LÓGICA Y PENSAMIENTO ARITMÉTICO

Alfonso Ortiz

Presentamos los resultados obtenidos en una prueba sobre razonamiento inductivo numérico finito y unas entrevistas clínicas posteriores realizadas a escolares de educación primaria. La primera fue respondida por 400 escolares. Con base en los resultados obtenidos, se seleccionaron 28 alumnos para realizarles entrevistas clínicas individualizadas con el fin de determinar la evolución de las relaciones lógicas que estos escolares pueden establecer en el campo de los números naturales finitos. El origen de este estudio está en problemas históricos sobre los fundamentos lógicos de la aritmética. Buscamos determinar de forma empírica hasta qué punto la lógica juega un papel determinante en el origen de la aritmética o, por el contrario, si los orígenes de la lógica están predeterminados por la aritmética y otros conocimientos.

Términos clave: Aritmética; Lógica; Números naturales finitos; Razonamiento inductivo

Logic and Arithmetic Thinking

We present the results of two tests performed by primary school students. The first one was on finite numeric inductive reasoning and was performed by 400 students. According to its results, we selected 28 students to whom we clinically interviewed aiming to determine the evolution of the logic relations that they can establish in the field of finite natural numbers. This study originates on historic problems of the logical foundation of arithmetic. We aim to empirically determine the extent to which logic plays a key role in the origin of arithmetic or, on the contrary, if the origins of logic are predetermined by arithmetic and other fields.

Keywords: Arithmetic; Finite natural numbers; Inductive reasoning; Logic

Si como profesores reflexionamos sobre el proceso de enseñanza de las matemáticas desde la educación infantil hasta el final del bachillerato (3-18 años), observamos que en los inicios (3-6 años) estamos más pendientes de lo que puede aprender el niño, de potenciar habilidades y capacidades matemáticas, y existe cierta mirada a los orígenes del conocimiento para decidir por donde empezar.

Ortiz, A. (2009). Lógica y pensamiento aritmético. *PNA, 3*(2), 51-72.

Este origen puede que predetermine el ulterior desarrollo de los conocimientos matemáticos del niño. Si nos vamos a los niveles superiores (14-18 años), estamos pendientes de una base sólida para el futuro de los alumnos en estudios superiores. Un mirar atrás y un mirar adelante: en el primero, estamos pendientes de los orígenes de las primeras nociones aritméticas en el niño, y en el segundo, del edificio matemático.

En mi interés por investigar los orígenes del conocimiento matemático, he estudiado los fundamentos de la matemática y su desarrollo histórico (Ortiz, 1997). Al adentrarme en ellos, me planteo el papel de la lógica en el proceso de aprendizaje y construcción de los conceptos básicos de la aritmética y la geometría en la escuela.

LÓGICA Y MATEMÁTICA

La relación entre lógica y matemática ha sido, es y será, una de las cuestiones centrales de la epistemología de la Matemática. Es incuestionable que existen unos fundamentos lógicos de la Matemática, pero esto no significa que la lógica esté presente en el origen de la Aritmética o la Geometría.

Si observamos unos objetos dispuestos al azar, nuestra mente intenta darles orden y significado. Aplicamos entonces el sentido común y elementos lógicos, entre otros, para organizarlos y pensar sobre ellos. Pensar sobre algo no es hacer lógica. Lo que determina el campo de una ciencia es ese contenido sobre el qué pensamos y no las herramientas mentales —esquemas— que utilizamos para desarrollar los pensamientos necesarios.

La relación entre la lógica y la matemática no es ajena a la enseñanza de las matemáticas. Al escolar le presentamos objetos matemáticos sobre los que debe pensar con la intención de conseguir un sentido y un significado personal que le dé la posibilidad de comprender para aprender. En este proceso, el alumno debe establecer relaciones lógicas con contenido matemático o, incluso, en un contenido matemático. Esto es lo que se denomina lógica del pensamiento matemático: el conjunto de relaciones, conceptos y reglas de inferencia que establecemos y utilizamos para razonar en contenidos matemáticos, así como sus representaciones. En estos casos, para un buen razonar, es tan importante el dominio del contenido como los esquemas lógicos que se aplican.

Bajo el supuesto de que la matemática y la lógica son constructos que se producen en el individuo en procesos de aprendizaje, y que las ciencias correspondientes a ambas son una de sus manifestaciones, podemos afirmar que los orígenes de la matemática en el sujeto están más en relación con los objetos. Por lo tanto, la matemática es más empírica que la lógica. En la construcción individual de la matemática, la construcción de la aritmética se desarrolla en una etapa que se introduce mediante el contacto con los objetos: conservación de la cantidad discreta y continua, comparación de cantidades, iniciación a la medida, establecimiento de correspondencias entre conjuntos, etc. Esto sucede con independencia de representaciones lingüísticas o del uso de signos y símbolos.

Por otra parte, la lógica se inicia a nivel verbal con conceptos tales como el de proposición. El contexto aludido en una proposición puede estar en la aritmética o no; pero, necesariamente está en el sujeto, siendo esto último de vital importancia. Toda proposición encierra conceptos que el individuo debe dominar al hacer uso de la misma.

Las reglas de la lógica son el resultado de abstracciones a partir de relaciones que hemos establecido previamente. Para explicar el significado de una regla lógica a un escolar, se necesitan ejemplos concretos en los que el escolar ya haya aplicado dicha regla consciente o inconscientemente. Si le presentamos el 2 y el l6, puede establecer la relación "ambos son pares". El concepto par ha sido construido previamente en su consciencia, pero resulta que el concepto par es la relación misma. Estas construcciones previas son las que posibilitan en el escolar una construcción efectiva de su pensamiento matemático. Por otra parte, las construcciones previas abundan en contextos no matemáticos y, por ello, fuera del campo de la matemática se construye la lógica del pensamiento humano. Así, al actuar sobre los objetos, el niño adquiere la relación mayor que, que da sentido y significado al concepto tamaño y, actuando sobre el tamaño de los objetos, puede establecer relaciones lógicas ordinales como ser mayor, ser menor, ser igual, estar entre, etc. Sin estas relaciones, el niño difícilmente podrá adquirir el concepto tamaño y difícilmente entenderá una proposición que contenga alguna de estas relaciones.

Pensamiento Aritmético

Los niños actúan sobre los números estableciendo relaciones entre los mismos. En algunas ocasiones estas relaciones coinciden en extensión, aunque tengan distinto significado (por ejemplo, "ir después", "ser mayor", "posterior", "ser consecutivos", "uno más" y "siguiente"). Algunas de estas relaciones provienen de contextos no aritméticos con significados ajenos a la aritmética. Estos contextos tienen la misma estructura lógica pero no la misma estructura aritmética. Este es el caso de "uno más" y "siguiente".

