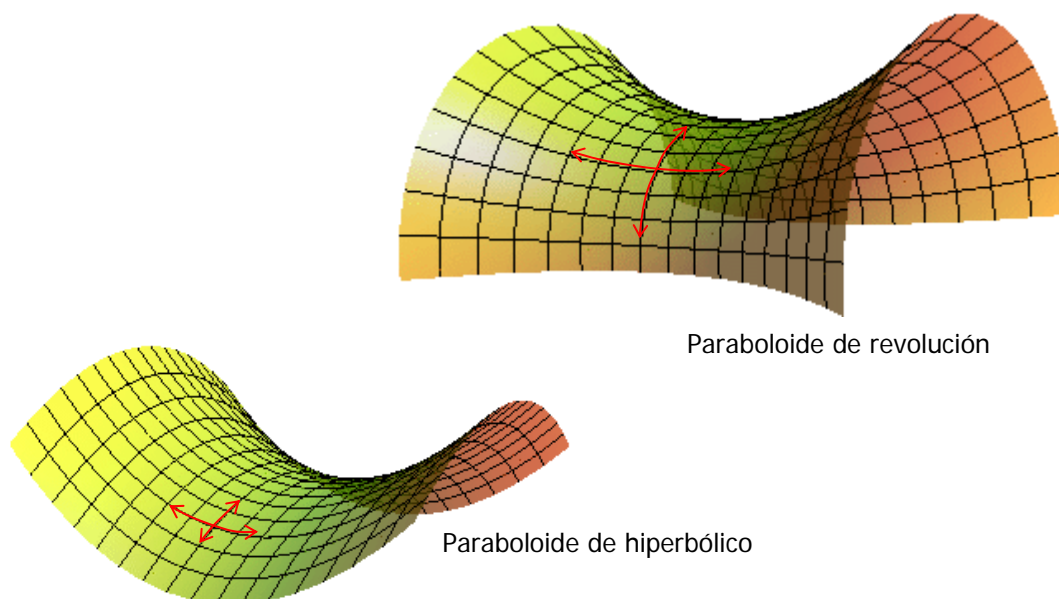


Fig. 1.7. Superficies geométricas simples con curvatura anticlástica en todos los puntos

¹ PES-PVC: tejido poliéster recubierto de policloruro de vinilo

² PVDF: Polifluoruro de vinilideno

³ ETFE: Etileno-TetraFluoroEtileno

⁴ PTFE: Poli-TetraFluoroEtileno, más conocido como Teflón

Otro aspecto que ha de ser cuidado al máximo es el pretensado de la estructura, ya que éste será el factor que proporcionará la rigidez de la membrana y, como se verá más adelante en el presente estudio, el que determine la forma última de la tensoestructura. Aquí es donde juega también un papel importante la forma anticlástica ya si la estructura no tuviese curvaturas de sentido opuesto en dos direcciones, al existir tracciones en todas las direcciones, no existiría equilibrio (Murcia Vela, 2.007).

Dada la importancia que el pretensado tiene en este tipo de estructuras, todos los detalles constructivos deben cuidarse al máximo para evitar en todo momento desviaciones del estado tensional con el que previamente la estructura ha sido calculada. Las distintas conexiones de la malla con la estructura soporte y su perímetro serán los puntos a partir de donde la estructura recibirá el pretensado que le haga adquirir su forma final.

1.3. Procedimiento de cálculo de la tensoestructura

Hasta ahora se ha hecho mención en numerosas ocasiones a la importancia de forma y el pretensado en las estructuras textiles. Se ha dicho también que estas estructuras ofrecen al diseñador innumerables posibilidades formales para resolver un problema. Es claro que la forma de la tensoestructura estará íntimamente ligada a su estado tensional y viceversa, algo que hace que su procedimiento de cálculo sea muy diferente a las estructuras convencionales, donde el equilibrio se plantea en la configuración no deformada de la estructura. Dada el carácter claramente no lineal de las estructuras tensadas, donde pequeñas deformaciones dan lugar a nuevos estados tensionales, el equilibrio se ha de plantear en la configuración deformada de la membrana.

El procedimiento de diseño de las estructuras tensadas está muy determinado por el desarrollo de los siguientes tres pasos: búsqueda de forma de equilibrio o "formfinding", análisis estructural y patronaje. En el proceso de búsqueda de la forma de equilibrio, el diseñador especifica una serie de parámetros para calcular otros tantos y obtener los detalles de la forma de la estructura. Una vez obtenida dicha forma, se aplicarán sobre ella las cargas a soportar y se obtendrá la respuesta en términos de deformación y tensión de la estructura frente a las mismas. Finalmente, se elaborará el patronaje de la estructura con el objetivo de dividirla en partes para, posteriormente, ser construida (Levy et al., 2.004).

Así pues, el primer problema al que se enfrenta el diseñador a la hora de calcular una tensoestructura es al de la búsqueda de la forma de equilibrio para aplicar sobre ella las cargas que experimentará la estructura a lo largo de su vida útil. Hace más de una treintena de años, cuando no se disponía de la potencia de cálculo de los ordenadores actuales, la forma de equilibrio era diseñada a partir de modelos a escala. Sin embargo, hoy en día, se han desarrollado numerosas técnicas apoyadas en la

informática y provenientes de diferentes escuelas que basan su funcionamiento conocimientos matemáticos y mecánicos variados, ya sea el método de los elementos finitos o formulaciones dinámicas (Linkwitz, 1.999).

En el presente trabajo se empleará como método para la búsqueda de la forma de equilibrio el denominado "método de la densidad de fuerza", en adelante MDF (Linkwitz et al., 1.971 y Schek, 1.974). El procedimiento de diseño empleando este método resulta iterativo ya que, introduciendo inicialmente una malla de nodos-conexiones y un estado tensional cualquiera de dicha malla (el que será denominado densidad de fuerza), dicha malla y dicho estado tensional se irán modificando hasta encontrar la forma deseada para la estructura.

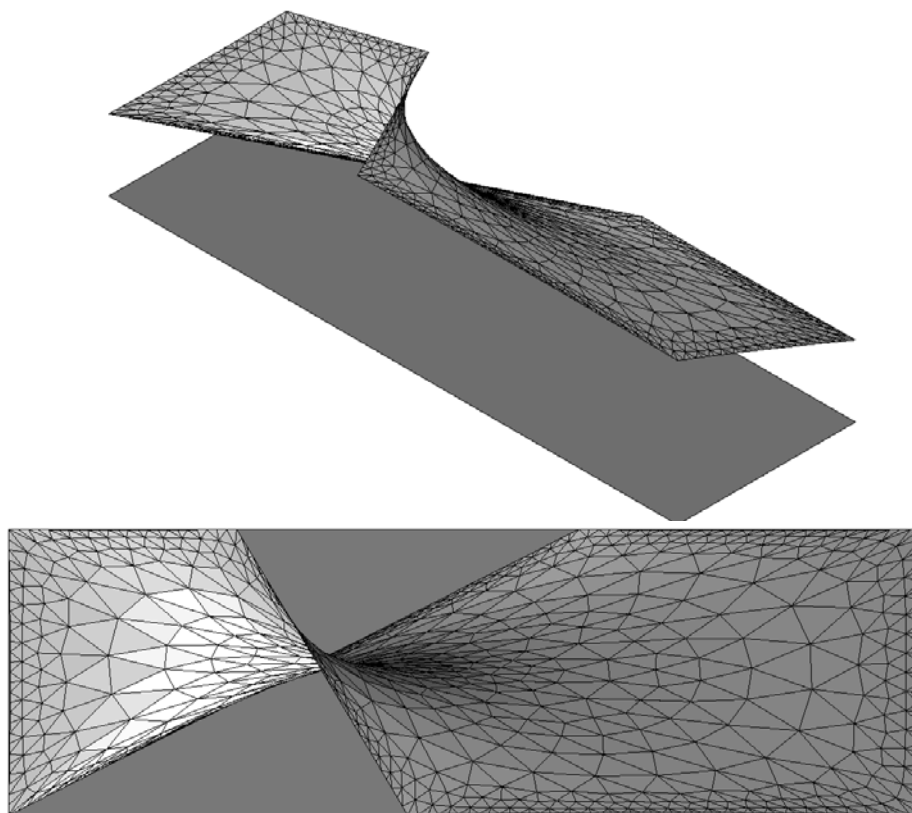


Fig. 1.8. Ejemplo de estructura tensada en la que el mallado en proyección horizontal no es posible

Sin embargo, y tal como se indica en el párrafo anterior, previamente a la aplicación del MDF, el diseñador necesita conocer una malla de nodos y conexiones al que aplicar el estado tensional con el que empezar el anteriormente referido proceso iterativo. Muchos autores sugieren imaginar inicialmente una proyección horizontal de la estructura espacial, en otras palabras, su sombra, y, apoyándose en el contorno de ésta, trazar una malla de nodos y conexiones. Sin embargo, si la estructura a materializar resulta relativamente compleja, puede requerirse un esfuerzo desproporcionado para este paso inicial. Llevándolo al extremo, imagínese el extraño,

pero posible, caso de una estructura tensada en la que la membrana produzca un giro de 180° en el espacio (Fig. 1.8). En ese caso no se podría aplicar el método anterior basado en la proyección horizontal de la membrana. Para solucionar este problema surge un método denominado topológico, a partir de cual, con una serie de reglas sencillas, el diseñador dispondrá de una malla adecuada para ser introducida en el MDF.

El uso del mallado topológico (MT) para estructuras tensadas fue introducido por Hernández-Montes (Hernández-Montes et al., 2.006) como un procedimiento de mallado previo al uso del MDF. El MT es aplicable sólo al MDF como medio para encontrar una primera forma de equilibrio empleando reglas topológicas. La ventaja de este procedimiento (MT-MDF) sobre otros como los considerados geométricos (Hernández-Montes et al., 2.006), es que no se requiere realizar ninguna conjetura previa sobre la posición inicial de los nodos libres de la malla; sólo se precisa conocer la conectividad de los nodos que conforman la red para resolver el problema, en contraste con los métodos de mallado que están basados exclusivamente en geometría. Los únicos datos iniciales necesarios para iniciar el MT-MDF son las coordenadas de los nodos fijos del contorno, los ratios de densidad de fuerza para las ramas de la red y una serie de reglas topológicas que definen una matriz **C** (Hernández-Montes et al., 2.006) que contiene la información sobre la conectividad de la red de nodos.

Una vez que se dispone de la superficie de equilibrio, se llevará a cabo sobre ella un análisis estático de cargas, empleando un método que tenga en cuenta que la estructura es geoméricamente no lineal. Tras esto, se procederá al patronaje, es decir, a la división de la membrana en distintas regiones para ser construida.

Tal y como se hizo mención, las superficies materializadas por las tensoestructura suelen tener doble curvatura. Este hecho hace que dicha superficie sea no desarrollable. Y es este uno de los dos principales problemas del patronaje, es decir, el diseñador debe transformar en figuras planas cada una de las porciones no desarrollables en que se ha dividido la membrana. En la actualidad se han desarrollado numerosos métodos para lograr este cometido (Gosling, 2.002 y Maurin et al., 2.005)

El segundo de los problemas que aparece al realizar el patronaje es la compensación. El patronaje básicamente consiste en dividir la membrana, en estado tensionado y mediante líneas geodésicas o cortes planos, en distintas porciones. Así pues, será obvio que las distintas porciones, una vez han sido hechas planas deben ser sometidas a algún procedimiento que las destense ya que el material a partir del cual se van fabricar estará en un estado tensional nulo. Este es un procedimiento extremadamente complejo ya que hay que considerar las propiedades del material (su urdimbre) y de hecho, hasta hace poco, era controlado solamente por la intuición del diseñador (Kim et al., 2.002).

2. La búsqueda de la forma de equilibrio: el Método de la Densidad de Fuerza

Tal y como se ha mencionado en el anterior apartado del presente estudio, el método de la densidad de fuerza permite al diseñador obtener una primera forma de equilibrio de la tensoestructura. La principal ventaja éste frente a otros métodos empleados para encontrar la forma de equilibrio de la estructura tensada (método de la densidad de fuerza superficial de Maurin y Motro (Maurin et al. 1.998); método de la relajación dinámica de Barnes (Barnes 1.999)) es que se puede encontrar el estado de equilibrio de una malla cualquiera a través de la resolución de un sistema de ecuaciones lineales (Schek, 1.974).