"Siguiente" no tiene un significado aritmético ya que se define como el que le sigue o el que viene a continuación. Por tanto, no es necesario el uso de un concepto aritmético aunque lo apliquemos en el número natural, incluso en los axiomas de Peano. Aunque podamos hacer un uso indistinto de "siguiente" y "uno más" en el campo de los números naturales, en la estructura aritmética tienen distinto nivel de significación. "Uno más" es un nivel aditivo[1] y "siguiente" puede ser un nivel de conteo o de imaginar la recta numérica. El nivel de conteo es el de memorización verbal de una secuencia o de una parte de la misma: en el

[1] La suma es utilizada para establecer o expresar la relación.

abecedario, la letra siguiente a *b*, es *c*. En concreto, el abecedario posee estructura lógica pero no estructura aritmética que posibilite la suma.

Los niveles de significación representan formas estables del pensamiento matemático del sujeto. Estas formas evolucionan con la edad y con los aprendizajes en matemáticas. En el ejemplo anterior podemos distinguir dos niveles: uno meramente ordinal y otro propio de la aritmética elemental. La herramienta utilizada en el segundo caso es la suma, la cual es adquirida por el escolar en un proceso de enseñanza-aprendizaje de la aritmética después de una construcción efectiva del número natural. Por tanto, es propio de esta última y no de la lógica. El buen uso de la suma al establecer relaciones en el campo numérico se debe a un buen dominio del conocimiento aritmético. Un objetivo básico de la enseñanza de la matemática es que el escolar establezca relaciones lógicas sobre contenidos matemáticos con significado propio de la matemática, que desarrolle su pensamiento matemático y que lo aplique en distintos contextos, dentro y fuera de la matemática.

El significado aritmético de "siguiente" tiene en el niño un origen anterior a la secuencia numérica al trabajar con cantidades considerándolas como magnitudes (cantidades discontinuas o discreta) para interpretar el concepto de unidad y de "uno más". Pero este proceso en el caso de "siguiente" no acaba en la interpretación aditiva anteriormente expuesta y debe evolucionar a niveles superiores.

El pensamiento matemático debe evolucionar en el escolar desde niveles de significación aritméticos hasta conseguir el establecimiento de *relaciones de relaciones*. Si N es el conjunto de los números naturales, formalmente las relaciones de relaciones se establecen en el producto cartesiano $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$. Esto potencia en el escolar la posibilidad de establecer relaciones de equivalencia para asimilar conceptos tales como los números enteros o los números racionales. Las relaciones de relaciones permiten concluir que la relación existente entre dos números es la misma que existe entre otros dos, y posibilitan el encadenamiento de relaciones para obtener las distintas clases de equivalencia o una regularidad numérica como puede ser una serie. Las relaciones de relaciones posibilitan tener en cuenta más de un factor simultáneamente. El niño puede identificar de entre varias relaciones las que son equivalentes. El número de relaciones de orden y de equivalencia que podemos establecer en el conjunto de los números naturales es infinito. Es un universo de relaciones en el que podemos, a su vez, establecer una infinidad de relaciones.

Por ejemplo, el "ser consecutivos en una misma secuencia o serie numérica" es un concepto que es consecuencia del establecimiento de una relación de relaciones. Así, el niño que es capaz de construir una serie de diferencia 3, si no establece la relación de relaciones puede pensar que las parejas de números consecutivos $(4,7)$ y $(23,26)$ pertenecen a la misma serie aritmética de diferencia 3. No tiene en cuenta que a un mismo criterio o regla le pueden corresponder varias series asociadas. Distinguir si dos parejas de números consecutivos, según un criterio, pertenecen a una misma serie asociada es una terio, pertenecen a una misma serie asociada es una nueva relación. El ejemplo expuesto explica el significado de lo que entendemos por relación de relaciones en una aritmética no formal que forma parte del pensamiento aritmético del sujeto.

Pensamiento Proporcional y Pensamiento Relativo

El pensamiento proporcional es un tema clásico en la aritmética elemental y ocupa un lugar privilegiado en el establecimiento de relaciones de relaciones. La igualdad de dos razones es un caso de silogismo numérico en el que el producto de los extremos es igual al producto de los medios. Para llegar a la proporción no es suficiente con un pensamiento multiplicativo en el sentido de determinar la relación multiplicativa entre dos cantidades dadas (doble-mitad, triple-tercio, etc.). Es necesario llegar a la igualdad de dos o más razones para interpretar situaciones de proporcionalidad como un reparto proporcional o la semejanza de dos o más polígonos. El escolar que interpreta la igualdad de dos razones mediante cocientes iguales no ha llegado al nivel del pensamiento proporcional. Estos alumnos simplifican un sumando como factor en una fracción o no tienen en cuenta el doble producto al calcular el cuadrado de un binomio. En este último caso, ellos aplican un pensamiento lineal mediante una correspondencia asociada a la propiedad distributiva del producto respecto de la suma. Este nivel es propio del pensamiento multiplicativo y no del pensamiento proporcional.

En paralelo al pensamiento proporcional, el escolar debe desarrollar el pensamiento relativo. Este pensamiento es a la suma como el pensamiento proporcional es a la multiplicación. En el pensamiento relativo lo importante es la diferencia entre dos cantidades con independencia de su tamaño. Un ejemplo real y sencillo ocurre en el fútbol donde, en una eliminatoria a dos partidos, lo que determina el triunfo es la diferencia de goles a favor y en contra, no cuántos goles a favor y cuántos goles en contra. Estas diferencias de goles se tienen en cuenta en las clasificaciones previas a una competición en casos de empates a puntos. Así, si en un partido he ganado por dos goles y en otro pierdo por tres, tengo una desventaja de un gol. Pero, si en el siguiente gano por dos, tengo una ventaja de un gol. En muchas ocasiones, para que un equipo se clasifique para una fase posterior debe ganar un último partido de la fase previa por más de una cantidad de goles. Estas relaciones constituyen parte del pensamiento relativo.

El pensamiento relativo es el que posibilita la comprensión y construcción efectiva de los números enteros, al igual que el pensamiento proporcional posibilita la comprensión y construcción efectiva de los números racionales. Tanto el pensamiento relativo como el pensamiento proporcional son precursores del pensamiento algebraico. En el currículum escolar se le da poca importancia al pensamiento relativo. Esta situación lleva a serias dificultades en la interpretación del signo menos en el "algebra de los paréntesis".

El signo menos delante de un paréntesis se puede interpretar como restar todo su contenido, el opuesto del mismo o como multiplicar su contenido por "menos uno" (-1), cambiando el signo a todos sus términos (propiedad distributiva). Pero "menos uno" es un número negativo y se debe tener en cuenta la regla de los signos para el producto. Estas tres interpretaciones son necesarias para el paso de la aritmética al álgebra. En situaciones propias de la aritmética, sólo con expresiones numéricas, podemos utilizar indistintamente las tres acepciones anteriores. En desarrollos algebraicos, en cambio, donde se combinan los signos de la aritmética con números y letras, la cuestión no es así ya que muchas de las operaciones no se pueden realizar, sólo se pueden reagrupar o simplificar términos semejantes. En álgebra el resultado puede ser una expresión más o menos compleja. Esto no ocurre en el campo exclusivo de los números. En el campo numérico todo resultado es un número.

La realización de una tarea algebraica, como la de simplificar una expresión compleja, no se realiza al azar. Los pasos a seguir dependen de las expresiones presentes que aconsejan aplicar una u otra interpretación del signo menos o, incluso, ninguna de ellas para en sucesivos pasos poder simplificar términos semejantes. Todos estos procesos distan mucho del "álgebra de la lógica formal". Lo que orienta el proceso no son sólo las reglas de la lógica que se puedan utilizar sino, además, los distintos signos matemáticos de las diferentes operaciones con sus posibles significados. Con ello creo que aporto nuevas razones para no confundir el razonamiento lógico con el razonamiento matemático.

Hasta aquí he pretendido explicar que el sustento del razonamiento matemático es su contenido y que su álgebra está impuesta por el funcionamiento del contenido. En matemáticas, el álgebra se considera como una generalización de la aritmética y la geometría, a diferencia de la lógica (y por tanto de su álgebra), que se construye con independencia de cualquier contenido. En lógica, predomina el significado estructural con independencia del sentido y del significado en un contexto. En matemáticas, no se puede dar un sentido sin una referencia y un significado previos, ya que el pensamiento sobre algo no puede ser su referencia. El pensamiento no puede ser la referencia de un enunciado pero sí podemos considerarlo como su sentido.

Las leyes lógicas son ante todo leyes en el dominio de las referencias y sólo indirectamente se relacionan con el sentido (Frege, 1984, p. 93). Según Frege, al referirnos a las leyes de la lógica, la palabra "ley" tiene un doble sentido: en un sentido afirma lo que es, en otro prescribe lo que debe ser. Sólo en este último sentido las leyes lógicas pueden ser llamadas leyes del pensamiento, ya que fijan el modo cómo hay que pensar. Esto último está en relación con la Psicología.

Antecedentes y Orígenes del Problema: Contexto y Conflicto Epistemológicos

Los antecedentes del problema planteado entre lógica y matemática me han llevado a considerar el pensamiento matemático. Pretendo con ello evitar controversias en Didáctica de la Matemática planteadas en el seno de la propia Matemática.

En principio, distingo entre lógica formal y lógica deductiva[2]. La lógica formal tuvo sus inicios en Leibniz, quien se planteaba la posibilidad de poder expresar nuestras ideas de forma clara con un sistema de signos, como sucede con los números en aritmética. La lógica formal es prolongación de la clásica lógica aristotélica. Por otra parte, la lógica deductiva tiene sus orígenes en la axiomatización de la geometría realizada por Euclides: inferir todo un campo de la matemática a partir de unos postulados.

Para Boudot (1978), la lógica formal determina las reglas canónicas a las cuales se somete la demostración válida. La lógica formal analiza las estructuras de las ciencias demostrativas, describe, censa y, eventualmente, valida los procedimientos que ellas emplean y explicita y define los conceptos cardinales sobre los que descansa el pensamiento demostrativo.

A principios del siglo XIX, Peacock afirmó que el álgebra es una ciencia deductiva al igual que la geometría. Para Peacock, todos los procesos del álgebra habrían de estar basados en el establecimiento completo del cuerpo de leyes que conciernen a las operaciones utilizadas en esos procesos, no pudiéndose usar ninguna propiedad de una operación si no ha sido puesto de manifiesto que tal propiedad pertenece a esa operación o no ha sido obtenida por deducción a partir de las leyes iniciales (Nidditch, 1978). Un ejemplo del desarrollo del álgebra abstracta en el sentido de Peacock fue la Teoría de Grupos de Galois y de Abel. Estos fueron los comienzos de las estructuras algebraicas.

En matemáticas, se considera el álgebra como una generalización de la aritmética y adelanta el principio de permanencia de las propiedades de las operaciones algebraicas. Según este principio, cualquier ampliación o generalización de la aritmética del número natural debe incluir las operaciones y propiedades de los números naturales. Por ello, todas las extensiones del campo numérico deben poseer las operaciones de los números naturales y sus propiedades o cuerpo de leyes que conciernen a las operaciones. Estos son postulados inquebrantables del álgebra.

El Logicismo y el Aritmetismo

El problema de la lógica y la matemática se remonta a mediados del siglo XIX con los modelos de Boole, De Morgan y Jevons, aunque podamos tener antecedentes anteriores. Una de las pretensiones de los lógicos de la época era demostrar que el origen y los fundamentos de la aritmética, y por tanto del número natural, estaban en la lógica de clases y de predicados. Ello llevó a algunos lógicos al intento de considerar la matemática como parte de la lógica. Russell, en sus

[2] Quiero aclarar que la diferencia entre lógica formal y lógica matemática es que la segunda utiliza el método matemático de formalización para resolver los problemas de la lógica y abandona aspectos generales de la lógica aristotélica y, por ello, es más restringida (Andréiev, 1984).

Principios, intenta demostrar la reducción de la aritmética a unos axiomas lógicos (cuya imposibilidad fue demostrada por Gödel en 1935).

Esta corriente lógica o logicista de la aritmética no fue la única, ya que muchos lógicos, como Mill (1917), consideran que el origen de la aritmética es inductivo. Los libros de aritmética de la época están impregnados de este enfoque que he denominado "aritmetismo" (Ortiz, 1997). Tenemos, por tanto, dos corrientes lógicas: la logicista y la inductivista.