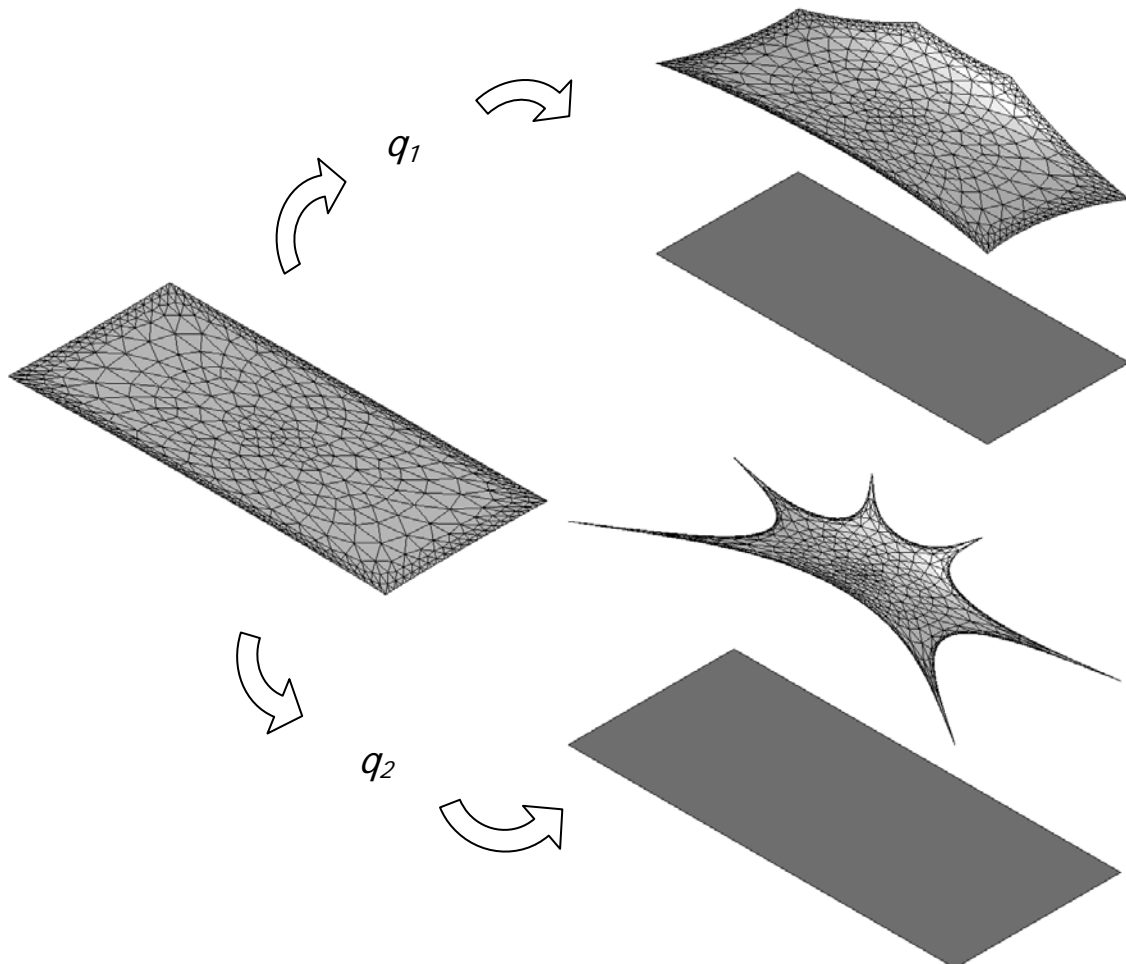


Fig. 2.1. Correspondencia biunívoca entre la densidad de fuerza y la posición de equilibrio de la malla

El método de la densidad de fuerza se basa su funcionamiento en el parámetro denominado "densidad de fuerza", q , nombre con el que se denomina al ratio existente entre la fuerza transmitida por un cable o conexión de la malla y su longitud. Así pues,

dado que el equilibrio de la malla se basa en un sistema de ecuaciones lineales, la posición de equilibrio de la estructura estará biunívocamente ligada a los valores que tomen las distintas densidades de fuerza para cada una de las ramas de la red (Fig. 2.1).

Para aplicar el método es preciso conocer inicialmente la malla de nodos y conexiones. Dicha malla quedará descrita a través de la matriz de conectividad **C**; en el caso en que la red a resolver consista en n nodos unidos por m ramas, la matriz **C** será una matriz $m \times n$. **C** define la conectividad de los nodos tal y como se indica en la Figura 2.2. Como se muestra en la Figura 2.2, cada rama o conexión j une dos nodos $i(j)$ y $k(j)$, para $i < k$, quedando definidos elementos de la matriz **C** como:

$$C(j, r) = \begin{cases} +1 & \text{si } i(j) = r \\ -1 & \text{si } k(j) = r \\ 0 & \text{para el resto} \end{cases} \quad (1)$$

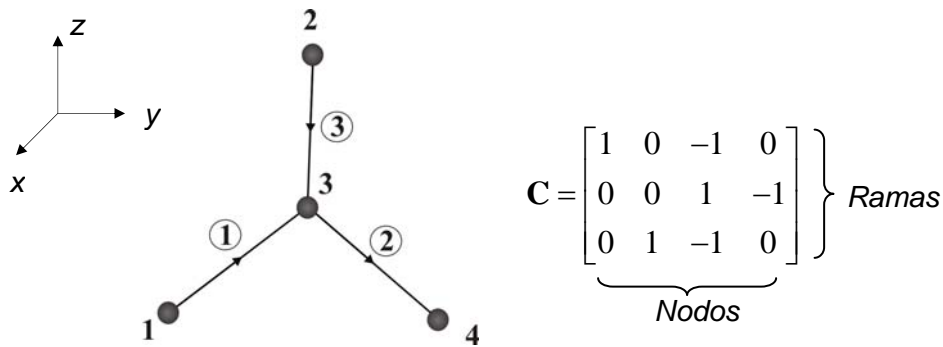


Fig. 2.2. Ejemplo para la construcción de una matriz **C**

Aparte de esta matriz **C**, se encuentran los vectores **x**, **y**, **z**, de longitud n , que contienen las coordenadas de los nodos. Inicialmente, estos vectores tendrán elementos conocidos que coincidirán con las coordenadas de los nodos fijos del contorno, mientras que los elementos desconocidos son las incógnitas a resolver mediante el método aquí descrito. El vectores **l** y **s**, de longitud m , contienen las longitudes l_j y la fuerza s_j de cada conexión j , respectivamente. Las fuerzas nodales se introducen en el sistema mediante vectores también de longitud n que contienen las componentes de las fuerzas: **p_x**, **p_y**, and **p_z**. En el caso de la Figura 2.2, las ecuaciones de equilibrio para el nodo 3 se obtienen a través de las proyecciones de las fuerzas a lo largo de cada uno de los tres ejes cartesianos:

$$\begin{aligned} \frac{s_1}{l_1}(x_3 - x_1) + \frac{s_2}{l_2}(x_3 - x_4) + \frac{s_3}{l_3}(x_3 - x_2) &= p_{3x} \\ \frac{s_1}{l_1}(y_3 - y_1) + \frac{s_2}{l_2}(y_3 - y_4) + \frac{s_3}{l_3}(y_3 - y_2) &= p_{3y} \\ \frac{s_1}{l_1}(z_3 - z_1) + \frac{s_2}{l_2}(z_3 - z_4) + \frac{s_3}{l_3}(z_3 - z_2) &= p_{3z} \end{aligned} \quad (2)$$

La gran ventaja que se encuentra en el MDF es la introducción del parámetro q , que se define como el ratio fuerza-longitud o densidad de fuerza para cada una de las conexiones. Estableciendo la condición de q constante para todas las ramas, entonces las ecuaciones de equilibrio constituyen un sistema lineal.

Empleando una formulación general del MDF, las ecuaciones de equilibrio para todos los nodos de la red se escriben en función de los vectores "diferencia de coordenadas" \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} , de la matriz \mathbf{C} de conectividad y de los vectores de posición \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} .

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{C}\mathbf{y} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{C}\mathbf{z} \end{aligned} \tag{3}$$

Si consideramos que las matrices \mathbf{U} , \mathbf{V} , \mathbf{W} y \mathbf{L} son matrices diagonales obtenidas como resultado de disponer las componentes de los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} y \mathbf{l} en la diagonal principal, las ecuaciones de equilibrio de la malla completa pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}^T \mathbf{U} \mathbf{L}^{-1})\mathbf{s} + \mathbf{p}_x &= 0 \\ (\mathbf{C}^T \mathbf{V} \mathbf{L}^{-1})\mathbf{s} + \mathbf{p}_y &= 0 \\ (\mathbf{C}^T \mathbf{W} \mathbf{L}^{-1})\mathbf{s} + \mathbf{p}_z &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

La principal propiedad del MDF es que el sistema de ecuaciones dado por (4) resulta lineal bajo la siguiente asunción: I

$$\mathbf{q} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{s} \tag{5}$$

donde \mathbf{q} es el vector, de longitud m , que contiene los ratios de densidad de fuerza q_j de todas las ramas. Finalmente, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{q} &= \mathbf{Q}\mathbf{u} \\ \mathbf{V}\mathbf{q} &= \mathbf{Q}\mathbf{v} \\ \mathbf{W}\mathbf{q} &= \mathbf{Q}\mathbf{w} \end{aligned} \tag{6}$$

donde \mathbf{Q} es una matriz diagonal $m \times m$ que contiene los ratios de densidad de fuerza para todas las conexiones q_j , las ecuaciones de equilibrio del sistema son:

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C})\mathbf{x} + \mathbf{p}_x &= 0 \\ (\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C})\mathbf{y} + \mathbf{p}_y &= 0 \\ (\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C})\mathbf{z} + \mathbf{p}_z &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Las ecuaciones presentadas en (7) constituyen un sistema lineal donde los valores conocidos son las coordenadas de los puntos fijos, la topología de la red y los valores de los ratios de la densidad de fuerza. Las incógnitas son las coordenadas del resto de nodos libres y aquellas las fuerzas nodales correspondientes a las reacciones en los

puntos fijos. Hay que destacar que el problema se encuentra desacoplado para sus tres coordenadas.

Imagínese que se ha de resolver la red expuesta en la Figura 2.2, donde los nodos 1, 2 y 4 son fijos y nodo 3 queda libre. Supóngase la densidad de fuerza de las conexiones es 1:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

y que las coordenadas de los nodos son:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ x_3 \\ 5 \end{bmatrix}; y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ y_3 \\ 0 \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ z_3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Con esto, las ecuaciones de equilibrio en las tres direcciones quedan:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ x_3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{x2} \\ 0 \\ p_{x4} \end{bmatrix} = 0 \\ & \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ y_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{y1} \\ p_{y2} \\ 0 \\ p_{y4} \end{bmatrix} = 0 \\ & \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ z_3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{z1} \\ p_{z2} \\ 0 \\ p_{z4} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Resolviendo los anteriores sistemas de ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} x_3 &= 3; & p_{x1} &= 3; & p_{x2} &= -1; & p_{x4} &= -2; \\ y_3 &= 0,67; & p_{y1} &= 0,67; & p_{y2} &= -1,33; & p_{y4} &= 0,67; \\ z_3 &= 1,33; & p_{z1} &= 1,33; & p_{z2} &= 0,33; & p_{z4} &= -1,67; \end{aligned} \quad (11)$$

El ejemplo anteriormente resuelto se corresponde con un caso sencillo de red y puede ser fácilmente resuelto a mano. No obstante, el potencial de cálculo de las computadoras junto con un sencillo programa, permiten al diseñador obtener la forma de equilibrio de una manera inmediata.

3. El mallado topológico

Según se ha descrito, el MDF resulta una herramienta de gran utilidad al afrontar la búsqueda de la forma de equilibrio de la estructura tensada. Sin embargo, dicho método requiere como punto de partida el conocimiento de la anteriormente citada matriz **C** de conectividades entre nodos y ramas, es decir, el diseñador debe conocer a priori al menos la topología de la malla de nodos que va a emplear en la materialización espacial de la tensoestructura.

Dentro de la bibliografía relacionada con la búsqueda de la forma de equilibrio de una estructura tensada, se encuentran numerosos ejemplos (véanse los citados en el libro de Levy y Spillers (Levy et al 1.988) en los que se necesita tener una idea inicial del resultado de la forma de equilibrio. A través de esta conjetura inicial, el diseñador deber realizar una proyección horizontal de la forma de equilibrio ideada y utilizar dicha proyección como primera malla a introducir en el MDF, Fig. 3.1. Los métodos basados en estos principios son los denominados métodos geométricos; frente a estos últimos, en Hernández-Montes et al. (Hernández-Montes et al., 2.006) se presenta el mallado topológico (MT, en adelante), que no requiere ningún tipo de conjetura inicial sobre la posición de equilibrio.

El MT basa su eficacia en que, contando con una serie de reglas topológicas sencillas, permite al diseñador obtener una malla independiente de la forma geométrica final de la tensoestructura. De este modo, ya no resulta necesaria la realización de ninguna conjetura sobre las coordenadas iniciales de los nodos para introducir la malla en el MDF e, incluso, se podría partir de la misma malla topológica para obtener diferentes estructuras tensadas, dependiendo sus formas de equilibrio de las densidades de fuerza adoptadas. Este hecho pone más énfasis si cabe en la principal idea del MDF, explicada en el apartado anterior del presente estudio: existe una relación biunívoca entre la densidad de fuerza seleccionada para cada unión de la estructura, q , y su forma de equilibrio, Fig. 2.1.