La corriente inductivista de Mill, que dio lugar al aritmetismo, la podemos caracterizar por las siguientes afirmaciones:

- ♦ El origen del número natural es inductivo.
- ♦ La aritmética no es un sistema deductivo sino inductivo.
- ♦ Los números se dicen de las cosas y no de los conceptos —según Frege, (1884), los números no se dicen de las cosas, sino de las clases—.
- ♦ El punto de partida de la aritmética son los axiomas sobre cantidades, basados en el principio empirista "el todo es la suma de las partes" (en contradicción con los principios racionalistas de la Gestalt).

Las interpretaciones epistemológicas inductivistas tienen un desarrollo matemático concreto. Al hablar de aritmetismo nos referimos a esta manera particular de desarrollar la aritmética por los matemáticos de la época que dio lugar a las síntesis inductivistas sobre el origen y naturaleza de la aritmética del número natural.

La respuesta dada por los matemáticos al problema planteado por los lógicos, en la corriente logicista, sobre los fundamentos de la matemática fue la teoría de conjuntos y la axiomatización de las construcciones matemáticas en la segunda mitad del siglo XIX y principios del siglo XX.

Las construcciones conjuntistas de la aritmética del número natural parten del concepto de cardinal de un conjunto, pero también existen construcciones axiomáticas puramente ordinales cuyo soporte es el orden y la secuencia numérica (Fernández y Ortiz, 2008) que en parte están en relación con el aritmetismo. El fracaso de los planteamientos conjuntistas en la enseñanza elemental de la matemática fue su formalismo en cuanto al método. Estos planteamientos utilizan el método deductivo, ya que se inician con la idea general de conjunto para pasar a conceptos particulares, mientras el pensamiento del escolar es inductivo, de lo particular a lo general (Ortiz, 1997).

El Conocimiento Matemático y las Relaciones de Relaciones

Poincaré (1964) distingue entre matemáticos lógicos o analistas y matemáticos intuicionistas o geómetras y afirma que, aunque hayan estudiado juntos, pueden llegar a una tendencia u otra y no es la materia que tratan la que impone uno u otro método. Los analistas son analistas aunque estudien geometría y los geómetras siguen siendo geómetras aunque estudien análisis puro. Según Poincaré, es la propia naturaleza de su espíritu lo que los hace lógicos o intuitivos. Tampoco es la educación o la enseñanza recibida lo que ha desarrollado en ellos una de las dos tendencias.

Los trabajos de Russell (continuador de Frege) parten de conceptos lo más generales posible, con la intención de abarcar todo tipo de razonamiento y contenido, intentando redefinir en dicho campo la aritmética con conceptos tales como cardinal de una clase, serie, etc., para concluir que los conceptos de la aritmética son casos particulares de los anteriores. Con seguridad no hubiese llegado a esta conclusión sin conocer previamente los conceptos aritméticos para los cuales buscó conceptos más generales que los incluyese. Como antes he mencionado, cuando se establece una relación conceptual, esta relación se puede utilizar en una proposición lógica y esto último no tiene nada que ver con la construcción efectiva del concepto que encierra la relación. Organizar conocimientos en marcos más amplios es posterior a la construcción de los mismos. Difícilmente se podría hacer sin su conocimiento previo.

Russell construyó todo un andamiaje de relaciones lógicas para redefinir la aritmética que conocía. Él intentó buscar definiciones lógicas de conceptos matemáticos como el de número, orden, etc. Esto no quita el interés a sus trabajos ya que nos posibilita, en Didáctica de la Matemática, plantear constructos nuevos para interpretar la evolución del pensamiento matemático de los escolares. Tal es el caso de las relaciones de relaciones, de las que la proporción y la razón son casos particulares.

Al estudiar la similitud entre relaciones, Russell (1988) definió el concepto de relación de relaciones que nosotros utilizamos. Él definió una relación entre relaciones, por cumplir respecto a éstas el mismo papel que desempeña para las clases la similitud entre clases.

Consideremos la siguiente tarea en la que se clasifican relaciones:

> *Si tenemos dos rectángulos verdes (uno grande y otro pequeño) y dos rectángulos azules (uno grande y otro pequeño), podemos poner por un lado los azules y por otro los verdes, o bien, por un lado los grandes y por otro los pequeños.*

Si esta tarea la realizan varios escolares se obtienen dos categorías de escolares según la relación establecida. Dos sujetos pertenecerán a una misma clase si ambos han establecido la misma relación. Entonces se está aplicando una relación de relaciones. En otros casos, para que pertenezcan a una misma clase las relaciones pueden ser distintas pero equivalentes (producen el mismo resultado).

Russell (1988) definió los números enteros como relaciones de relaciones. Según este autor, resulta evidente que $+1$ y -1 deben ser relaciones y de hecho cada uno debe ser el inverso del otro. “Más uno” $(+1)$ es la relación de $n+1$ con n. “Menos uno” (-1) es la relación inversa de n con $n+1$. Generalizando, si m es un número inductivo (natural) cualquiera, $+m$ será la relación de $n+m$ con n (para todo n) y $-m$ será la relación inversa de n con $n+m$. Esta última relación es una relación de relaciones. Esta relación de relaciones posibilita, en una matemática formal, construcciones del número entero por paso al cociente a partir de relaciones de equivalencia[3].

Russell (1988) admite que

> *si bien todas las proposiciones lógicas (o matemáticas) pueden expresarse por medio de constantes lógicas acompañadas de variables, no se cumple la recíproca de que todas las proposiciones que pueden expresarse de este modo sean lógicas. Se ha definido suficientemente el carácter de las ideas primitivas con las que pueden definirse todas las ideas matemáticas, pero no las proposiciones primitivas a partir de las cuales pueden deducirse todas las proposiciones de la matemática.* (p. 177)

Ello significa que los conceptos matemáticos no los podemos obtener de nociones primitivas asignadas en marcos lógicos y que su construcción efectiva es ajena a la lógica formal.

Como matemático, no conozco aún ningún teorema matemático importante que se haya definido y demostrado en un marco lógico o por un lógico profesional. Me refiero a un teorema nuevo e inédito que aporte nuevo conocimiento al campo de la matemática. Por el contrario, sí conozco marcos matemáticos definidos a partir de unos axiomas que han posibilitado demostrar ciertos teoremas. Estos sistemas axiomáticos han tenido relevancia, como es el caso de los axiomas de Hilbert[4].

Según Boudot (1978), en el análisis del conocimiento matemático, la consideración de las "interpretaciones", el estudio de los modelos de las teorías formales, en definitiva, las consideraciones semánticas, deben jugar un papel esencial. A partir de las ideas de Carnap, Boudot concluye que la constitución de la lógica exige que se salga del marco demasiado estrecho de la sintaxis y reivindica la incorporación de una semántica propia de la lógica o semántica formal. Dado que el lenguaje de la matemática comprende términos descriptivos, no se puede reducir la lógica de la matemática a una pura sintaxis.

Lakatos (1981) afirma que

> *la lógica tal vez explique la matemática, pero no puede probarla. La matemática conduce a una especulación sofisticada que es cualquier cosa menos algo trivialmente verdadero. La teoría lógica de la matemática constituye una especulación estimulante y sofisticada, como cualquier otra teoría científica. Si no se demuestra que es falsa permanecerá conjetural para siempre.* (p. 35)

Lakatos está más próximo a un planteamiento heurístico de los descubrimientos matemáticos:

---

[3] Entre los críticos a Russell está Quine (1984). Para Quine la noción de función proposicional oscurece la fundamentación lógica de Whitehead y Russell.

[4] Hilbert ha sido el máximo exponente de los matemáticos formales o analistas, tal y como les llamaba Poincaré.

> *Es importante darse cuenta de que la mayor parte de conjeturas matemáticas aparecen antes de ser probadas, y por lo general son probadas antes de que esté articulado el sistema axiomático en el que puede ejecutarse la prueba de manera formalizada.* (p. 135)

Esta argumentación de Lakatos está próxima a las ciencias inductivas. Para Boudot (1978), una cosa es inventar una hipótesis que da cuenta de los hechos y otra es probarla o mostrar su solidez. La lógica matemática no es una técnica que exima al matemático del espíritu de la invención.

Borel (1962), que fue uno de los creadores de la teoría de conjuntos, afirma que

> *la matemática aparece, de manera cada vez más clara, como la ciencia que estudia las relaciones entre ciertos entes abstractos definidos de manera arbitraria, con la única condición de que estas definiciones no conduzcan a una contradicción. Sería necesario añadir, sin embargo, para no confundir la matemática con la lógica, que estas definiciones arbitrarias han sido sugeridas primariamente por analogías con objetos reales.* (p. 25)

Ello coincide con planteamientos como los de Pólya. Para Pólya (1978), la analogía es fundamental para llegar a una conjetura: guía el razonamiento en el proceso de su construcción. "La analogía es una especie de similitud. Objetos semejantes concuerdan unos con otros en algunos aspectos mientras que *objetos análogos concuerdan en ciertas relaciones* entre sus respectivos elementos" (p. 57).

Ha transcurrido más de un siglo desde la crisis de fundamentos y los lógicos no han asumido la teorización y el avance de las matemáticas. Esto es un indicador de que los lógicos difícilmente pueden asumir el conocimiento matemático y su investigación y, por tanto, los elementos lógicos no son los propios para el avance de la matemática. Tal y como explica Quine (1984), podemos traducir a un lenguaje lógico teorías matemáticas, pero sólo es eso, una traducción a un lenguaje.

Yo soy matemático y no creo que el fin de la lógica sea demostrar que una teoría matemática es traducible a un lenguaje lógico, como si los matemáticos pretendieran decir que la física es parte de la matemática por expresarse usando relaciones matemáticas. Así llegaríamos a decir que todo el conocimiento se reduce al lenguaje. Algunos textos de física teórica hacen un mal uso del concepto de derivada en cinemática y no por ello se afirma que la cinemática es parte de la matemática, aunque todos sus cálculos se pueden expresar y desarrollar matemáticamente. En física, hay cálculos matemáticos con interpretaciones físicas y la matemática sólo abarca la primero, es decir, los cálculos.

Las proposiciones matemáticas encierran conceptos y procedimientos que dan sentido y significado a una demostración. En matemáticas, se razona y se interpreta y la lógica sólo abarca el razonamiento. Sin embargo, hemos de admitir que el movimiento lógico del siglo XIX ha sido importante para el avance de las matemáticas del siglo XX. Entre otros logros, provocó un estudio profundo de los fundamentos de las matemáticas, necesario para su consolidación como ciencia deductiva (no como ciencia formal), con independencia de los problemas prácticos que ha resuelto. Hoy en día, difícilmente se puede entender una matemática sin conceptos tales como el de conjunto, correspondencia y morfismo, relación de equivalencia, estructura algebraica, estructura topológica, etc. Todos estos conceptos surgieron a partir de la teoría de conjuntos y su posterior desarrollo.

Objetivos de la Investigación en Pensamiento Matemático

Cuando se habla de investigación en pensamiento matemático, ¿a qué nos estamos refiriendo? En una primera aproximación, se puede contestar diciendo que se pretende ver cómo funcionan los razonamientos lógicos en contextos matemáticos. En estos contextos, el razonamiento se realiza con contenidos específicos y propios de la matemática.

En el estudio que aquí presento, las pruebas realizadas tienen como finalidad observar las relaciones aritméticas que establecen los escolares a partir de situaciones elementales que se les presentan. Se está evaluando su pensamiento matemático en contextos aritméticos. En relación con este problema de investigación, hay varias cuestiones centrales en la escuela cuyas respuestas hay que obtener a partir de investigaciones centradas en los alumnos:

- ¿Utilizan los escolares de educación primaria los modelos lógicos de razonamiento en contextos matemáticos?
- ¿Influyen los conceptos matemáticos a la hora de razonar sobre ellos o con ellos? ¿Hasta qué punto podemos decir que un concepto matemático está construido en el escolar si no es capaz de utilizarlo en una argumentación lógica? El "saber", por un lado, y "nuestro saber", por otro, condicionan lo que podemos pensar.
- ¿Qué predomina en un lógico al desarrollar un modelo: sus conocimientos de lógica o, por el contrario, su pensamiento? El lógico pretende que se acepte su trabajo en un paradigma lógico y esto último puede que haga que el modelo esté distante de una manera ingenua de pensar o razonar, por un niño, cuando se le plantea un problema lógico en un contexto matemático.

Los trabajos de Piaget parten de supuestos lógicos y los nuestros de supuestos matemáticos. Para Piaget (1980), "la lógica es una axiomática de la razón, de la que la psicología de la inteligencia es la ciencia experimental correspondiente" (p. 37). Los modelos de las estructuras psicológicas del pensamiento humano son a imagen y semejanza de las estructuras lógicas aunque no haya una identificación directa entre ambos tipos de estructuras. En su ensayo de lógica operatoria hace constar que las relaciones aritméticas abarcan tanto relaciones lógicas como otras que no son contempladas por los lógicos, admitiendo que en aritmética se establecen tanto relaciones intensivas como extensivas y que la lógica sólo abarca las primeras. De esto se desprende que, "o bien las matemáticas constituyen en sí mismas su propia lógica, o bien requieren la construcción de una lógica matemática especial, elaborada por medios matemáticos" (Piaget, 1977, p. 99).