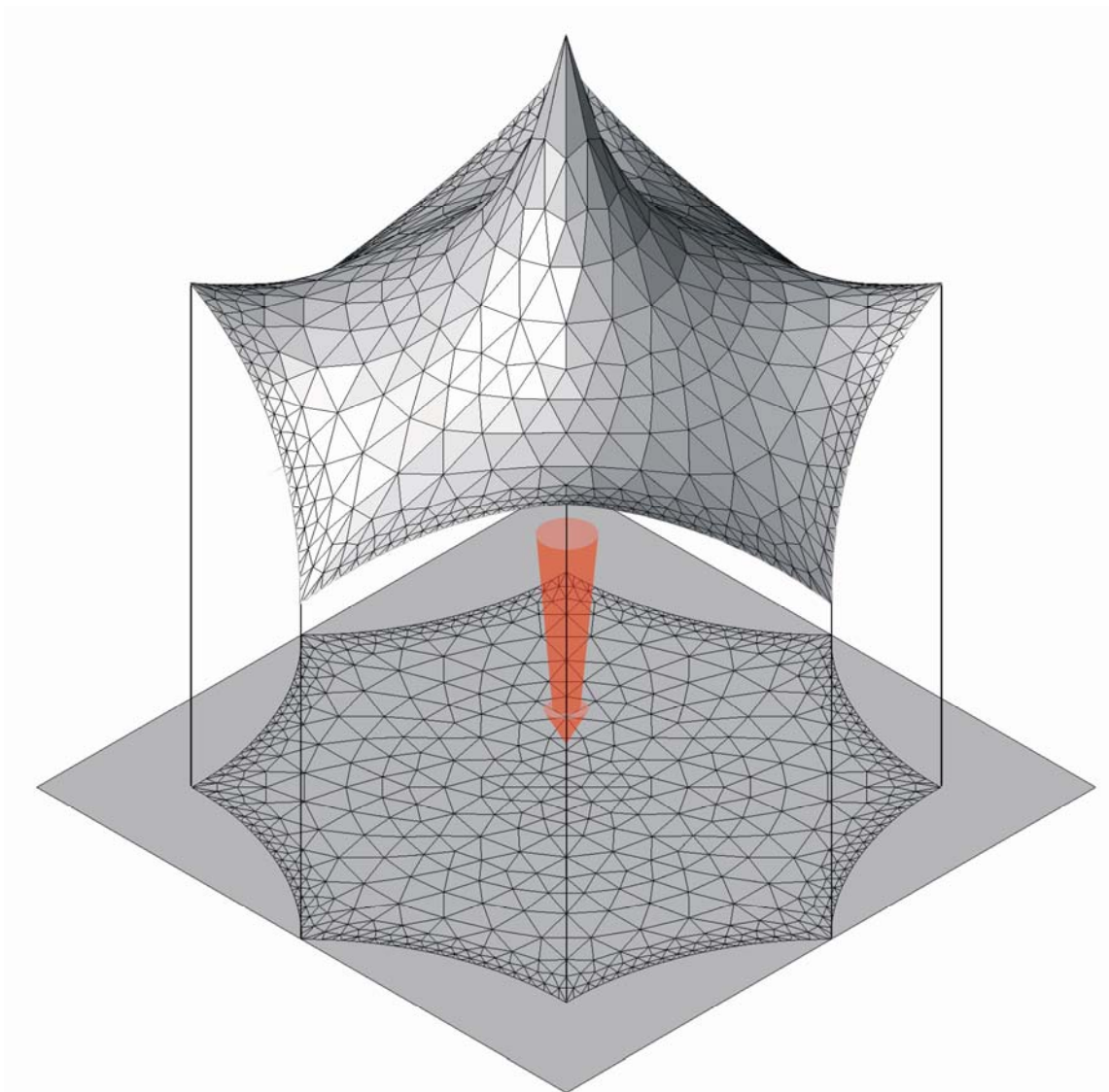


Fig. 3.1. Proyección horizontal de la malla de una tensoestructura

Por tanto, hechas estas consideraciones, el MT permitirá al diseñador construir la matriz \mathbf{C} de conectividades entre nodos y ramas para introducirla posteriormente en el MDF. Como el lector bien supondrá, la matriz \mathbf{C} de la red está directamente ligada a la topología de la malla. La topología de la red se define en el MT a través de *pasos* de acuerdo con una serie de datos conocidos: el número de nodos en el primer paso, el número de pasos, el tipo de relación entre un paso y el siguiente y la alternativa de red cerrada o abierta.

En función de las relaciones entre pasos, se definen tres tipos de redes básicas: A, B y C (Hernández-Montes et al., 2.006 y Jurado-Piña et al., 2009):

- La relación tipo A se corresponde con un patrón en el cual cada nodo en un paso se conecta con los adyacentes del mismo paso así como con tres nodos del paso siguiente, Fig. 3.2.
- En el caso de la relación B, cada nodo en un paso determinado se une a los adyacentes en el mismo paso así como a dos del paso siguiente, Fig. 3.3.
- El tipo C es tal que cada nodo en cada paso es conectado a uno o a tres nodos del siguiente paso, alternativamente, además de a todos los adyacentes del mismo paso, Fig. 3.4.

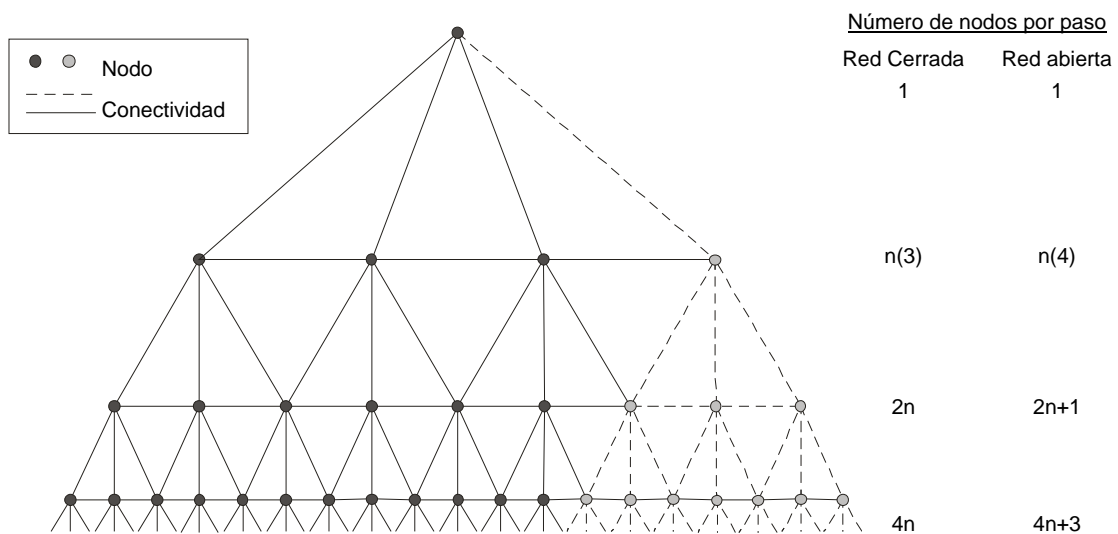


Fig. 3.2. Tipo de red básica A

Como se mencionó anteriormente, existen dos tipos de de mallas posibles en función de su relación con el contorno de la forma de equilibrio: abiertas y cerradas (Hernández-Montes et al., 2.006). Primero, las *redes cerradas* son aquellas para las cuales los nodos en el último paso o anillo constituyen el contorno de la forma de equilibrio. Sin embargo, el contorno de una forma de equilibrio para una *red abierta* está formada por los nodos del contorno de la red topológica (véanse Fig. 3.6 – 3.7). De la mera observación de las Figs. 3.6 y 3.7 se puede llegar a la conclusión que las redes abiertas serán más adecuadas para estructuras donde una de sus direcciones principales es sensiblemente mayor que la otra. Las redes cerradas serán apropiadas para estructuras con simetría radial y donde las dos direcciones principales son similares. No obstante, cualquier tipo de estructura puede ser mallado mediante redes abiertas o cerradas. El presente estudio, al abordar aspectos relacionados con el cálculo de estructuras tensadas cuyos puntos fijos coinciden en planta con los vértices de un polígono regular, tratará sólo con las redes cerradas, concretamente con relaciones A y B.

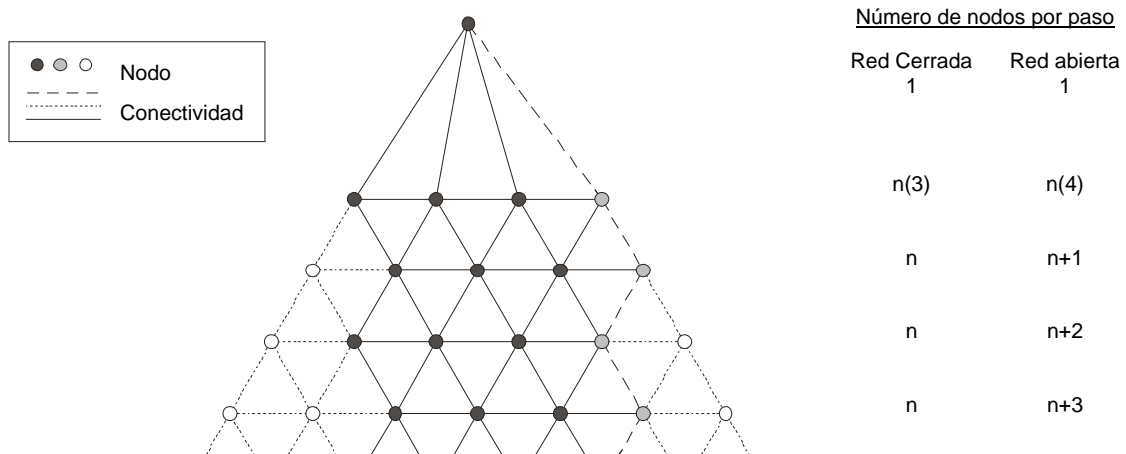


Fig. 3.3. Tipo de red básica B

Con el objetivo de concretar correctamente el mallado topológico, se define una clasificación de nodos y conexiones para redes cerradas. Así, para las redes abiertas, los puntos negros, grises o vacíos (Figuras 3.2 – 3.4) tienen el mismo significado; todos ellos son nodos. También, para el caso de redes abiertas, las líneas gruesas o ralladas son conexiones sin diferencia entre ellas.

El caso de redes cerradas es diferente y aquí es donde realmente se requiere la clasificación de conexiones y nodos. Para el caso de una red cerrada básica tipo A representada en la Figura 3.2, hay tres nodos negros y uno gris en el segundo paso. Para construir una red cerrada, el nodo gris debe coincidir con el negro localizado en el borde del paso, de manera que el nodo gris recibe el nombre de “nodo repetido”. Consecuentemente, las líneas gruesas en la Figura 3.2 conexiones y las líneas ralladas representan “conexiones repetidas”. El proceso para cerrar una red básica tipo B, Figura 3.3, conduce a una nueva red de nodos (los “nodos inexistentes”), representados por círculos vacíos. El segundo paso de una red básica tipo B es similar al correspondiente a una tipo A., con tres nodos negros y uno gris, pero en el tercer paso de la red tipo B un nodo del extremo no se corresponde con ningún nodo en el cierre, por lo que debe ser clasificado como “nodo inexistente”. Consecuencia del hecho anterior son las líneas delgadas ralladas que representan las “conexiones inexistentes”.

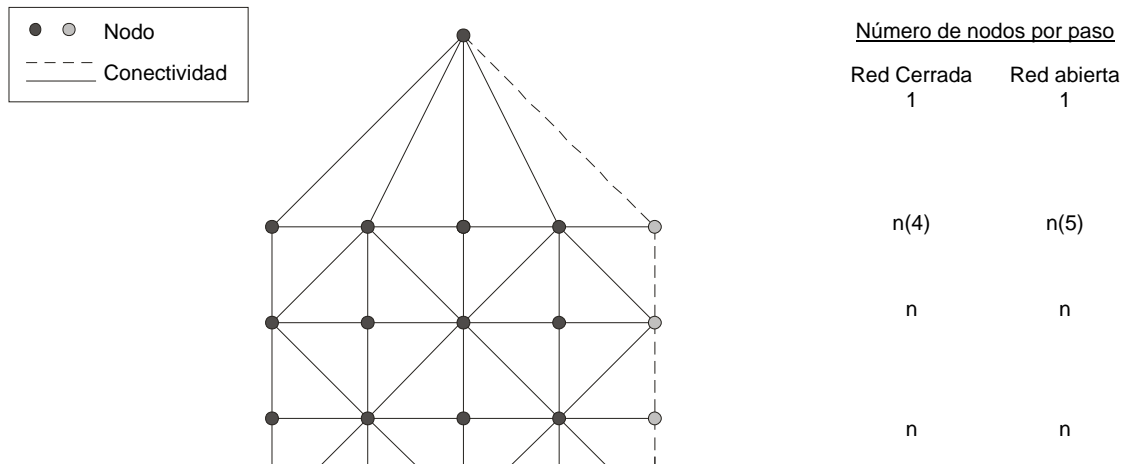


Fig. 3.4. Tipo de red básica C

Para las redes básicas tipo A, el número de nodos de cada paso es el doble de la cantidad de nodos del paso previo, en el caso de la configuración cerrada, y el doble más uno en la configuración abierta. Usando la red básica tipo B, el número de nodos de cada paso es el mismo que el correspondiente al paso anterior en las redes cerradas, mientras que para las abiertas será el mismo número que el paso anterior más uno. Para las redes C, el número de nodos en cada paso permanece siempre inalterable tanto para redes abiertas como cerradas.

Las redes básicas descritas se originan a partir de un nodo inicial que está conectado a los nodos del segundo paso. Sin embargo, este nodo se ve suprimido en las redes abiertas, así como en las redes cerradas cuando se desea crear un nuevo contorno en el interior de la red.

Las redes de nodos para obtener la forma de equilibrio no han de coincidir siempre con uno de los tipos básicos descritos hasta ahora. Así, es posible usar combinaciones topológicas de las redes básicas A y B. En este caso es necesario definir la secuencia de combinaciones (por ejemplo A-A-B-B-B, Fig. 3.5) que proporcionará la relación entre los nodos de los pasos consecutivos. Por consiguiente, si una red tiene N anillos (o pasos), la secuencia de la topología consistirá en $N-1$ letras indicando relaciones tipo A o B.

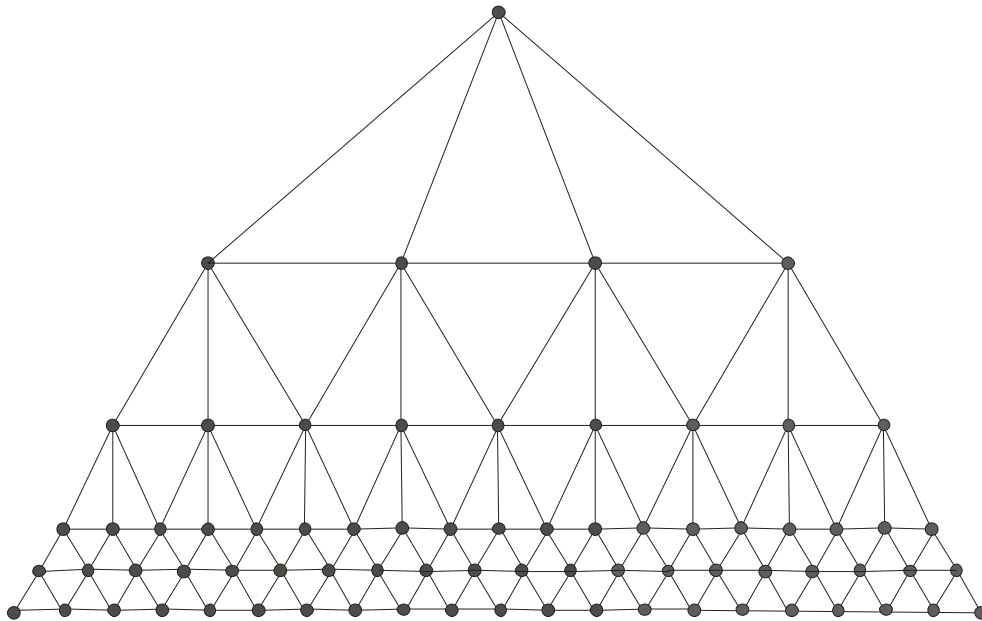


Fig. 3.5. Red combinada a partir de redes básicas A y B con secuencia A-A-B-B-B

Por tanto, el proceso para generar una red cerrada requiere una cantidad de información inicial reducida y simple:

- a) La posición de los nodos fijos.
- b) La densidad de fuerza de las ramas interiores y exteriores y
- c) La topología de la red.

Comenzando a partir del nodo central, se asigna al primer anillo un tipo de relación (A o B) y el número de nodos y, a continuación, se determina el número de anillos que tendrá la red y la secuencia de relaciones topológicas para el resto de estos anillos.

Finalmente, con el objetivo de definir totalmente la matriz **C**, los puntos fijos se asignan a los nodos de la red a través del cálculo de la distancia entre puntos fijos consecutivos y el cálculo del perímetro formado por ellos. De esta manera, el número de nodos existente entre dos nodos fijos será proporcional al ratio resultado de dividir la distancia entre dichos puntos fijos y la distancia del perímetro total.

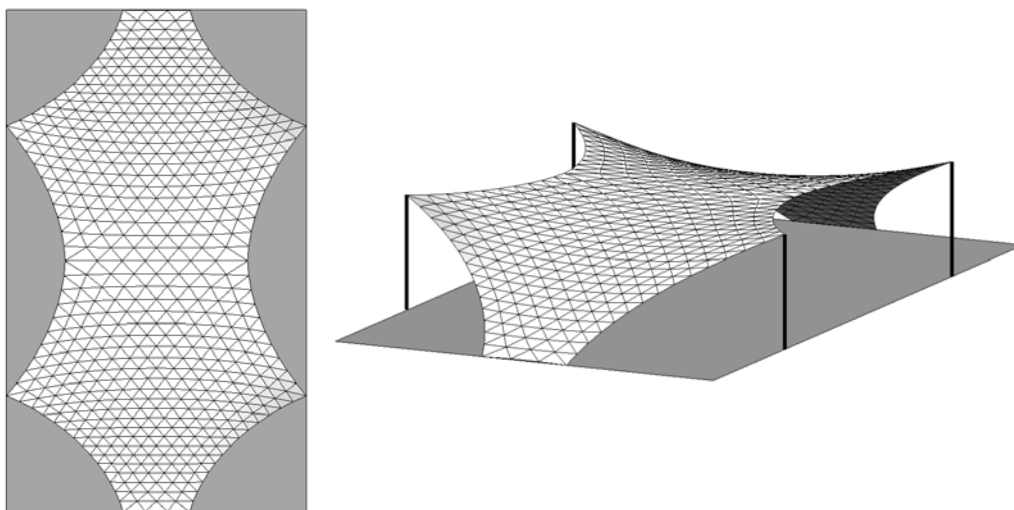


Fig. 3.6. Estructura construida con red abierta. Tomado de Hernández-Montes *et al.* 2006

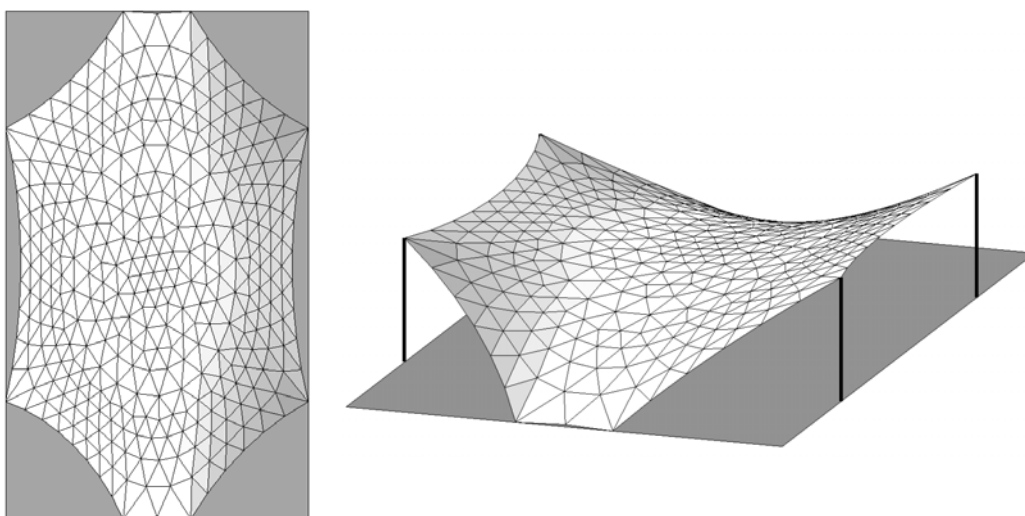


Fig. 3.7. La misma estructura anterior construida con una red cerrada. Tomado de Hernández-Montes *et al.* 2006

4. La pérdida de simetría

Una vez que la forma de equilibrio de la estructura tensada ha sido encontrada mediante la aplicación del MDF y ha sido comprobada frente a las cargas estáticas que debe soportar, la malla tridimensional debe transformarse en una serie de piezas planas (2D) para poder ser fabricada (Gründig, 2.006). Este proceso se denomina *generación de los patrones* o *patronaje*.

Dado que este tipo de estructuras normalmente se corresponden con superficies no desarrollables, este patronaje dará lugar siempre a una aproximación de la superficie idealizada. A su vez, debido a que el estado tensional de la estructura depende íntimamente de su forma y de las propiedades del material empleado, las tensiones reales de la tensoestructura también serán distintas de las que inicialmente tendrá el modelo. En la bibliografía existen numerosas propuestas de denominados métodos para patronaje óptimo, (Kim, JY et al. 2.002 y Maurin et al. 2.005), que tratan de minimizar la desviación entre el estado de tensiones real en la construcción y aquel previsto por el diseñador en el proceso de modelización de la tensoestructura.

Imagine el caso motivo principal de este estudio, en que se esté tratando con una estructura tensada cuya planta coincide con un polígono regular. Dado que la generación de patrones no es un proceso relativamente sencillo, se debe aprovechar la simetría para simplificar el patronaje.

Si el fenómeno de la pérdida de simetría en la generación de la malla pasase desapercibido, el diseñador podría encontrar que la estructura construida difiere en gran medida de aquello que se estaba diseñando en un principio. Este hecho es debido fundamentalmente a que el estado tensional de la estructura construida resultará distinto del correspondiente al modelo asimétrico empleado en el diseño ya que los patrones no se corresponden con el modelo inicial, a pesar de realizar, incluso, un patronaje óptimo. Es obvio que dicho procedimiento de patronaje no podrá ser efectivo si los patrones seleccionados en un principio (pensando que la estructura es simétrica) no tienen correspondencia total con el modelo empleado.

Otro hecho importante a tener en cuenta es que una red asimétrica puede dar como resultado un número muy elevado de patrones para componerla, mientras que una red simétrica puede ser construida a través de un número muy reducido de patrones ya que por la simetría existente, estos se repetirán numerosas ocasiones.

A pesar de que anteriormente se indicó que la forma del modelo dependerá directamente de la densidad de fuerza introducida en el MDF, dicha afirmación no resulta del todo cierta, ya que la superficie de la membrana será modelada a través de los triángulos que componen la malla. Por tanto, para una misma densidad de fuerza, la forma del modelo de la estructura tensada dependerá también de la topología de la

red empleada. Por tanto, si la estructura ha de ser simétrica una vez construida, la malla a emplear para obtener la forma de equilibrio ha de ser también simétrica.

La Figura 4.1 muestra dos formas de equilibrio con apoyos con planta simétrica; la única diferencia existente entre ellos es la secuencia de relaciones entre anillos, mostrándose como la Fig. 4.1 (a) resulta simétrica mientras que la Fig. 4.1 (b) no lo es.

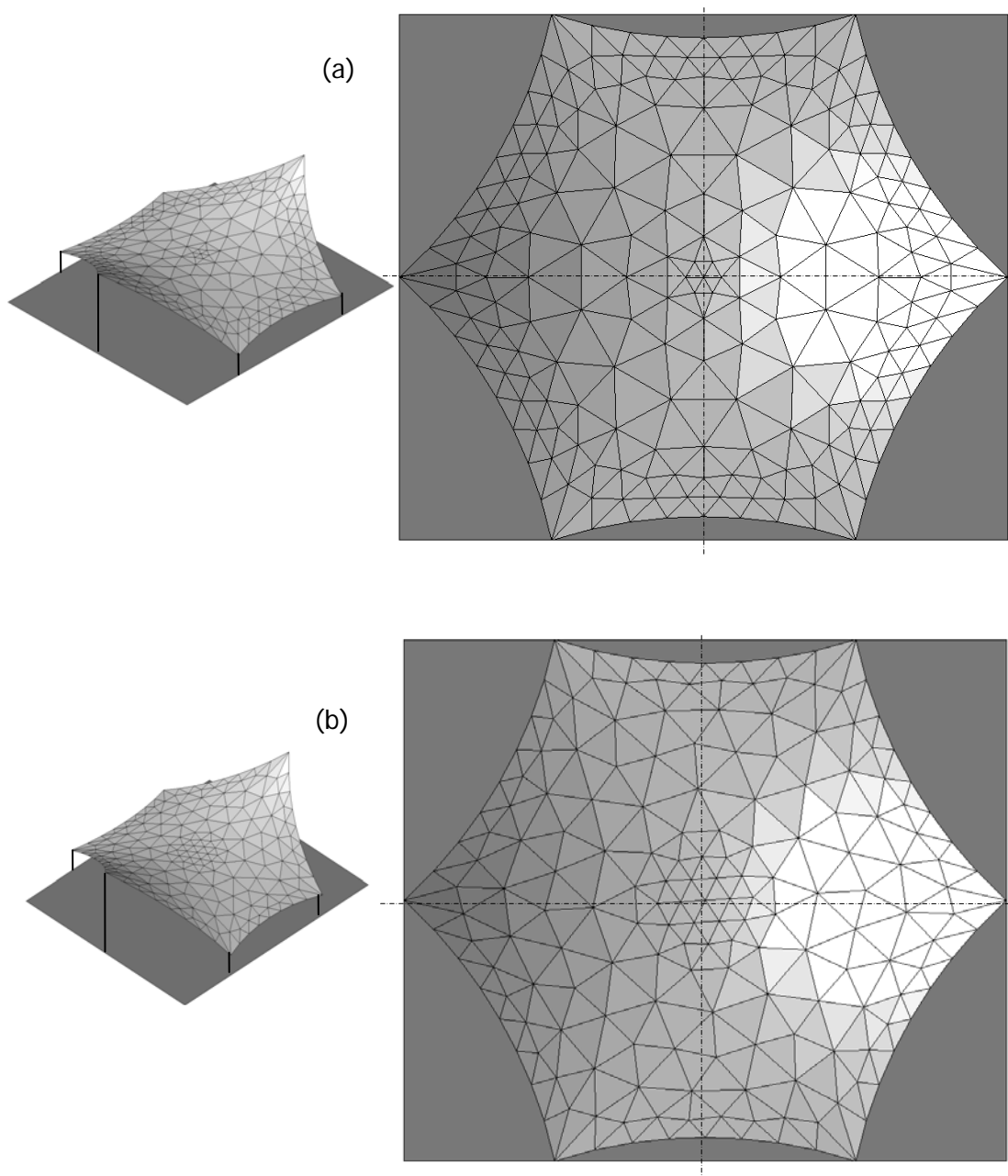


Fig. 4.1. Estructura hexagonal con diferentes secuencias para las secuencias de relaciones entre anillos: (a) Malla simétrica; (b) Malla asimétrica

La observación más relevante sobre la pérdida de simetría es que la construcción de la red anillo por anillo (o paso por paso), empezando desde un nodo central, resulta siempre un procedimiento simétrico; un ejemplo puede verse en la Figura 4.2 (a). Sin embargo, cuando se alcanza el último anillo (Figuras 4.2 (b), 4.2 (c) y 4.2 (d)), sus nodos deben tomar su distribución prescrita de acuerdo con el espacio existente entre nodos fijos. Este hecho da lugar a que la malla resulte asimétrica, tal y como ocurre en el ejemplo de referencia mencionado.