Los fundamentos lógicos de la matemática provocaron una enseñanza de la aritmética basada en la teoría de conjuntos, en contradicción con la propia evolución del pensamiento del niño. En la enseñanza conjuntista de la aritmética se parte de nociones generales como la de conjunto para definir conceptos aritméticos particulares como número y sus operaciones. Aunque es intuitivo, esto significa imponer un método de razonamiento deductivo (de lo general a lo particular), impropio de escolares, cuyo razonamiento, según Piaget, es inductivo, es decir, va de lo particular a lo general. Esta enseñanza se extendió por Europa en la segunda mitad del siglo XX.

Ya en el siglo XXI, si observamos los libros de texto actuales de matemáticas para escolares de educación primaria, podemos ver que, a pesar de no partir de la teoría de conjuntos, no se ha producido un abandono de los modelos conjuntistas sin más. Al estudiar las expresiones utilizadas, vemos que perduran léxicos propios de construcciones lógicas de la aritmética y, por tanto, también en la enseñanza actual de la matemática han dejado su huella los planteamientos lógicos de la aritmética. En este contexto escolar de enseñanza de las matemáticas hemos realizado nuestra investigación.

EXPERIMENTO 1

Con la intención de partir del razonamiento lógico en aritmética para discriminar a los sujetos objeto de nuestro estudio, se aplicó la prueba de razonamiento inductivo numérico de Ortiz (Moya, 1999; Ortiz, 1997) a una población de 400 escolares de educación primaria. Los alumnos procedían de distintos tipos de centros escolares: públicos y privados, urbanos y rurales.

La prueba consta de seis tareas y constituye una escala acumulativa de Mokken (Mokken y Lewis, 1982). La acumulatividad significa que los ítems están ordenados de manera que el escolar que responde correctamente una tarea distinta de la primera, ha contestado correctamente todas las anteriores. El nivel que se le asigna al escolar es el lugar que corresponde a la última tarea contestada correctamente.

Al tratarse de una escala acumulativa en razonamiento numérico, se calcularon, entre otros, los coeficientes de reproductividad de Guttman para la validación estadística de los resultados, de acuerdo con las condiciones de aplicación de la prueba. Se obtuvo un valor de 0,993125, superando el mínimo exigido de 0,90. La consistencia interna de la escala se midió mediante el coeficiente de Borgatta. Se obtuvo un valor de 0,0824, próximo a 0, que es el correspondiente a una escala acumulativa perfecta.

Aplicada la prueba y, de acuerdo con los resultados obtenidos, se clasificaron los alumnos en seis niveles. La distribución de los alumnos de cada nivel por edades y por cursos se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1
Distribución de los alumnos por edades y por cursos

	Edad							Curso					
Nivel	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
N1	×	×						×	×				
N2	×	×	×					×	×				
N3		×	×	×	×	×			×	×	×	×	
N4		×	×	×	×	×	×		×	×	×	×	×
N5					×	×	×				×	×	×
N6						×	×					×	×

En esta tabla se observa cómo los niveles N3 y N4 abarcan unos intervalos de mayor amplitud de edades y cursos. Aparecen niños del nivel N4 con edades comprendidas entre los siete años y los doce años, y distribuidos desde segundo curso a sexto curso de educación primaria. En segundo y quinto curso de educación primaria hay alumnos muy dispares distribuidos en cuatro niveles. Lo mismo ocurre con los alumnos de 7 y 11 años. Esto significa que un profesor se encuentra en una clase con desniveles importantes en pensamiento aritmético, lo que dificulta la comprensión por igual de las enseñanzas recibidas.

A partir de la aplicación de la prueba a dicha muestra se obtienen las siguientes conclusiones:

- ♦ Los escolares de educación primaria (6-12 años) presentan grandes desniveles o desfases en razonamiento inductivo numérico. Los escolares de una misma edad pueden presentar cuatro niveles como ocurre a los 7 y 11 años. Como mínimo se presentan dos niveles a los 6 y 9 años que son los grupos de edad más homogéneos.
- ♦ Los niveles N2 y N4 producen un escalonamiento, en el sentido de barrera para los alumnos de 6 años y primer curso y para los alumnos de 9 años y tercer curso, respectivamente. Así, podemos observar que los cuatro niveles que se presentan en los escolares de 7 años se reducen a dos niveles a los 9 años, siendo el tope máximo el nivel N4. El nivel N4 es el máximo

durante tres años. Hay que esperar a los 10 u 11 años para pasar esta barrera y encontrarnos con escolares de los dos niveles superiores.

- De acuerdo con los datos, a partir de los 7 años los escolares se van acumulando progresivamente en el nivel N4, hasta los 10-11 años que se produce una expansión hacia los niveles superiores.
- El nivel N4 es el más persistente en educación primaria y se presenta en escolares con edades comprendidas entre los 7 y los 12 años o desde segundo hasta sexto curso.

EXPERIMENTO 2. ENTREVISTAS CLÍNICAS SEMIESTRUCTURADAS[5]

Para una segunda fase de este estudio, seleccioné 28 de los 400 escolares que participaron en el experimento 1. Con estos 28 escolares realicé entrevistas clínicas individualizadas (Ortiz, 2001). Le propuse a cada alumno entrevistado la realización de una tarea manipulativa con una cierta componente lúdica que actuó como campo de observación y como soporte de la entrevista.

Para simplificar el trabajo decidí unificar la entrevista y el análisis de tareas en un solo procedimiento, en el mismo sentido ya utilizado en varios estudios sobre el razonamiento inductivo dentro de un paradigma mediacional, en el marco de la teoría de la continuidad (Bruner, Goodnov y Austin, 1958; Egan y Greeno 1974; Restle y Greeno, 1970).

Objetivos

Los dos objetivos de este experimento fueron los siguientes:

- Aportar datos para describir los perfiles en pensamiento matemático de los escolares según los distintos niveles alcanzados en razonamiento inductivo numérico.
- Realizar un estudio transversal para determinar la evolución del pensamiento matemático de los escolares de 6 a 12 años en el establecimiento de relaciones de relaciones en aritmética.

Selección de la Muestra

Seleccionamos a los escolares que participaron en este segundo experimento basándonos en los resultados obtenidos en la prueba de razonamiento inductivo numérico finito.

En cuanto al primer objetivo, los alumnos de un mismo nivel deben presentar el mismo perfil con independencia de la diferencia de edad o curso. Por este motivo seleccioné niños de la misma edad, por una parte, y del mismo curso, por

[5] El significado de las entrevistas semiestructuradas como técnica de investigación puede estudiarse en Cohen y Manion (1990, p. 377).

otra. En ambos casos, seleccionamos estudiantes de distinto nivel con la intención de comprobar que su pensamiento aritmético era distinto.

Recíprocamente, se seleccionaron escolares de cada nivel pero de distinta edad, por una parte, y de distinto curso por otra. La intención era comprobar que, con independencia de la diferencia de edad o de curso, si pertenecen a un mismo nivel, entonces establecen el mismo tipo de relaciones numéricas.

En definitiva, se perseguía obtener pruebas de que todos los alumnos de un nivel son semejantes en su lógica del pensamiento aritmético. Por este motivo, se eligió una muestra de 28 escolares que abarcaba alumnos de los seis niveles obtenidos en el experimento 1.

Tareas

Las tareas propuestas se corresponden con un estado avanzado del pensamiento matemático en consonancia con una evolución a la formalización del pensamiento aritmético y, por tanto, con el inicio del álgebra o del pensamiento algebraico.

Ante varias parejas de números, entre las que existen relaciones diversas, a veces iguales, el alumno debía hacer grupos de parejas de manera que en cada grupo debían estar todas las parejas de números que guardaran entre sí la misma relación.

El objeto de las tareas era estudiar si el alumno identificaba dos relaciones equivalentes, es decir, si establecía o no analogía entre parejas de números. Dos parejas son equivalentes si en cada una de ellas se puede establecer la misma relación aritmética; es decir, (a,b) es equivalente a (a',b') si existe una relación aritmética R tal que aRb y $a'Rb'$. Donde a, b, a' y b' son números naturales.

Material

Para cada uno de los seis niveles obtenidos en el estudio cuantitativo se construyeron cuatro parejas de números que se dispusieron imitando las fichas del dominó. Las relaciones aritméticas asociadas a las parejas son propias del nivel correspondiente. La dificultad añadida es el establecimiento de una relación de relaciones. Se incluyen relaciones de relaciones propias de cada nivel. En la Figura 1 se muestran las fichas construidas para cada nivel.

Nivel 1

2	12	32	42	52	42	92	82

Nivel 2

3	5	7	9	29	27	84	82

Figura 1. Fichas de parejas de números para la entrevista

Nivel 3							
2	8	3	9	1	13	41	53
Nivel 4							
9	1	38	30	72	59	95	82
Nivel 5							
2	6	3	9	2	8	8	4
Nivel 6							
15	5	12	4	6	3	3	12

Figura 1 (continuación). Fichas de parejas de números para la entrevista

Desarrollo de la Entrevista

La entrevista tuvo una primera parte introductoria muy elemental, para asegurar que los alumnos comprendían el mecanismo de la misma. En esta primera parte se le presentó a cada entrevistado cuatro rectángulos desiguales (dos azules y dos verdes) y se le pidió que los emparejara. Una vez emparejados, se le preguntó en qué se había basado o por qué los había agrupado de esa manera (debía contestar "por el color").

Entonces se le presentó una ficha con dos números (2 y 12) para la cual debía indicar una relación que existiera entre dichos números, diciendo en qué se parecían y en qué se diferenciaban. A continuación, se pusieron sobre la mesa las cuatro fichas correspondientes al primer nivel, se movieron y se le presentaron posibilidades de emparejamiento. Se le hizo ver que los emparejamientos debían tener un motivo (existe una relación como las que estableció anteriormente) y se le indicó que cuando juntara dos fichas (es decir, dos parejas de números) tenía que decir por qué debían estar juntas.

Una vez había dado dicha explicación se le preguntaba: ¿puedes explicármelo de otra manera?; ¿ves otro motivo distinto al que me has dicho?; ¿se te olvida algo? Por último, se le preguntaba si era capaz de emparejarlas de alguna otra manera.

Resultados y Conclusiones del Estudio 2

Doce escolares no establecieron ninguna relación de relaciones correctamente. Para los demás escolares, la Tabla 2 muestra los niveles de tareas en los que establecieron correctamente la relación de relaciones. Cada alumno es identificado por el nivel alcanzado en el primer experimento, la edad y el curso.

Tabla 2
Distribución del establecimiento correcto de relaciones de relaciones

Nivel Experimento 1	Edad	Curso	Nivel Experimento 2					
			1	2	3	4	5	6
4	9	3			×	×		
4	9	4		×		×		
4	10	4	×	×				
6	10	5	×	×	×	×	×	×
6	10	5		×	×	×	×	×
6	10	5	×	×	×	×		
6	11	6		×		×		
6	11	6	×	×	×	×	×	×
6	12	6	×	×	×	×	×	×

A partir de esta tabla se observa que las tareas propuestas son propias del nivel N6. Los escolares que se adaptaron a lo que se les pedía corresponden a ese nivel. Ellos se dirigieron directamente a comparar relaciones y no se detuvieron en estudiar otras posibilidades.

Dos escolares (los participantes más jóvenes), del nivel N4, lograron encontrar alguna relación entre relaciones. Esto no significa su adaptación plena a la prueba, ya que detectaron estas relaciones por ensayo y error, es decir, proponiendo varias soluciones.

Salvo los escolares del nivel N6, que contestaron correctamente estableciendo las relaciones esperadas por el investigador, los demás escolares intentaron justificar de algún modo los emparejamientos. La estrategia que utilizaron estos escolares fue juntar las parejas dos a dos y pensar. Si no podían encontrar una justificación, las emparejaban de algún otro modo. Lo importante es que siempre utilizaron estrategias que pueden identificarse como propias de su nivel.

Categorías de Organización de los Esquemas

A partir del análisis de los datos he distinguido cuatro categorías para organizar los esquemas que manifestaron estos escolares: (a) correspondencia representacional, (b) clasificación representacional, (c) ordinal representacional y (d) aditivo representacional. Representacional significa tener en cuenta características del sistema de escritura (tener dos cifras iguales, terminar en una misma cifra, tener una cifra común en todas las parejas, etc.). A continuación describo estas categorías y las ejemplifico con respuestas dadas por los alumnos. En los ejemplos identifico a los alumnos por su nivel, edad y curso.

Correspondencia Representacional

Se considera cada pareja como un conjunto de dos elementos y se establece una correspondencia con un criterio representacional (ver Figura 2).