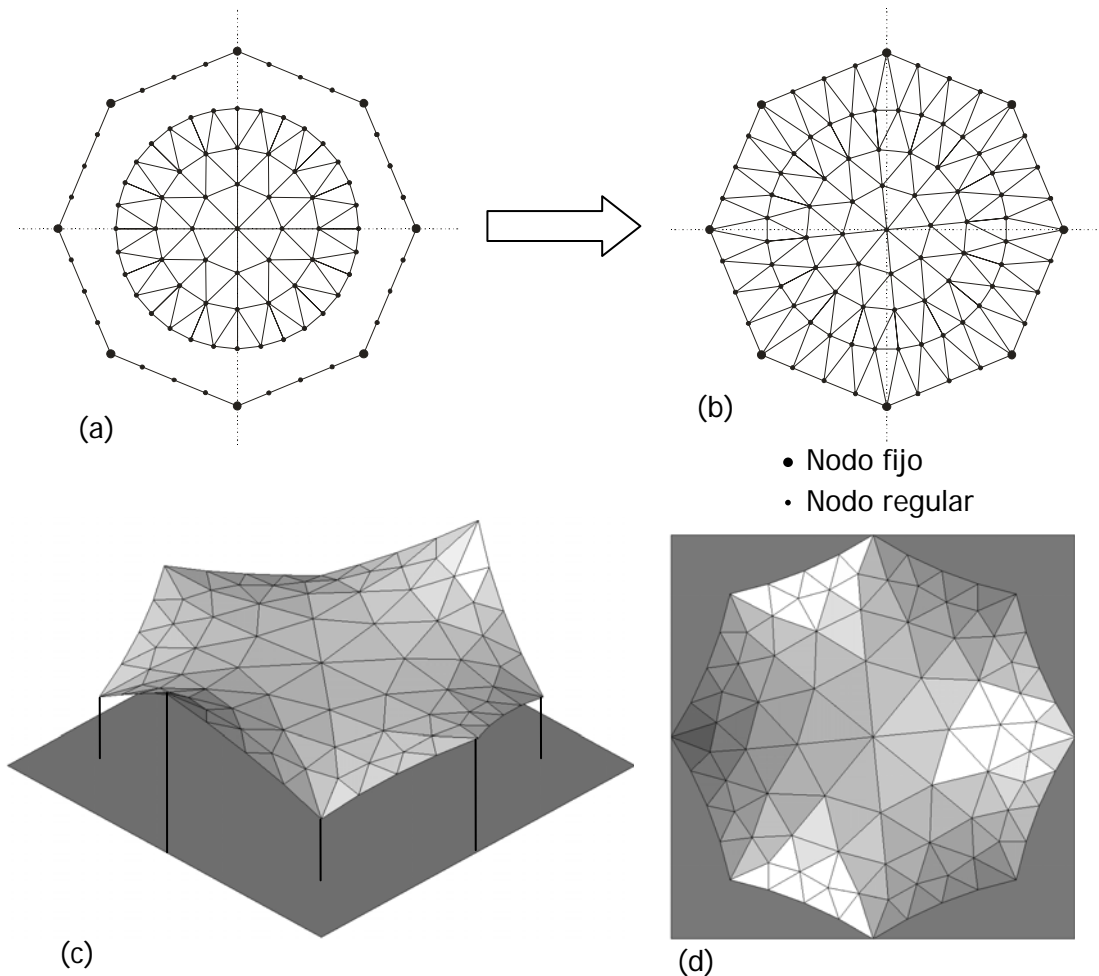


Fig. 4.2. Construcción de la malla: (a) Esquema de la malla sin conexiones entre anillos penúltimo y último; (b) Esquema de la red completo con una distribución interna simétrica pero con conexiones con el último anillo en disposición asimétrica; (c) Perspectiva de la estructura tensada después de la aplicación del MDF; (d) Vista en planta de la estructura tensada.

La Figura 4.2 muestra un ejemplo ilustrador que trata sólo con la topología, no con el MDF. Se modela en este ejemplo una estructura tensada con forma octogonal en planta. La malla seleccionada tiene 4 anillos. El primero de ellos cuenta con 8 nodos y la secuencia para la topología es: A-A-B. La Figura 4.2 (a) muestra la construcción de los 3 anillos interiores y la disposición de los nodos del último anillo. Hasta el momento todo resulta simétrico. El problema aparece en la conexión entre los nodos del tercer

anillo y los correspondientes al último. La relación de tipo B existente entre dichos nodos provoca la pérdida de la simetría en el conjunto.

Se ha introducido un nuevo concepto en el ejemplo anteriormente explicado: la simetría en la topología. Con el objetivo de obtener una representación simétrica final de la estructura tensada, el MDF requiere el uso de una malla simétrica. Sin embargo, la topología, tal y como ha sido descrita anteriormente, es simétrica de por sí, con sus correspondientes ejes de simetría. Tal y como se ha mostrado, la clave para la conservación de esta simetría es que la distribución simétrica espacial dada por la topología sea compatible con la distribución de nodos prescrita en el contorno de la estructura. Esta compatibilidad se hallará si los ejes de simetría de la malla topológica y del polígono regular que forman los nodos fijos coinciden después de distribuir y posicionar los nodos de la malla – incluyendo los nodos del contorno.

Continuando con el ejemplo anterior, el esquema mostrado en la Figura 4.2 (a) (topología A-A) presenta un eje de simetría. En el caso de que la última relación entre anillos sea resuelta con un tipo B (topología A-A-B) se produce un giro en el eje mencionado y no se produce la coincidencia del eje de simetría de la topología con el del contorno, véase Figura 4.2 (b) o 4.3 (a). Si el último paso se resuelve con una relación topológica tipo A (A-A-A para la Figura 4.2, o B-A-A para la Figura 4.3 (b)), entonces la simetría de la topología coincide con la simetría del contorno, resultando el conjunto simétrico completamente.

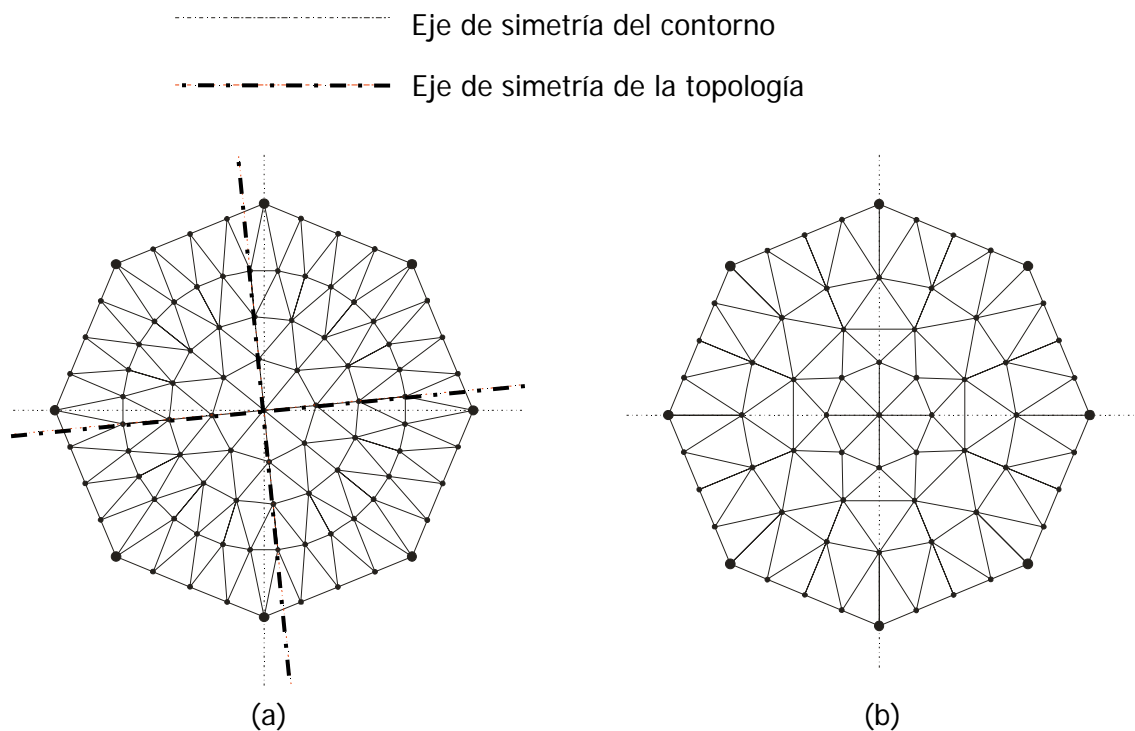


Fig. 4.3. Dos topologías diferentes para la misma estructura: (a) A-A-B; (b) B-A-A.

5. Propuesta de algoritmo para conservar la simetría

En el apartado anterior del presente estudio se han explicado las razones de la pérdida de la simetría en la construcción del modelo de la estructura tensada. En este apartado se presenta un algoritmo que permitirá al diseñador conservar la simetría al escoger la secuencia para la topología de la red. El empleo de este algoritmo permitirá conocer a priori si la topología introducida en el MDF dará como resultado una malla espacial simétrica sin necesidad de visualizarla.

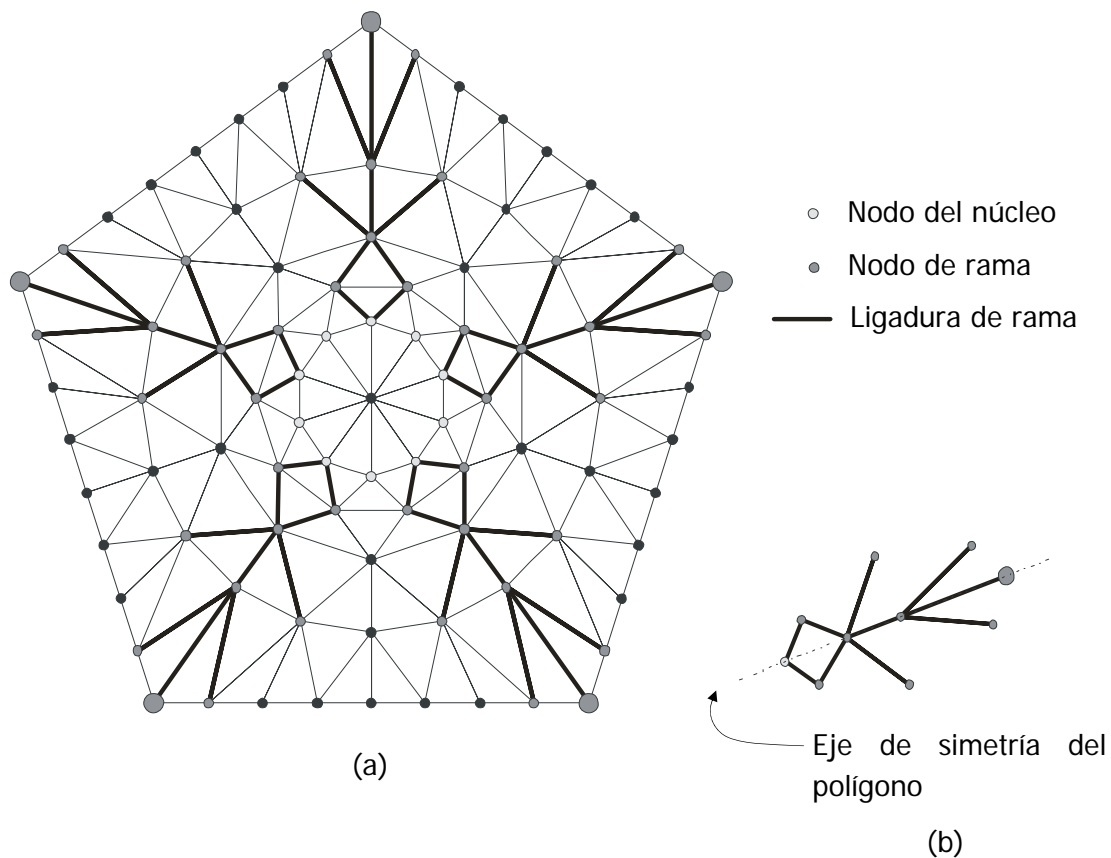


Fig. 5.1. (a) Topología para una estructura con planta pentagonal; (b) Una de las ramas

Las Figuras 3.2 y 3.3 anteriores muestran cómo funcionan las relaciones A y B. Empezando por los nodos del primer anillo la red crece hacia afuera. En este sentido, la red puede ser interpretada como un núcleo central unido a los nodos del borde exterior mediante cierto número de ramas. Estas ramas se unirán entre ellas de manera que todos los nodos del contorno queden ligados al núcleo central. La Fig. 5.1 (a) muestra el caso para una estructura con planta pentagonal con cinco anillos y con una secuencia B-B-A-A. Las ramas, situadas sobre los ejes de simetría del pentágono, que unen los puntos exteriores con el núcleo central se dibujan con líneas gruesas.

Estas ramas pueden ser dibujadas por separado conociendo la secuencia que define las relaciones entre los anillos (véase la Figura 5.1 (b)). Así pues, si al realizar el esquema de la rama se alcanza uno de los nodos fijos del contorno que descansa sobre uno de los ejes de simetría, y la rama resulta también simétrica respecto a este eje, la red al completo resultará simétrica.

En la Figura 5.2 se muestran diferentes ejemplos de esquemas de ramas. Los casos (a) y (d) resultan asimétricos, mientras que (b) y (c) son simétricos. Estos dos últimos casos darán como resultado mallas simétricas si el eje de simetría dibujado coincide con el eje de simetría del polígono formado por las posiciones espaciales de los nodos fijos del contorno.

Hay que señalar que el número de nodos en el primer anillo será de relevancia a la hora de obtener un mallado simétrico para la estructura tensada. De hecho, una de las condiciones necesarias para el algoritmo a proponer en este trabajo es que el número de nodos en el primer paso o anillo debe ser el mismo o múltiplo del número de lados (o nodos fijos) del contorno. Sin embargo, esta única regla no garantiza la simetría.

El algoritmo se establece según las siguientes prescripciones:

- Escoger número de nodos del primer anillo debe ser igual o múltiplo del número de lados del contorno (número de nodos fijos del contorno).
- Escoger el número de anillos.
- Escoger la secuencia topológica.
- Dibujar la rama hasta llegar al nodo fijo del contorno de tal manera que el eje de simetría de la rama en construcción coincida con el eje de simetría del polígono formado por los nodos fijos del contorno.
 - o Si la rama puede ser dibujada completamente simétrica al alcanzar el nodo del contorno y este descansa sobre el eje de simetría de la rama, la red es simétrica.
 - o Si la rama puede no ser dibujada completamente simétrica al alcanzar el nodo del contorno descansando éste sobre el eje de simetría de la rama, la red es asimétrica.

El algoritmo es explicado con mayor claridad por el diagrama de flujo presentado en la Figura 5.3.

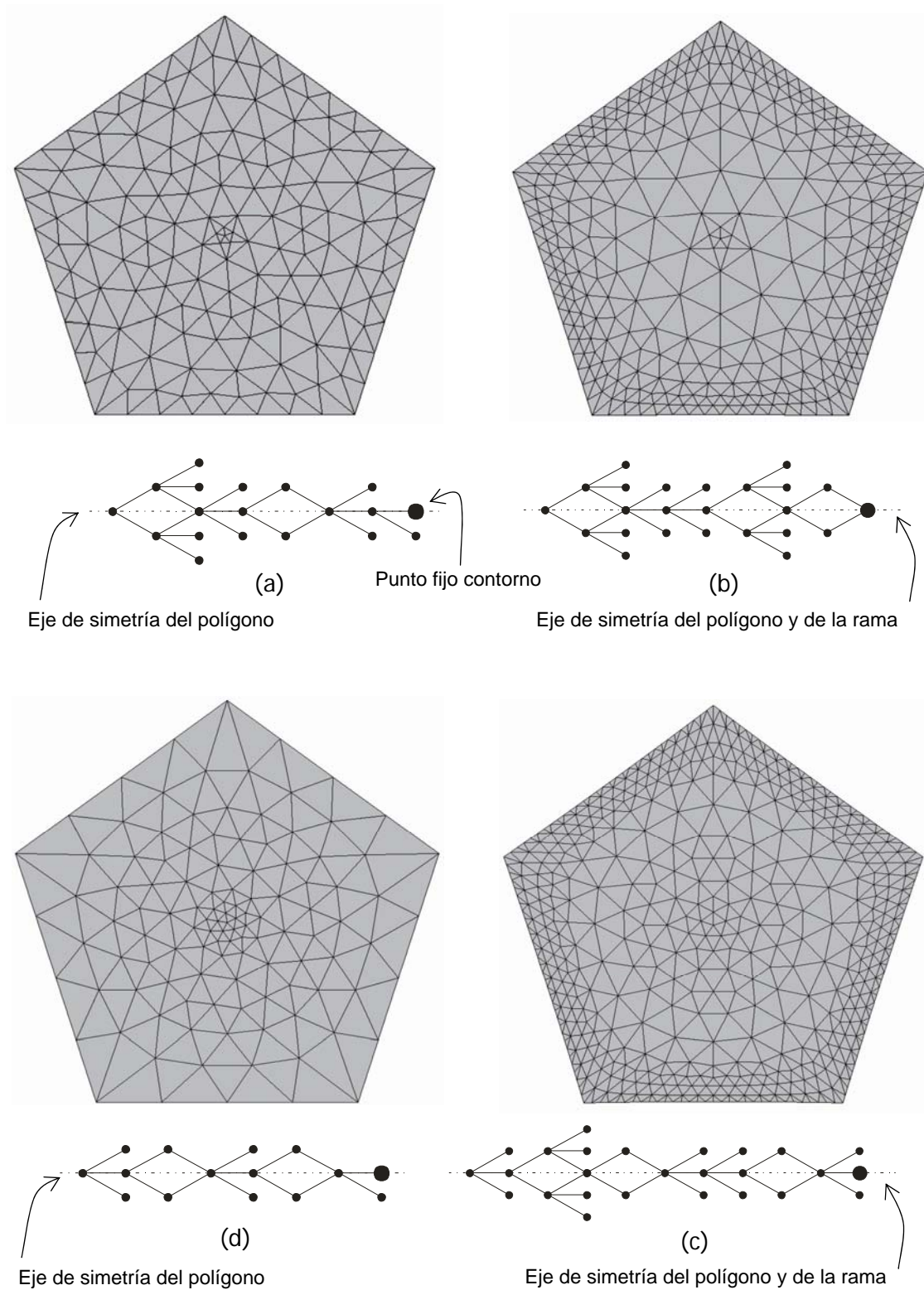


Fig. 5.2. Cuatro ejemplos de esquemas para ramas: (a) BAABBAB, red asimétrica; (b) BAAABABB, red simétrica; (c) ABABBAABBA, red simétrica; (d) ABBABBB, red asimétrica

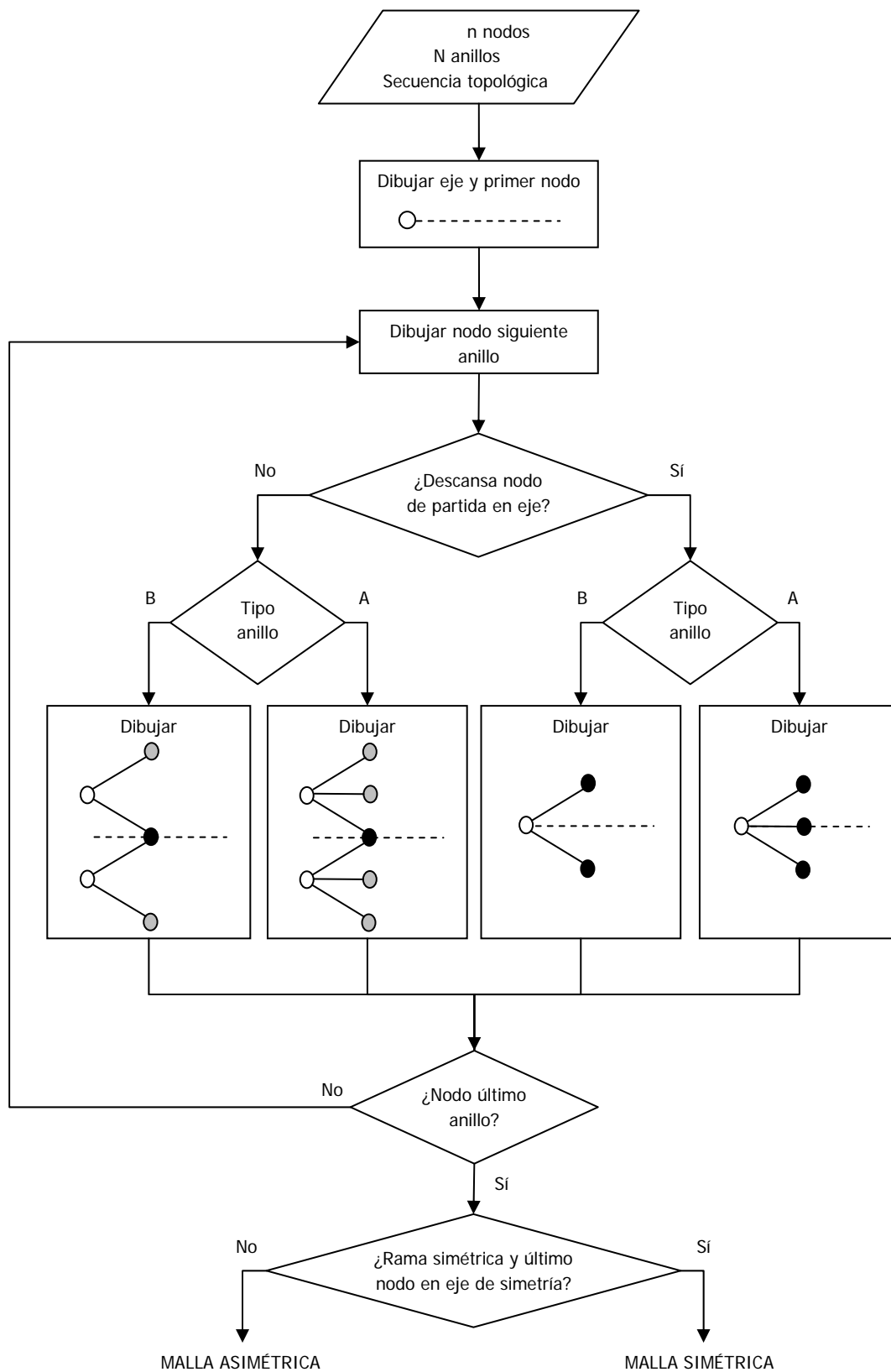


Fig. 5.3. Algoritmo para análisis de la simetría de la malla prevista para materializar la estructura tensada

6. Ejemplos

Tal y como se ha mencionado anteriormente, conservar la simetría resulta básico para permitir que el proceso posterior a la obtención de la forma de equilibrio, el patronaje, sea una tarea sencilla y relativamente simple.

Hechas todas las puntualizaciones sobre la pérdida de simetría y dadas las directrices del algoritmo ideado para conocer la simetría de una malla a través del gráfico de una sola rama, se pretende en este apartado evaluar las pérdidas de la simetría de la malla. Así pues, se expondrán dos ejemplos concretos de la modelización de una misma carpa a través de dos mallas de nodos distintas. Para cada malla se tomarán dos patrones que teóricamente deberían ser idénticos, dada la simetría de la carpa (no se confunda aquí simetría de la carpa con simetría de la malla) y se evaluará la similitud de ambos. Finalmente se comprobará como el grado de similitud existente entre dos patrones homólogos de una malla simétrica es mayor que el existente entre los correspondientes a la malla asimétrica.

Resulta preciso explicar, antes de hacer referencia a ninguno de los ejemplos realizados, el método empleado para obtener los patrones planos de la carpa. Los cortes a realizar para dividir la carpa en distintos patrones podrían estar basados en intersecciones de la superficie definida por la malla con planos simples. No obstante, es más común el uso de líneas geodésicas para representar los bordes de los patrones (Gründig et al., 2.006). El patronaje con líneas geodésicas tiene la principal ventaja de proporcionar patrones con los bordes más rectos posibles, con lo que, al comercializarse en rollos el material empleado para los patrones, el desperdicio resultante es menor que el obtenido con un patronaje basado en las intersecciones planas. Por sencillez de programación el procedimiento aquí utilizado para hacer planos los patrones se basa en la realización de una triangulación entre los bordes del patrón con el objetivo de hacerlo desarrollable. Hay que indicar que no se ha tenido en cuenta la compensación en el patronaje.

Los patrones normalmente consistirán en formas sensiblemente triangulares o trapezoidales. La triangulación realizada, para el caso de los triángulos, se apoya en dos de los bordes del patrón, mientras que en el caso trapezoidal, los vértices de la triangulación se sitúan en los dos bordes que, enfrentados uno al otro, resulten mayores de los cuatro. De esta manera, se obtiene una "tira" de triángulos que comparten entre ellos un solo lado, resultando la triangulación desarrollable. Frente a su sencillez de ejecución, el método presenta el principal inconveniente de la pérdida de información de los puntos de la malla que quedan comprendido dentro de los bordes del patrón. Por ello, este método resulta inadecuado en patrones excesivamente anchos y en zonas donde la carpa presente elevada curvatura.

Antes de exponer los ejemplos realizados, se explica a continuación el método empleado para evaluar la similitud de los patrones, elementos que se corresponderán con figuras planas. Este procedimiento proporcionará un factor, en tantos por ciento, que indica el grado de similitud de las dos formas comparadas.

Imagínese el caso de una figura plana cualquiera que cumple la única condición de que cada uno de los puntos de su borde puede ser unido al centroide de la figura sin intersectar al borde en ningún punto distinto al que va a ser unido inicialmente. Sitúese el origen de coordenadas de un eje cartesiano en el centroide de la figura y defínase ahora un sistema de coordenadas polares, (θ, ρ) , con polo en el centroide, donde ρ es la longitud del radio vector que une un punto cualquiera con el polo y θ el ángulo (medido en sentido antihorario) que forma dicho radio vector con el eje polar, coincidente con el eje positivo de abscisas (Fig. 6.1). De esta manera, con la condición anteriormente impuesta a la figura, su contorno Γ podría ser unívocamente definido por una función $\rho(\theta)$, con $\theta \in [0, 2\pi)$ y $\rho \in \mathbb{R}$.

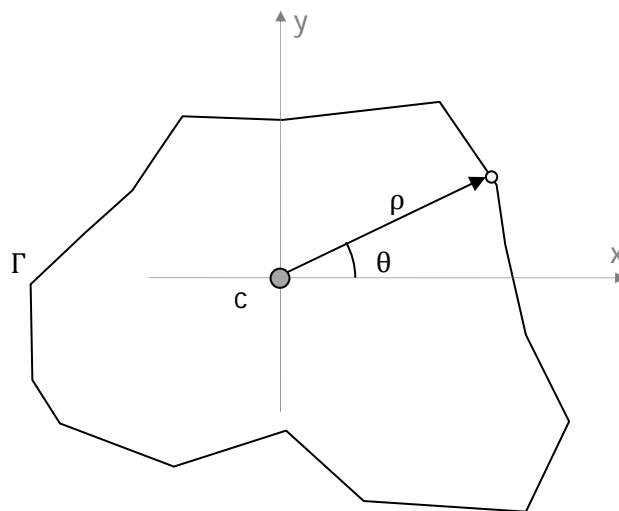


Fig. 6.1. Sistema de coordenadas polar adoptado

Dadas estas premisas, imagínese ahora que se desea comparar dos figuras que cumplen la condición anteriormente impuesta. Si se hacen coincidir los centroides de ambas figuras y se alinean éstas de manera que sus ejes resulten paralelos, definiéndose el sistema de coordenadas polares anteriormente referido, si ambas figuras son iguales, es claro que las funciones $\rho_1(\theta)$ y $\rho_2(\theta)$ que definen los contornos de las dos figuras cumplirán: $\rho_1(\theta) = \rho_2(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Es más, si las figuras no son iguales, el grado de similitud que comparten podría ser evaluado a través de la comparación de las funciones $\rho_1(\theta)$ y $\rho_2(\theta)$.

En el caso particular que aquí ocupa, el contorno de los patrones será definido discretamente para un número de valores de θ igual a N . De esta manera, los valores

de θ serán: $\theta_i = \frac{2\pi}{N}(i - 1), i = 1, 2, \dots, N$. Así pues, para realizar la comparación de los contornos definimos unas funciones $\rho_d(\theta_i)$ y $\rho_n(\theta_i)$ tal que:

$$\rho_d(\theta_i) = \max\{\rho_1(\theta_i), \rho_2(\theta_i)\} \tag{12}$$

$$\rho_n(\theta_i) = \min\{\rho_1(\theta_i), \rho_2(\theta_i)\} \tag{13}$$

A partir de las anteriores funciones se define el parámetro λ_i :

$$\lambda_i = \frac{\rho_n(\theta_i)}{\rho_d(\theta_i)} \tag{14}$$

Finalmente, el parámetro de similitud $\bar{\lambda}$ resulta:

$$\bar{\lambda} = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i, \text{ con } \bar{\lambda} \in [0, 100] \tag{15}$$

Resulta sencillo apreciar que cuanto más cercano resulte el parámetro $\bar{\lambda}$ a 100, mayor será la similitud existente entre las figuras.

Así pues, una vez que el método de comparación de las figuras ha sido determinado se procede a continuación a la realización de los ejemplos. Tal y como se explicó anteriormente, la carpa a modelar con ambos ejemplos es la misma; el único cambio es la relación topológica adoptada para definir la malla de nodos y conexiones a introducir en el MDF. La carpa es una estructura con forma octogonal en planta, inscrita en una circunferencia de 10 m, cuya malla posee 13 anillos con 8 nodos en el primero de ellos. Para introducir la densidad de fuerza se toma un ratio de 10 a 1 entre las conexiones del contorno y las conexiones interiores. Las coordenadas de los nodos fijos se exponen en la Tabla 6.1 y la carpa se muestra en la Figura 6.2.