N1, 6, 1	
(92 82)	(32 42)
(2 12)	(52 42)
"El dos con el dos"	"Juntos el dos con el dos"
N1, 7, 2	
(2 12)	(92 82)
(32 42)	(52 42)
"Aquí también el dos contra el dos y el dos contra el dos. Éstos tienen un número delante"	"Éste se parece en el dos contra el dos y el dos contra el dos. Éstos tienen un número delante"
N2, 6, 1	
(32 42)	(2 12)
(52 42)	(92 82)
Señalando el cuarenta y dos de cada pareja: "Éstos dos sitios tienen cuarenta y dos"	Cubriendo el ocho y el uno, dice: "Éstos tienen dos"

Figura 2. Ejemplos de la categoría correspondencia representacional

Clasificación Representacional

Se aplica una correspondencia con un criterio clasificatorio representacional (ver Figura 3).

N1, 7, 2	
(7 9)	(29 27)
(3 9)	(84 82)
“Éste tiene un número”	“Éste tiene dos números. No va ir un número contra dos”
N4, 9, 4	
(84 82)	(7 9)
(29 27)	(3 5)
“Éstos tienen dos cifras”	“Éstos tienen una cifra”

Figura 3. Ejemplos de la categoría clasificación representacional

Ordinal Representacional
El establecimiento de la correspondencia se basa en aspectos ordinales de la serie numérica (ver Figura 4).

N4, 7, 2	
(3 9)	
(2 8)	
“El ocho y el nueve. El dos y el tres… contando…”	
N2 , 6, 1	
(3 9)	(38 30)
(2 8)	(8 1)
“El dos va delante del tres y el ocho va delante del nueve”	“Después del treinta va el treinta y uno y después del treinta y ocho va el treinta y nueve”

Figura 4. Ejemplos de la categoría ordinal representacional

Aditivo Representacional
Establecimiento de una correspondencia aditiva (ver Figura 5).

N4, 9, 4	
(41 53)	(15 5)
(1 13)	(12 4)
"Le han sumado en este número cuatro [se refiere a las decenas de 13]. Aquí como sólo hay un uno le han añadido un cuatro [A cero decenas]"	"Del cuatro al cinco le han añadido una y del dos al cinco le han añadido tres"

Figura 5. Ejemplos de la categoría aditivo representacional

Los escolares del nivel N4, al no poder establecer una relación de relaciones, optaron por interpretar la situación con estrategias propias de niveles inferiores.

Conclusiones Didácticas

Para concluir presentamos algunas conclusiones de utilidad para la enseñanza que se extraen de los resultados obtenidos.

Desde que el escolar asimila un conocimiento instrumental, algorítmico o funcional, hasta que lo utiliza como instrumento de análisis para establecer relaciones aritméticas, transcurren más de dos años.

El hecho de que se sepa resolver un problema aritmético de sumar o multiplicar, se dominen los algoritmos de estas operaciones y se interprete correctamente más de un significado de las operaciones aritméticas, no es garantía de un desarrollo del pensamiento matemático de los escolares para poder iniciar en el aula el trabajo de temas como la proporcionalidad o un inicio al álgebra.

En educación primaria es necesaria una labor didáctica paralela, potenciando el establecimiento de relaciones desde los niveles representacionales hasta los aritméticos, con el objetivo de conseguir que la mayoría de los alumnos lleguen al nivel N6 en razonamiento inductivo numérico. Este nivel, según nuestros resultados, garantiza el establecimiento de relaciones de relaciones, necesarias para las generalizaciones algebraicas y un razonamiento deductivo.

Referencias

Andréiev, I. (1984). *Problemas lógicos del conocimiento científico.* Moscú: Editorial Progreso.

Borel, E. (1962). La definición en matemáticas. En F. Le Lionnais (Ed.), *Las grandes corrientes del pensamiento matemático* (pp. 25-35). Buenos Aires: Eudeba.

Boudot, M. (1978). *Lógica inductiva y probabilidad.* Madrid: Paraninfo.

Bruner, J., Goodnov, J. J. y Austin, G. (1958). *A study of thinking.* New York: Wiley.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa.* Madrid: Muralla.

Egan, D. E. y Greeno, J. G. (1974). Theory of rule induction: Knowledge acquired in concept learning, serial pattern learning, and problem solving. En L. W. Gregg (Ed.), *Knowledge and cognition* (pp. 43-103). Hillsdale: Erlbaum.

Fernández, C. y Ortiz, A. (2008). La evolución del pensamiento ordinal en escolares de 3 a 6 años. *Infancia y Aprendizaje, 31*(1), 107-130.

Frege, G. (1984). *Estudios sobre semántica.* Barcelona: Editorial Ariel.

Lakatos, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Madrid: Alianza Universidad.

Mill, J. S (1917). Sistema de lógica inductiva y deductiva (E. Ovejero y Maury, Trad.). Madrid: Daniel Jorro. (Trabajo original publicado en 1843)

Mokken, R. J. y Lewis, C. (1982). A nonparametric approach to the analysis of dichotomous item responses. *Applied Psychological Measurement*, *6*, 427-430.

Moya, T. (1999). Ajuste del modelo de Mokken con el programa MSP 4.0. Una aplicación con ítems de razonamiento inductivo numérico. *Revista Electrónica de Metodología Aplicada, 4*(2), 37-70.

Nidditch, P. H. (1978). *El desarrollo de la lógica matemática*. Madrid: Cátedra.

Ortiz, A. (1997). *Razonamiento inductivo numérico, un estudio en educación primaria.* Tesis doctoral no publicada. Granada: Universidad de Granada.

Ortiz, A. (2001). Entrevistas semiestructuradas. Una aplicación en educación primaria. En E. Lacasta y J. R. Pascual (Eds.), *Actas del II Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 33-55). Pamplona: Universidad Pública de Navarra.

Piaget, J. (1977). *Ensayo de lógica operatoria.* Buenos Aires: Editorial Guadalupe.

Piaget, J. (1980). *Psicología de la inteligencia.* Buenos Aires: Editorial Psique.

Poincaré, H. (1964). *El valor de la ciencia.* Madrid: Espasa-Calpe.

Pólya, G. (1978). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

Quine, W. (1984). *Desde un punto de vista lógico.* Barcelona: Ediciones Orbis.

Restle, F. y Greeno, J. G. (1970). *Introduction to Mathematical Psychology.* Reading Mass: Addison-Wesley.

Russell, B. (1988). *Los problemas de la Filosofía.* Barcelona: Editorial Labor.

Este trabajo fue presentado previamente en el XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Badajoz, 2008.