X_i (m)	Y_i (m)	Z_i (m)
2,7060	0,0000	4,0000
6,5328	0,0000	2,0000
9,2388	2,7060	4,0000
9,2388	6,5328	2,0000
6,5328	9,2388	4,0000
2,7060	9,2388	2,0000
0,0000	6,5328	4,0000
0,0000	2,7060	2,0000

Tabla. 6.1. Coordenadas de los nodos fijos del contorno de la carpa

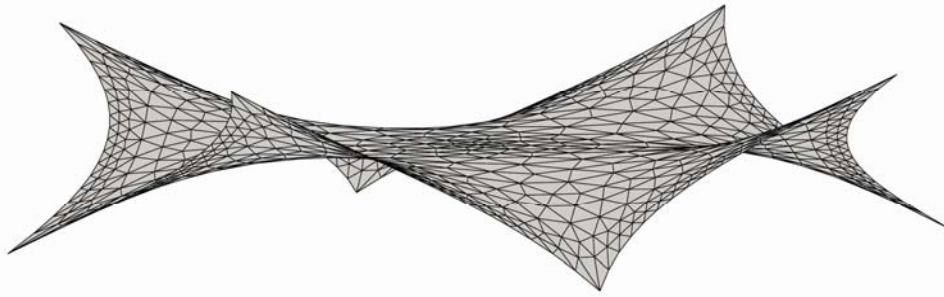


Fig. 6.2. Perspectiva de la carpa

Para el primer caso la topología adoptada es: B-A-B-B-A-B-A-B-B-A-B-B. La Figura 6.3 muestra el esquema de para evaluar la simetría de la malla, resultando finalmente simétrica. La Figura 6.4 muestra la planta de la malla simétrica y en trazo grueso se muestran los cortes a realizar, de los que resultan los patrones 1, 2, 3 y 4.

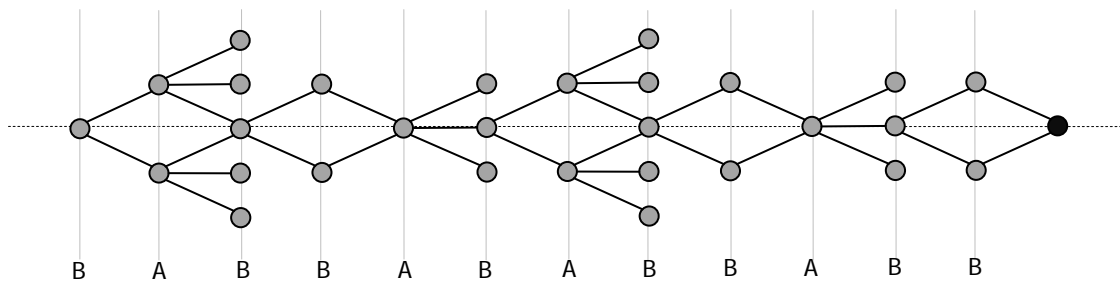


Fig. 6.3. Esquema de rama para la estructura tensada octogonal, CASO 1

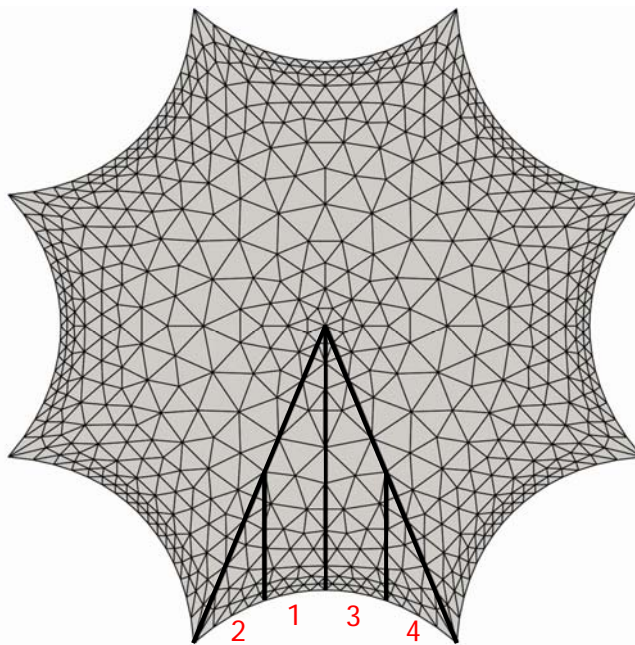


Fig. 6.4. Planta de la malla simétrica y cortes a realizar

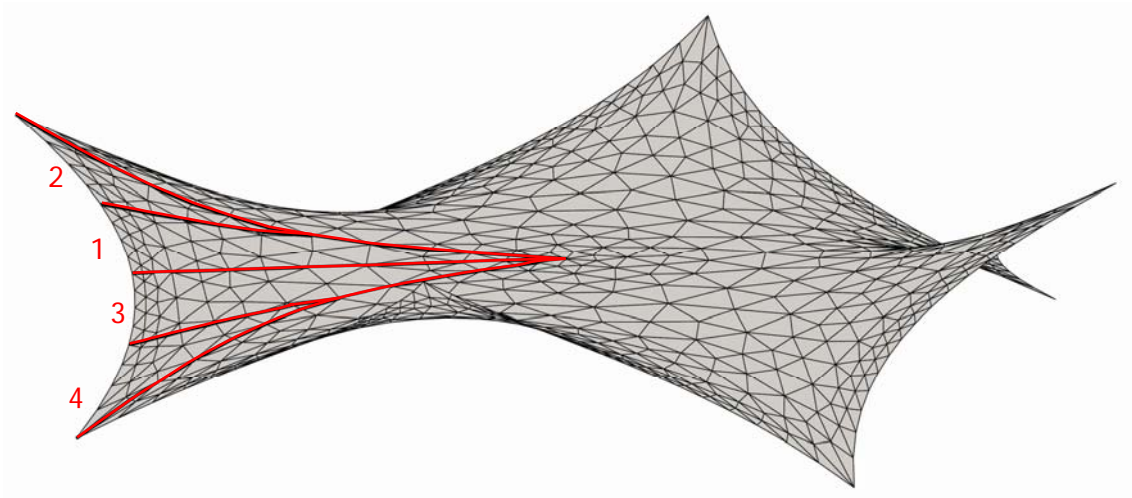


Fig. 6.5. Perspectiva de la malla simétrica y los cortes

La Figura 6.6 muestra los cuatro patrones planos listos para ser cortados.

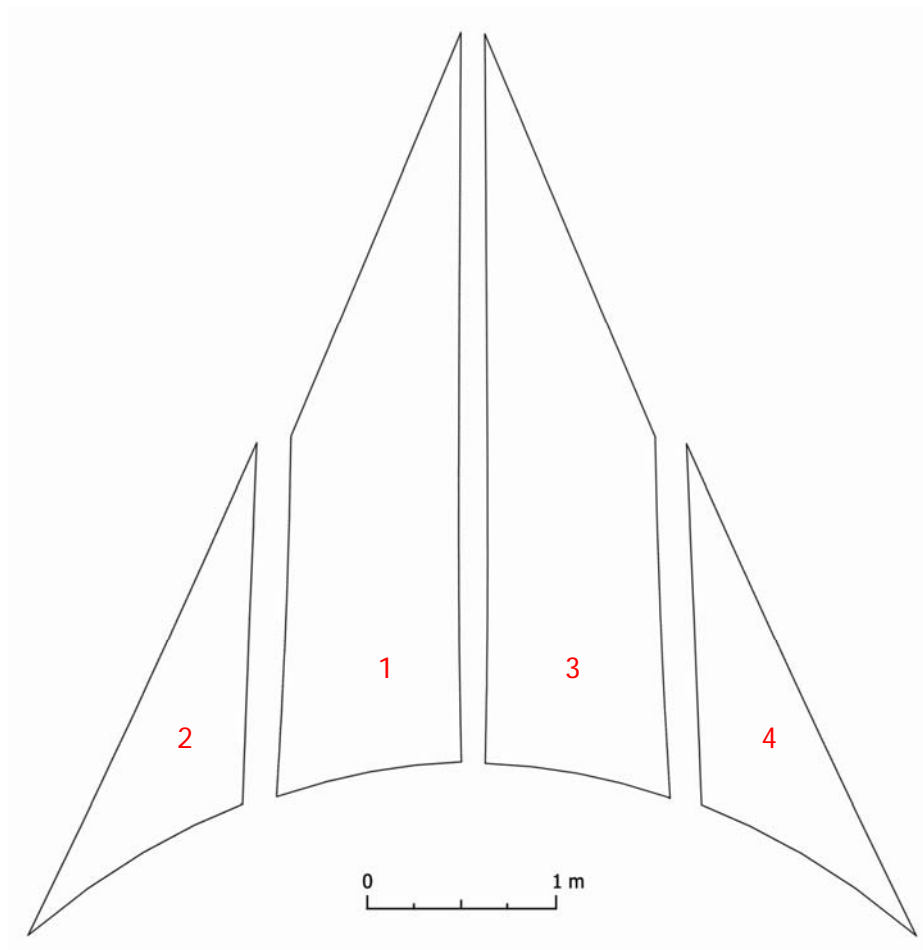


Fig. 6.6. Patrones planos correspondientes a la malla simétrica

Una vez obtenidos los patrones planos, se lleva a cabo la comparación de los pares de patrones homólogos. Así, el patrón 1 será comparado con el 3 y el 2 con el 4. Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 6.2.

Par de patrones	$\bar{\lambda}(\%)$
1-3	100,000
2-4	100,000

Tabla. 6.2. Valores del parámetro de similitud $\bar{\lambda}$ en la comparación de los patrones resultado del mallado simétrico

Para el siguiente ejemplo, la topología de la malla se verá ligeramente modificada. De esta manera, la secuencia de la tipología de anillos es: B-A-B-B-A-B-A-B-B-B-A-B. La Figura 6.7 muestra como el esquema propuesto para evaluar la simetría indica que la malla es asimétrica. La Figura 6.8 muestra la planta de la malla resultado y, en trazo grueso, los cortes a llevar a cabo para realizar el patronaje.

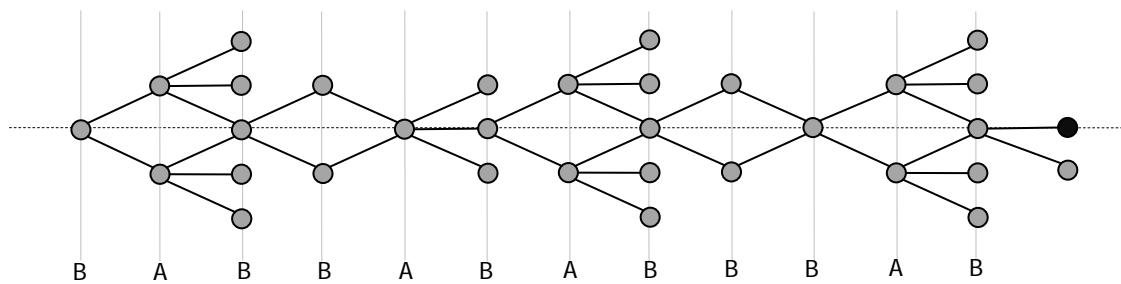


Fig. 6.7. Esquema de rama para la estructura tensada octogonal, CASO 2

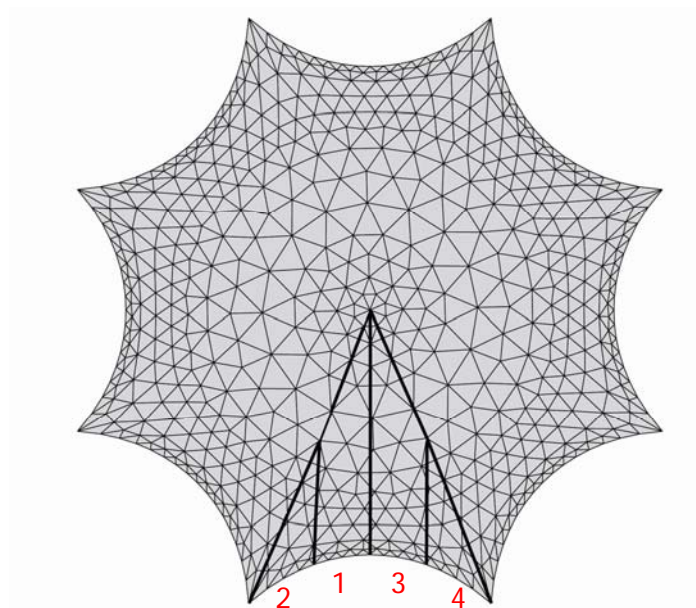


Fig. 6.8. Planta de la malla asimétrica y cortes a realizar

Los patrones planos obtenidos como resultado son presentados en la Figura 6.9. En esta figura se presenta la superposición entre los patrones homólogos y ya se aprecian ciertas diferencias que darán como resultado valores del parámetro de similitud menores que 100%.

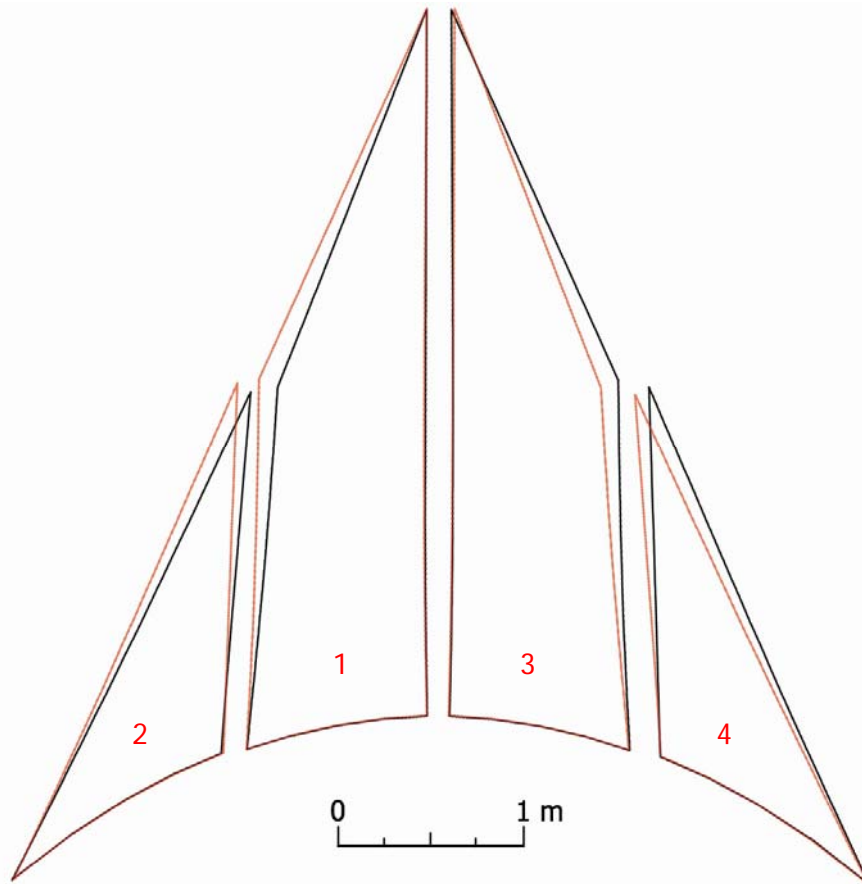


Fig. 6.9. Patrones planos correspondientes a la malla asimétrica (en trazo rojo claro se muestran los patrones homólogos con los que han sido comparados cada uno)

Aquí el patrón 1 será comparado nuevamente con el 3 y el 2 con el 4. Los resultados obtenidos para el parámetro de similitud se presentan en la Tabla 6.3. La Figura 6.10 muestra las gráficas de la función $\rho(\theta)$ para los patrones 1 y 3 y la Figura 6.11 para los patrones 2 y 4. De la simple observación de estas gráficas no es posible concluir que par de patrones posee un mayor grado de similitud, algo que soluciona la evaluación del parámetro de similitud $\bar{\lambda}$.

<u>Par de patrones</u>	<u>$\bar{\lambda}(\%)$</u>
1-3	92,8087
2-4	94,2643

Tabla. 6.3. Valores del parámetro de similitud $\bar{\lambda}$ en la comparación de los patrones resultado del mallado asimétrico

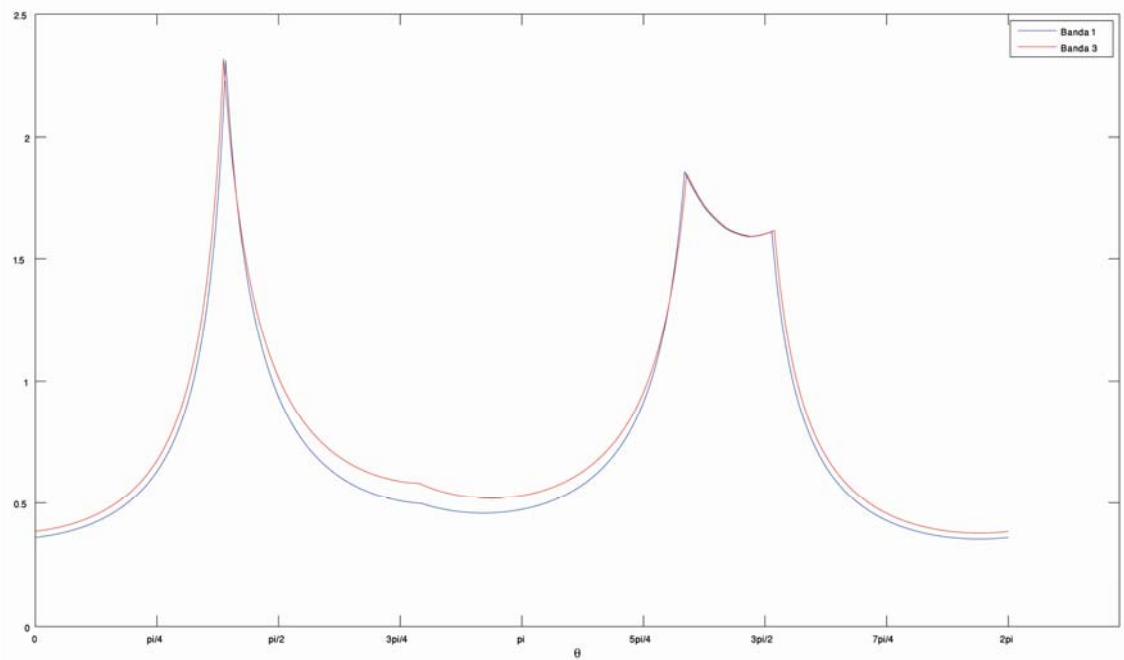


Fig. 6.10. Comparación de las funciones $\rho(\theta)$ para los patrones 1 y 3

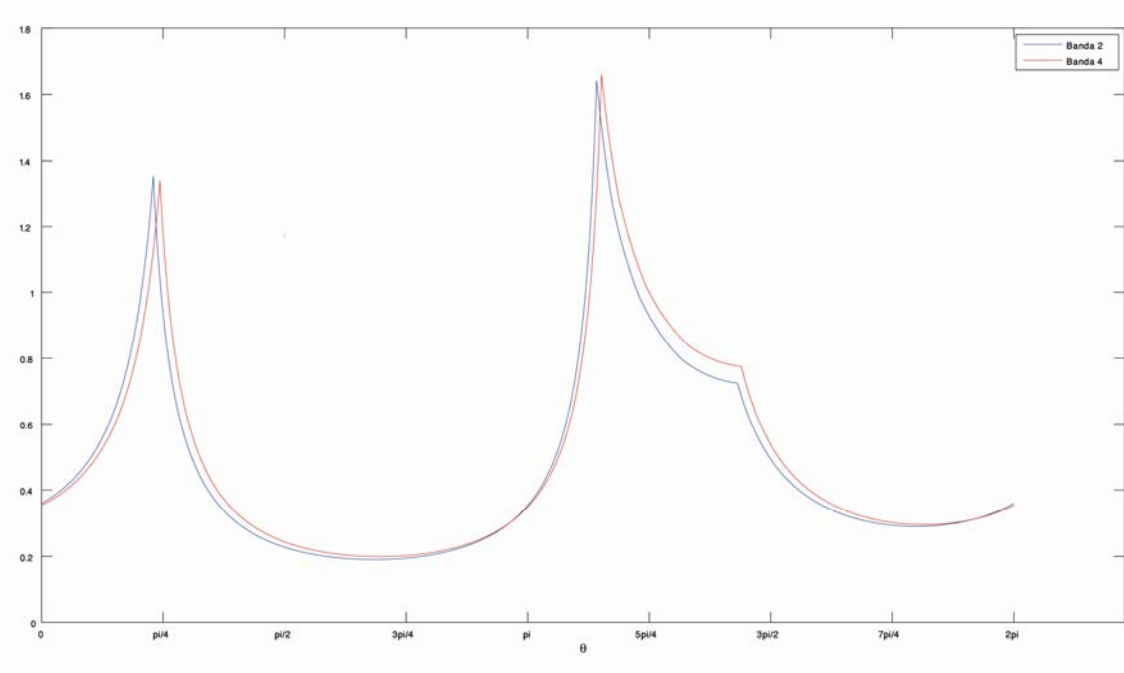


Fig. 6.11. Comparación de las funciones $\rho(\theta)$ para los patrones 2 y 4

De la comparación de los valores de las Tablas 6.2 y 6.3 para el parámetro de similitud $\bar{\lambda}$, se concluye que el mallado simétrico ofrece un patronaje más sencillo y simple, algo que se traduce en una mayor economía. Además, el construir la estructura tensada que ha sido modelada con el mallado asimétrico sólo con los patrones 1 y 2, pensando

que el resto de patrones de la carpa son simétricos, daría lugar a un campo de tensiones en la carpa construida distinto al que ha sido obtenido en el proceso de diseño. Para obtener dicho campo de tensiones habría que construir la carpa con los patrones originales 1,2 3 y 4, que llevaría a una construcción más cuidadosa, compleja y, por tanto, más cara.

7. Conclusiones

La construcción de estructuras tensadas en cualquier ámbito de la arquitectura y la ingeniería es muy común en nuestros días. Sus grandes prestaciones las hacen muy útiles para resolver un amplio espectro de problemas con soluciones singulares pero, a la vez, económicas y sostenibles.

Los procedimientos de cálculo han evolucionado a partir de mediados de siglo XX gracias al desarrollo que la informática y las computadoras han experimentado. Anteriormente, el cálculo de las tensoestructuras estaba basado fundamentalmente en la construcción de modelos a escala. Sin embargo, con la aparición de ordenadores cada vez más potentes, el cálculo actual hace uso de conocimientos matemáticos y mecánicos variados, como los elementos finitos o formulaciones dinámicas.

Un paso esencial en el cálculo de las estructuras tensadas es la búsqueda de la forma de equilibrio para, posteriormente, aplicar sobre la misma las cargas que la carpa ha de soportar a lo largo de su vida útil. Un método muy sencillo y, no por ello menos potente, es el "método de la densidad de fuerza" (Schek, 1.974). No obstante, este método requiere como input una malla inicial de nodos y conexiones para materializar la carpa. El mallado topológico expuesto en este trabajo resulta de gran utilidad ya que salva la mayor parte de dificultades que se encuentran al emplear los mallados geométricos.

Por otra parte, conservar la simetría estructuras tensadas es extremadamente útil: hace posible un patronaje simple, sencillo y, a la vez, económico. Mantener la simetría permite al ingeniero construir la estructura tensada con un número reducido de patrones diferentes.

Tal y como podría llegar a pensarse a priori, aquellas estructuras tensadas cuyos nodos fijos del contorno se corresponden con los vértices de un polígono regular deberían ser simétricas. Sin embargo, al aplicar el mallado topológico (MT) y el método de la densidad de fuerza (MDF), la malla resultante no es siempre simétrica.

Las razones que explican esta pérdida de simetría han sido identificadas y explicadas convenientemente y, además, un nuevo algoritmo para identificar la simetría de la malla ha sido presentado. Las reglas de este algoritmo están íntimamente ligadas a la secuencia para las relaciones entre los anillos y el número de nodos del primer paso. El algoritmo permite al diseñador conocer de manera muy sencilla, mediante la elaboración de un grafo, si la topología que va a ser introducida en el MDF será simétrica y, en consecuencia, la malla espacial de puntos obtenida de este método también lo será sin necesidad de dibujarla al completo.

Mediante una serie de ejemplos, el algoritmo ha sido testado y, además, se han comprobado las virtudes de la conservación de la simetría en el mallado de las estructuras tensadas cuyos nodos fijos son los vértices de un polígono regular.

Referencias

- Barnes, M. R. (1.999). "Form finding and analysis of tension structures by dynamic relaxation". *International Journal of Space Structures*, 14(2), 89-104.
- Carreira Valiño, L. (2.005). *Sistemas para la medición del estado de tensiones en membranas textiles*. (Tesis de Máster – Universitat Politècnica de Catalunya), [En línea]. Disponible en: <http://hdl.handle.net/2099.1/3380>
- Glaeser, L. (1.976). *The Work of Frei Otto and His Teams 1.955-1.976*. Stuttgart: Institut für Leichte Flachentragwerke.
- Gosling, P.D. y Chivaprathanant, J. (2.002) "A versatile cutting pattern methodology for woven fabrics". *Proc. Int. Symposium on Lightweight Structures in Civil Engineering*, Varsovia, Polonia, IASS.
- Gründig, L., Ekert, L., and Moncrieff, E. (2.006) "Geodesic and Semi-Geodesic Line Algorithms for Cutting Pattern Generation of Architectural Textile Structures". *Proc. Asia-Pacific Conference on Shell and Spatial Structures*, Beijing, China, IASS.
- Hernández-Montes, E., Jurado-Piña, R., and Bayo, E. (2.006) "Topological mapping for tension structures". *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 132(6), 970-977.
- Ishii, K. (1.999). *Membrane Designs and Structures in the World*. Tokio: Shinkenchiku-sha.
- Jurado-Piña, R., Hernández-Montes, E., and Gil-Martín, L. M. (2.009) "Topological mesh for shell structures". *Applied Mathematical Modelling*, 3(2), 948-958.
- Kim, JY., Lee, JB. (2.002). "A new technique for optimum cutting pattern generation of membrane structures". *Engineering Structures*, 24(6), 745-756.
- Leonard, J. W. (1.988). *Tension Structures*. New York: McGraw-Hill.
- Levy, R., and Spillers, W. R. (2.004). *Analysis of geometrically nonlinear structures*, 2nd Ed., Londres: Chapman & Hall.
- Linkwitz, K., and Schek, H. J. (1.971). "Einige Bemerkung von vorsgepannten Seilnetzkonstruktionen". *Ingenieur-archiv* 40, 145-158.
- Linkwitz, K. (1.999). "About formfinding of double-curved structures", *Engineering Structures*, 21(8), August 1999, Pages 709-718,
- Maurin, B., y Motro, R. (1.998). "The surface stress density method as a form-finding tool for tensile membranes". *Engineering Structures*, 20(8), 712-719.
-

Maurin, B., y Motro, R. (2.005). "Fabric membranes cutting pattern". *Textile Composites and Inflatable Structures, Computer Methods in Applied Sciences*, 3, 195-212.

Moncrieff, E., and Topping, B. H. V. (1.990). "Computer methods for the generation of membrane cutting patterns". *Computer & Structures*, 37(4), 441-450.

Murcia Vela, J. (2.007). "Tecnología de Pasarelas con Estructura de Membrana". *Informes de la construcción*, 59(507), 21-31.

Schek, H. J. (1.974) "The force density method for form finding and computation of general networks". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3(1), 115-134.

Siev, A., and Eidelman, J. (1.964). "Stress analysis of prestressed suspended roofs". *Proceedings of ASCE.*, 90(4), 103-121.